Г. И. Фалин, А. И. Фалин

Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ

Учебное пособие

3-е издание, переработанное и дополненное

МАКС ПРЕСС

МОСКВА – 2020

УДК 51(07)
ББК 22.141
Ф19

Фалин Геннадий Иванович, Фалин Анатолий Иванович

Ф19 Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ : учебное пособие / Г. И. Фалин, А. И. Фалин. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : МАКС Пресс, 2020. – 560 с. : ил.

ISBN 978-5-317-06275-0

Книга содержит более 2000 задач по алгебре, предлагавшихся на вступительных испытаниях по математике в МГУ имени М. В. Ломоносова, университетских олимпиадах для школьников старших классов и т.д. Задачи сгруппированы по типам. Ко всем задачам даны ответы. Для наиболее трудных и характерных задач приведены подробные решения. Книга может быть использована абитуриентами для повторения математики и ознакомления с типами задач.

Ключевые слова: вступительные экзамены, математика, алгебра, алгебраические выражения, уравнения, неравенства, системы уравнений, диофантовы уравнения, последовательности, функции, текстовые задачи, декартовы координаты

УДК 303.501
ББК 60.5

Falin Gennady, Falin Anatolii.

Algebra at mathematics admissions examinations to MSU : tutorial / G. Falin, A. Falin. – 3^{d} ed., revised and supplemented. – Moscow : MAKS Press, 2020. – 560 p.

ISBN 978-5-317-06275-0

The book contains more than 2000 problems on algebra from past exam papers of Lomonosov Moscow State University mathematics admissions tests, the university olympiads for high school students, etc. The problems are grouped according to subject area. Answers are given for all problems. Detailed solutions are presented for the most difficult and typical problems. The book can be used by prospective university students to revise for mathematics and familiarise themselves with the style of exam problems.

Key words: admissions test, mathematics, algebra, algebraic expressions, equations, inequalities, simultaneous equations, Diophantine equations, sequences, functions, word problems, vectors, Cartesian coordinates.

ISBN 978-5-317-06275-0

Оглавление

Предисловие

Данное учебное пособие предназначено для подготовки к вступительным экзаменам по математике в высшие учебные заведения с высокими математическими требованиями. Оно составлено на основе задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах по математике в МГУ им.М.В.Ломоносова, факультетских олимпиадах (которые фактически являются предварительными экзаменами), задач заочных туров и тестов, а также задач выпускных экзаменов подготовительного отделения. Анализ экзаменационных вариантов показывает, что в среднем задачи по алгебре составляют около 60%, по тригонометрии – около 20%, по геометрии – около 20% от общего числа задач. Таким образом, алгебра является важнейшей составной частью программы по математике для поступающих в МГУ.

В связи с повсеместным введением ЕГЭ в качестве основного способа поступления в ВУЗы необходимо иметь в виду, что наряду с ЕГЭ возможно поступление в МГУ (и другие ВУЗы) по результатам олимпиад, которые соответствуют традиционным строгим экзаменам. Фактически олимпиады и являются вступительными экзаменами. Роль олимпиад в процессе отбора абитуриентов, видимо, будет усиливаться. Кроме того, нужно иметь в виду, что ряд факультетов МГУ, включая и нематематические, имеет право в дополнение к ЕГЭ проводить и собственные экзамены (дополнительные вступительные испытания – ДВИ). Задачи университетских олимпиад и ДВИ требуют несоизмеримо более высокого уровня математической подготовки школьников, чем самые сложные задачи ЕГЭ. Поэтому наша книга будет полезна и тем школьникам, которые ориентируются на высокую оценку по ЕГЭ.

Задачи вступительных испытаний по математике ежегодно публикуются в “Справочнике для поступающих в Московский университет“, разнообразных сборниках, регулярно издаваемых механико-математическим факультетом, факультетом вычислительной математики и кибернетики, физическим факультетом, другими факультетами. В этих изданиях задачи письменных экзаменов публикуются в виде вариантов, реально предлагавшихся на вступительных испытаниях, а задачи устных экзаменов публикуются общим списком. В этом виде задачи полезны на заключительном этапе подготовки, когда абитуриент репетирует будущий экзамен. Подготовка к экзамену по математике в строгом смысле этого слова предполагает изучение материала в определённой последовательности. Эта последовательность определяется методическими взглядами преподавателя.

В последние годы появилось несколько сборников задач и пособий для поступающих в МГУ, составленных на базе реальных экзаменационных задач. Эти сборники отражают различные точки зрения авторов на методику подготовки абитуриентов. Наша книга относится к этой группе публикаций.

Задачи, включённые в сборник, сгруппированы таким образом, чтобы читатель мог составить представление об основных темах, затрагиваемых на экзаменах, а также основных методах решения задач. Ко всем задачам даны ответы.

Следует отметить, что школьная традиция допускает разные формы записи ответа, например, записи $x \neq 1$, $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, $R \setminus \{1\}$ рассматриваются как эквивалентные. На экзамене мы рекомендуем абитуриентам пользоваться теми обозначениями, к которым они привыкли. По этой причине мы сознательно не использовали единую систему при записи ответов.

Несколько слов об обозначениях. Символом R мы обозначаем множество всех действительных чисел, Q – всех рациональных чисел, Z – всех целых чисел, Z_+ – неотрицательных целых чисел, N – натуральных чисел.

Для наиболее характерных, трудных и теоретически важных задач каждого типа (номера этих задач отмечены знаком *) в последней главе приведены подробные решения. Задачи, для которых даны решения, составляют более 14% от общего числа задач, включённых в книгу.

При решении задач мы старались (насколько это возможно) показать общие принципы решения задач и применение общих математических понятий и методов (с тем, чтобы решение не появлялось как заяц из шляпы фокусника). Это особенно важно для нестандартных задач, которые часто базируются на понятиях и результатах, не входящих в Программу по математике для поступающих в МГУ. Конечно, задачи формулируются так, чтобы формально они соответствовали Программе. Решения, которые публикуются после экзаменов в "официальных" сборниках, также не выходят за рамки этой программы. Однако эти решения часто выглядят искусственно, в то время как введение относительно несложных понятий и методов позволяет дать очень естественное решение, показать взаимосвязь различных задач, повысить математическую культуру абитуриента. Из этих же соображений мы в ряде случаев приводили не самые короткие решения. Особое внимание мы уделяем задачам устных экзаменов по математике (они проводятся/проводились тремя факультетами: механико-математическим, ВМК и геологическим). Наряду с трудными, мы приводим решения и тех стандартных задач, которые часто встречаются на экзаменах, с тем, чтобы помочь абитуриентам, поступающим на нематематические факультеты, где требования к математической подготовке относительно не очень высокие.

Для каждой задачи мы указываем факультет, на котором предлагалась задача, год и месяц, когда проводился экзамен (если в упомянутом году экзамен на этот факультет проводился только в июле, то месяц не указывается), номер задачи в варианте. В последние годы для нескольких факультетов (близких по требованиям к математической подготовке абитуриентов) предлагается один и тот же вариант. Например, в 2006 году письменный экзамен по математике на биологическом факультете, факультете фундаментальной медицины, факультете биоинженерии и биоинформатики проводился по одному комплекту вариантов. В 2008 году то же было сделано для факультетов химического, наук о материалах, физико-химического, биологического, фундаментальной медицины, географического, психологии. В 2011 году предлагался один вариант на все факультеты. В таких случаях мы указываем только один, наиболее популярный среди абитуриентов, факультет. Для названий факультетов используются обычные университетские сокращения: мех-мат (механико-математический факультет), ВМК (факультет вычислительной математики и кибернетики), физ. (физический факультет) и т.д. Особо отметим следующие сокращения: Севастополь (Черноморский филиал МГУ), Ташкент (филиал МГУ в г.Ташкенте), ФНМ (факультет наук о материалах; ранее он назывался ВК-НМ – высший колледж наук о материалах), ФГУ (факультет государственного управления), ФГП (факультет глобальных процессов), ВШБ (высшая школа бизнеса), МШЭ (московская школа экономики), ФФМ (факультет фундаментальной медицины), “Покори Воробьёвы горы” – олимпиада МГУ, проводимая совместно с газетой “Московский комсомолец”), “Ломоносов” – олимпиада МГУ, которая проводится весной, начиная с 2005 г., ДВИ – дополнительное вступительное испытание по математике, которое проводится с 2011 года (по одному и тому же комплекту вариантов на все факультеты МГУ).

В настоящем издании добавлено большое число новых задач, существенно расширен раздел решений, изменена структура некоторых разделов, чтобы сделать книгу методически более логичной, а также исправлены замеченные опечатки.

Естественным дополнением данной книги является аналогичная книга авторов “Тригонометрия на вступительных экзаменах по математике в МГУ”, Москва, БИНОМ, 2007, а также пособие авторов “Математика для поступающих на факультеты нематематического профиля”, Москва, БИНОМ, 2010. Большое число дополнительных учебных материалов читатель найдёт на персональном учебно-методическом сайте проф.Г.И.Фалина: http://mech.math.msu.su/~falin.

Мы были бы благодарны читателям за советы и пожелания по поводу книги, которые просим направлять по адресу: Москва 119992, МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, проф. Г. И. Фалину или по электронной почте: falin@mech.math.msu.su.

д.ф.м.н., проф. Г.И.Фалин,
к.ф.м.н., доцент А.И.Фалин

19 ноября 2019 г.

Глава 1

Алгебраические преобразования

1.1 Арифметические вычисления

1.(ВМК, устный, 2006) Найти сумму цифр числа $10^{2006} - 2006$.

Ответ: 18 047.

2.(геолог., устный, 1999) Найти сумму цифр в десятичной записи числа $N = 10^{1999} - 1999$.

Ответ: 17 964.

3.(ДВИ, 2016, №1) Найдите $f\left(\frac{2}{7}\right)$, если $f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{3}{7}$.

Ответ: $\frac{29}{35}$.

4.(ДВИ, 2015, №1) Найдите $f(2)$, если $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{3}{x} + \frac{1}{10}$.

Ответ: 2.

5.(ДВИ, 2011, №1) Вычислите значение функции $x^2 - 0,625x - \frac{1}{8}$ в точке $x = \frac{4}{5}$.

Ответ: $\frac{3}{200}$.

6.(психолог., 1984, №1) Вычислить, не используя микрокалькулятор:

$$\left(\frac{3 \cdot \left(\frac{17}{90} - 0,125 : 1\frac{1}{8}\right) : 480}{\left(7 : 1,8 - 2\frac{1}{3} : 1,5\right) : 2\frac{2}{3}}\right)^{-1} : \left(\frac{679 \cdot 10^{-2}}{0,7} + 0,3\right)$$

Ответ: 180.

7*. (ВМК, устный, 2001)Сравнить два числа:
$\frac{7}{33}$ и $\frac{21212121}{99999999}$.

Ответ: эти числа равны.

8.(олимпиада "Ломоносов-2011", заочный тур, 7 кл., №5)Какое из чисел больше: $\dfrac{\overbrace{77\ldots7}^{2009}}{\underbrace{77\ldots77}_{2010}}$ или $\dfrac{\overbrace{33\ldots3}^{2010}}{\underbrace{33\ldots33}_{2011}}$?

Ответ: второе.

9*. (геолог., устный, 2004)Сравните числа $2,(004)$ и $2,005$.
Ответ: первое число меньше.
10.(геолог., устный, 2006) Сравните числа $2,(005)$ и $2,006$.
Ответ: первое число меньше.
11*. (ВМК, устный, 2001)Что больше, $0,7(621)$ или $\frac{141}{185}$?
Ответ: числа равны.
12*. (Севастополь, 2006, №4) Сравните числа $0,2(1) : 4 + 0,(2)$ и $0,275$.
Ответ: числа равны.
13.(ДВИ, 2018, №1) Какое из чисел $\frac{49}{18}$ и $\frac{79}{24}$ ближе к 3?
Ответ: первое.

1.2 Многочлены

14.(ДВИ, 2012, №1)Найдите многочлен второй степени, если известно, что его корни равны $-\frac{4}{7}$ и $\frac{5}{3}$, а свободный член равен -2.

Ответ: $2,1x^2 - 2,3x - 2$.

15*. (ВМК, устный, 2004)Найти сумму коэффициентов многочлена, который получится после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении

$$(1 - 3x + 3x^2)^{34} \cdot (1 + 5x - 5x^2)^{249}.$$

Ответ: 1.

16.(почвовед., 2005, июль, №5) Для каких значений параметра p отношение суммы коэффициентов многочлена $(px-7)^{18}$ к его свободному члену минимально?

Ответ: $p = 7$.

17*. (мех-мат, устный, 1963) Делится ли многочлен $x^5 - 3x^3 + 6x^2 - 2$ на $x + 4$ без остатка?

Ответ: нет.

18.(ВМК, устный, 2002)Найдите остаток от деления многочлена

$$x^{2002} + x^{2001} + x^{1002} + x^{1001} + x^2 + x + 1$$

на

$$x^3 - x.$$

Ответ: $3x^2 + 3x + 1$.

19.(мех-мат., 2003, март (тест перед олимпиадой), №1) Найти остаток от деления числа $n^5 + 2n^4 - 5n^2 - 7n + 2500$ на число $n - 2$ при $n = 2003$.

Ответ: 529.

20*. (Севастополь, 2003, май, №5) Найдите такие числа a и b, что при всех значениях x справедливо равенство

$$(x^2 + 5x + 6)(x + a) = (x^2 - 9)(x + b).$$

Ответ: $a = -3, b = 2$.

21.(эконом., 1965, №4) Найти все действительные значения p и q, при которых многочлен $x^4 + 1$ делится на многочлен $x^2 + px + q$.

Ответ: $p = \sqrt{2}, q = 1$ или $p = -\sqrt{2}, q = 1$.

22.(геолог., устный, 2004)При каких значениях a и b многочлен $x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b$ является квадратом некоторого квадратного трёхчлена?

Ответ: $a = \frac{7}{8}, b = \frac{49}{64}$.

23.(ВМК, устный, 2002)Определите три числа p, q и r такие, что равенство

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = (px^2 + qx + r)^2$$

выполняется для любого значения переменной x.

Ответ: (1) $p = 1, q = 2, r = -3$; (2) $p = -1, q = -2, r = 3$.

24*. (ВМК, устный, 2002+2006+2008)Можно ли подобрать числа a, b, c, A, B, C так, что равенство

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ax + by + cz)(Ax + By + Cz)$$

является тождеством (выполняется при любых независимых значениях x, y, z).

Ответ: нет.

25*. (мех-мат, 2002, Олимпиада, 8 кл., №1) Найти $\sqrt{n^2 + k^2 + n^2k^2}$, где $n = 2002$ и $k = 2003$.

Ответ: 4 010 007.

26*. (ВМК, устный, 2001+2005 + Московская математическая олимпиада, 1941, 1 тур, 7-8 кл.) Доказать, что число $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ является полным квадратом при любом натуральном n.

27.(почвовед., 1999, май, №4) Сумма десяти чисел равна нулю, и сумма их попарных произведений равна нулю. Чему равна сумма кубов этих чисел?

Ответ: 0.

28*. (эконом.(менеджмент), 2003, июль, №2) Про числа x и y известно, что $x + y = 12$, $x \cdot y = 6$. Вычислить значение выражения $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.

Ответ: 7.

29.(эконом., 2003, июль, №2) Про числа x и y известно, что $x + y = 18$, $x \cdot y = 3$. Вычислить значение выражения $\frac{1}{|x| \cdot x^2} + \frac{1}{y^3}$.

Ответ: 210.

30.(ВМК, устный, 2004)Пусть числа x, y и a, b таковы, что $x + y = a + b$ и $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. Выразить через числа a и b сумму $x^n + y^n$, где $n \geq 3$ – натуральное.

Ответ: $a^n + b^n$.

31*. (олимпиада "Ломоносов-2011", заочный тур, 11 кл., №9) В какую степень надо возвести корень x_0 уравнения $x^{11} + x^7 + x^3 = 1$, чтобы получить число $x_0^4 + x_0^3 - 1$?

Ответ: в 15.

1.3 Алгебраические дроби

32.(Севастополь, 2004, июль, №1) Сократите дробь

$$\frac{64x^3-27y^6}{9y^4-16x^2}.$$

Ответ: $-\frac{16x^2+12xy^2+9y^4}{4x+3y^2}$.

33*. (геолог, 1998, июль, №1) Найти численное значение выражения

$$\left(\frac{9a^2-16b^2}{4b+3a}-\frac{a^2b-3ab^2}{ab}\right)^2:\left(6ab-\frac{8a^3-b^3}{2a-b}\right).$$

Ответ: -1 (на множестве $a, b, 4b+3a, 2a-b\neq 0$).

34.(Ташкент, 2008, №2) Вычислить значение выражения

$$\frac{(3a-1)(3a-9)}{2(a^2-9)}-\frac{2a-9}{a+3}.$$

Ответ: $\frac{5}{2}$ (на множестве $a\neq\pm 3$).

35.(олимпиада "Ломоносов-2005", №1) Вычислить

$$\frac{2xy(x^3-y^3)}{x^2+xy+y^2}-\frac{(x-y)(x^4-y^4)}{x^2-y^2}$$

при $x=-3,\underbrace{1\ldots1}_{43}2$, $y=1,\underbrace{8\ldots88}_{44}$.

Ответ: $(y-x)^3=125$.

36.(олимпиада "Ломоносов-2011", заочный тур, 8 кл., №6)Вычислите

$$\frac{2ab(a^3-b^3)}{a^2+ab+b^2}-\frac{(a-b)(a^4-b^4)}{a^2-b^2}$$

при $a=-1,\underbrace{5\ldots5}_{2010}6$, $b=5,\underbrace{4\ldots44}_{2011}$.

Ответ: $(b-a)^3=343$.

37.(ВМК, 2009, №1) Вычислить значение выражения

$$\frac{27x^3-y^3}{9x^2+3xy+y^2}+\sqrt{y^2-2xy+x^2}-2x$$

при $x=1,\underbrace{33\ldots3}_{10}2$, $y=1,\underbrace{33\ldots3}_{10}1$.

Ответ: $2(x-y)=2\cdot10^{-11}$.

38.(Севастополь, 2009, №2) Найдите числа C и F, которые при всех x, отличных от -3 и 2, удовлетворяют равенству

$$\frac{5x}{x^2+x-6}=\frac{C}{x-2}-\frac{F}{x+3}.$$

Ответ: $C = 2$, $F = -3$.

39.(ВМК, устный, 2002)Разложить $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ на два множителя, сумма которых равна $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$. Доказать единственность этого разложения.

Ответ: $\frac{a+b}{a} \cdot \frac{a-b}{b}$.

40.(ВМК, устный, 2005+2006)Три числа a, b и c удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}.$$

Доказать, что какие-либо два из них равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

41.(ВМК, устный, 2005)Для каждой допустимой тройки значений $(a; b; c)$ сравнить значения выражений

$$\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca}$$

и

$$\frac{a-b}{1+ab} \cdot \frac{b-c}{1+bc} \cdot \frac{c-a}{1+ca}.$$

Ответ: выражения равны.

42*. (ВМК, устный, 2006) Числа x, y, z таковы, что $xyz = 1$. Найти

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx},$$

если известно, что это выражение определено.

Ответ: 1.

1.4 Доказательство неравенств

1.4.1 Среднее арифметическое и среднее геометрическое

43*. (ВМК, устный, 2005+2006)Доказать, что если $b \geq -1$, $b \neq 0$, то имеет место неравенство

$$\frac{4b^2+b+1}{4|b|} \geq \sqrt{b+1}.$$

44.(ВМК, устный, 2002)Сравнить два числа $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$ и $2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$ (a и b – неотрицательные числа, $a \neq b$).

Ответ: первое число больше.

45.(ВМК, устный, 1998)Доказать, что для неотрицательных чисел a, b имеет место неравенство

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \geq 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}.$$

46.(ВМК, 2007, устный) Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, то

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}}.$$

47.(ВМК, устный, 1999 + 2000 + 2004 + Московская математическая олимпиада, 1963, 1 тур, 9 кл.)Доказать, что для любых трех положительных чисел x, y и z выполнено неравенство

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

48.(ВМК, устный, 2000+2002+2003)Доказать справедливость неравенства

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leq \frac{3}{2}$$

для любых действительных чисел a, b и c.

49.(ВМК, устный, 1994)Доказать, что для любых четырех действительных чисел a, b, c, d выполняется неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd.$$

50.(ВМК, устный, 1994)Известно, что 5 положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_5$ связаны соотношением $a_1 a_2 \cdots a_5 = 1$. Доказать, что в этом случае справедливо неравенство

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_5) \geq 32.$$

51.(ВМК, устный, 2003+2006)Доказать, что для любых положительных a, b, c не могут одновременно выполняться неравенства:

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, \ b(1-c) > \frac{1}{4}, \ c(1-a) > \frac{1}{4}.$$

52.(ВМК, устный, 1996)Для положительных чисел a, b, c доказать неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

53.(психолог., 1974, №4) Доказать, что при всех a и b имеет место неравенство

$$\frac{5^{a+1}}{5^{2a} + 25} \leq 13 - 5b + \frac{1}{2}b^2,$$

и определить, при каких a и b достигается равенство.

1.4.2 Среднее гармоническое

54*. (ВМК, устный, 1990+1994+1996) Доказать, что для любых 3 положительных чисел a, b, c выполняется неравенство

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

55.(ВМК, устный, 2003)Доказать, что если положительные числа a, b и c таковы, что $a+b+c=1$, то $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$.

56.(ВМК, устный, 1994) Доказать, что для любых 4 положительных чисел a, b, c, d выполняется неравенство

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq 16.$$

57.(ВМК, устный, 2004)Пусть a, b, c – положительные числа и $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$. Доказать, что

$$\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}\geq 4.$$

1.4.3 Среднее степенное

58*. (мех-мат, 1958) Доказать, что если $x^2+y^2=1$, то справедливо неравенство

$$-\sqrt{2}\leq x+y\leq\sqrt{2}.$$

59*. (психолог., 1987, №6) Доказать, что все решения неравенства

$$\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x^2-1}>2$$

удовлетворяют неравенству

$$x+2\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x^4-2x^2+1}>1+2\sqrt[3]{x^2-1}.$$

60.(ВМК, устный, 1996)Сумма четырех чисел равна 2. Доказать, что сумма их квадратов не меньше 1.

61.(ВМК, устный, 1999)Пусть $a+b=2$. Доказать, что $a^3+b^3\geq 2$.

62.(ВМК, устный, 2003)Положительные числа a и b таковы, что $a+b\geq 2$. Доказать, что $a^3+b^3\geq 2$.

63.(соц., 2004, июль, №5) Три числа, являющиеся длинами ребер прямоугольного параллелепипеда с диагональю 6, образуют арифметическую прогрессию. Кубы этих чисел тоже образуют арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

Ответ: $2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$.

64.(ВМК, устный, 1998)Доказать, что $a^4+b^4\geq\frac{1}{8}$, если $a+b\geq 1$.

65.(мех-мат, 1962) Пусть a и b – произвольные числа, причем $a+b=2$. Доказать, что $a^4+b^4\geq 2$.

66.(ВМК, устный, 2000)Доказать, что для неотрицательных чисел a, b и c имеет место неравенство

$$\frac{a+b+c}{3}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

67.(ВМК, устный, 2004)Пусть a и b –положительные числа. Доказать, что

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}\leq\frac{a^6+b^6}{2}.$$

68.(ВМК, устный, 1998)Доказать, что при $a \geq 1$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}.$$

1.4.4 Неравенство Коши-Буняковского

69*. (ВМК, устный, 2001)Положительные числа a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 удовлетворяют неравенствам $b_1^2 \leq 4a_1c_1$, $b_2^2 \leq 4a_2c_2$. Докажите, что

$$4(a_1 + a_2 + 7)(c_1 + c_2 + 2) > (b_1 + b_2 + 1)^2.$$

70.(физ., 1958) Доказать, что если $a > 0$ и $b > 0$, то для любых x и y справедливо неравенство

$$a \cdot 2^x + b \cdot 3^y + 1 \leq \sqrt{4^x + 9^y + 1} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + 1}$$

71.(ВМК, устный, 1992) Доказать, что если $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, то $|ac - bd| \leq 1$.

72*. (ВМК, устный, 2006) Пусть a, b и c – положительные числа. Доказать, что

$$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geq a + b + c.$$

73*. (ВМК, устный, 2008, май) Пусть $a > c > 0$, $b > c$. Доказать, что

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}.$$

74*. (ВМК, устный, 2003+2007) Три положительных числа a, b и c таковы, что $ab + ac + bc \geq 12$. Доказать, что $a + b + c \geq 6$.

1.4.5 Неравенство треугольника

75*. (ВМК, устный, 2005)Доказать, что при любых x, y, z выполняется неравенство

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}.$$

76.(ВМК, устный, 1996)Доказать, что для любых положительных чисел a, b и c

$$\sqrt{a^2 + c^2 - ac} \geq \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{b^2 + c^2 - \sqrt{3}bc}.$$

77.(ВМК, устный, 1996)Доказать, что для любых положительных чисел a, b и c

$$\sqrt{a^2 + b^2 + ab} - \sqrt{a^2 + c^2} \leq \sqrt{b^2 + c^2 - \sqrt{3}bc}.$$

1.4.6 Неравенство Бернулли

78*. (ВМК, устный, 2000+2003)Доказать, что

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5$$

при условии, что $a+b+c=1$, $4a+1\geq 0$, $4b+1\geq 0$ и $4c+1\geq 0$.

79.(ВМК, устный, 1997)Доказать, что

$$\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}\leq 4,$$

если $x+y=1$, $x\geq -\frac{1}{4}$, $y\geq -\frac{1}{4}$.

1.4.7 Свойства квадратного трёхчлена

80*. (психолог., 1969, №5) Доказать, что

$$x^2+19y^2+6z^2-8xy-4xz+12yz>0,$$

если $x^2+y^2+z^2>0$.

81.(ВМК, устный, 2000+2001+2002)Доказать, что если x, y, z – действительные числа, удовлетворяющие равенствам $x+y+z=5$ и $xy+xz+yz=8$, то $1\leq x\leq\frac{7}{3}$, $1\leq y\leq\frac{7}{3}$, $1\leq z\leq\frac{7}{3}$.

82.(ВМК, устный, 2003)Пусть $a>b>c$. Доказать, что

$$a^2b+b^2c+c^2a>a^2c+c^2b+b^2a.$$

83.(ВМК, устный, 1999)Сравнить числа a и b, если известно, что $5(a-1)=a^2+b$.

Ответ: $a>b$.

84.(геолог., устный, 2008, июль) Известно, что числа a, b связаны равенством $b-a^2=10-5a$. Какое из этих чисел больше?

Ответ: $b>a$.

1.4.8 Прочее

85.(ВМК, 2007, устный) Доказать, что если $a\geq 0$, то $a^3+2\geq a^2+2\sqrt{a}$.

86.(ВМК, устный, 2002)Доказать, что если $x_1\geq x_2\geq x_3\geq x_4\geq x_5>0$, то

$$x_1^2-x_2^2+x_3^2-x_4^2+x_5^2\geq(x_1-x_2+x_3-x_4+x_5)^2.$$

87.(ВМК, устный, 1990) Доказать, что для всех x верно неравенство $x^8-x^5+x^2-x+1>0$.

88.(мех-мат, 1963, №4) Доказать, что при любых положительных a и b и любом натуральном n справедливо неравенство

$$(a+b)^n<2^n(a^n+b^n).$$

89.(ВМК, устный, 1994)Известно, что три положительных числа a, b, c связаны соотношением $a+b=c$. Доказать, что

$$a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}>c^{\frac{3}{4}}.$$

1.5 Радикалы

90.(ДВИ, 2012, август, №1) Запишите одной обыкновенной дробью число:

$$\frac{\sqrt{8}\left(\frac{4}{7}-\frac{2}{5}\right)}{\sqrt{18}\left(\frac{12}{7}+\frac{6}{5}\right)}.$$

Ответ: $\frac{2}{51}$.

91.(геолог., 1994, май, №2) Упростить до численного значения выражение

$$\frac{7\sqrt{3}\sqrt{a}-7\sqrt{5}\sqrt{b}}{6\sqrt{3}\sqrt{a}+6\sqrt{5}\sqrt{b}}:\frac{3a-5b}{9a+15b+6\sqrt{15ab}}.$$

Ответ: $\frac{7}{2}$.

92.(биолог. (почвоведение), 1971, №2) Упростить выражение

$$(2a-b)^2\cdot\left(\frac{a^{-1}b^{-1}}{a^{-1}+2\sqrt{2}a^{-1/2}b^{-1/2}+2b^{-1}}+\frac{a^{-1}b^{-1}}{a^{-1}-2\sqrt{2}a^{-1/2}b^{-1/2}+2b^{-1}}\right).$$

Ответ: $2(b+2a)$.

93.(геолог. (общая геология), 1970, №1) Упростить выражение

$$\frac{\left(b^{5/6}a^{-1/6}+b^{1/3}a^{1/3}\right)^2+\left(b^{5/6}a^{-1/6}-b^{1/3}a^{1/3}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{a^{-1}}-\sqrt[3]{b^{-1}}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab}\right)}-2a+\frac{4a^2}{a-b}.$$

Ответ: $2(a+b)$.

94*. (почвовед., 1998, май, №1) Упростить выражение

$$\left(\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{4a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right).$$

Ответ: $2\sqrt{2}$.

95.(ИСАА, 1999, июль, №2) Упростить выражение при $a>b>0$:

$$A=\frac{3ab-b\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}-3b^2}{\sqrt{2^{-2}\cdot(ab^{-1}+a^{-1}b)-0,5}}-2ab-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}.$$

Ответ: $A=0$.

96.(геолог., 2007, устный) Известно, что числа a, b, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ рациональны. Докажите, что $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ – рациональны.

97.(ВМК, 2007, устный) Найти все рациональные значения x, при которых выражение $\sqrt{x^2+x+1}$ является рациональным числом.

Ответ: $x=\frac{r^2-1}{1-2r}$, где r – произвольное рациональное число, не равное $\frac{1}{2}$.

98.(почвовед., 1996, июль, №1) Докажите, что число

$$\left(\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}\right)^2+7\right)\cdot\left(\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27}\right)^2-7\right)$$

целое и найдите это число.

Ответ: 47.

99.(почвовед., 2002, июль, №3) Пусть $a = \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{50}$. Доказать, что число $a^3 - 30a$ целое и найти его.

Ответ: это число равно 70.

100.(почвовед., 2004, май, №2) Пусть $a = \sqrt{10} - \sqrt{11}$. Доказать, что число $a^2 + \frac{1}{a^2}$ является целым.

Ответ: это число равно 42.

101.(геолог., 2010, №1) Докажите, что при $a = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ число $6a - a^3$ – целое и найдите это число.

Ответ: -6.

102.(геолог., 1994, №2) Упростить до целого числа выражение

$$2\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}} - \frac{\sqrt{7+\sqrt{5}}}{\sqrt{7-\sqrt{5}}} \cdot 2\sqrt{11}.$$

Ответ: -4.

103.(мех-мат, 1978, №1) Разность

$$\sqrt{\left|40\sqrt{2} - 57\right|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}.$$

является целым числом. Найдите это целое число.

Ответ: -10.

104*. (мех-мат, устный, 1996) Является ли рациональным число

$$\sqrt{3 - \sqrt{4 + \sqrt{12}}} + \sqrt{3 + \sqrt{4 - \sqrt{12}}}?$$

Ответ: нет; это число равно $\sqrt{6}$.

105.(ДВИ, 2014, №1) Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}\left(8 + 4\sqrt{3}\right)$.

Ответ: 4.

106.(ДВИ, 2014, №1) Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$.

Ответ: 1.

107.(ВМК, устный, 1995)Доказать тождество

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

Указание: $20 \pm 14\sqrt{2} = (2 \pm \sqrt{2})^3$.

108.(ВМК, устный, 2000)Является ли число

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

целым?

Ответ: да; это число равно 4.

109.(ВМК, устный, 1995)Доказать тождество

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1.$$

Указание: $\sqrt{5}\pm 2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\pm\frac{1}{2}\right)^3$.

110.(Ташкент, 2007, №1) Сравните числа $\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)^2$ и $14+\sqrt{200}$.

Ответ: первое число больше второго.

111.(ВМК, устный, 1999)Сравнить $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ и 1.

Ответ: числа равны.

112.(ВМК, 1992, июль, №1) Какое из двух чисел $\sqrt[3]{\frac{1990}{1991}}$ или $\sqrt[3]{\frac{1991}{1992}}$ больше?

Ответ: второе.

113.(геолог., устный, 2004)Сравните числа $\sqrt{2002}+\sqrt{2004}$ и $2\sqrt{2003}$.

Ответ: первое число меньше.

114.(геолог., устный, 2005)Сравните числа $\sqrt{2006}+\sqrt{2004}$ и $2\sqrt{2005}$.

Ответ: первое число меньше.

115.(геолог., устный, 2000+2008)Сравнить по величине числа

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}} \text{ и } \sqrt{6}.$$

Ответ: числа равны.

116.(геолог., устный, 2004)Сравните числа $\frac{12}{25}$ и $\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3}}$.

Ответ: первое число меньше.

117.(ВМК, устный, 1994) Какое из двух чисел больше $\sqrt[5]{5}$ или $\sqrt[4]{4}$?

Ответ: второе.

118.(эконом, 1988, №1) Какое из двух чисел больше $\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}$ или 3?

Ответ: первое.

119.(ВМК, устный, 1996)Что больше

$\sqrt{10+\sqrt{56}+\sqrt{28}+\sqrt{8}}$ или $\sqrt{7}+\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}$?

Ответ: второе число больше.

120.(ВМК, устный, 1996)Что больше

$\sqrt{8+\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{8}}$ или $\sqrt{5}+\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}$?

Ответ: второе число больше.

121.(ВМК, устный, 2005)Упорядочить по величине три числа: $\sqrt[11]{7}+\sqrt[11]{13}$, $\sqrt[11]{8}+\sqrt[11]{12}$ и $\sqrt[11]{5}+\sqrt[11]{15}$.

Ответ: $\sqrt[11]{5}+\sqrt[11]{15}<\sqrt[11]{7}+\sqrt[11]{13}<\sqrt[11]{8}+\sqrt[11]{12}$.

122.(ВМК, устный, 2005) Докажите, что в представлении в виде десятичной дроби числа $\left(\sqrt{26}+5\right)^{99}$ первые 98 цифр справа после запятой равны 0.

1.6 Степени

123.(Севастополь, 2005, №1) Сравните числа

$$10^5 \text{ и } \left(-\frac{1}{16}\right)^{-2} \cdot 2^{-3} \cdot 5^5.$$

Ответ: числа равны.

124.(олимпиада "Ломоносов-2012", заочный тур, 8 кл., №2)Какое из чисел больше: $2005^2 + 1711^2$ или $1961^2 + 1755^2$? Выполните сравнение наиболее рациональным способом.

Ответ: первое.

125.(ВМК, устный, 2002+2006)Сравнить 18^{20} и 63^{13}.

Ответ: первое число больше.

126*. (ВМК, устный, 2004+2006+2008)Сравнить два числа: 31^{11} и 17^{14}.

Ответ: второе число больше.

1.7 Логарифмы

127.(Олимпиада "Ломоносов-2008", №2)Какое наибольшее число раз можно последовательно взять логарифм по основанию 3 от числа 27^{81} (первый раз логарифм берётся от этого числа, а затем всякий раз – от числа, полученного в предыдущий раз)?

Ответ: 5.

128.(олимпиада "Ломоносов-2006", №1) Вычислить

$$\log_4 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{16}}}}_{40}.$$

Ответ: -19.

129.(ДВИ, 2013, №2) Вычислите $\log_8 10 \cdot \log_{10} 4$.

Ответ: $2/3$.

130.(ДВИ, 2012, №2) Вычислите $\log_2 \log_{81} \frac{417}{139}$.

Ответ: -2.

131.(ВМК, устный, 2002)Вычислить

$$\log_{15} 20 \cdot \log_{16} 15 \cdot \log_{17} 16 \cdot \log_{18} 17 \cdot \log_{19} 18 \cdot \log_{20} 19.$$

Ответ: 1.

132.(ВМК, устный, 2003)Вычислить

$$\log_{14} 19 \cdot \log_{15} 14 \cdot \log_{16} 15 \cdot \log_{17} 16 \cdot \log_{18} 17 \cdot \log_{19} 18.$$

Ответ: 1.

133.(договорные программы, 2008, №7) Что больше:

$$3 \log_8 9 \cdot \log_{10} 11 \cdot \cdots \cdot \log_{30} 31$$

или

$$5\log_{32} 31 \cdot \log_{30} 29 \cdot \dots \cdot \log_{10} 9?$$

Ответ: числа равны.

134.(Севастополь, 2006, №2) Вычислите без таблиц $\left(2^{\log_3 5}\right)^{\log_4 9}$.

Ответ: 5.

135.(геолог., устный, 2004)Вычислите значение

$$3^{\dfrac{\lg\lg 2}{\lg 3}}.$$

Ответ: $\lg 2$.

136.(геолог., устный, 2005) Вычислите значение

$$2005^{\dfrac{\lg\log_2 64}{\lg 2005}}.$$

Ответ: 6.

137*. (мех-мат., 2003, март (тест перед олимпиадой), №3) Вычислить $7^{1-\sqrt[5]{\log_7^3 2}} \cdot 2^{2+\sqrt[5]{\log_2^2 7}}$.

Ответ: 28.

138.(фил., 1988, №1) Вычислить

$$\frac{\log_3 24}{\log_{72} 3} - \frac{\log_3 216}{\log_8 3}.$$

Ответ: 2.

139*. (эконом., 1989, №2) Вычислить

$$\frac{\log_5 30}{\log_{30} 5} - \frac{\log_5 150}{\log_6 5}.$$

Ответ: 1.

140.(ВМК, устный, 1996)Вычислить

$$\frac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \frac{\log_2 9}{\log_{72} 2}.$$

Ответ: 2.

141.(географ., 1973, №2) Упростить выражение

$$5^{\log_{1/5}\left(\frac{1}{2}\right)} + \log_{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} + \log_{1/2} \frac{1}{10+2\sqrt{21}}.$$

Ответ: 6

142.(ВМК, устный, 2000+2002)Вычислить

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right) \cdot \log_{\sqrt{6}+1}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \log_{2\sqrt{6}+7}\left(2\sqrt{6}+5\right).$$

Ответ: -1.

143.(ВМК, 1984, №1) Известно, что $\log_a b = 7$. Найти $\log_b(a^2b)$.

Ответ: $\frac{9}{7}$.

144.(физ., 1982, №3) Известно, что $\log_b a = \sqrt{3}$. Вычислить

$$\log_{\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)}\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right),$$

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

145.(биолог., 1994, №2) Вычислить

$$\log_{b^3\cdot\sqrt[7]{a^5}}\left(\frac{\sqrt[7]{a}}{b\sqrt{b}}\right),$$

если $\log_b a = \sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}-21}{42+10\sqrt{3}}$.

146.(Севастополь, 2003, июль, №4) Найдите $\log_{54} 84$, если $\log_7 12 = a$, $\log_{12} 24 = b$.

Ответ: $\frac{a+1}{a(8-5b)}$.

147.(мех-мат, 1992, №3) Даны числа p и q такие, что $p = \log_z y$, $q = \log_x y$. Найти число

$$\log_{\left(\frac{xz}{y^2}\right)^3}\sqrt{xyz}.$$

Ответ: $\frac{p+q+pq}{6(p+q-2pq)}$, если p и q не равны нулю (p и q могут быть равны 0 только одновременно); $\frac{1}{6}$, если $p = q = 0$.

148.(ВМК, устный, 2005)Доказать, что если числа

$$\log_k x, \log_m x, \log_n x, x \neq 1,$$

образуют арифметическую прогрессию, то $n^2 = (kn)^{\log_k m}$.

149.(ВМК, устный, 2001) Известно, что $a^2 + b^2 = 7ab$. Доказать, что

$$\ln\frac{a+b}{3} = \frac{\ln a + \ln b}{2}$$

(здесь $a > 0$ и $b > 0$).

150.(ВМК, устный, 1991) Выразить $\lg 2$ и $\lg 5$ через произведение $a = \lg 2 \cdot \lg 5$.

Ответ: $\lg 2 = \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$; $\lg 5 = \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$.

151.(геолог., устный, 2005) Сравните числа $2005^{\frac{\lg\lg 2}{\lg 2005}}$ и $\frac{3}{2}$.

Ответ: первое число меньше.

152.(ВМК, 1982, №1) Какое из двух чисел больше, $\sqrt{8}$ или $2^{2\log_2 5+\log_{1/2} 9}$.

Ответ: первое.

153.(биолог., 1994, №2) Какое из двух чисел больше,

$$\sqrt{11} \text{ или } 9^{\frac{1}{2}\log_3\left(1+\frac{1}{9}\right)+\frac{3}{2}\log_8 2}?$$

Ответ обосновать.

Ответ: второе.

154.(геолог. (геофизика), 1989, №1) Определить, какое из двух чисел больше, $2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}$ или $3\log_8 26$. Ответ должен быть обоснован.

Ответ: второе.

155.(ВМК, устный, 2004) Сравнить числа $3^{\sqrt{\log_3 5}}$ и $5^{\sqrt{\log_5 3}}$.

Ответ: числа равны.

156.(ВМК, 2007, устный) Сравнить два числа: $2^{\sqrt{\log_2 11}}$ и $11^{\sqrt{\log_{11} 2}}$.

Ответ: числа равны.

157.(геолог. (общая геология), 1985, №1) Определить, какое из двух чисел больше, $2^{\log_3 5} - 0,1$ или $5^{\log_3 2}$. Результат обосновать.

Ответ: второе.

158.(геолог. (геофизика), 1985, №1) Определить, какое из двух чисел больше, $3^{\log_2 5} + 10^{\frac{1}{3}\lg 2}$ или $5^{\log_2 3} + \sqrt[10]{10}$. Результат обосновать.

Ответ: первое.

159.(ВМК, устный, 1999) Что больше: $9^{\log_2 5} + 5^{\log_3 2}$ или $4^{\log_3 5} + 5^{\log_2 3}$?

Ответ: первое число больше.

160.(ВМК, 2007, устный) Сравнить два числа: $\log_{\log_4 3}\left(\frac{3}{4}\right)$ и $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{24}}$.

Ответ: первое число больше второго.

161.(ВМК, 2007, устный) Сравнить два числа: $\log_{\log_3 10} 32$ и $\frac{\sqrt{10}+4\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: первое число меньше второго.

162.(эконом., 1990, №1) Имеют ли общие точки область значений функции $f(x) = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}x - 2x^2$ и промежуток $[\log_3 15; +\infty)$? Ответ обосновать.

Ответ: имеют.

163.(психолог., 1994, №1) Верно ли неравенство

$$3 \cdot \log_2 5 < \sqrt{9\log_2 5 + 28}$$

(таблицами и калькулятором не пользоваться)?

Ответ: да.

164.(ВМК, устный, 1997)Что больше: $\left(\log_3 \frac{9}{5}\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\log_3 5 + \frac{1}{2}}$ или $\frac{1}{2}\sqrt{18}$?

Ответ: первое число больше.

165.(ВМК, устный, 1997)Что больше: $\sqrt{5 - \log_2 9} + \left(\log_2 \frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ или $\sqrt{6 - \log_2 3}$?

Ответ: первое число больше.

166.(ВМК, устный, 2002 + геолог., устный, 2004)Сравните два числа $\log_5 3$ и $\frac{2}{3}$.

Ответ: $\log_5 3 > \frac{2}{3}$.

167.(геолог., устный, 2004)Сравните числа $\log_3 5$ и $\frac{3}{2}$.

Ответ: $\log_3 5 < \frac{3}{2}$.

168.(ВМК, устный, 1996)Сравнить два числа $\log_2 3$ и $\sqrt{2}$.

Ответ: $\log_2 3 > \sqrt{2}$.

169.(фил., 1969, №6) Доказать, не пользуясь таблицами, что $\log_2 3 > \log_3 5$.

170.(психолог., 1969, №3) Доказать, не пользуясь десятичными дробями, что

$$\log_2 5 > \log_5 32.$$

171.(ВМК, устный, 2008, июль) Что больше: $\frac{2}{\log_2 \pi} + \log_\pi 25$ или 4?

Ответ: первое число больше.

172.(ВМК, устный, 1994+1999)Определить, какое из чисел больше: $\log_4 9$ или $\log_9 25$.

Ответ: первое.

173.(ВМК, устный, 1994)Определить, какое из чисел больше: $\log_3 72$ или $\log_2 20$.

Ответ: второе.

174.(ВМК, устный, 2000+2002+2003)Что больше: $\log_{\log_3 2} 0,5$ или $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{4}$?

Ответ: первое число больше.

175.(ВМК, устный, 1996+1999)Имеет ли смысл выражение

$$\sqrt{\log_2 3 - \log_5 11}.$$

Ответ: да.

176.(ВМК, устный, 2001)Какое из чисел больше: $\log_{135} 675$ или $\log_{45} 75$.

Ответ: первое.

177*. (ВМК, устный, 2000) Что больше, $\lg 7 \cdot \lg 13$ или 1?

Ответ: 1 больше.

178.(ВМК, устный, 2003) Что больше, $\log_{18} 19$ или $\log_{19} 20$?

Ответ: $\log_{18} 19$.

179.(геолог., устный, 2004)Сравните числа $\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_3 2}$ и 2.

Ответ: первое число больше.

180.(ВМК, устный, 2001)Сравнить два числа $\log_3 10 + 4\lg 3$ и 4.

Ответ: $\log_3 10 + 4\lg 3 > 4$.

181.(ВМК, устный, 1994)Сколько цифр содержит десятичная запись числа 2^{500}, если известно, что $0.3010 < \lg 2 < 0.3011$?

Ответ: 151.

182.(ВМК, устный, 2002+2006)Сколько цифр в числе 5^{800} (в десятичной системе)?

Ответ: 560 цифр; нужно доказать, что $10^{559} \leq 5^{800} < 10^{560}$.

Глава 2

Уравнения

2.1 Целые рациональные (алгебраические) уравнения

2.1.1 Линейные уравнения

183.(Ташкент, 2006, №1)Решите уравнение

$$\frac{4x-9}{5}+3=\frac{5x+9}{6}.$$

Ответ: $x=-9$.

184*. (ВМК, 2004, июль, №1) Решить уравнение

$$\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}-3\cos\left(\operatorname{arctg}(2\sqrt{2})\right)+\frac{2}{\sqrt{3}+1}\right)\cdot x=2^{\log_{\sqrt{2}}3}-9.$$

Ответ: R.

2.1.2 Квадратные уравнения

185.(геолог.+МШЭ, 2008, №1)Найдите целые корни уравнения

$$x^2-(1+\sqrt{3})x+2(\sqrt{3}-1)=0.$$

Ответ: $x=2$.

186.(геолог., 1997, №1) Сколько решений имеет уравнение

$$\sqrt{6}(x^2+2)+2x\sqrt{5}=\sqrt[4]{35}(x^2-2)+2x\sqrt{7}?$$

Ответ: 1.

187.(ВМК, 1987, №2) Существуют ли действительные значения a, для которых

$$a^2-4a+\sqrt{3}=-a\sqrt{2}?$$

Если такие значения существуют, то сколько их?

Ответ: нет, не существуют.

188.(Ташкент, 2008, №1) Выяснить, что больше: меньший корень уравнения $x(2x-3)=9$ или число $-\sqrt{3}$.

Ответ: $x_{\min} = -\frac{3}{2} > -\sqrt{3}$.

189.(олимпиада "Ломоносов-2006", №2) Что больше: $\operatorname{tg}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ или меньший корень квадратного трехчлена $11x^2-17x-13$?

Ответ: корень трехчлена больше.

190*. (ВМК, устный, 1996)Найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению

$$2x^2+13y^2-10xy-2x+4y+1=0.$$

Ответ: $(3;1)$.

191.(ВМК, устный, 1996)Найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющие соотношению

$$5x^2+5y^2+8xy-12x-6y+9=0.$$

Ответ: $(2;-1)$.

192.(ВМК, устный, 2004)Найти все x, y, удовлетворяющие уравнению

$$5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0.$$

Ответ: $x=1; y=-1$.

193*. (ВМК, устный, 2008, май) Доказать, что уравнение

$$(x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-b)(x-c)=0$$

имеет корни при любых значениях a, b и c.

2.1.3 Уравнения высших степеней

Метод разложения на множители

Теорема Безу

194*. (Севастополь, 2005, №4) Решите уравнение

$$x^3+4x^2=5.$$

Ответ: $\left\{1; \frac{-5+\sqrt{5}}{2}; \frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

195.(ВМК, устный, 2003)При каких натуральных n уравнение

$$2x^4-x^3+nx^2-1=0$$

имеет рациональные корни.

Ответ: $3; 4$.

196.(ВМК, устный, 1998)Доказать, что уравнение $x^3-px+1=0$, где $p>2$ – целое, не имеет рациональных корней.

Группировка

197*. (ВМК, устный, 2000+2005)Решить уравнение

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999.$$

Ответ: $x_1 = -9; x_2 = 11$.

198.(ВМК, устный, 2001)Решить уравнение

$$x^3 - (\sqrt{2} + 1)x^2 + 2 = 0.$$

Ответ: $x_1 = \sqrt{2}; x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$.

Понижение степени за счёт извлечения корня

199*. (почвовед., 2005, июль, №1) Решить уравнение

$$(6x - 15)^7 = (x - 1)^{14}.$$

Ответ: $x = 4$.

200.(ВМК, устный, 2003) Решить уравнение

$$x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$.

201.(ВМК, устный, 2002) Решить уравнение

$$8x^3 + 36x^2 + 54x + 33 = 0.$$

Ответ: $x = -\frac{3+\sqrt[3]{6}}{2}$.

202.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2012", очный тур)Найдите количество общих точек графиков функций $y = x^3+6x$ и $y = 12x^2+1$, а также абсциссы этих точек.

Ответ: графики имеют одну общую точку с абсциссой $x = \frac{1}{2-\sqrt[3]{7}}$.

Метод новой неизвестной

203*. (ВМК, устный, 2007) Решите уравнение

$$x^4 + (x + 1)^4 = 3.$$

Ответ: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}$.

204*. (хим., 2000, заочный тур, №2) Решить уравнение:

$$(x^2 + 3x - 2)^2 + 3 \cdot (x^2 + 3x - 2) - 2 = x.$$

Ответ: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$, $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{2}$.

Возвратные уравнения

205*. (олимпиада "Ломоносов-2012", заочный тур, 9 кл., №8)Решите уравнение $4(x^3 - x) = (x^2 + 1)^2$.

Ответ: $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Тригонометрические подстановки

206*. (биолог., 1985, 5) Сколько корней на отрезке $[0; 1]$ имеет уравнение

$$8x \cdot (2x^2 - 1) \cdot (8x^4 - 8x^2 + 1) = 1?$$

Ответ: 3 корня: $x_1 = \cos\frac{\pi}{9}$, $x_2 = \cos\frac{2\pi}{7}$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

Графический метод и метод оценок

207*. (ВМК, устный, 2001)Решить уравнение

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = 0.$$

Ответ: $\emptyset$.

2.1.4 Теорема Виета

208.(ДВИ, 2015, №2) Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 - 7x + 5 = 0$.

Ответ: 39.

209.(ДВИ, 2013, №1) Старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ равен -3. Один из его корней равен $7/3$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 4$.

Ответ: $x_2 = -\frac{4}{7}$.

210.(геолог., 1999, июль, №2) Известно, что x_1, x_2 – корни уравнения

$$2x^2 - (\sqrt{3} + 5)x - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 0.$$

Найти значение $A = x_1 + x_1x_2 + x_2$ и выяснить, какое из чисел больше: A или 1,999?

Ответ: $A = 2$; $A > 1,999$.

211.(ВМК, устный, 1994)Квадратное уравнение $x^2 + px - q = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найти $x_1^3 + x_2^3$.

Ответ: $-p^3 - 3pq$.

212.(ВМК, устный, 1994)Квадратное уравнение $x^2 - px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найти $x_1^4 + x_2^4$.

Ответ: $p^4 - 4p^2q + 2q^2$.

213.(ВМК, устный, 1994+1999)Квадратное уравнение $x^2 + px - q = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найти $\left(x_1^2 - x_2^2\right)^2$.

Ответ: $p^4 + 4p^2q$.

214.(эконом., 1973, №1) График функции $y = 2x^2 - x$ пересекается в двух точках с наклонной прямой, проходящей через точку оси y с ординатой b. Найти среднее геометрическое между длинами отрезков, соединяющих начало координат с проекциями точек пересечения на ось абсцисс.

Ответ: $\sqrt{\frac{|b|}{2}}$.

215.(эконом., 1973, №1) График функции $y = \frac{1}{1-x}$ пересекается в двух точках с наклонной прямой, проходящей через точку оси x с абсциссой a. Вычислить абсциссу середины отрезка, соединяющего проекции точек пересечения на ось x.

Ответ: $\frac{a+1}{2}$.

216.(мех-мат, 2007, июль, №2) Графики функций

$$f(x) = 2x^2 - 2x - 1 \text{ и } g(x) = -5x^2 + 2x + 3$$

пересекаются в двух точках. Найти коэффициенты a и b в уравнении прямой $y = ax + b$, проходящей через те же точки.

Ответ: $a = -\frac{6}{7}$, $b = \frac{1}{7}$.

217*. (мех-мат, олимпиада, 2002, 10 кл., №4) Доказать, что если некоторая прямая пересекает график функции $y(x) = ax^3 + bx + c$ ровно в трех точках, сумма ординат которых равна 0, то эта прямая проходит через начало координат.

218.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2006", №6) Некоторая прямая пересекает график функции $y(x) = ax^3 + bx + c$ ровно в трех различных точках, сумма ординат которых равна 6. В какой точке эта прямая пересекает ось ординат?

Ответ: $(0; 2)$.

219.(ВМК, устный, 2001) Найдите уравнение с целыми коэффициентами, имеющее корень $x = \sqrt{5} + \sqrt{3}$.

Ответ: например, $x^4 - 16x^2 + 4 = 0$.

220.(ВМК, устный, 2004)Найти хотя бы один многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{7} - \sqrt{3}$.

Ответ: например, $x^4 - 20x^2 + 16$.

2.2 Дробно-рациональные уравнения

221*. (биолог., 1985, №1) Решить уравнение

$$\frac{5}{x+1} + \frac{4x-6}{(x+1)(x+3)} = 3.$$

Ответ: $x = 0$.

222.(ИСАА, 2008, №1) Решить уравнение

$$\frac{3x^2 - 5x}{3x - 2} - 1 = \frac{2}{2 - 3x}.$$

Ответ: $x = 2$.

223.(географ., 2006, №1) Решить уравнение

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 3(x - 1).$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

224.(почвовед., 2000, май, №1) Решить уравнение

$$\frac{x^{17}-1}{1-x^{15}}=\frac{1-x^{15}}{x^{13}-1}.$$

Ответ: $x_1=0;\ x_2=-1$.

225.(олимпиада "Ломоносов-2011", заочный тур, 8 кл., №3)Решите уравнение

$$\frac{x^7-1}{x^5-1}=\frac{x^5-1}{x^3-1}.$$

Ответ: $x_1=0$, $x_2=-1$.

226.(геолог., 2000, май, №1) Решить уравнение

$$\frac{x^3-3x^2-4x}{\sqrt[3]{x}}=0.$$

Ответ: $x_1=-1; x_2=4$.

227.(соц., 2004, апрель, №1) Решить уравнение

$$\frac{x^3+7x^2+10x-3(x^2+7x)-30}{\sqrt{x+2}}=0.$$

Ответ: $x=3$.

228.(Олимпиада "Ломоносов-2008", №1)Найти k, если

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{5}-2k}+4}+4}+4=\sqrt{5}+2.$$

Ответ: $k=-1$.

229.(Севастополь, 2009, №1) Известно, что для чисел a и b выполнено равенство $\frac{a+2b}{a}=4$. Найдите $\frac{3a-b}{b}$.

Ответ: 1.

2.2.1 Графический метод и метод оценок

230*. (геолог., устный, 2008, май) Найдите числа $x,y\in[0;1]$ такие, что $4x+5y=7+2xy$.

Ответ: $(x;y)=(1;1)$.

231.(ФГП, 2006, №8) Сравните числа $x_*=\sqrt{1+2^{\frac{1}{16}}}$ и k_*, где k_* – корень уравнения

$$(k^2-1)^8=\frac{1}{2(k-1)}.$$

Ответ: $x_*>k_*$.

232.(олимпиада "Ломоносов-2011", заочный тур, 11 кл., №7)Сколько решений имеет уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{2}{x^2}$?

Ответ: одно.

2.3 Уравнения с модулями

2.3.1 Универсальный метод решения

233*. (хим., 2000, №1) Решить уравнение

$$|x| = 4 - x.$$

Ответ: $\{2\}$.

234.(физ., 1995, июль, №3) Решить уравнение

$$2|x-1| = 2 + x.$$

Ответ: $\{0; 4\}$.

235.(почвовед., 2004, июль, №2) Решить уравнение

$$|5x+1| + 7x + 2 = 0.$$

Ответ: $x = -\frac{1}{2}$.

236.(договорные программы, 2008, №1) Решите уравнение

$$|x|(2-x) = 5x.$$

Ответ: $\{0\}$.

237.(эконом. (менеджмент), 2000, №1) Решить уравнение

$$3|x+1| + x^2 + 4x - 3 = 0.$$

Ответ: $x_1 = 0;\ x_2 = -3$.

238.(мех-мат, 1984, №1) Решить уравнение

$$x^2 + 3x + |x+3| = 0.$$

Ответ: $x_1 = -1; x_2 = -3$.

239.(геолог., 1990, №1) Решить уравнение

$$\frac{x}{|x|} + x = x^2 + 1.$$

Ответ: $x = 1$.

240.(географ., 2000, №2) Решить уравнение

$$|2x+9| - |x-6| = 15.$$

Ответ: $\{-30; 4\}$.

241.(психолог., 2005, июль, №1) Решить уравнение

$$|x+1| + 2|x-2| = 9.$$

Ответ: $x_1 = 4; x_2 = -2$.

242.(ИСАА, 1997, июль, №2) Решить уравнение

$$4\cdot|x+1|-1=3\cdot|2x+5|-2\cdot|x+5|.$$

Ответ: $(-\infty;-5]\cup\left\{-\frac{5}{4}\right\}$.
243.(ВШБ, 2007, №4) Решить уравнение

$$|3x+|4-x|+2|=2x+6.$$

Ответ: $-3\leq x\leq 4$.
244.(мех-мат, устный, 1995) Сколько корней имеет уравнение

$$3-2|x-1|=2\left(\left|x-\frac{1}{4}\right|-\left|x+\frac{1}{4}\right|-\frac{3}{2}\right)?$$

Ответ: два.
245.(мех-мат, устный, 1995) Сколько корней имеет уравнение

$$\left|x^2-2|x|+1\right|=3|2-x|-1?$$

Ответ: два.
246.(ИСАА, 2003, июль, №2) Решить уравнение

$$(|x|-5)^2-|5-x|=30.$$

Ответ: $x_1=11,\ x_2=\frac{-11-\sqrt{161}}{2}$.

2.3.2 Метод новой неизвестной

247*. (биолог., 2005, июль, №1) Решить уравнение

$$x^2+2|x|-3=0.$$

Ответ: $\{-1;1\}$.
248.(ФГУ, 2009, №2) Решить уравнение

$$x^2+|x|-6=0.$$

Ответ: $x=\pm 2$.
249.(соц., 2005, апрель, №2) Решить уравнение

$$3x^2-5|x|-2=0.$$

Ответ: $x=\pm 2$.
250.(геолог. (геофизика), 1975, №1) Решить уравнение

$$(x-1)^2+|x-1|-2=0.$$

Ответ: $x_1=0;\ x_2=2$.
251.(биолог., 1996, №2) Решить уравнение

$$(x-3)^2-5\cdot|x-3|=24.$$

Ответ: $x_1=-5;\ x_2=11$.

2.3.3 Специальные методы решения

Определение модуля

252*. (географ., 2002, июль, №1) Решить уравнение

$$|x-2| = \frac{1}{x-2}.$$

Ответ: $x = 3$.
253.(МШЭ, 2005, июль, №1) Решить уравнение

$$|2x+3| - 2x = 3.$$

Ответ: $x \geq -\frac{3}{2}$.

Геометрический смысл модуля

254.(мех-мат, 1964) Решить уравнение

$$|x^2-9| + |x^2-4| = 5.$$

Ответ: $[-3;-2] \cup [2;3]$.
255.(ФГУ, 2008, №1) Решите уравнение

$$|1-x| + |x+1| = \frac{2x}{|x|}.$$

Ответ: $(0;1]$.

Уравнения вида $|a| = b$, где $b \geq 0$.

256.(физ., 1983, №2) Решить уравнение

$$\left|5x^2-3\right| = 2.$$

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}; x_4 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.
257.(почвовед., 2001, май, №2) Решить уравнение

$$|2x+3| = x^2.$$

Ответ: $\{3;-1\}$.
258.(почвовед., 2007, июль, №1) Решить уравнение $||x-1|-7| = 10$.
Ответ: $\{-16;18\}$.
259.(ВМК, устный, 2003)Сколько корней имеет уравнение

$$|||x-1|-2|-3| = 1?$$

Ответ: 5.

260.(фил., 2005, июль, №1) Решить уравнение

$$\left|x^2-3|x|+1\right|=1.$$

Ответ: $\{0;1;-1;2;-2;3;-3\}$.

261.(геолог., 1998, №2) Решить уравнение

$$\left||4-x^2|-x^2\right|=1.$$

Ответ: $\pm\sqrt{\frac{3}{2}};\ \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

262.(психолог., 1998, №1) Решить уравнение

$$|4x-|x-2|+3|=16.$$

Ответ: $x_1=-\frac{17}{5};\ x_2=\frac{11}{3}$.

Уравнения вида $|a|=|b|$

263.(хим., 2005, июль, №1) Решить уравнение

$$|2x+1|=|x+2|.$$

Ответ: $x_1=1; x_2=-1$.

264.(геолог., устный, 2005) Решите уравнение

$$|x^2-1|=|x^3-x^2-1|.$$

Ответ: $\left\{0;2;\sqrt[3]{2}\right\}$.

265.(Высшая школа государственного аудита, "Абитуриент-2008 ", №1) Решите уравнение

$$\frac{|3\cdot|1-x|-|x+2||}{|1-4x|}=0.$$

Ответ: $x=\frac{5}{2}$.

266.(хим., 2001, май, №1) Решить уравнение

$$\frac{|2x-1|}{|x-1|}=\frac{|2x+1|}{|x+1|}.$$

Ответ: $x_1=0; x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}; x_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

267.(ВМК, устный, 2003)Решить уравнение

$$x^4-7x^2+2x+2=|4x-1|-|2x^2-3|.$$

Ответ: $x_1=1+\sqrt{2}; x_2=1-\sqrt{2}; x_3=-1+\sqrt{3}; x_4=-1-\sqrt{3}$.

Уравнения вида $|a| = b$

268.(соц., 2000, июль, №1) Решить уравнение

$$\left|x^2 - 3x\right| = 2x - 4.$$

Ответ: $x_1 = 4,\ x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

269.(Эконом. (кибернетика), 1978, №1) Найти все корни уравнения

$$|x^2 + x - 1| = 2x - 1,$$

удовлетворяющие неравенству $x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

270.(ф-т биоинженерии и биоинформатики, 2009, №2) Решить уравнение

$$\left|x^2 - 5x + 3\right| = x - 3.$$

Ответ: $\{4; 3 + \sqrt{3}\}$.

271.(эконом., 1989, №3) Решить уравнение

$$||3 - x| - x + 1| + x = 6.$$

Ответ: $x_1 = -2; x_2 = 4$.

272.(ФГУ, 2009, №5) Решить уравнение

$$\left|\left|x^2 - 5x\right| - 5\right| = x - 2.$$

Ответ: $\left\{3; 3 + 2\sqrt{3}; 3 + \sqrt{2}; 2 + \sqrt{11}\right\}$.

Метод оценок

273.(хим., 1999, май, №1) Решить уравнение

$$x^2 + 1 + |x - 1| = 2|x|.$$

Ответ: $x = 1$.

274*. (хим., 2001, июль, №6) Решить уравнение

$$|x - 1| + |x + 1| + |x - 2| + |x + 2| + \\ + \dots + |x - 100| + |x + 100| = 200x.$$

Ответ: $[100; +\infty)$.

2.4 Уравнения, включающие функции max и min

275*. (ВМК, устный, 2003) Решить уравнение

$$\max(x, 2 - x) = \min(3x, 1 + 2x).$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

2.5 Уравнения, включающие функции $[x]$ и $\{x\}$

276*. (ВМК, устный, 1996)Решить уравнение

$$x + [10x] = 10x.$$

Ответ: $x_n = \frac{n}{9}$, $n = 0, 1, \ldots, 8$.

277.(Олимпиада "Ломоносов-2008", №9)Найти все натуральные значения n, удовлетворяющие уравнению

$$2002\left[n\sqrt{1001^2+1}\right] = n\left[2002\sqrt{1001^2+1}\right],$$

где $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее числа x.

Ответ: $n = 1, 2, \ldots, 2002$.

278.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2010", №4) Решите уравнение

$$[n\lg 2] + [n\lg 5] = 2010$$

относительно натурального числа n (через $[x]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x).

Ответ: $n = 2011$.

279.(ВМК, устный, 1996)Сколько решений имеет уравнение

$$x + [100x] = 100x.$$

Ответ: 100; $x_n = \frac{n}{99}$, $n = 0, 1, \ldots, 98$.

280.(геолог., устный, 2008, май) Решите уравнение

$$\{x\} = \frac{3-x}{2}.$$

Ответ: $\left\{\frac{5}{3}; \frac{7}{3}; 3\right\}$.

281.(геолог., устный, 2008, июль) На отрезке $[4; 5]$ найдите корни уравнения $\{x\} = \frac{2}{x}$.

Ответ: $x = 2 + \sqrt{6}$.

282.(ВМК, устный, 2004)Найти все решения уравнения

$$\{x\} = \frac{1}{x}.$$

Ответ: $x = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$, $n \in N$.

283.(ВМК, устный, 2001)Решить уравнение

$$\{2\{2x\}\} = x.$$

Ответ: $x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{3}; x_3 = \frac{2}{3}$.

284.(ВМК, 2007, устный) Найти все решения уравнения $[2x + 1] = [x] + [x + 1]$, где $[a]$ – целая часть числа a.

Ответ: $n \le x < n + \frac{1}{2}$, $n \in Z$.

285.(ВМК, 2007, устный) Найти все решения уравнения $[2x]-[x]=5$, где $[a]$ – целая часть числа a.

Ответ: $4,5 \le x < 5,5$.

286.(ВМК, устный, 2003)Решить уравнение

$$\left[\frac{6x+5}{8}\right] = \frac{15x-7}{5},$$

где $[a]$ – наибольшее целое, не превосходящее a (антье).

Ответ: $x_1 = \frac{7}{15}$; $x_2 = \frac{4}{5}$.

287.(Севастополь, 2005, №8) Решите уравнение

$$x^2 + [x] = 4,$$

где $[x]$ обозначает наибольшее целое, не превосходящее число x.

Ответ: $x_1 = -\sqrt{7}$, $x_2 = \sqrt{3}$.

288.(ВМК, устный, 2003 + Московская математическая олимпиада, 1957, 1 тур, 9 кл.) Решить уравнение

$$x^3 - [x] = 3.$$

Здесь $[x]$ есть целая часть x, т.е. наибольшее целое число меньшее или равное x.

Ответ: $x = \sqrt[3]{4}$.

289.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2012", 8 кл., №5)Решите в действительных числах уравнение $x^3 - [x] = 6$. ($[t]$ — целая часть числа t, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее t. Например, $[\sqrt{3}] = 1$, $[-\sqrt{3}] = -2$.)

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = \sqrt[3]{7}$.

290.(ВМК, устный, 2006) Решить уравнение

$$[x] - 3 = \left[\frac{x+1}{2}\right].$$

Ответ: $6 \le x < 8$.

291.(ВМК, устный, 2004)Найти все решения уравнения

$$\left[x^2\right] = [x]^2.$$

Ответ: $x \in \left[n, \sqrt{n^2+1}\right)$, $n = 0, 1, \ldots$; $x = n$, $n = -1, -2, \ldots$.

292.(ВМК (отд. прикладной информатики), 2001, июль, №6) Пусть $[x]$ означает целую часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x. Найдите все корни уравнения

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} \cdot x^6 - [x].$$

Ответ: $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt[3]{2}$.

2.6 Уравнения с радикалами

2.6.1 Решение возведением в степень

293*. (соц., 2005, апрель, №1) Решить уравнение

$$\sqrt{2x-1}=x-1.$$

Ответ: $x=2+\sqrt{2}$.

294.(соц., 2007, июль, №1) Решить уравнение

$$-x-3\sqrt{-x}=10.$$

Ответ: $x=-25$.

295.(физ., 1985, июль, №2) Решить уравнение

$$\sqrt{x^4-2x-5}=1-x.$$

Ответ: $x=-\sqrt{3}$.

296.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2009", очный тур: Челябинск, №1) Решите уравнение

$$\sqrt{x^4+12x+12}=2x+3.$$

Ответ: $\{1;-1;\sqrt{3}\}$.

297.(ФГУ, 2006, №2) Решите уравнение

$$\sqrt{x^4-10x^2+25}=\sqrt{x^4-4x^2+4}.$$

Ответ: $\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$.

298.(соц., 2005, июль, №1) Решить уравнение

$$\sqrt{x^2-4x+9}=3.$$

Ответ: $x_1=0; x_2=4$.

299.(мех-мат, 1980, №1) Решить уравнение

$$(x^2-4)\sqrt{x+1}=0.$$

Ответ: $x_1=2, x_2=-1$.

300.(биолог., 2007, июль, №1) Решить уравнение

$$\left(x^2-7|x|+6\right)\cdot\sqrt{4x+23}=0.$$

Ответ: $\left\{-1;1;6;-\frac{23}{4}\right\}$.

301.(соц., 2002, июль, №1) Решить уравнение

$$\sqrt{3x+10}=x+2.$$

Ответ: $x = 2$.

302.(соц., 1999, июль, №1) Решить уравнение

$$\sqrt{y-1} = 6 - y.$$

Ответ: $y = \frac{13-\sqrt{21}}{2}$.

303.(ИСАА, 1997, июль, №1) Решить уравнение

$$\sqrt{3} \cdot (x+2) - \sqrt{9+2x} = 0.$$

Ответ: $x = -\frac{1}{3}$.

304.(МШЭ, 2006, №1) Решите уравнение

$$\sqrt{x+3} = 9 - x.$$

Ответ: $x = 6$.

305.(МШЭ, 2005, июль, №2) Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 3x - 1} = x - 1.$$

Ответ: $x = 2$.

306.(географ., 1999, июль, №2) Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 8x + 5} = x - 2.$$

Ответ: $x = 2 + \sqrt{3}$.

307.(географ., 1993, июль, №1) Решить уравнение

$$\sqrt{13 - 2x} = 5 - x.$$

Ответ: $x = 2$.

308.(биолог., 2004, июль, №1) Решить уравнение

$$\sqrt{x+2} = |x - 1|.$$

Ответ: $x = \frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

309.(Высшая школа государственного аудита, 2008, №4) Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{7}{4} - |x+1|} = 1 - |x|.$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{-3+2\sqrt{2}}{2}$.

310.(почвовед., 2001, июль, №2) Решить уравнение

$$\sqrt{5 - x^2} = 1 - x.$$

Ответ: $x = -1$.

311.(эконом.(менеджмент), 2003, июль, №1) Решить уравнение

$$\sqrt{5-4x-x^2}=-2x-1.$$

Ответ: $\{-2\}$.
312.(хим., 1998, май, №1) Решить уравнение

$$7-x=3\sqrt{5-x}.$$

Ответ: $x_1=1,\ x_2=4$.
313.(физ., 1985, июль, №2) Решить уравнение

$$\sqrt{x^4-2x-5}=1-x.$$

Ответ: $x=-\sqrt{3}$.
314.(физ., 1998, март, №2) Решить уравнение

$$\sqrt{4x-x^2-3}=3x-6.$$

Ответ: $x=\frac{20+\sqrt{10}}{10}$.
315.(ВШБ., 2003, апрель, №1) Решить уравнение

$$22x^2+10x=\sqrt{1276x^3+364x^2}.$$

Ответ: $x_1=0;\ x_2=2$.
316*. (ФНМ, 2001, апрель, №3) Решить уравнение

$$\frac{1}{2}-x^2=\sqrt{\frac{1}{2}-x}.$$

Ответ: $x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.
317.(физ., 2002, май, №3) Решить уравнение

$$2+\sqrt{x+5}=|x+3|.$$

Ответ: $x_1=-5; x_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.
318.(физ., 1999, май, №2) Решить уравнение

$$\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{2x+3}=x+7.$$

Ответ: $x=\frac{1+\sqrt{137}}{2}$.
319.(физ., 2000, июль, №2) Решить уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+1}=\sqrt{3x-1}.$$

Ответ: $x=\frac{1+\sqrt{11}}{2}$.

320.(соц., 2003, июль, №1) Решить уравнение

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{3x+7}.$$

Ответ: $x=3$.

321.(психолог., 2001, июль, №1) Решить уравнение

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{8-x}=\sqrt{15}.$$

Ответ: $x_1=3+\frac{5\sqrt{3}}{2},\ x_2=3-\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

322.(почвовед., 1998, июль, №1) Решить уравнение

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4x-3}=1.$$

Ответ: $x=\frac{7}{9}$.

323*. (ВМК, устный, 2000+2002+2006) Решить уравнение

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

Ответ: $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

324.(физ., 2007, июль, №3) Решить уравнение

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{2x+2}=\sqrt{2x-5}-\sqrt{3x-1}.$$

Ответ: $x=3$.

325.(геолог., 2000, июль, №7) Решить уравнение

$$2\cdot(2-x^2-x)=\sqrt{1-x^2}\cdot(3x^2-6x+4).$$

Ответ: $\left\{0;1;\frac{2\sqrt{2}}{3};-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right\}$.

326.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2009", очный тур: Москва, №3) Решите уравнение

$$\sqrt{8x^2-14x+5}-\sqrt{4x^2-1}=\sqrt{2x^2+x-1}.$$

Ответ: $\left\{-5;\frac{1}{2}\right\}$.

2.6.2 Метод новой неизвестной

327.(почвоведение, 2006, №2) Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=2\sqrt{x^3}.$$

Ответ: $x_1=0;\ x_2=2$.

328.(экзамен для победителей III и IV этапов Всероссийской олимпиады, 2004, №1) Решить уравнение

$$\sqrt{x-2}=x-2.$$

Ответ: $\{2; 3\}$.

329.(эконом. (кибернетика), 1983, №1) Решить уравнение

$$x^2 + 13 - 2\sqrt{x^2 + 13} = 35.$$

Ответ: $x = \pm 6$.

330.(эконом., 2006, №1) Решить уравнение

$$2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 3x - 2x^2 + 1.$$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

331.(геолог., 1994, июль, №3) Решить уравнение

$$y + 8\sqrt{y^2 + y - 6} - 6 + y^2 = 0.$$

Ответ: $y_1 = 2;\ y_2 = -3$.

332.(ВМК, 1989, июль, №2) Решить уравнение

$$8\sqrt{12 + 16x - 16x^2} + 4x - 4x^2 = 33.$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

333.(ВМК, устный, 1990) Решить уравнение

$$x^2 - 4x - 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}.$$

Ответ: $x_1 = 6;\ x_2 = -2$.

334.(физ., 1999, июль, №5) Решить уравнение

$$\sqrt{1 - \frac{4}{2 - x}} = \frac{1}{2 - x}.$$

Ответ: $x = -\sqrt{5}$.

335.(эконом. (полит. эконом.), 1969, №5) Решить уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt{x(x + 2)} - \sqrt{(x + 1)^3} = 0.$$

Ответ: $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

336*. (ИСАА, 2005, июль, №3) Решить уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{(x + 1)^3}.$$

Ответ: $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

337.(ВШБ, 2005, июль, №6) Решите уравнение:

$$\sqrt[5]{32x^2 - 32} + \sqrt[5]{(x + 1)^2} + \sqrt[5]{x^2 - 2x + 1} = 0.$$

Ответ: $x = 0$.

338.(ВШБ, 2005, июль, №6) Решите уравнение:

$$\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x^2+5x+6}=\sqrt[3]{x^2+4x+3}-\sqrt[3]{x^2+3x+2}.$$

Ответ: $x=-\frac{3}{2}$.
339.(ВМК, устный, 2004)Решить уравнение

$$6\cdot\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\cdot\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}.$$

Ответ: $x_1=\frac{190}{63}$; $x_2=\frac{2185}{728}$.
340.(ВМК, устный, 1999)Решить уравнение

$$\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5.$$

Ответ: $\{16;81\}$.
341.(географ., 1995, май, №5) Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{19-x}=3.$$

Ответ: $x_1=3$, $x_2=18$.
342.(ВМК, устный, 2003)Решить уравнение

$$x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy.$$

Ответ: $(2;2)$.
343.(почвовед., 2004, июль, №3) Решите уравнение

$$\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2-x-6}=-\sqrt{2x^2+4x-2}.$$

Ответ: $x=-4$.
344.(ВМК, устный, 2003)Решить уравнение

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x.$$

Ответ: $x=1$.
345.(ВШБ, 2006, №6) Решить уравнение

$$\sqrt[3]{(8-x)^2}-\sqrt[3]{(8-x)(125+x)}+\sqrt[3]{(125+x)^2}=19.$$

Ответ: $x_1=0$, $x_2=-117$.
346.(ВМК, устный, 2004)Решить уравнение

$$\frac{\sqrt[3]{7-x}-\sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x}+\sqrt[3]{x-5}}=6-x.$$

Ответ: $\{5;6;7\}$.
347.(ВМК, устный, 1990) Решить уравнение

$$x^2+x+2=\frac{4}{\sqrt{3}}x\sqrt{x+2}.$$

Ответ: $x_1=1$; $x_2=\frac{3+\sqrt{33}}{2}$.

Тригонометрические подстановки

348.(ВМК, устный, 2000)Решить уравнение

$$\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x.$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

349.(ВМК, устный, 2004, 2008)Решить уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{35}{12}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{4}{5};\ x_2 = \frac{3}{5}; x_3 = -\frac{5+\sqrt{73}}{14}$.

350.(геолог. (геофизика), 1981, №6) Найти все решения уравнения

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2};\ x_2 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

351.(хим, 2000, заочный тур олимпиады "Абитуриент МГУ-2000", №5) Решить уравнение

$$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

352.(эконом.(менеджмент), 2003, апрель, №4) Решите уравнение

$$6x \cdot \sqrt{1-9x^2} + 18x^2 - 3\sqrt{2}x - 1 = 0.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{12}$.

2.6.3 Использование специфических преобразований выражений с радикалами

Домножение на сопряжённое выражение

353.(эконом., 2008, №1)Решить уравнение

$$\frac{6x^2-21x+16}{1+\sqrt{2x-4}} = \sqrt{2x-4} - 1.$$

Ответ: $x = \frac{7}{3}$.

354.(геолог.(геофизика), 1985, №5) Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{3x^2+2x+1} + \sqrt{x^2+2x+4}.$$

Ответ: $x = -1$.

355.(геолог.(общая геология), 1985, №5) Решить уравнение

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}.$$

Ответ: $x = 7$.

Выделение полного квадрата

356.(Севастополь, 2003, июль, №1) Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2+2x+1}=3.$$

Ответ: $x \le -1$.

357.(Севастополь, 2007, №3) Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}=2x.$$

Ответ: $x=-\frac{1}{2}$.

358.(эконом., 2000, июль, №1) Решить уравнение

$$3\sqrt{x^2-4x+4}-4-x=\left(\sqrt{-x^2+x+2}\right)^2.$$

Ответ: $x=0$.

359.(ВМК, устный, 1996)Решить уравнение

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=2.$$

Ответ: $1 \le x \le 2$.

360.(ВМК, устный, 2000)Решить уравнение

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$$

Ответ: $x=15$.

361.(ВМК, устный, 1996)Решить уравнение

$$\frac{4x^2+x+1}{4|x|}=\sqrt{x+1}.$$

Ответ: $\left\{\frac{1+\sqrt{17}}{8}; \frac{1-\sqrt{17}}{8}\right\}$.

2.6.4 Уравнения вида $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{c}$

362*. (географ., 1995, май, №5) Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}=1.$$

Ответ: $x=1$.

363.(соц., 2001, июль, №6) Решить уравнение

$$\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}}-\sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}}=1.$$

Ответ: $\left\{-1; \frac{2}{7}\right\}$.

364.(ВМК, устный, 2003)Решить уравнение

$$\sqrt[3]{5x+7} - \sqrt[3]{5x-12} = 1.$$

Ответ: $x_1 = -3; x_2 = 4$.

365.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2011", №5)Решите уравнение $\sqrt[3]{15x+1-x^2} + \sqrt[3]{x^2-15x+27} = 4$.

Ответ: $\{0; 2; 13; 15\}$.

366.(ВМК, устный, 2000+2005)Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1} = x\sqrt[3]{2}.$$

Ответ: $\left\{0; -1; 1; -\sqrt{\frac{2+3\sqrt{3}}{2}}; \sqrt{\frac{2+3\sqrt{3}}{2}}\right\}$.

367.(мех-мат., 2000, заочный тур олимпиады "Абитуриент-2000", №2) Решить уравнение

$$\sqrt[3]{15x+1-x^2} + \sqrt[3]{x^2-15x+27} = 4.$$

Ответ: $\{0; 2; 13; 15\}$.

2.6.5 Графический метод

368*. (биолог., 1976, №5) Доказать, что уравнение

$$\sqrt{x} = -x^2 + 8x - 15$$

не имеет решений.

369.(ВМК, устный, 2000+2006)Решить уравнение

$$x + \sqrt{3+\sqrt{x}} = 3.$$

Ответ: $x = 1$.

370.(хим., 2001, июль, №4) Решить уравнение

$$\sqrt{4x-x^2} + \sqrt{4x-x^2-3} = 3 + \sqrt{2x-x^2}.$$

Ответ: $x = 2$.

371.(геолог., устный, 2008, май) Решите уравнение

$$3\sqrt{x^2-9} + 4\sqrt{x^2-16} + 5\sqrt{x^2-25} = \frac{120}{x}.$$

Ответ: $x = 5$.

Уравнения вида $f(x) = f^{-1}(x)$

372.(ВМК, устный, 2002)Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+22} = x^3 - 6x^2 + 12x - 32.$$

Ответ: $x = 5$.
373.(ВМК, устный, 2004)Решить уравнение

$$\sqrt[3]{3x+9} = 27(x+1)^3 - 6.$$

Ответ: $x = -\frac{1}{3}$.
374.(ВМК, устный, 2002+2006)Решить уравнение

$$x^3 + 1 = 2 \cdot \sqrt[3]{2x-1}.$$

Ответ: $x = 1; x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Уравнения вида $F(f(x)) = F(g(x))$

375*. (мех-мат, 2001, март, №1) Решить уравнение

$$7x - 5|x-1| = 7\sqrt{2x+8} - 5\left|\sqrt{2x+8} - 1\right|.$$

Ответ: $x = 4$.
376.(ВМК, устный, 2000+2003+2006)Решить уравнение

$$(2x+1)\left(2 + \sqrt{(2x+1)^2 + 3}\right) - 3x\left(2 + \sqrt{9x^2+3}\right) = 0.$$

Ответ: $x = 1$.
377.(хим., 1989, №5) Решить уравнение

$$(2x+1)\left(2 + \sqrt{(2x+1)^2 + 3}\right) + 3x\left(2 + \sqrt{9x^2+3}\right) = 0.$$

Ответ: $x = -\frac{1}{5}$.
378.(ВКНМ, 1996, апрель, №6) Решить уравнение

$$10x + (4x+2)\sqrt{x^2+x+1} + 3x\sqrt{9x^2+3} = -2.$$

Ответ: $x = -\frac{1}{5}$.

2.6.6 Метод оценок

379.(ВШБ, 2005, июль, №7) Найдите все пары чисел x и y, удовлетворяющие условию:

$$\sqrt{\lg x} + \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1 + |\sin y|.$$

Ответ: $(1; 0)$.

Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом

380*. (хим., 2003, июль, №4) Решить уравнение

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)=8.$$

Ответ: $x=1$.

381.(геолог., устный, 2008, июль) Найдите положительные числа x, y, удовлетворяющие уравнению

$$x\sqrt{y^3+4y}+y\sqrt{x^3+4x}=2\sqrt{2}xy.$$

Ответ: $x=2, y=2$.

382.(ВМК, устный, 2000)Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2.$$

Ответ: $x=1$.

383.(ВМК, устный, 1997)Решить уравнение

$$\sqrt{x\cdot(2x+3)}+\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2\sqrt{2}}=\sqrt{3\sqrt{2}+3x}.$$

Ответ: $\emptyset$.

Неравенство Коши-Буняковского

384.(ВМК, устный, 2005)Решить уравнение

$$2\sqrt{x-1}+5x=\sqrt{(x^2+4)(x+24)}.$$

Ответ: $x=5$.

385.(ВМК, устный, 2002)Решить уравнение

$$x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{1+x^2}.$$

Ответ: $x_1=1; x_2=1+\sqrt{2}$.

386*. (ФНМ, 2004, заочный тур Олимпиады, №3) Найти все действительные решения уравнения

$$2\sqrt{x+7}+3\sqrt{37-2x}+6\sqrt{3x+93}=7\sqrt{2x+137}.$$

Ответ: $x=5$.

Неравенство треугольника

387*. (ВМК, устный, 2003+2008) Решить уравнение

$$\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{1+16x^{-2}}=\sqrt{9-2x}.$$

Ответ: $x=2$.

2.7 Показательные уравнения

2.7.1 Уравнения, приводимые к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

388*. (физ., 1995, март, №3) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} \cdot 3^{2x+5} = 27^{-1}.$$

Ответ: $\{-2; 4\}$.
389.(психолог., 1988, №2) Решите уравнение

$$32^{3\cdot(x^3-8)} = 8^{19\cdot(2x-x^2)}.$$

Ответ: $\{-0,8; -5; 2\}$.
390.(Ташкент, 2008, №4) Решить уравнение

$$2^{|x-1|-2x+7} = \log_2 16.$$

Ответ: $x = 4$.
391.(олимпиада "Ломоносов-2007", №2) Решить уравнение $\sqrt{2^{(x^2)}} = \left(2^{\sqrt[5]{x}}\right)^5$.
Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt[9]{100\ 000}$.
392.(геолог., 2001, №3) Решите уравнение

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{x-2} \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \frac{125}{343}.$$

Ответ: $x = 3 \pm \sqrt{5}$.
393.(физ., 1995, май, №1) Решите уравнение

$$2^{x-1} \cdot 3^x = 0,5 \cdot 6^{2-x}.$$

Ответ: $\{1\}$.
394.(физ., 1993, май, №3) Решить уравнение

$$2^{x+2} = 2^{2x+2} \cdot 3^{x+3}.$$

Ответ: $x = -3\log_6 3$.
395.(Ташкент, 2006, №5)Решите уравнение

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2-2x} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{x-x^2} = \frac{16}{25}.$$

Ответ: $\{-1; 2\}$.
396.(ВМК, 1979, №2) Решить уравнение

$$5^{|4x-6|} = 25^{3x-4}.$$

Ответ: $x = \frac{7}{5}$.

397.(эконом.(менеджмент), 2002, июль, №2) Решить уравнение

$$\left(-1-\frac{2x}{3}\right)^{3x^2+17x+20} = 1.$$

Ответ: $\{-4; -3; -\frac{5}{3}\}$.

398.(эконом. (подгот. отд.), 1992, №1) Решить уравнение

$$|x-5|^{3x^2-15x} = 1.$$

Ответ: $\{0; 4; 6\}$.

399.(ИСАА, 1994, №2) Решите уравнение

$$3^{x\log_3 5}\cdot 5^{x^2-3x} = 1.$$

Ответ: $\{0; 2\}$.

400.(эконом.(менеджмент), 1997, июль, №1) Решить уравнение

$$3^{|x|} = 5^{x^2+3x}.$$

Ответ: $\{0; -3-\log_5 3\}$.

401.(ВМК, устный, 1995)Решить уравнение

$$3^{2^x} = 2^{3^x}.$$

Ответ: $x = \log_{\frac{2}{3}}\log_3 2$.

402.(ВМК, устный, 1999)Решить уравнение

$$5^{7^x} = 7^{5^x}.$$

Ответ: $x = \log_{\frac{7}{5}}(\log_5 7)$.

403.(географ., 1973, №4) Найти решения уравнения

$$3^{x^2+4x} = \frac{1}{25},$$

удовлетворяющие условию $x > -3$.

Ответ: $x = -2+\sqrt{4-\log_3 25}$.

404.(хим., 1964) Решите уравнение

$$3^x\cdot 8^{\frac{x}{x+2}} = 6.$$

Ответ: $\{1; -2-2\log_3 2\}$.

405.(ФНМ, 2003, апрель, №1) Решите уравнение

$$2^x\cdot 5^{\frac{x+2}{x}} = 100.$$

Ответ: $\{2; \log_2 5\}$.

406.(ВМК/физ/эконом. (подгот. отд.), 1996, №2) Решить уравнение

$$7^x \cdot 16^{\frac{x}{x+3}} = 14$$

Ответ: $x_1 = 1;\ x_2 = -3 - 3\log_7 2$.
407.(мех-мат., устный, 1994) Решите уравнение

$$2^{x^2} \cdot 3^{-x} = \frac{2}{5}.$$

Ответ: $\emptyset$.

2.7.2 Метод новой неизвестной

408*. (почвовед., 1995, июль, №2) Решить уравнение

$$5^{2x} = 115 \cdot 5^{x-1} + 50.$$

Ответ: $x = 2$.
409.(соц., 2005, июль, №2) Решить уравнение

$$3 \cdot 81^x - 10 \cdot 9^x + 3 = 0.$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -\frac{1}{2}$.
410.(хим., 1998, июль, №1) Решить уравнение

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0.$$

Ответ: $x_1 = 0;\ x_2 = 2$.
411.(эконом.(менеджмент), 2003, апрель, №1) Решить уравнение

$$2 \cdot 4^x - 31 \cdot 2^x - 16 = 0.$$

Ответ: 4.
412.(психолог., 2004, июль, №1) Решить уравнение

$$4^x - 12 \cdot 2^x - 1 = 0.$$

Ответ: $x = \log_2(6 + \sqrt{37})$.
413.(географ., 1977, №3) Решить уравнение

$$4^x - 2^{x+1} = 3.$$

Ответ: $x = \log_2 3$.
414.(почвовед., 1999, июль, №1) Решить уравнение

$$4^x - 2^x = 56$$

Ответ: $\{3\}$.

415.(геолог. (геофизика), 1984, №1) Решить уравнение

$$3 \cdot 9^{x+1} - 6 \cdot 3^x - 1 = 0.$$

Ответ: $x = -1$.
416.(физ., 1995, июль, №2) Решить уравнение

$$25^{x+1} + 5^{x+2} - 50 = 0.$$

Ответ: $x = 0$.
417.(физ., 1997, май, №2) Решить уравнение

$$49^{x+1} + 6 \cdot 7^x - 6^{-\log_6 7} = 0.$$

Ответ: $\{-2\}$.
418.(физ., 1994, июль, №3) Решить уравнение

$$4^{x-1} + 4 \cdot (0,25)^{x-2} = 17.$$

Ответ: $\{1; 3\}$.
419.(физ., 1996, июль, №3) Решить уравнение

$$6^{\frac{x}{2}} - 3 \cdot 6^{1-\frac{3x}{2}} = 3 \cdot 6^{-\frac{x}{2}}.$$

Ответ: $\{1\}$.
420.(физ., 2000, май, №3) Решить уравнение

$$\sqrt{2^x} + \left(\sqrt{2}\right)^x - \sqrt{2} \cdot 2^x + \sqrt{2} = 0.$$

Ответ: $x = \log_2(2 + \sqrt{3})$.
421.(МШЭ, 2007, №4) Решите уравнение

$$4 \cdot 25^{\sqrt{x}} - 23 \cdot 5^{\sqrt{x}} + 15 = 0.$$

Ответ: $x = 1$.
422.(физ., 2007, март, №3) Решить уравнение

$$9^{x-\sqrt{x}} - 12 \cdot 3^{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + 27 = 0.$$

Ответ: $\left\{4; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.
423.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2007", №2) Решить уравнение

$$2^{\sqrt{4x^2-12x+9}} + 4^{x-1} = 6.$$

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}\log_2\left(12 - \sqrt{112}\right)$.
424.(эконом., 2010, №1) Решите уравнение

$$\left|-4^x + 2^{x+5} - 150\right| = 150.$$

Ответ: $x = 5$.
425.(ИСАА, 1992, №1) Решите уравнение

$$2^{x+5} + 2^3 \cdot 2^{x-1} - 2^2 = 0.$$

Ответ: $x = -\log_2 9$.
426.(Ташкент, 2007, №3) Решите уравнение

$$2^{2x+3} \cdot 3^x + 2 \cdot 4^x \cdot 3^{x+2} = \frac{13}{72}.$$

Ответ: $x = -2$.
427.(физ., 2006, №2) Решить уравнение

$$9^{x-1} \cdot 3^{2x} \cdot 4^{4x} + 16^{x-1} \cdot 3^{4x} \cdot 2^{4x} - 25 = 0.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.
428.(физ., 1999, март, №2) Решить уравнение

$$2^{5x-4} - 32^{x-2} + 5 \cdot 64^{\frac{5x-4}{6}} = 383.$$

Ответ: $\{2\}$.
429.(ИСАА, 1998, июль, №2) Решить уравнение

$$2^{-2x^2+1} - 12 \cdot 2^{-x^2} + 5 = 0.$$

Ответ: $x_{1,2} = \pm\sqrt{\log_2 \frac{6+\sqrt{26}}{5}}$.
430.(физ., 2001, июль, №3) Решить уравнение

$$4^{3x^2+x} - 8 = 2 \cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}.$$

Ответ: $\left\{-1; \frac{2}{3}\right\}$.
431.(эконом.(менеджмент), 1998, июль, №4) Решить уравнение

$$3^{2(x+1)^2+1} - 87 \cdot 3^{x^2+2x} + 18 = 0.$$

Ответ: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$.
432.(хим., 2002, июль, №1) Решить уравнение

$$4^{\frac{1}{x}} - 5 \cdot 2^{2+\frac{1}{x}} + 64 = 0.$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{4}$; $x_2 = \frac{1}{2}$.
433.(физ., 1998, май, №3) Решить уравнение

$$81^{\frac{2}{x}} + 12 \cdot 3^{\frac{4}{x}-1} - 21 = 0.$$

Ответ: $\{4\}$.

434.(ИСАА, 2006, №5) Решите уравнение

$$4\left(2^{x-1-2x^2}+1\right)^2+3\left(2^{x-2x^2}-3\right)\left(2^{x-2x^2}+1\right)+5\cdot 2^{x+1-2x^2}=0.$$

Ответ: $x_1=1; x_2=-\frac{1}{2}$.
435.(физ., 2007, июль, №2) Решить уравнение

$$\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{2x}+5\cdot 3^{2-x}-14}{49-7^x}=0.$$

Ответ: $x=\log_3 5$.
436.(психолог., 1993, июль, №1) Решить уравнение

$$3^{\frac{x+2}{3x-4}}-7=2\cdot 3^{\frac{5x-10}{3x-4}}.$$

Ответ: $x=2$.
437.(хим., 2000, июль, №6) Решить уравнение

$$(26+15\sqrt{3})^x-5\cdot(7+4\sqrt{3})^x+6\cdot(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=5.$$

Ответ: $x_1=1;\ x_2=-1$.
438.(психолог., 2002, июль, №3) Решить уравнение

$$3^{3^x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{3^x-1}=4.$$

Ответ: $\{0\}$.
439.(физ., 1994, май, №3) Решить уравнение

$$7^{\sqrt{x}}-2\cdot 7^{2-\sqrt{x}}=47.$$

Ответ: $x=4$.
440.(физ., 2000, март, №2) Решить уравнение

$$5^{\sqrt{x}-1}-24\cdot 5^{-\sqrt{x}-1}=1.$$

Ответ: $x=\log_5^2 8$.
441.(Севастополь, 1999, июль, №5) Решить уравнение

$$25^{\sqrt{x^3+3x^2+2x}-x+1}+5=126\cdot 5^{\sqrt{x^3+3x^2+2x}-x}.$$

Ответ: $\{-1; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\}$.
442.(эконом.(менеджмент), 1999, июль, №1) Решить уравнение

$$4\cdot\sqrt{\frac{2^x-1}{2^x}}=7\cdot\sqrt{\frac{2^x}{2^x-1}}-\sqrt{14}.$$

Ответ: $\{3\}$.

443.(психолог., 2006, №1) Решить уравнение

$$|7^x - 3| = 7^x + 1.$$

Ответ: $x = 0$.
444.(физ., 2000, июль, №5) Решить уравнение

$$2 \cdot \left|2^{x-1} - 1\right| + \left|4^{\frac{x}{2}} - 3\right| = 1.$$

Ответ: $1 \le x \le \log_2 3$.
445.(географ., 2002, май, №2) Решить уравнение

$$2^{2x+1} - 15 \cdot 2^x + 10 = 6 \cdot \left|2^{x-1} - 1\right|.$$

Ответ: $x_1 = 3;\ x_2 = \log_2(3 - \sqrt{7})$.
446.(ВМК/физ/эконом. (подгот. отд.), 1995, №2) Решить уравнение

$$\left|\frac{1}{49} \cdot 7^{x+3} + 49^x - 15\right| - 196 \cdot 7^{x-2} = 3.$$

Ответ: $\{\log_7 3; 0\}$.
447.(биолог., 2003, апрель, №4) Решить уравнение

$$4 \cdot 3^{2x+\frac{1}{2x}} - 8 \cdot 3^{x+\frac{1}{4x}} + 2 = \left|4 \cdot 3^{x+\frac{1}{4x}} - 1\right|.$$

Ответ: $x_{1,2} = \frac{\log_3 \frac{3+\sqrt{6}}{2} \pm \sqrt{\log_3^2 \frac{3+\sqrt{6}}{2} - 1}}{2}$.
448.(мех-мат, 1998, март, №1) Решить уравнение

$$2^{2x} - 2^{x+2} + \left|2^x - \frac{1}{3}\right| = -\frac{7}{3}.$$

Ответ: $\{0; 1\}$.
449.(ВМК, устный, 2001+2003) Решите уравнение

$$3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2}.$$

Ответ: $x = 2$.
450.(геолог., 2003, июль, №2) Решите уравнение

$$5^{x+\frac{1}{2}} - 9^x = 3^{2x-2} - 5^{x-\frac{1}{2}}.$$

Ответ: $x = \frac{3}{2}$.
451.(почвовед., 1988, №3) Решить уравнение

$$3 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0.$$

Ответ: $\log_{\frac{2}{5}} 2;\ -\log_{\frac{2}{5}} 3$.

452.(физ., 1996, март, №3) Решить уравнение

$$7^{2x} = [6 - (0,7)^x] \cdot 100^x.$$

Ответ: $x = \log_{\frac{7}{10}} 2$.

453.(физ., 1997, июль, №2) Решить уравнение

$$6 \cdot \frac{2^{x-3}}{2^x - 3^x} = 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^x.$$

Ответ: $x = \log_{\frac{2}{3}} 2$.

454.(физ., 2005, июль, №3) Решить уравнение

$$5^{x\sqrt{12}} - 5\sqrt{3} \cdot 15^{x\sqrt{3}} + 4 \cdot 3^{1+x\sqrt{12}} = 0.$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}(\log_3 5-1)}$; $x_2 = \frac{4\log_3 2-1}{2\sqrt{3}(\log_3 5-1)}$.

455.(геолог. (геофизика), 1982, №3) Решить уравнение

$$9 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} = 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

456.(ВМК, 2000, апрель, №2) Решить уравнение

$$12^x + 6^x - 2 \cdot 4^x - 2 \cdot 3^x - 2^{x+1} + 4 = 0.$$

Ответ: $x_1 = 0; x_2 = \log_3 2$.

457.(физ, 2001, март, №3) Решить уравнение

$$18^x - 9^{x+1} - 2^{x+2} + 36 = 0.$$

Ответ: $x_1 = \log_2 9$; $x_2 = \log_3 2$.

458.(Севастополь, 2004, июль, №7) Решите уравнение

$$\left(3^{2x+3} - 3^{x+1} - 1\right)^2 - 2 \cdot 3^{2x+4} + 6 \cdot 3^{x+1} - 1 = 0.$$

Ответ: $x_1 = -2; x_2 = \log_3 \frac{1+\sqrt{97}}{18}$.

2.7.3 Графический метод

459.(Севастополь, 2009, №10) Решить уравнение

$$3^{|x|}x^3 = 5180 + x.$$

Ответ: $\{4\}$.

460.(фил., 2004, №3) Решите уравнение

$$(x+4) \cdot (x^2+4) = 5 - 2^{x+4} - 16\left(\sqrt{2}\right)^x.$$

Ответ: $x = -4$.

461.(хим., 1993, №5) Решить уравнение

$$2^{x+1} + 2^{1-x} = 1 - 4x - x^2.$$

Ответ: $\emptyset$.

462.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2008", №6) Найти все положительные корни уравнения

$$x^{-2x} = 2.$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{4}$.

463.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2012", очный тур)Решите уравнение

$$x - \sqrt{x} \cdot 2^{-x^6} = 2^{1-2x^6}.$$

Ответ: $x = 1$.

464.(ВМК, устный, 2001)Решить уравнение

$$5^x - 3^x = 98.$$

Ответ: $x = 3$.

465.(ВМК, устный, 2003) Решить уравнение

$$4 \cdot 3^{3x+1} + 4 = 5 \cdot 2^{9x}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{3}$.

466.(ВМК, устный, 2004) Решить уравнение

$$(17 + 12\sqrt{2})^x - (17 - 12\sqrt{2})^x = 32^x + 12\sqrt{2}.$$

Ответ: $x = \frac{3}{2}$.

467.(ВМК, устный, 2003)Решить уравнение

$$5^{2x+1} + \sqrt{3} \cdot 3^{3x} + 14 = 3\sqrt{2} \cdot 2^{5x+1}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

2.7.4 Метод оценок

468.(ВМК, устный, 2000+2002+2003 + геолог., устный, 2008, май) Найти все положительные корни уравнения

$$2^{6x^2-7x-2} + 2^{3x^2-5x} = 9.$$

Ответ: $x = \frac{5}{3}$.

469.(ВМК, устный, 1999)Решить уравнение

$$x^2 = \left(|x|^{\frac{1}{|x|}} + 2\right)^{|x|}.$$

Ответ: $\emptyset$.

Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом

470.(ВМК, устный, 2003) Решить уравнение

$$2^{x^6}+2^{x^2}=2^{x^4+1}.$$

Ответ: $\{-1;0;1\}$.

471.(ВМК, устный, 1995)Решить уравнение

$$2^x+2^{\frac{1}{x}}=4.$$

Ответ: $x=1$.

2.8 Логарифмические уравнения

2.8.1 Уравнения, приводимые к виду $\log_a f(x)=\log_a g(x)$

472*. (МШЭ, 2005, июль, №3) Решить уравнение

$$1+\log_9(x+1)^2=\log_3(3x+9).$$

Ответ: $x=-2$.

473.(ВШБ, 2005, июль, №2) Решите уравнение

$$\log_3(x^2-5)-\log_3\left(x-\frac{1}{3}\right)=1.$$

Ответ: $x=4$.

474.(ВШБ, 2008, №1)Решить уравнение

$$\log_{x+2}(x^2+2)-\frac{1}{\log_3(x+2)}=0.$$

Ответ: $x=1$.

475.(ДВИ, 2011, №3)Решите уравнение

$$\log_2(3x-4)=\log_4(2-x).$$

Ответ: $x=\frac{14}{9}$.

476.(хим., 1995, июль, №2) Решить уравнение

$$\log_2 x+\log_2(x+1)=1.$$

Ответ: $x=1$.

477.(геолог., устный, 2004+2006)Решите уравнение

$$\log_3\left(1+\log_2\left(1+3\log_2 x\right)\right)=1.$$

Ответ: $x = 2$.
478.(психолог., 2003, июль, №1) Решить уравнение

$$\log_{3x+3} 5 = 2.$$

Ответ: $x = \frac{-3+\sqrt{5}}{3}$.
479.(мех-мат, 1982, №1) Решить уравнение

$$\log_3(x^2 - 6) = \log_3(x - 2) + 1.$$

Ответ: $x = 3$.
480.(геолог., 1997, май, №2) Решить уравнение

$$2 - \log_2 x = \log_2\left(\frac{3}{4}|x| + 2\right).$$

Ответ: $x = \frac{4}{3}$.
481.(соц., 1998, июль, №2) Решить уравнение

$$\log_2(x^2 - 5) = \frac{3}{2}\log_{\sqrt{8}}(1 - x).$$

Ответ: $x = -3$.
482.(физ., 1995, май, №2) Решить уравнение

$$4\log_9 x + 2 = \log_3(12x + 12).$$

Ответ: $x = 2$.
483.(физ., 1994, май, №2) Решить уравнение

$$\log_3(x - 4) = 1 + 6\log_{1/27}\sqrt{x - 2}.$$

Ответ: $x = 5$.
484.(физ., 1998, июль, №2) Решить уравнение

$$\log_5(x + 1) - \log_{25}(x^2 - 4x + 4) = \log_5 2.$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 5$.
485.(физ., 1997, март, №3) Решить уравнение

$$\log_{100}\left(\frac{x^2}{9}\right) + \log_{10}(x + 13) = 1.$$

Ответ: $x_1 = -10, x_2 = -3, x_3 = 2$.
486.(физ., 1996, март, №5) Решить уравнение

$$\log_{25} x^6 + \log_5\left(-x^5\right) = 5.$$

Ответ: $-5^{\frac{5}{8}}$.

487.(соц., 1998, июль, №2) Решить уравнение

$$\log_7(x^2-5)=2\log_{49}(x+1).$$

Ответ: $x=3$.
488.(хим., 2000, май, №1) Решить уравнение

$$\log_2\frac{x+3}{5}+\log_2\frac{5}{x+1}=1.$$

Ответ: $x=1$.
489.(биолог., 2003, апрель, №1) Решить уравнение

$$\log_2(1+2x)=1+2\log_2 x.$$

Ответ: $x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.
490.(геолог., 1979, №2) Решить уравнение

$$1+\lg(1+x^2-2x)-\lg(1+x^2)=2\lg(1-x).$$

Ответ: $x=-3$.
491.(мех-мат, 1996, март, №1) Решить уравнение

$$\log_2(x+6)\cdot\log_{x+6}(x^3+10x^2+15x)=\log_2(3x^2+5x)$$

Ответ: $x=-2$.
492.(фил., 1998, июль, №3) Решить уравнение

$$\frac{\log_5(-2x)}{\log_5(x+1)}=2.$$

Ответ: $x=\sqrt{3}-2$.
493.(геолог., 2007, устный) Решите уравнение

$$\frac{\log_2(-x)}{\log_4(-6x-5)}=1.$$

Ответ: -5.
494.(ФФМ, 2003, май, №1) Решить уравнение

$$\log_{(-1-x)}(4x+25)=2.$$

Ответ: $x=-4$.
495.(биолог., 1999, июль, №3) Решить уравнение

$$\log_{8-7x}\left(x^3-3x^2-\frac{37}{8}x+\frac{55}{8}\right)+2\log_{(8-7x)^2}(x+3)=1.$$

Ответ: $x=-1$.

496.(эконом., отд. полит. экономии, 1978, №1) Решить уравнение

$$\log_{1-2x^2} x = \frac{1}{4} - \frac{3}{\log_2(1-2x^2)^4}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

497.(эконом., отд. кибернетики, 1978, №3) Решить уравнение

$$3 + \frac{1}{\log_{32} \frac{x}{2}} = \log_{\frac{x}{2}} \left(\frac{75x}{4} - \frac{11}{x} \right).$$

Ответ: $\frac{\sqrt{11}}{4}$.

498.(физ., 2002, май, №1) Решить уравнение

$$\frac{\log_3(6x-5)}{\log_2 x} = \frac{2}{\log_2 3}.$$

Ответ: $x = 5$.

499.(почвовед., 1996, май, №2) Решить уравнение

$$\log_{(4x-x^2)} x = \log_{(12-3x)} x.$$

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = 3$.

500.(ВМК, 1996, №2) Решить уравнение

$$\log_{2x+3}(x-2)^2 = \log_{\frac{x}{6}+\frac{1}{2}}(x-2)^2.$$

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = -\frac{15}{11}$.

501.(биолог., 1972, №3) Решить уравнение

$$2^{\sqrt{\log_2 3}} = 3^{\sqrt{\log_9(4x)-0{,}75}}.$$

Ответ: $x = 3\sqrt{3}$.

502.(ВМК, 1981, №2) Решить уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{3x-5}} = (3x-5)^{\log_{\frac{1}{25}}(2+5x-x^2)}.$$

Ответ: $\{2; \frac{5+\sqrt{13}}{2}\}$.

503.(мех-мат, 1995, май, №2) Сколько различных корней имеет уравнение

$$\log_2\left(40 - 5x^2 + x^2 \cdot 2^x\right) = x + 3.$$

Ответ: три корня: $x_1 = 2\sqrt{2}, x_2 = -2\sqrt{2}, x_3 = \log_2 5$.

504.(мех-мат, 2001, май, №2) При каких значениях x числа

$$\log_3(2x^2 - x), \log_3(10 - x^2 + 12x) \text{ и } \log_3(x^2 + 11x + 9\frac{1}{2})$$

являются длинами сторон некоторого равнобедренного треугольника?

Ответ: $x = 5$.

505.(геолог., 1965, №2) Найти все решения уравнения

$$\frac{1}{2}\log_2\left(2^{\sqrt[3]{6x}} - 10\cdot 2^{-\sqrt[3]{6x}} + 1\right) = 3\left(\log_{7\sqrt{7}} 49 - 1\right).$$

Ответ: $x = \frac{1}{6}\log_2^3 5$.

506.(геолог., 1998, май, №2) Решить уравнение

$$\log_9\left(4^x - 2\cdot 18^x\right) = 2x.$$

Ответ: $x = \log_{\frac{2}{9}}(\sqrt{2}+1)$.

507.(почвовед., 2003, май, №1) Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{3}}\left(4^x - 1\right) - \log_{\sqrt{3}}\left(2^x - 1\right) = 2.$$

Ответ: $x = 1$.

508.(ФНМ, 2004, апрель, №3) Решить уравнение

$$\log_{2x^2}\left(4x^2 + 8 - 8x\sqrt{2}\right) + \log_{2x^2}\left(2x^2 + 4 + x\sqrt{32}\right) = \frac{\log_{2x^2} 2}{\log_{8x^2} 2}.$$

Ответ: $\{1; -1; 2; -2\}$.

509.(физ., 2000, май, №5) Решить уравнение

$$2\sqrt{\log_4^2(2x-1)} = 3 - \log_2(x+3).$$

Ответ: $x_1 = \frac{11}{15}, x_2 = \frac{-5+\sqrt{113}}{4}$.

510*. (мех-мат, 1968, №2) Найти все решения уравнения

$$\log_4\left(6 + \sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2|\right) = \frac{1}{2} + \log_2\left|\sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2|\right|.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{16}\right\} \cup [4; +\infty)$.

511.(мех-мат, 2007, июль, №1) Учитель назвал Пете натуральное число и попросил найти сумму его логарифмов по основаниям 3 и 75. Однако Петя, по ошибке, не сложил эти логарифмы, а перемножил их, получив неверный ответ, который оказался вдвое меньше верного. Какое число назвал ему учитель?

Ответ: 15.

2.8.2 Метод новой неизвестной

512.(геолог., 1994, май, №5) Решить уравнение

$$(3 - \log_7 x)\cdot\log_7 x = \frac{5}{4}.$$

Ответ: $\{\sqrt{7}; 49\sqrt{7}\}$.
513.(биолог., 2008, №2) Найдите $\log_3 x$, если $x < 3$ и

$$\log_3(3x) \cdot \log_3(9x) \cdot \log_3(27x) = \log_3^3 x + 23.$$

Ответ: $-\frac{17}{6}$.
514.(хим., 1993, июль, №2) Решить уравнение

$$(\log_2 x)^2 + 3\log_{1/2} x + 2 = 0.$$

Ответ: $\{2; 4\}$.
515.(физ., 1995, март, №2) Решить уравнение

$$\log_3 x \cdot (\log_9 x + 7) = 12 \cdot (2 + \log_9 x)\,.$$

Ответ: $x_1 = 729, x_2 = \frac{1}{6561}$.
516.(физ., 1984, №2) Решить уравнение

$$4\log_{25}(5x) = 5 - \log_5^2 x.$$

Ответ: $x_1 = 5; x_2 = \frac{1}{125}$.
517.(ВШБ, 2007, №1) Решить уравнение

$$\log_x 25 - \log_5 x^2 = \log_5 125.$$

Ответ: $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = \frac{1}{25}$.
518.(договорные программы, 2007, июль, №1) Решить уравнение

$$\lg\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{\lg x} = 3.$$

Ответ: $x = 10^9$.
519.(геолог., устный, 2004+2006) Решите уравнение

$$\log_2(x^2 + 7) = 5 + \log_2 x - \frac{6}{\log_2\left(x + \frac{7}{x}\right)}.$$

Ответ: $x_1 = 1;\ x_2 = 7$.
520.(физ., 2002, март, №2) Решить уравнение

$$2^{\log_x[x(9x^2-12x+4)]} - 2^{(\log_2 9)+\log_x(3x-2)} + 4 = 0.$$

Ответ: $x = 2$.
521*. (биолог., 1995, июль, №1) Решить уравнение

$$4 \cdot (\log_4 x)^2 = \log_2 \frac{x^5}{16}.$$

Ответ: $x_1 = 2;\ x_2 = 16$.

522.(физ., 1994, июль, №5) Решить уравнение

$$\log^2_{1/3}(9x) + \log_3\left(\frac{x}{3}\right) = 9.$$

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{729}$.
523.(хим., 1998, май, №2) Решить уравнение

$$\log_4 x + 2\log_x 4 = 3.$$

Ответ: $\{4; 16\}$.
524.(ИСАА, 1999, июль, №1) Решить уравнение

$$\lg^2(x-2)^2 = 3^{\left(2\log_3\sqrt{2}\right)}\left(\frac{\log_5(2-x)}{\log_5 10}\right).$$

Ответ: $x_1 = 1;\ x_2 = 2 - \sqrt{10}$.
525.(психолог., 1978, №1) Решить уравнение

$$\left(\log_3\frac{3}{x}\right)\cdot\log_2 x - \log_3\frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2\sqrt{x}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\sqrt{3}}{8};\ 1\right\}$.
526.(психолог., 1981, №4) Решить уравнение

$$\frac{4}{3}\left(\log_3(5x-6)^3\right)^2 - \left(\log_3(5x-6)^3\right)\cdot\log_3 x^6 = -6\left(\log_3\frac{1}{x}\right)^2.$$

Ответ: $\left\{\frac{3}{2};\ \frac{36}{25}\right\}$.
527.(ИСАА, 2004, июль, №4) Решить уравнение

$$\left(2\log_4\left(2^{2x}+1\right) - x\right)\cdot\left(\log_2\left(2^x + 2^{-x}\right) - 2\right) = 8.$$

Ответ: $x = \log_2\left(8 \pm \sqrt{63}\right)$.
528.(геолог., 2002, май, №3) Решить уравнение

$$\frac{1}{4}\log_{x-1}(x-5)^4 - 8 + 4\log_{5-x}(6x - x^2 - 5) = 0.$$

Ответ: $x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$.
529.(ДВИ, 2015, №4) Решите уравнение $\log_x\left|2x^2-3\right| = 4\log_{|2x^2-3|} x$.
Ответ: $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{3}; \frac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}\right\}$.
530.(ДВИ, 2015, №4) Решите уравнение $\log_{\sqrt{x+1}}|4x-1| = 4\log_{|4x-1|}\sqrt{x+1}$.
Ответ: $\left\{-\frac{3}{4}; \frac{2}{3}; \frac{-3+\sqrt{41}}{8}\right\}$.
531.(эконом., 1979, №5) Решить уравнение

$$\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) = 4.$$

Ответ: $x = -\frac{1}{4}$.
532.(физ., 1993, июль, №3) Решить уравнение

$$\sqrt{2\log_3 x} = 4\log_3 \sqrt[4]{x} - 2.$$

Ответ: $x = 3^{3+\sqrt{5}}$.
533.(биолог., 2003, июль, №3) Решить уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_4 x = -1.$$

Ответ: $2^{\frac{-1-\sqrt{33}}{2}}$.
534.(ВМК, устный, 2003)Решить уравнение

$$\sqrt{\lg(-x)} = \lg\sqrt{x^2}.$$

Ответ: $\{-10; -1\}$.
535.(ВМК, устный, 2003)Решить уравнение

$$\sqrt[4]{\lg(-x)} = \lg\sqrt[4]{x^4}.$$

Ответ: $\{-10; -1\}$.
536.(ВМК, устный, 1996)Решить уравнение

$$x^{\lg x} = 100x.$$

Ответ: $\left\{100; \frac{1}{10}\right\}$.
537.(Севастополь, 2007, №6)Решите уравнение

$$x^{\log_3 x} = 9x.$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 9$.
538.(соц., 2008, №4) Решите уравнение

$$\left(x^2\right)^{\log_3 x} = \frac{x^5}{9}.$$

Ответ: $x_1 = 9$, $x_2 = \sqrt{3}$.
539.(ВМК, устный, 2000+2003)Решить уравнение

$$x^{\lg 2x} = 5.$$

Ответ: $\{0,1; 5\}$.
540.(психолог., 1976, №3) Решить уравнение

$$x^{\lg x} = 5 \cdot 2^{\lg x^2 - 1}.$$

Доказать, что все его корни являются рациональными числами.
Ответ: $\left\{\frac{2}{5};\ 10\right\}$.

541.(геолог., устный, 2000) Решите уравнение

$$x^{\log_2 \frac{x}{98}} 14^{\log_2 7} = 1.$$

Ответ: $\{7; 14\}$.

542.(ВМК, устный, 1995)Доказать, что корни уравнения

$$9x^{\log_6 x} = 4 \cdot 54^{\log_6 x}$$

рациональны.

Ответ: $x_1 = 36;\ x_2 = \frac{3}{2}$.

543.(почвовед., 1996, июль, №3) Решить уравнение

$$x^{2\log_4 x} = \frac{8}{x^2}.$$

Ответ: $x_1 = 2;\ x_2 = \frac{1}{8}$.

544.(ВМК, устный, 1991) Решить уравнение

$$2^{\sqrt{\log_2 x}} = x^{\sqrt{\log_x 2}}.$$

Ответ: $x > 1$.

545.(психолог., 1999, июль, №2) Решить уравнение

$$x^{\log_5 9} + 7 \cdot 3^{\log_5 x} - 11 = 0.$$

Ответ: $x = 5^{\log_3\left(\frac{-7+\sqrt{93}}{2}\right)}$.

546.(геолог., устный, 2004) Решите уравнение

$$x^{\lg 9} + 9^{\lg x} = 6.$$

Ответ: $x = \sqrt{10}$.

547.(Высшая школа государственного аудита, 2008, №6) Решить уравнение

$$9^{(\log_3 x)^2 - \frac{1}{2}} = x^{\log_3 x} + 18.$$

Ответ: $3^{\pm\sqrt{2}}$.

548.(ИСАА, 1995, июль, №2) Решить уравнение

$$\log_2(x^2 - 4x + 3) - \log_2(x-1) \cdot \log_2(x-3) = 1.$$

Ответ: $x = 5$.

549.(Ташкент, 2008, №7) Решить уравнение

$$\log_2(4-x) \cdot \log_{\sqrt{0,5}}(x+5) - 2\log_{0,5}\left(10 - \frac{x+x^2}{2}\right) = 0.$$

Ответ: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

550.(хим., 2001, май, №3) Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} x + \log_x(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}) = \frac{3}{2} + \log_x(2\sqrt{6}).$$

Ответ: $x_1 = (\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2; x_2 = (\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^{-\frac{1}{2}}$.
551.(биолог., 1965, №4) Найти все решения уравнения

$$\sqrt{1+\log_2 x} + \sqrt{4\log_4 x - 2} = 4.$$

Ответ: $x = 8$.
552.(мех-мат, 2003, июль, №2) Решить уравнение

$$\left|5^{\log_x 122} - x^{\log_5 x} + 614\right| = 636 - 5^{\log_x 122} - x^{\log_5 x}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{25}$.
553.(биолог., 1993, июль, №2) Решить уравнение

$$\log_2\left(9^x + 2\cdot 3^x - 5\right) = 1 + 2\log_4\left(3^{x+1} - 4\right).$$

Ответ: $x = 1$.
554.(эконом. (полит. экономия), 1970, №3) Решить уравнение

$$\log_2 \log_2 x = \log_4 \log_4 (2x).$$

Ответ: $x = 2$.
555.(почвовед., 1998, май, №3) Решить уравнение

$$\log_{0,5}\left(\log_4 \frac{1}{x}\right) + \log_4\left(\log_2(16x^2)\right) = 0.$$

Ответ: $x = 2^{4-4\sqrt{2}}$.

556.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2005", №5) Найти произведение всех действительных корней уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2^{\log_2^2 x} = 2^{\frac{3}{\sqrt{2}}(\log_2 x - \log_x 2)}.$$

Ответ: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 2^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$.
557*. (мех-мат, 1996, май, №2) Вычислить

$$\log^2_{\frac{x}{y}} x + \log^2_{\frac{y}{x}} y,$$

если

$$\log_{\frac{x}{y}}\left(x^9\right) = \log_{\sqrt{y}}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ответ: $\frac{5}{9}$.

558*. (мех-мат, 1999, март, №3) Известно, что для некоторой тройки чисел x, y, z $(x \neq y)$ выражения

$$\log_{x^5y^2z}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{z}\right)$$

и

$$\log_{x^2y^5z}\left(\frac{\sqrt{xy}}{z}\right)$$

равны одному и тому же числу. Найдите это число.

Ответ: $\frac{1}{18}$.

559.(мех-мат, 2005, июль, №2) Найти $\log_2 \frac{2x}{2^x}$ при условии

$$\left|\log_{\sqrt{2}} x^{x/2} - 2\log_2 x\right| + ||2-x| - |\log_2 x|| \leq (x-2)\log_8 x^3.$$

Ответ: -1.

2.8.3 Графический метод и метод оценок

560.(ВШБ, 2006, №4) Найти все пары чисел x и y, удовлетворяющие условию

$$\log_5^2\sqrt{x+y} + \log^2_{\sqrt{x+y}} 5 = \sqrt{\frac{6x}{x^2+9}} + 1.$$

Ответ: $(3; 22)$, $\left(3; -\frac{74}{25}\right)$.

561.(ФНМ, 2003, апрель, №2) Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(1 + (x^2-3x+2)^2\right) = \sqrt{x^2-6x+8}.$$

Ответ: $x = 2$.

562.(ФНМ, 2004, заочный тур олимпиады, №2) Найти все пары (x, y), удовлетворяющие уравнению

$$2\log_5\left(\frac{1}{16}\cdot 7^x + 7^{-x}\right) + \log_5\left(2y^2 + 12y + 26\right) + 4x\cdot\log_{\frac{1}{5}} 7$$
$$= 4\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{16}\cdot 7^{2x} + 1\right) + \log_{\frac{1}{5}}\left(2(y+3)^2 + 8\right).$$

Ответ: $(\log_7 4; -3)$.

563.(мех-мат, 2003, заочный тест, №2) Решить уравнение

$$(2 - \log_2(|x+4| - |x-8|))\cdot\log_{\frac{1}{3}}(|x-1| - |x-4|) = \log_2 3.$$

Ответ: $x \geq 8; x = \frac{8}{3}$.

564.(геолог., устный, 2008, май) Имеет ли решения уравнение

$$\lg(1-x) = \log_{1-x} x?$$

Ответ: нет.

565.(ВМК, устный, 1999)Решить уравнение

$$\log_{x-1} x - \log_x (x+1) = 0.$$

Ответ: $\emptyset$.

566.(психолог., 1982, №6) Решить уравнение

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3).$$

Ответ: $x = 1 \pm \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}$.

567.(ВКНМ, 1998, №6) Решить уравнение

$$\log_2(3x+1) \cdot \log_5(3x+4) + \log_3(3x+2) \cdot \log_4(3x+3)$$
$$= 2 \cdot \log_3(3x+2) \cdot \log_5(3x+4).$$

Ответ: $x = \frac{1}{3}$.

2.9 Использование общих свойств функций

568.(физ., 1992, №7) Известно, что некоторая нечетная функция при $x > 0$ определяется формулой

$$f(x) = \log_3\left(\frac{x}{3}\right).$$

Найти, какой формулой определяется $f(x)$ при $x < 0$. Решить уравнение $f(x) = 3$.

Ответ: $f(x) = \log_3\left(-\frac{3}{x}\right)$, если $x < 0$; $x_1 = -\frac{1}{9}$, $x_2 = 81$.

569*. (эконом. (менеджмент), 1997, июль, №5) Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является нечетной, периодической с периодом 4 и на промежутке $0 \le x \le 2$ ее значения вычисляются по правилу $f(x) = 1 - |x - 1|$. Решить уравнение

$$2f(x) \cdot f(x-8) + 5f(x+12) + 2 = 0.$$

Ответ: $-\frac{3}{2} + 4n$, $-\frac{1}{2} + 4m$, где $n, m \in Z$.

570.(эконом., 1997, июль, №5) Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является нечетной, периодической с периодом 4 и на промежутке $-2 \le x \le 0$ ее значения вычисляются по правилу $f(x) = 2x(x+2)$. Решить уравнение

$$\frac{2 \cdot f(-3-x) - 3}{\sqrt{f\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) - \sqrt{2}}} = 0.$$

Ответ: $-\frac{1}{2} + 8n$, где $n \in Z$.

571.(почвовед., 2000, май, №6) Пусть $f(x)$ – периодическая функция с периодом 8, такая, что $f(x) = 8x - x^2$ при $x \in [0; 8]$. Решите уравнение:

$$f(2x+16) + 23 = 5f(x).$$

Ответ: $1 + 8n$, $7 + 8m$, где $n, m \in Z$.

2.10 Функциональные уравнения

572*. (ВМК, устный, 1997) Существует ли линейная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая при всех x соотношению

$$2f(x+2) + f(4-x) = 2x + 5?$$

Ответ: да, $f(x) = 2x - \frac{11}{3}$.

573.(ВМК, устный, 1997+2001+2005)Существует ли линейная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая для всех действительных x соотношению

$$f(x+3) - f(2-x) = 3x + 1?$$

Ответ: нет.

574.(ВМК, устный, 1997) Найти квадратичную функцию $y = f(x)$, удовлетворяющую при всех x уравнению

$$f(1-x) - f(2-x) = -2x + 7.$$

Ответ: $f(x) = -x^2 - 4x + c$, где c – произвольная константа.

575.(ВМК, устный, 1997) Существует ли квадратичная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая при всех x соотношению

$$f(x+1) + f(2-x) = (x+1)^2?$$

Ответ: нет.

576.(мех-мат, 2008, №5) Найти все функции f, удовлетворяющие уравнению

$$f(x) + (x-2)f(1) + 3f(0) = x^3 + 2,\ x \in R.$$

Ответ: $f(x) = x^3 - x + 1$.

577.(ВМК, устный, 2002 + олимпиада Румынии, 1980)Найти все многочлены

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

степени n, т.е. с коэффициентом $a_n \neq 0$, удовлетворяющие тождеству

$$P(x^2) \equiv \left(P(x)\right)^2,\ x \in (-\infty; +\infty).$$

Ответ: $P(x) = x^n$.

578.(ВМК, устный, 2008, май)Найти все функции $f(x)$, которые при каждом x удовлетворяют уравнению

$$f(x) + x \cdot f(1-x) = 3x.$$

Ответ: $f(x) = \frac{3x^2}{x^2-x+1}$.

579.(ВМК, устный, 1996) Найти функцию $y = f(x)$, удовлетворяющую при всех $x \neq 0$ соотношению

$$f(x) + 3x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x^2.$$

Ответ: $f(x)=\frac{3-x^3}{4x}$.

580.(хим., 2000, заочный тур) Найти значения x, при которых функция $f(x)$, удовлетворяющая при всех $x\neq 0;1$ уравнению

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x,$$

имеет экстремумы. Найти эту функцию.

Ответ: $f(x)=\frac{x^3-x+1}{2x(x-1)}$.

581*. (биолог., 2005, июль, №7) Задана функция f, причем $f(x+y)=f(x)+f(y)$ для всех рациональных чисел x,y. Известно, что $f(10)=-\pi$. Найти $f\left(-\frac{2}{7}\right)$.

Ответ: $\frac{\pi}{35}$ $(f(x)=-\frac{\pi}{10}x$ для рациональных $x)$.

582.(биолог., 2005, июль, №7)Задана функция f, причем $f(x-y)=f(x)-f(y)$ для всех рациональных чисел x,y. Известно, что $f(6)=-\sqrt{3}$. Найти $f\left(-\frac{5}{4}\right)$.

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{24}$ $(f(x)=-\frac{\sqrt{3}}{6}x$ для рациональных $x)$.

583.(биолог., 2005, июль, №7)Задана функция f, причем $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ для всех рациональных чисел x,y. Известно, что $f(4)=16$. Найти $f\left(-\frac{3}{2}\right)$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$ $(f(x)=2^x$ для рациональных $x)$.

584.(биолог., 2005, июль, №7)Задана функция f, причем $f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$ для всех рациональных чисел x,y. Известно, что $f(3)=27$. Найти $f\left(-\frac{5}{2}\right)$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{27}$ $(f(x)=3^x$ для рациональных $x)$.

585*. (мех-мат, устный, 2003 + ВМК, устный, 2008) Числовая функция для любых действительных чисел x , y удовлетворяет равенству

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+80xy.$$

Найти $f\left(\frac{4}{5}\right)$, если $f\left(\frac{1}{4}\right)=2$.

Ответ: $f\left(\frac{4}{5}\right)=24$; при рациональных x $f(x)=40x^2+kx$, где $k=-2$.

586*. (мех-мат, 2001, олимпиада, 10 класс) Числовая функция $f(x)$ при каждом действительном x удовлетворяет равенству

$$x+f(x)=f(f(x)).$$

Решить уравнение $f(f(x))=0$.

Ответ: $x=0$.

587.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2005", №10) Существуют ли функции f и g, определенные на всей числовой прямой и при каждом x удовлетворяющие равенствам:

$$f(g(x))=x^2,\quad g(f(x))=x^3?$$

Ответ: нет (указание: докажите, что f – инъекция и удовлетворяет уравнению $f(x)=\left(f\left(\sqrt[3]{x}\right)\right)^2$).

588*. (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2011", 9-10 кл., №9) Найдите все функции $f : R \to R$, такие, что $f(f(x)) = -x^{2011}$ при всех x.

Ответ: таких функций нет.

589.(ВМК, устный, 2002 + олимпиада Болгарии, 1968)Найти все функции $f(x)$, удовлетворяющие тождеству

$$x \cdot f(y) + y \cdot f(x) \equiv (x + y) \cdot f(x) \cdot f(y)$$

для любых $x, y \in (-\infty; +\infty)$.

Ответ: $f(x) \equiv 0$; $f_c(x) \equiv 1$ при $x \neq 0$, $f_c(0) = c$, где c – произвольная константа.

Глава 3

Неравенства

3.1 Рациональные неравенства

3.1.1 Квадратичные неравенства

590*. (физ., 1992, №1) Решить неравенство

$$8x - 1 < 4x^2.$$

Ответ: $\left(-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$.

591.(фил., 1970, №4) Доказать, что $11n^2 - 14n + 3 \geq 0$ при всех целых n.

592.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2013", №5) Найдите сумму всех целых значений аргумента x, при которых соответствующие значения функции $y = x^2 + x(\log_2 18 - \log_3 12) - \log_3 16 - 4\log_2 3$ не превосходят 8.

Ответ: -9.

3.1.2 Целые рациональные неравенства высших степеней

Метод интервалов

593*. (физ., 1993, май, №1) Решить неравенство

$$x^5 < x.$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$.

594.(фил., 1971, №3) Определить, сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$(n^2 - 1)(n^2 - 11)(n^2 - 101)(n^2 - 1001) < 0.$$

Ответ: 46.

595*. (Севастополь, 2002, май, №6) Решите неравенство

$$x^4 + x^3 + x + 1 > 18x^2.$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{-5+\sqrt{21}}{2}; 2-\sqrt{3}\right) \cup \left(2+\sqrt{3}; +\infty\right)$.

596.(эконом. (отд. менеджмента), 2007, №4) Решите неравенство

$$(3x-4)\cdot\left(x^2 - \left(\log_3 4 + \frac{5}{4}\right)x + \frac{5\log_3 4}{4}\right) > 0.$$

Ответ: $\frac{5}{4} < x < \log_3 4$, $x > \frac{4}{3}$.

597.(эконом., 2007, №3) Решите неравенство

$$\left(x^2 - \log_2\left(\frac{3^x}{5}\right) - \log_3\left(5^x\right)\right)\cdot\log_5\left(125\cdot 25^{x-3}\right) < 0.$$

Ответ: $x < \log_3 5$, $\frac{3}{2} < x < \log_2 3$.

Метод новой неизвестной

598*. (географ., 1965, №4) Решить неравенство

$$x^4 - 5x^2 + 4 < 0.$$

Ответ: $(-2; -1) \cup (1; 2)$.

599.(эконом. (полит. эконом.), 1968, №4) Решить неравенство

$$x^4 - 12x^2 + 36 \leq 0.$$

Ответ: $x = \pm\sqrt{6}$.

600.(почвовед., 1996, июль, №2) Решить неравенство

$$3x^4 + 4 < 13x^2.$$

Ответ: $\left(-2; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 2\right)$.

601.(геолог.(геофизика), 1974, №1) Решить неравенство

$$(x^2+3x+1)(x^2+3x-3) \geq 5.$$

Ответ: $(-\infty; -4] \cup [-2; -1] \cup [1; +\infty)$.

602.(почвовед., 1998, май, №2) Решить неравенство

$$(x^2-4x)^2 \geq 16.$$

Ответ: $x \leq 2-\sqrt{8}$; $x \geq 2+\sqrt{8}$; $x = 2$.

3.1.3 Дробно-рациональные неравенства

Метод интервалов

603*. (ИСАА, 2005, июль, №1) Решить неравенство

$$\frac{x^2+2x-8}{x+4} \le 1.$$

Ответ: $(-\infty;3] \setminus \{-4\}$.

604.(МШЭ, 2005, июль, №1) Решите неравенство

$$\frac{1}{1-x} \le 1+x.$$

Ответ: $\{0\} \cup (1;+\infty)$.

605.(ф-т биоинженерии и биоинформатики, 2009, №1) Решить неравенство

$$\frac{x^2+3x+7}{x-3} \ge -1.$$

Ответ: $\{-2\} \cup (3;+\infty)$.

606.(Ташкент, 2008, №3) Решить неравенство

$$\frac{5x-1}{2-x} \le 1.$$

Ответ: $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right] \cup (2;+\infty)$.

607*. (хим., 1995, июль, №1) Решите неравенство

$$\frac{3x}{x^2+2} \ge 1.$$

Ответ: $[1;2]$.

608.(геолог., устный, 2005) Решите неравенство

$$\frac{x^2+3}{x^2+3x-4} \ge 0.$$

Ответ: $(-\infty;-4) \cup (1;+\infty)$.

609.(соц., 2007, июль, №2) Решить неравенство

$$\frac{(x-2)(x-5)(x-8)}{(x+2)(x+5)(x+8)} \ge -1.$$

Ответ: $(-\infty;-8) \cup (-5;-2) \cup [0;\infty)$.

610.(соц., 2004, июль, №1) Решить неравенство

$$\frac{x^2+8x+15}{x^2+7x+14} \le 0.$$

Ответ: $[-5;-3]$.

611.(хим., 1993, июль, №1) Решите неравенство

$$\frac{4}{(x-1)^2} \geq 1.$$

Ответ: $[-1,1) \cup (1,3]$.

612.(эконом., отд. менеджмента, 2006, №1) Решить неравенство

$$\frac{4}{x+2} - \frac{1}{x-1} < 0.$$

Ответ: $(-\infty;-2) \cup (1;2)$.

613.(ИСАА, 2006, №1) Решите неравенство

$$\frac{5x+1}{(x+2)(x-3)} \geq 1 + \frac{16}{x-3}.$$

Ответ: $(-2;3) \cup \{-5\}$.

614.(физ., 1997, март, №2) Решить неравенство

$$\frac{3x}{x^2-9} \leq \frac{1}{x+2}.$$

Ответ: $(-\infty;-3) \cup (-2;3)$.

615.(физ., 1996, март, №2) Решить неравенство

$$\frac{1-2x}{x-5} < \frac{1}{3-x}.$$

Ответ: $(-\infty;2) \cup (2;3) \cup (5;+\infty)$.

616.(физ., 1995, май, №3) Решить неравенство

$$\frac{x+2}{x} \leq \frac{x}{x+1}.$$

Ответ: $(-\infty;-1) \cup \left[-\frac{2}{3};0\right)$.

617.(ФГП, 2005, июль, №2) Решите неравенство

$$\frac{1}{2x^2+3x} \leq \frac{1}{3x-2x^3}.$$

Ответ: $\left(-\frac{3}{2};-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup [-1;0) \cup \left(0;\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

618.(хим., 2004, июль, №1) Решить неравенство

$$\frac{10+3x-x^2}{x^2-3x+2} \leq 1.$$

Ответ: $(-\infty;-1] \cup (1;2) \cup [4;+\infty)$.

619.(почвовед., 1995, июль, №3) Решите неравенство

$$4x+7 \leq \frac{2}{x}.$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup (0; 1/4]$.

620.(геолог., 1995, май, №1) Решите неравенство

$$\frac{7}{(x-2)(x-3)} + \frac{9}{x-3} + 1 \leq 0.$$

Ответ: $[-5; 1] \cup (2; 3)$.

621.(географ., 2002, май, №1) Решите неравенство

$$\frac{1}{x} \leq 5.$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$.

622*. (хим., 1999, июль, №1) Решить неравенство

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \leq 2.$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$.

623.(геолог., 2001, июль, №1) Решите неравенство

$$\frac{\frac{1}{x-5} - 1}{1 - \frac{1}{x-8}} \geq 0.$$

Ответ: $5 < x \leq 6; 8 < x < 9$.

624.(почвовед., 2002, май, №3) Решите неравенство

$$\frac{1}{x-1} \leq \frac{4}{x^2}.$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup \{2\}$.

625.(физ., 2004, март, №2) Решить систему неравенств

$$-2 < \frac{2}{x^2 - x - 2} < -1.$$

Ответ: $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

626.(ФНМ, 2002, апрель, №1) Найти все значения x, при которых график функции $y = \frac{3}{x-1}$ лежит не выше графика функции $y = 2x$.

Ответ: $\left[\frac{1-\sqrt{7}}{2}; 1\right) \cup \left[\frac{1+\sqrt{7}}{2}; +\infty\right)$.

627.(фил., 1999, июль, №2) Решить неравенство

$$\frac{1}{x^2 + 8x - 9} \geq \frac{1}{3x^2 - 5x + 2}.$$

Ответ: $(-\infty; -9) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right) \cup \left[\frac{11}{2}; +\infty\right)$.

628.(мех-мат, 2003, заочный тест, №1) Решите неравенство

$$\frac{5x}{2x^2 - 5x + 2} \leq \frac{19x + 2 - 8x^2}{10x^2 - 19x}.$$

Ответ: $\frac{7-\sqrt{65}}{8} \leq x < 0$; $\frac{1}{2} < x \leq \frac{7+\sqrt{65}}{8}$; $1,9 < x < 2$.
629.(физ., 1996, июль, №2) Решить неравенство

$$\frac{x-1}{x\sqrt{4+3x-x^2}} > 0.$$

Ответ: $(-1;0) \cup (1;4)$.
630.(ДВИ, 2012, август, №5)Решите неравенство:

$$\left(x^2-5x+4\right)\left(x^2-9x+20\right) \cdot 2^{\sqrt{x}} \geq 0.$$

Ответ: $[0;1] \cup \{4\} \cup [5;+\infty)$.

Метод новой неизвестной

631*. (ВМК, 2004, апрель, №2) Решить неравенство

$$\frac{1}{x^2-5x+7} \leq 5x-x^2-5.$$

Ответ: $\{2;3\}$.
632.(Ташкент, 2007, №5) Решите неравенство

$$\frac{8}{9x^2+6x}+3x^2+2x \leq \frac{11}{3}.$$

Ответ: $\left[-\frac{4}{3};-1\right] \cup \left(-\frac{2}{3};0\right) \cup \left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$.

3.2 Неравенства с модулями

3.2.1 Универсальный метод решения

633.(соц., 2001, июль, №1) Решить неравенство

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{|x|} \geq 2.$$

Ответ: $(-1;0) \cup \left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.
634.(физ., 1993, июль, №5) Решить неравенство

$$\frac{|x+2|-x}{x} < 2.$$

Ответ: $(-\infty;0) \cup (1;+\infty)$.
635.(Ташкент, 2006, №2)Решите неравенство

$$x\left(|x-1|-2\right) \geq 0.$$

Ответ: $[-1;0] \cup [3;+\infty)$.

636.(ВМК, 1998, июль, №1) Решить неравенство

$$2x > \frac{5x+3}{|x+2|}.$$

Ответ: $\left(-\frac{9+\sqrt{57}}{4}; -2\right) \cup (-2; -1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

637.(ФНМ, 2003, апрель, №3) Решите неравенство

$$\frac{4x}{|x-2|-1} \geq 3.$$

Ответ: $\left[\frac{3}{7}; 1\right) \cup (3; +\infty)$.

638.(ИСАА, 1998, июль, №3) Решить неравенство

$$\frac{3|x|-11}{x-3} > \frac{3x+14}{6-x}.$$

Ответ: $(-2; 2) \cup (2; 3) \cup (6; +\infty)$.

639.(географ., 2003, июль, №2) Решить неравенство

$$\frac{6}{|x|} \geq 7 + x.$$

Ответ: $(-\infty; -6] \cup [-1; 0) \cup \left(0; \frac{\sqrt{73}-7}{2}\right]$.

640.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2006", очный тур-геолог., №1) Решите неравенство

$$(4x-1)(2x^2+|x|-1) \geq 0.$$

Ответ: $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{4}$, $x \geq 2$.

641.(геолог., 2005, июль, №1) Решите неравенство

$$(|x|-1)(2x^2+x-1) \leq 0.$$

Ответ: $\left[\frac{1}{2}; 1\right] \cup \{-1\}$.

642.(геолог., 2004, июль, №1) Решите неравенство

$$\frac{x-2}{|x-2|} \leq 4 - x^2.$$

Ответ: $[-\sqrt{5}; 2)$.

643.(геолог., 2003, июль, №1) Решите неравенство

$$\frac{x+1}{|x-1|} + \frac{1-2x}{x-1} \geq 0.$$

Ответ: $[0, 1) \cup (1, 2]$.

644.(ФГУ, 2003, июль, №2) Решите неравенство

$$|2x+8| \geq 8 - |1-x|.$$

Ответ: $x \leq -5;\ x \geq -1$.

645.(ВМК (отд. бакалавров), 2003, июль, №1) Решите неравенство

$$3|x+2| - 4|x+1| \geq 2.$$

Ответ: $-\frac{8}{7} \leq x \leq 0$.

3.2.2 Метод новой неизвестной

646.(почвовед., 2003, июль, №3) Решить неравенство

$$\frac{3}{2}x^2 - |x| \geq 0.$$

Ответ: $x \leq -\frac{2}{3}$; $x \geq \frac{2}{3}$; $x = 0$.

647.(ВМК/физ/эконом. (подгот. отд.), 1997, №2) Решить неравенство

$$|x+2| \geq 3 + \frac{1}{5 - |x+2|}.$$

Ответ: $x < -7$; $x > 3$; $x = 2$; $x = -6$.

648.(ФНМ, 2004, апрель, №2) Решить неравенство

$$|3x+1| + 2 + \frac{3}{|3x+1| - 2} \leq \frac{1}{|3x+1| + 2}.$$

Ответ: $-1 < x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{3}-2}{3} \leq x < \frac{1}{3}; x = -\frac{1}{3}$.

649.(физ., 2004, июль, №2) Решить неравенство

$$\frac{|x-1|}{1 - \frac{6}{|x-1|}} < -1.$$

Ответ: $(-5; -1) \cup (3; 7)$.

650.(геолог., 1998, май, №6) Решить неравенство

$$\left|\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| - 3x + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3x^2}{2} - \left|\frac{x^2}{2} + x - \sqrt{2}\right|$$

Ответ: $\left(-\infty; -1 - \sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{3} + 1}\right) \cup \left(-1 + \sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{3} + 1}; +\infty\right)$.

3.2.3 Специальные методы решения

Определение и простейшие свойства модуля

651.(соц., 2008, №1) Решите неравенство

$$|x| \leq \frac{18 - 3x}{|x|}.$$

Ответ: $(-6; 3) \setminus \{0\}$.

652.(МШЭ, 2007, №3) Решите неравенство

$$\left|\frac{x}{10} - \frac{1}{5}\right| \geq \left|\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right|.$$

Ответ: $x = 2$.

653.(ИСАА, 2007, №1)Решите неравенство

$$|x+3|\cdot(|x-1|-3)\le 0.$$

Ответ: $\{-3\}\cup[-2;4]$.
654.(геолог., устный, 2008, май) Решите неравенство

$$\frac{|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-2007|}{|2008-x|-1}\le 0.$$

Ответ: $2007<x<2009$.
655*. (геолог., 2007, №1)Решите неравенство

$$|x-12|\le\frac{x}{12-x}.$$

Ответ: $[9;12)$.
656.(ФГП, 2006, №3) Решите неравенство

$$\frac{|x^2+x-12|}{x-3}\ge 1.$$

Ответ: $(3;+\infty)$.
657.(соц., 2006, №1) Решите неравенство

$$\frac{5-4x}{|x-2|}\le|2-x|.$$

Ответ: $(-\infty;-1]\cup[1;2)\cup(2;+\infty)$.
658.(геолог., 2006, №1) Решите неравенство

$$\frac{x^2-9}{|x|-3}\cdot(x+4)\ge 0.$$

Ответ: $[-4;+\infty)\setminus\{3;-3\}$.
659.(ФГП, 2006, №1) Решите неравенство

$$\lg\left(\frac{\pi}{\sqrt{10}}\right)^{2x}\cdot(|x+1|+|2x-1|)\ge 0.$$

Ответ: $(-\infty;0]$.

Неравенства вида $|a|<b$

660*. (почвовед., 2005, июль, №3) Решить неравенство

$$|x-1|\le x.$$

Ответ: $x\ge\frac{1}{2}$.

661.(Ташкент, 2007, №2) Решите неравенство

$$|2x-3|-x \leq 1.$$

Ответ: $\frac{2}{3} \leq x \leq 4$.
662.(ВМК (отд. бакалавров), 2005, апрель, №2) Решить неравенство

$$\left|x^2-x-1\right| \leq 5.$$

Ответ: $[-2;3]$.
663.(Севастополь, 2004, июль, №6) Решить систему неравенств

$$\begin{cases} |x^2-4x|<2, \\ |x+1|<5. \end{cases}$$

Ответ: $(2-\sqrt{6};2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2};4)$.
664.(эконом. (полит. эконом.), 1969, №2) Решить неравенство

$$\left|x^2-1\right|-2x<0.$$

Ответ: $(\sqrt{2}-1;\sqrt{2}+1)$.
665.(физ., 1999, июль, №2) Решить неравенство

$$\left|2-\frac{1}{x-3}\right|<3.$$

Ответ: $(-\infty;2) \cup \left(\frac{16}{5};+\infty\right)$.
666.(Севастополь, 2003, май, №4) Решите неравенство

$$\left|\frac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}\right| \leq 1.$$

Ответ: $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right] \setminus \{-1\}$.
667.(геолог., 2001, май, №1) Решите неравенство

$$\frac{|x-2|+1}{|2x+3|-7} \leq 0.$$

Ответ: $(-5;2)$.
668.(ВШБ, 2005, июль, №1) Решите неравенство

$$\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x-|2x-1|}} \geq 0.$$

Ответ: $\frac{1}{3}<x<1$.
669.(ВШБ, 2004, июль, №1) Решить неравенство

$$\frac{x+1}{|x-1|} \geq 1.$$

Ответ: $[0;1) \cup (1;+\infty)$.

Неравенства вида $|a| > b$

670.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2009", очный тур: Челябинск, №2) Решите неравенство

$$\left|\left|36^{x^2}-1\right|-2\right| \geq 3.$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$.

671.(физ., 1998, май, №2) Решить неравенство

$$|x^2+2x-3| > x.$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$.

672.(Севастополь, 2007, №2) Найдите все целые значения x, для которых справедливо неравенство

$$\left|\frac{3}{x-2}\right| > \frac{9}{7}.$$

Ответ: $\{0; 1; 3; 4\}$.

673.(физ., 2003, июль, №2) Решить неравенство

$$|x^2+3x| + x^2 - 2 \geq 0.$$

Ответ: $x \leq -\frac{2}{3}$; $x \geq \frac{1}{2}$.

674.(ВМК, 2000, апрель, №1) Решить неравенство

$$\left||x^2-8x+2| - x^2\right| \geq 2x+2.$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [1; 2] \cup [5; +\infty)$.

Неравенства вида $|a| < |b|$

675*. (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2006", очный тур-ВМК, №1) Найти наименьшее целое число x, удовлетворяющее неравенству

$$|2x^2-7x-1| \geq |2x^2-9x+5|.$$

Ответ: $x = 1$.

676*. (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2006", очный тур-эконом., №2) Найти наименьшее целое число x, удовлетворяющее неравенству

$$\left|2-\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2}\right| \geq \left|2-\frac{9}{x}+\frac{5}{x^2}\right|.$$

Ответ: $x = 1$.

677*. (мех-мат, 2008, №1) Решить неравенство

$$\left||1-x^2| - |x^2-3x+2|\right| \geq 3|x-1|.$$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup \{1\} \cup [2; \infty)$.

678.(мех-мат, 2004, март, (заочный тест), №1) Решить неравенство

$$\left|x^3 + 2x^2 + 2\right| < \left|x^3 + 3x^2 + 3x - 2\right|.$$

Ответ: $\left(-4; -\frac{3}{2}\right) \cup (-1; 0) \cup (1; +\infty)$.

679.(мех-мат, 2004, июль, №2) Решить неравенство

$$\frac{(x^2 + x + 1)^2 - 2|x^3 + x^2 + x| - 3x^2}{10x^2 - 17x - 6} \geq 0.$$

Ответ: $(-\infty, -2 - \sqrt{3}] \cup (-0,3; -2 + \sqrt{3}] \cup \{1\} \cup (2; +\infty)$.

680.(мех-мат, 2000, март, №1) Решить неравенство

$$\frac{|x-4| - |x-1|}{|x-3| - |x-2|} < \frac{|x-3| + |x-2|}{|x-4|}.$$

Ответ: $(3; 4) \cup (4; 7)$.

681.(геолог.+МШЭ, 2008, №2)Решите неравенство

$$|x+1| \leq \sqrt{(x+1)^2(x^2 - 25)}.$$

Ответ: $x \leq -\sqrt{26}$, $x \geq \sqrt{26}$, $x = -1$.

3.3 Неравенства, включающие функции max и min

682*. (психолог., 1971, №3) Найти все x такие, что наименьшее из чисел $1 - x^2$, $\frac{1-x}{2}$ больше $\frac{1}{2}$.

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$.

683.(ВШБ, 2006, №1) Дана функция $f(x) = \min\{2x - x^2, x - 1\}$. Найти все значения x, при которых $f(x) > -3$.

Ответ: $-1 < x < 3$.

684.(почвовед., 1990, №5)Найти все значения x, при которых наибольшее из значений функций $y = 2x + 1$ и $y = x + 2$ больше -1.

Ответ: $x > -3$.

685.(ВМК, устный, 2003)Решить неравенство

$$\min\left(1 - x^2, \frac{1-x}{2}\right) > \frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$.

686.(эконом., 2010, №6) Найдите все значения x, при которых наименьшее из чисел $(x+1)^3$ и $x^2 - 3x - 2$ меньше, чем наименьшее из чисел $x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ и $x^2 + 5x + 4$.

Ответ: $x < \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$, $x > -1$.

687*. (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2007", №7) Решить уравнение

$$f(x,y,z)+|f(z,y,x)|=0,$$

где обозначено

$$f(a,b,c)=(a+b+2c+|a-b|)+|a+b-2c+|a-b||\,.$$

Ответ: $x,y,z\le 0$.

3.4 Неравенства, включающие функции $[x]$ и $\{x\}$

688.(ВМК, устный, 2003+2008)Введем обозначения: $[a]$ – целая часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a; $\{a\}$ – дробная часть числа a, т.е. $\{a\}=a-[a]$. Решить неравенство

$$[x]\cdot\{x\}<x-1.$$

Ответ: $x\ge 2$.

3.5 Показательные неравенства

3.5.1 Неравенства, приводимые к виду $a^{f(x)}<a^{g(x)}$

689.(геолог., устный, 1998) Решить неравенство

$$7^{4x}<7^{x^3}.$$

Ответ: $(-2;0)\cup(2;+\infty)$.
690.(эконом.(полит. эконом.), 1980, №2) Решить неравенство

$$3^{4x^2-3x+\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-40x^2}.$$

Ответ: $x<-\frac{1}{6};\ x>\frac{1}{12}$.
691.(физ., 1998, март, №3) Решить неравенство

$$3^{\frac{2x-15}{x}}>\sqrt[3]{27^{2x+15}}.$$

Ответ: $x<-5,-\frac{3}{2}<x<0$.
692.(физ., 1997, март, №5) Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}<25^{-\frac{1}{x}}.$$

Ответ: $(-1;0)\cup(2;+\infty)$.

693.(физ., 1980, №4) Решить неравенство

$$2^{x-1} > \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Ответ: $x > 0$.
694.(геолог., 1997, май, №4) Решить неравенство

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x^2} > (6,25)^{x^2-6}.$$

Ответ: $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$.
695.(хим., 2005, июль, №2) Решить неравенство

$$\sqrt{3}\cdot 4^x \le \sqrt{2}\cdot 9^x.$$

Ответ: $x \ge \frac{1}{4}$.
696.(ИСАА, 2008, №2) Решить неравенство

$$\frac{128}{729}\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{x}} \ge \frac{4^x}{\sqrt[4]{81^{2x-1}}}.$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [3; +\infty)$.
697*. (мех-мат, 1993, май, №1) Решить неравенство

$$\left(\sqrt[3]{7}\right)^{35x} > \frac{1}{7}\cdot 7^{|4x^2-12x-1|}.$$

Ответ: $-\frac{1}{12} < x < 0$; $\frac{1}{12} < x < 6$.
698.(ВМК/эконом. (подгот. отд.), 1993, №1) Решить неравенство

$$0,2^{x^2-4x-9|x-2|+10,5} \ge \frac{25}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $[-6; 1] \cup [3; 10]$.
699.(хим., 1982, №3) Решить неравенство

$$f(g(x)) < g(f(x)),$$

где $f(x) = 2^x - 1$, $g(x) = 2x + 1$.
Ответ: $x < 0$.
700.(хим., 1982, №3) Решить неравенство

$$(\sqrt{2}+1)^{\frac{6x-6}{x+1}} \le (\sqrt{2}-1)^{-x}.$$

Ответ: $(-1; 2] \cup [3; +\infty)$.
701.(Олимпиада "Ломоносов-2010", №1)Решите неравенство

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{(\log_2 3)^{4-x^2}} \le \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{(-\log_3 2)^{2x-1}}.$$

Ответ: $[-1;3]$.

702.(геолог., устный, 2002) Решить неравенство

$$\sqrt[3]{2}^{x^2+4x+1} - \left(\sqrt{3+\sqrt{8}}-1\right)^x \le 0.$$

Ответ: $\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$.

703.(почвовед., 2000, май, №3) Решить неравенство

$$2^{(x^2)} \cdot 3^x < 6.$$

Ответ: $(-1-\log_2 3;1)$.

704.(Севастополь, 1999, июль, №1) Решить неравенство

$$5^x + |x-4| - 5 > 5^{\log_5 |x-4|}$$

Ответ: $(1;+\infty) \setminus \{4\}$.

705.(ИСАА, 2000, №4) Решить неравенство

$$(5-2x)^{x^2-4} - \cos^2 5^\circ < (5-2x)^{\frac{1}{\log_{\sin 5^\circ} \sqrt{5-2x}}}.$$

Ответ: $(-2;2) \cup \left(2;\frac{5}{2}\right)$.

706.(фил., 2002, №4) Число a подобрано так, что меньший корень уравнения

$$x^3 + 2x = 4x^2 - 4$$

является одновременно одним из решений неравенства

$$a^{5x-4} > a^{-x^2+4x-4}.$$

Решить это неравенство.

Ответ: $-1 < x < 0$.

707*. (геолог., 1995, июль, №4) Решить неравенство

$$\frac{3^x - 2}{x^2 - 6x + 5} \le 0.$$

Ответ: $x \le \log_3 2;\ 1 < x < 5$.

708.(физ., 1993, июль, №1) Решить неравенство

$$\frac{2x-1}{2^x - 1} < 0.$$

Ответ: $(0;1/2)$.

709.(физ., 2001, март, №1) Решить неравенство

$$\frac{3^x + 2x - 35}{x - 4} \le 2.$$

Ответ: $3 \le x < 4$.

710.(геолог., устный, 1998) Решить неравенство

$$(x^2+2x+2)^x \geq 1.$$

Ответ: $\{-1\} \cup [0; +\infty)$.

711.(эконом., 2002, №2) Решить неравенство

$$\left(\frac{4x}{5}+1\right)^{6-13x-15x^2} \geq 1.$$

Ответ: $\left(-\frac{5}{4}; -\frac{6}{5}\right] \cup \left[0; \frac{1}{3}\right]$.

712.(ДВИ, 2014, №3) Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{3x+7} > x^{12}$.

Ответ: $x \in (0,1) \cup \left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$.

713.(ВМК/физ/эконом. (подгот. отд.), 1994, №1) Решить неравенство

$$\left(6x^2+2x+1\right)^{2x^2-x} \geq 1.$$

Ответ: $x \leq -\frac{1}{3};\ x \geq \frac{1}{2};\ x = 0$.

714.(мех-мат, 1963, №4) Решить неравенство

$$\left(x^2+x+1\right)^x < 1.$$

Ответ: $(-\infty; -1)$.

715.(мех-мат, 1965, №4) Решить неравенство

$$\left(x^2-x-1\right)^{x^2-1} < 1.$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}; 2\right)$.

716.(соц., 1997, №5) Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{32}} \cdot 8^{3x^2} > 2^{x+3}, \\ |\sqrt{2}x-1| = \sqrt{2}x-1. \end{cases}$$

Ответ: $x > \frac{7}{9}$.

3.5.2 Метод новой неизвестной

717.(эконом. (подгот. отд.), 1991, №1) Решить неравенство

$$9^x - 3^{x+1} + 2 \leq 0.$$

Ответ: $[0; \log_3 2]$.

718.(почвовед., 2004, май, №3) Решить неравенство

$$4^x < 2^{x+1} + 3.$$

Ответ: $(-\infty; \log_2 3)$.

719.(физ., 1996, май, №5) Решить неравенство

$$4^{x+1} + 2^{x+2} - 8 < 0.$$

Ответ: $x < 0$.

720.(Севастополь, 2009, №6) Решите неравенство

$$2^x + 4^x < \sqrt{2}(1 + 2^x).$$

Ответ: $x < \frac{1}{2}$.

721.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2009", очный тур: Томск, Улан-Удэ, №1) Решите неравенство

$$2^{2x} + 502 \cdot 2^{x+2} - 2009 \leq 0.$$

Ответ: $x \leq 0$.

722.(геолог., 1995, июль, №4) Решить неравенство

$$25^{-x} - 5^{-x+1} \geq 50.$$

Ответ: $x \leq -1 - \log_5 2$.

723.(геолог., 1996, май, №4) Решить неравенство

$$2 \cdot 2^{-2x^2} - 7 \cdot 2^{-x^2} + 3 > 0.$$

Ответ: $x > 1;\ x < -1$.

724.(мех-мат, 1995, №1) Найти наибольшее целое число k, удовлетворяющее неравенству

$$4 \cdot 3^{2k+1} + 3^k < 1.$$

Ответ: $k = -2$.

725.(мех-мат, 1975, №1) Решить неравенство

$$98 - 7^{x^2+5x-48} \geq 49^{x^2+5x-49}.$$

Ответ: $[-10; 5]$.

726.(договорные программы, 2008, №4) Решите неравенство

$$3^{1+3x^2} + 3^{1-x^2} \leq 10 \cdot 3^{x^2}.$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

727.(договорные программы, 2007, июль, №4) Решить неравенство

$$3^{-\frac{1}{x}+2} - 2 \cdot 9^{-\frac{1}{x}+\frac{1}{4}} \leq 27^{-\frac{1}{x}}.$$

Ответ: $[-2; 0)$.

728.(географ., 1996, май, №2) Решить неравенство

$$5 \cdot \left(\frac{8}{125}\right)^x - 13 \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x \geq 0.$$

Ответ: $\left(-\infty; \log_{\frac{2}{5}} 3\right]$.

729.(хим., 1997, июль, №2) Решить неравенство

$$(\sqrt{2}+1)^x + 1 < 2\cdot(\sqrt{2}-1)^x.$$

Ответ: $(-\infty; 0)$.

730.(ВМК, олимпиада "Абитуриент-2007", апрель, №2)Решить неравенство

$$3^{\frac{x+3}{5x-2}} - 4 \geq 5\cdot 3^{\frac{9x-7}{5x-2}}.$$

Ответ: $\frac{2}{5} < x \leq \frac{7}{9}$.

731.(психолог., 2005, июль, №2) Решить неравенство

$$\frac{25^x - 28}{5^x - 6} \geq 3.$$

Ответ: $(-\infty; 1] \cup (\log_5 6; +\infty)$.

732.(хим., 1965, №4) Решить неравенство

$$\frac{1}{2^x+3} > \frac{1}{2^{x+2}-1}.$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (2-\log_2 3; +\infty)$.

733.(олимпиада "Ломоносов-2005", №2) Решить неравенство

$$\frac{3\cdot 7^{1-x} - 4}{1-7^x} \leq \frac{1}{7^{-x}-1}.$$

Ответ: $(0; \log_7 3]$.

734.(ИСАА, 2002, июль, №1) Решить неравенство

$$\frac{2^x - 2^{2-x} - 3}{2^x - 2} \geq 0.$$

Ответ: $(-\infty; 1) \cup [2; +\infty)$.

735.(фил., 2003, март, №1) Решить неравенство

$$(2^x+5)^{-1} < \left(2^{x+3}-2\right)^{-1}.$$

Ответ: $(-2; 0)$.

736.(мех-мат, 1997, май, №1) Решить неравенство

$$\frac{21 - 2^x - 2^{6-x} - |3-2^x|}{5 - |3-2^x|} \geq 1.$$

Ответ: $x > 3$.

737.(ВМК (отд. бакалавров), 2002, июль, №3) Решить неравенство

$$3^{x+2} - 7\cdot 2^{x+2} \leq 3^x - 2^x$$

Ответ: $x \le 3$.
738.(мех-мат, 1963, №4) Решить неравенство

$$5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^x \cdot 30^x.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\log_5 6 < x < \log_6 5$.
739.(физ., 1998, июль, №3) Решить неравенство

$$25^{\frac{2x+1}{2}} - 2^{\frac{2x+3}{2}} < 2^{\frac{2x+7}{2}} + 5^{2x}.$$

Ответ: $x < \frac{1}{2}$.
740.(физ., 2002, июль, №3) Решить неравенство

$$8 \cdot \frac{3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

Ответ: $0 < x < \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3}$.
741.(хим., 2002, май, №3) Решить неравенство

$$30^x \cdot (8 \cdot 5^x + 6^x) \le \left|6^{3x} - 2^{2x+2} \cdot 3^{2x+1} \cdot 5^x + 4 \cdot 5^{x+1} \cdot 30^x\right|.$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup \left[\log_{\frac{6}{5}} 4; \log_{\frac{6}{5}} 7\right] \cup \left[\log_{\frac{6}{5}} 12; +\infty\right)$.
742.(Севастополь, 2003, июль, №6) Решите неравенство

$$x^3 2^{x-2} + 2^{|x-3|+4} \ge x^3 2^{|x-3|+1} + 2^{x+1}.$$

Ответ: $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.
743*. (мех-мат, 1999, июль, №1) Решить неравенство

$$3^{(x+2)^2} + \frac{1}{27} \le 3^{x^2-3} + 9^{2x+2}.$$

Ответ: $x \le -\frac{7}{4}$; $x = 0$.
744.(мех-мат, 2001, май, №1) Решить неравенство

$$31^x + 33 \ge 11 \cdot (7 - \sqrt{18})^x + 3 \cdot (7 + \sqrt{18})^x.$$

Ответ: $x \le \log_{7+\sqrt{18}} 11$; $x \ge \log_{7-\sqrt{18}} 3$.
745.(Черноморский филиал МГУ, 2002, май, №4) Решить неравенство

$$\left(9^{x+1} + 3^{x+1} - 1\right)^{x^2+x} \ge 1.$$

Ответ: $\{-1\} \cup [0; +\infty)$.
746.(мех-мат, 2001, заочное тестирование) Решить неравенство

$$\left(2^x + 0,09 \cdot 2^{-x}\right)^{\frac{1}{2x}} \ge \left(2^x + 0,09 \cdot 2^{-x}\right)^{\frac{1}{1-x}}.$$

Ответ: $[\log_2 0,1; \log_2 0,9] \cup \left(0; \frac{1}{3}\right] \cup (1; +\infty)$.

747.(географ., 1972, №4 + геолог., устный, 2006) Найти все числа x и y, для которых

$$\begin{cases} 2^{x+1} = 4y^2 + 1, \\ 2^x \le 2y. \end{cases}$$

Ответ: $x = 0; y = \frac{1}{2}$.

748.(хим., 1995, июль, №5) Найдите множество пар действительных чисел, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 2^{-x}y^4 - 2y^2 + 2^x \le 0, \\ 8^x - y^4 + 2^x - 1 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\{(0;1),(0;-1)\}$.

749.(мех-мат, 1999, март, №2) Решить систему

$$\begin{cases} 2^{x+2} = \frac{49}{4}x^2 + 4, \\ 2^{x+2} - 4 \le x^2\left(14 - 2^{x+2}\right) \cdot 2^x. \end{cases}$$

Ответ: $x = 0$.

750.(ДВИ, 2013, №3) Решите неравенство

$$\frac{9}{2}\left(1 + 2^{1-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(2^{2x} + 2\right)^{\frac{1}{2}} \ge 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{x}{2}}.$$

Ответ: $0 \le x \le 1$.

751.(ДВИ, 2012, №3)Решите неравенство $\left(9^x - 3^{x+2} + 14\right) \cdot \sqrt{4 - 2^x} \le 0$.

Ответ: $\log_3 2 \le x \le \log_3 7$, $x = 2$.

3.5.3 Графический метод и метод оценок

752*. (геолог., устный, 2004+2006) Решите неравенство

$$3^x + 5^x \le 8.$$

Ответ: $x \le 1$.

753.(мех-мат, 1979, №4) Решить неравенство

$$\frac{6 - 3^{x+1}}{x} > \frac{10}{2x - 1}.$$

Ответ: $0 < x < \frac{1}{2}$.

754.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2009", очный тур: Нижний Новгород, Курск, №3) Решите неравенство

$$\frac{6^{x+1}}{9^x + 4^x} \ge x^2 + 3.$$

Ответ: $\{0\}$.

3.6 Логарифмические неравенства

3.6.1 Неравенства, приводимые к виду $\log_a f(x) < \log_a g(x)$

755*. (физ., 2004, март, №3) Решить неравенство

$$\log_{32}(x^2+3x+2)^5 + \log_2(x^2-3x+2) < 2.$$

Ответ: $(-\sqrt{5}; -2) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; \sqrt{5})$.

756.(хим., 2006, №2) Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+3}{x-2}\right) > 2.$$

Ответ: $-\frac{14}{3} < x < -3$.

757.(физ., 2007, июль, №5) Решить неравенство

$$\log_4\left(x^2-4\right)^2 + \log_2\frac{x-1}{x^2-4} > 0.$$

Ответ: $-2 < x < 0$, $x > 2$.

758.(физ., 2004, июль, №3) Решить неравенство

$$\log_2\big((2-2x-x^2)(x+2)\big) - \log_8\big((4+4x+x^2)(8x+16)\big) + 1 > 0.$$

Ответ: $(-2; -1+\sqrt{2})$.

759.(физ., 2001, май, №3) Решить неравенство

$$\log_5(x^3-x^2-6x) - 2\log_{25}(x^2-3x) < \log_5 7.$$

Ответ: $-2 < x < 0$, $3 < x < 5$.

760.(физ., 2000, июль, №3) Решить неравенство

$$\log_2\frac{3x-5}{x-2} + 3\log_8\frac{(x-2)^3}{3x-5} < 1.$$

Ответ: $2-\sqrt{2} < x < \frac{5}{3}$, $2 < x < 2+\sqrt{2}$.

761.(физ., 1999, март, №3) Решить неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+2) - 2\log_{49}(x+8) > -2.$$

Ответ: $-2 < x < -5+\sqrt{58}$.

762.(физ., 1995, май, №5) Решить неравенство

$$|\log_5(x+3)| > 1.$$

Ответ: $x > 2$, $-3 < x < -2\frac{4}{5}$.

763.(геолог., устный, 2008, май) Решите неравенство

$$\left(x+\frac{9}{x}\right)\cdot\left|\log_{-x-0,5}(x^2+2x+1)\right| \geq -6\cdot\left|\log_{-x-0,5}(x^2+2x+1)\right|.$$

Ответ: $\{-1; -3\}$.

764.(эконом., 2005, июль, №4) Решить неравенство

$$\log_{2+\sqrt{3}}(x+3) - \log_{7-4\sqrt{3}}(4x^2 - 20x + 25) + \log_{2-\sqrt{3}}(x^2 - x - 2) \geq 0.$$

Ответ: $\left[-\sqrt{\frac{17}{3}}; -1\right) \cup \left(2; \sqrt{\frac{17}{3}}\right] \cup [-1+\sqrt{14}; +\infty)$.

765.(географ., 2001, июль, №1) Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{31}-\sqrt{21}}(x^2 - 9) \geq 0.$$

Ответ: $[-\sqrt{10}; -3) \cup (3; \sqrt{10}]$.

766.(мех-мат, 1987, №2) Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}(x^2 + 4x + 11 - 4\sqrt{3}) < 2.$$

Ответ: $(-3; -1)$.

767.(Севастополь, 2001, июль, №4) Решите неравенство

$$\lg(5x - x^2) - \lg(x^2 - 3x) \leq \lg(x^2 - 13x + 40).$$

Ответ: $\left[\frac{11-\sqrt{21}}{2}; 5\right)$.

768.(соц., 2003, июль, №2) Решить неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{0,1}(6+x) \leq \log_{0,1} x.$$

Ответ: $(0; 3]$.

769.(экзамен для победителей III и IV этапов Всероссийской олимпиады, 2004, №3) Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{3}}(x+1) - \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 4.$$

Ответ: $1 < x < 3$.

770.(почвовед., 1994, июль, №3) Решите неравенство

$$\lg(x+5) \geq -2\lg\frac{1}{3-x}.$$

Ответ: $\frac{7-\sqrt{33}}{2} \leq x < 3$.

771.(почвовед., 1994, май, №3) Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_x 2} - \log_2 \frac{1}{x} \leq 2.$$

Ответ: $(0; 1) \cup (1; 2]$.

772.(физ., 1994, июль, №1) Решить неравенство

$$\frac{2-x}{\log_2 x} > 0.$$

Ответ: $1 < x < 2$.
773.(физ., 1999, май, №3) Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_{25}(x+2)} \leq \frac{2}{\log_5(x+6)}.$$

Ответ: $-2 < x < -1$.
774.(фил., 2001, июль, №2) Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{12}}(2x^2-1)} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{4}} x} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} x}$$

Ответ: $x > 1$.
775.(мех-мат, 1994, июль, №2) Решить неравенство

$$\log_{(2-5x)} 3 + \frac{1}{\log_2(2-5x)} \leq \frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}.$$

Ответ: $-\frac{1}{3} \leq x < 0$, $\frac{1}{5} < x < \frac{3-\sqrt{3}}{6}$.
776.(эконом., 2000, июль, №3) Решите неравенство

$$\frac{\log_3(x^2-6x+5)}{\log_3(x^2-3)} \leq \frac{\log_2 5}{\log_2(x^2-3)}.$$

Ответ: $(-2; -\sqrt{3}) \cup (5; 6]$.
777.(геолог., 2007, устный) Решите неравенство $\log_{x+3} \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$.
Ответ: $-\frac{19}{4} < x < -4$.
778.(ВМК, 1998, июль, №2) Решите неравенство

$$\log_2(5-x) \cdot \log_{x+1} \frac{1}{8} \geq -6.$$

Ответ: $(-1; 0) \cup [1; 5)$.
779.(ВМК, 2008, №1)Решить неравенство

$$\log_2 \frac{1-x}{3-x} \geq \log_4 \sqrt[3]{(x-1)^6} - 3.$$

Ответ: $[-5; 1) \cup (3; 11]$.
780.(ВМК, 2007, июль, №2) Решить неравенство

$$\log_{x+2}(2-x) \geq \frac{|\log_5(2x+3)-1|}{\log_5(x+2)}.$$

Ответ: $-\frac{3}{2} < x < -1$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.
781.(соц., 2007, июль, №7)Решить неравенство

$$\log_{(x+3)^2} \left(2x^2+9x+21\right) \geq \log_{(x+3)^2} \left(x^2-x\right).$$

Ответ: $(-\infty; -7] \cup (-4; -3) \cup (-2; 0) \cup (0; 2) \cup (1; +\infty)$.

782.(физ., 1995, июль, №5) Решить неравенство

$$9^{\log_3 x} + 3x^2 < 16.$$

Ответ: $(0; 2)$.
783.(физ., 1995, март, №5) Решить неравенство

$$2^{\log_{1/6}(x^2+x)} \geq 0,5.$$

Ответ: $-3 \leq x < -1$, $0 < x \leq 2$.
784.(эконом., 1980, июль, №1) Решите неравенство

$$\log_5 (26 - 3^x) > 2.$$

Ответ: $x < 0$.
785.(МШЭ, 2006, №2) Решите неравенство

$$\log_{0.5} (\log_3(x-2)) \geq -1.$$

Ответ: $3 < x \leq 11$.
786.(ИСАА, 2007, №3)Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_4 \frac{x^2 - 2x}{x + 10} \right) \geq 0.$$

Ответ: $[-4; -2) \cup (5; 10]$.
787.(психолог., 2001, июль, №2) Решите неравенство

$$\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+4}{4x-8} \leq 0.$$

Ответ: $(-\infty; -8] \cup (12; +\infty)$.
788.(физ., 1997, май, №5) Решить неравенство

$$\log_6 \log_{\frac{1}{\sqrt[6]{6}}} (x+1) > 1.$$

Ответ: $-1 < x < -\frac{5}{6}$.
789.(биолог., 1996, июль, №3) Решите неравенство

$$2 + \log_{\frac{1}{2}} (\log_3(7 - x)) > 0.$$

Ответ: $(-74; 6)$.
790.(географ., 1995, май, №2) Решите неравенство

$$\log_{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\pi}} \left(\log_{\frac{1}{3}} (\log_5 x) \right) > 0.$$

Ответ: $(1; \sqrt[3]{5})$.

791.(физ., 2001, июль, №5) Решить неравенство

$$\log_7\left(\log_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) < \log_{\frac{1}{49}}\left(\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right)\right).$$

Ответ: $x < -2$.

792.(физ., 1998, май, №5) Решить неравенство

$$\log_2\left\{\log_{\frac{9}{16}}\left(\left(\frac{5}{4}\right)^x - \frac{1}{4}\right)\right\} \le -1.$$

Ответ: $0 \le x < 1$.

793*. (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2006", очный тур-геолог., №3) Решите неравенство

$$\log_x(x+2) \le 2.$$

Ответ: $(0;1) \cup [2;+\infty)$.

794.(ВМК (отд. бакалавров), 2004, июль, №1) Решите неравенство

$$\log_{4x-3}(15-16x) \le 0.$$

Ответ: $\frac{3}{4} < x \le \frac{7}{8}$.

795.(ВМК, 2005, июль, №1) Решить неравенство

$$\log_2\left(\frac{x^2+|x-3|+3}{x+1}\right)^2 - |\log_2 x - 2| > \log_2 x + 2.$$

Ответ: $\left(0; \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)$.

796.(психолог., 2002, июль, №2) Решите неравенство

$$\log_{x+2}(x^2+5x-6) > 2.$$

Ответ: $(10;+\infty)$.

797.(психолог., 2004, июль, №2) Решить неравенство

$$\log_{\frac{x-2}{2x-10}}\left(\frac{x+2}{4}\right) \le 1.$$

Ответ: $[-1;2) \cup (5;6] \cup (8;+\infty)$.

798.(соц., 2005, апрель, №3) Решить неравенство

$$\log_{|x+1|}\left(\frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}\right) > \log_{|x+1|}\left(\frac{7}{x} + \frac{13}{x^2}\right).$$

Ответ: $-\frac{5}{6} < x < 0$.

799.(хим., 2002, июль, №3) Решите неравенство

$$\log_{17-x^2}(56-x^2+10x) \le \frac{1}{2}\left(\log_{3+\sqrt{7}}(8+3\sqrt{7}) + \log_{3+\sqrt{7}} 2\right).$$

Ответ: $(-4;-3,9]\cup(4;\sqrt{17})$.
800.(геолог., 2004, июль, №5) Решите неравенство

$$\log_{3-x}(x^2-10x+25)-2\log_{3-x}(4x-x^2+5)+2\leq 0.$$

Ответ: $1\leq x<2$.
801.(геолог., 2007, №5) Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_x\left(\log_2\left(\frac{x^2-2x}{2x-1}\right)\right)}\leq 1.$$

Ответ: $(2-\sqrt{3};3-\sqrt{7}]\cup[3+\sqrt{7};+\infty)$.
802.(эконом., отд. менеджмента, 2006, №3) Решить неравенство

$$\log_{2x-1}\left(2x+(x-1)^2-x^2\right)>\log_{7-x}(x^2-x+1).$$

Ответ: $\frac{1}{2}<x<1$, $6<x<7$.
803.(эконом., 2006, №2) Решить неравенство

$$\log_{15-2x}(x^2-3x+3)\cdot\log_{8-x}(15-2x)<\log_{2x-3}\left((x+1)^2-x^2-2x\right).$$

Ответ: $\frac{3}{2}<x<2$, $7<x<\frac{15}{2}$.
804.(эконом., отд. менеджмента, 2004, июль, №4) Решить неравенство

$$2\log_{x+1}(1-2x)\cdot\log_{1-4x+4x^2}(x+3)+\log_{\frac{1}{x+1}}(x^2+7x+12)\leq 0.$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.
805.(эконом., 2004, июль, №4) Решить неравенство

$$\log_{x+4}(2x+7)\cdot\log_{4x^2+28x+49}(x^2-4x+4)+\log_{\frac{1}{4}-\frac{x}{4x+16}}(x^2-5x+6)\geq 0.$$

Ответ: $\left(-\frac{7}{2};-3\right)\cup(3;4]$.
806.(мех-мат, 1988, июль, №2) Решите неравенство

$$\log_{5x-4x^2}4^{-x}>0.$$

Ответ: $(0;1/4)\cup(1;5/4)$.
807.(мех-мат, 1997, март, №2) Решить неравенство

$$\log_{(x-1)}\frac{x^2-x-6}{2x-8}\leq 1.$$

Ответ: $(1;2)\cup(2;3)\cup[7;+\infty)$.
808.(эконом. (менеджмент), 2008, №3)Решить неравенство

$$x\cdot\log_2\left(4\cdot 4^x-9\cdot 2^x+6\right)>2x.$$

Ответ: $-2<x<0$, $x>1$.

809.(эконом., 2008, №3)Решить неравенство

$$x \cdot \log_2 \left(4^{x+1} - 2^{x+1} + 8\right) < x^2 + 4x.$$

Ответ: $x < -1$, $0 < x < 2$.
810.(мех-мат, 1997, июль, №2) Решить неравенство

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right) \cdot \log_{13-3\cdot 2^x} 4 \leq 1.$$

Ответ: $[-\log_2 3; 2) \cup (2; \log_2 13 - \log_2 3)$.
811.(геолог., 1997, июль, №4) Решить неравенство

$$17^{\log_{\frac{1}{17}} \log_3 x} < 3^{\log_{\frac{1}{3}} \log_{17} x}.$$

Ответ: $(1; +\infty)$.
812.(почвовед., 2000, июль, №4) Решите неравенство

$$\log_{4-x} 3 < \log_x 3.$$

Ответ: $(1; 2) \cup (3; 4)$.
813.(психолог., 2000, июль, №4) Решите неравенство

$$2 + \log_{\sqrt{x^2-2x-3}} \frac{x+4}{x+1} \geq \log_{x^2-2x-3}(x^2 - 2x - 2)^2.$$

Ответ: $(3; 1 + \sqrt{5}) \cup [10/3; +\infty)$.
814.(геолог., 2003, май, №2) Решите неравенство

$$\log_{-2-x}(-3 - 2x) \geq \log_{-2-x}\left(-\frac{3x}{2}\right).$$

Ответ: $x \leq -6, -3 < x < -2$.
815.(географ., 1994, июль, №3) Решите неравенство

$$\log_x(2 - x - x^2) > 0.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < 1$.
816.(почвовед., 1993, июль, №3) Решите неравенство

$$\log_{9x^2+1} 37 > 1.$$

Ответ: $(-2; 0) \cup (0; 2)$.
817.(геолог., 2006, №4) Решите неравенство

$$\left(\log_{|x+2|} 4\right) \cdot \left(\log_4(x^2 + x - 2)\right) \leq 1.$$

Ответ: $(-3; -2) \cup (1; 2]$.

818.(хим., 1999, июль, №3) Решить неравенство

$$\left(\log_{3-x}(2x+1)\right)\cdot\left(\log_{2x+1}x^2\right)\le\left(\log_{3-x}(3x+1)\right)\cdot\left(\log_{3x+1}(x+2)\right).$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{3};3\right)\setminus\{0;2\}$.
819.(эконом.(менеджмент), 1995, июль, №3) Решите неравенство

$$\log_{\frac{3x-1}{3x+1}}\left(x-\frac{1}{3}\right)\ge 1.$$

Ответ: $\frac{1}{3}<x\le\frac{2}{3}$.
820.(эконом., 1998, июль, №1) Решить неравенство

$$\log_{\frac{4x-1}{11}}\left(7x-2x^2\right)\le 0.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{4};3\right)\cup\left[\frac{7+\sqrt{41}}{4};\frac{7}{2}\right)$.
821.(мех-мат, 1998, июль, №2) Решите неравенство

$$\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}\left(10x^2+x-2\right)\le 0.$$

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(0,4;0,5]\cup(1;+\infty)$.
822.(эконом., 1999, июль, №3) Решить неравенство

$$\log_{|x|-2}|x-3|\le 0.$$

Ответ: $(-3;-2)\cup(3;4]$.
823.(эконом.(менеджмент), 1999, июль, №1) Решить неравенство

$$\log_{1+|7x+17|}\left(|3x+8|+|7x+17|\right)\le 1.$$

Ответ: $\left[-3;-\frac{17}{7}\right)\cup\left(-\frac{17}{7};-\frac{7}{3}\right]$.
824.(почвовед., 2003, май, №5) Решить неравенство

$$\log_{-4x^2+12x-8}|4x-5|>0.$$

Ответ: $1<x<\frac{5}{4}$; $\frac{5}{4}<x<\frac{3}{2}$.
825.(геолог., 2008, №3)Решите неравенство

$$\log_{x-3}(5-x)\le\log_{x-3}|4x-14|.$$

Ответ: $\left(3;\frac{7}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{2};\frac{19}{5}\right]\cup(4;5)$.
826.(ВМК, 1997, июль, №2) Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{1-x^2}}2<\log_{2x^2}\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

827.(физ., 2003, май, №3) Решить неравенство

$$\left[\log_5\left(x^2-5x+6\right)\right]^{-1} < \log_{20} 5$$

Ответ: $x < -2$; $\frac{5-3\sqrt{5}}{2} < x < 2$; $3 < x < \frac{5+3\sqrt{5}}{2}$; $x > 7$.
828.(геолог., 2005, июль, №6) Решите неравенство

$$\log_x\left(x+\frac{1}{3}\right) \le \log_{\sqrt{2x+3}}\left(x+\frac{1}{3}\right).$$

Ответ: $\left[\frac{2}{3};1\right] \cup [3;+\infty)$.
829.(ВМК, 2003, июль, №1) Решить неравенство

$$\log_{\left(\frac{3-x}{2}\right)}\left(\frac{6}{x+1}\right) \ge -1.$$

Ответ: $(-1,1) \cup [2,3)$.
830.(мех-мат, 1993, июль, №1) Решите неравенство

$$\frac{\sqrt[4]{15}}{\log_{x+1} 11} \ge \frac{\log_{11}(x+1)}{\log_{123} 11}.$$

Ответ: $(-1;0)$.
831.(мех-мат, 2001, июль, №1) Решите неравенство

$$x \le \log_5\left(16\cdot 15^x - 15^{1+2x}\right) - \log_3\left(16\cdot 5^x - 3^{1+x}\cdot 5^{1+2x}\right).$$

Ответ: $(-\infty;-1] \cup [0;\log_{15} 16 - 1)$.
832.(биолог., 2004, июль, №4) Решить неравенство

$$\log_{(2^x-2)^2}\left(4^{x+1} - 5\cdot 2^{x+2} + 24\right)$$
$$-\log_{(2^x-2)^{-2}}\left(2^{2x-2} - 7\cdot 2^{x-2} + \frac{5}{2}\right) \ge \frac{3}{2}.$$

Ответ: $(-\infty;0) \cup \left[\log_2\frac{9+\sqrt{13}}{2};+\infty\right)$.
833.(мех-мат, 1965, №3) Решить неравенство

$$\log_x\left(\log_2\left(4^x-6\right)\right) \le 1.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\log_2 7 < x \le \log_2 3$.
834.(биолог., 1981, №4) Решите неравенство

$$\left(2^x + 3\cdot 2^{-x}\right)^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1.$$

Ответ: $x > 3$.
835.(мех-мат, 2002, март, №1) Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{2}}(6-x-x^2) + \log_2(x^2-2x+1) + 2 > 2\log_4(x^2-4x+3)^2.$$

Ответ: $\left(\frac{-1-\sqrt{73}}{4};1\right)\cup\left(1;\frac{-1+\sqrt{73}}{4}\right)$.

836.(мех-мат, 1994, май, №4) Найдите все значения x, при которых наибольшее из чисел $3x-4$ и $\log_2\left(5\cdot 2^{2x-4}-2^{x-1}+1\right)$ положительно.

Ответ: $x>3-\log_2 5$.

837.(хим., 2003, май, №2) Решить неравенство

$$x\cdot\log_2 x+1\geq\log_2 x\cdot\log_3 2+x\cdot\log_2 3.$$

Ответ: $(0;\log_3 2]\cup[3;+\infty)$.

838.(ВМК, 1995, апрель, №2) Решить уравнение

$$\left|\log_{3x}(x^2-6x+8)-1\right|=1-\log_{3x}(x^2-6x+8).$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup[1;2)\cup(4;8]$.

839.(ВМК, 1999, апрель, №2) Решить неравенство

$$\left(x+\frac{8}{x}\right)\cdot\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)\right|\geq 9\cdot\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)\right|.$$

Ответ: $x\geq 8;\ x=3$.

840.(мех-мат, 2004, июль, №2) Решить неравенство

$$\frac{\log_4(2-x)-\log_6(2-x)}{\log_6 x-\log_9 x}\leq\log_4 9.$$

Ответ: $(0;2)\setminus\{1\}$.

841.(мех-мат, 1998, май, №2) Решить неравенство

$$\frac{1+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+4}+\log_{\frac{1}{2}}(13-x)}{|x^2+2x-3|-|2x^2-10x+8|}\geq 0.$$

Ответ: $(-4;1)\cup\left(1;\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{3};11\right)$.

842.(геолог., 1999, май, №5) Решить неравенство

$$2<\left|2\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)-4\right|<3.$$

Ответ: $\left[\frac{\sqrt{2}-16}{48};-\frac{7}{24}\right)\cup\left(-\frac{1}{6};\frac{\sqrt{2}-2}{6}\right]$.

843.(фил., 1969, №3) Решить неравенство

$$[\log_2 x-\log_4(x+3)]^{x-4}>1.$$

Ответ: $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2};4\right)\cup(6;+\infty)$.

844.(физ., 2003, март, №3) Решить неравенство

$$(4^x-2\cdot 2^x-3)\log_2 x-3\geq 4^{\frac{x+1}{2}}-4^x.$$

Ответ: $0<x\leq 1/2$, $x\geq\log_2 3$.

845.(физ., 2003, март, №2) Решить неравенство

$$7\log_3(2+x)^8 < 8\log_2(-x+1)^7\cdot\log_3 2.$$

Ответ: $x<-2$; $-2<x<-1/2$.

846.(почвовед., 2004, июль, №4) Решить неравенство

$$\log_{0,5}\left(2^{x+1}-3\right)\ge x-1.$$

Ответ: $(\log_2 3-1;1]$.

847.(геолог., 2010, №4) Решите неравенство

$$4^{\log_9(x^2+4x-5)}\le 2^{\log_3(1+8x-x^2)}.$$

Ответ: $1<x\le 3$.

848.(мех-мат, 2004, март, №2) Решить неравенство

$$3^{\log_x\left(3x^2+2x-1\right)}\le\left(x^2+x\right)^{\log_x 9}.$$

Ответ: $[\sqrt{2}-1;+\infty)\setminus\{1\}$.

849.(ВМК, 2007, устный) Решить неравенство

$$\frac{x^2+\lg^2 x}{1+x^2+\lg^2 x}\le\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{\lg^2 x}{1+\lg^2 x}.$$

Ответ: $x>0$.

3.6.2 Метод новой неизвестной

850.(фил., 2000, июль, №3) Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{2-\log_2 x}\le 2.$$

Ответ: $(0;1)\cup(4;+\infty)\cup\{2\}$.

851.(геолог., 1998, июль, №5) Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-2)>\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x-2)}+\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\left(2;\frac{19}{9}\right)\cup(3;2+\sqrt{3})$.

852.(мех-мат, 1995, июль, №2) Решите неравенство

$$\frac{2}{\frac{2}{\log_2 x}-1}>-3.$$

Ответ: $(0;1)\cup(1;4)\cup(64;+\infty)$.

853.(ВМК, 1991, №3) Решить неравенство

$$49^{\log_x 5} - 7^{\log_x 5} - 2 \geq 0.$$

Ответ: $1 < x \leq 5^{\log_2 7}$.

854.(фил., 2005, июль, №3) Решить неравенство

$$\log_2(x+1) > \log_{x+1} 16.$$

Ответ: $\left(-\frac{3}{4}; 0\right) \cup (3; +\infty)$.

855.(Севастополь, 2005, №5) Решите неравенство

$$\log_4(16x^2) + \sqrt{\log_2 x + 1} \leq 1.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

856.(физ., 2001, март, №5) Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{3}{2}\log_9(4x^2-3)} > \log_3 \sqrt{4x^2-3}.$$

Ответ: $-\sqrt{\frac{15}{2}} < x < -1,\ 1 < x < \sqrt{\frac{15}{2}}$.

857.(физ., 1997, июль, №3) Решить неравенство

$$\sqrt{\log_4(x-5)} > \log_{\frac{1}{4}} \frac{64}{x-5}.$$

Ответ: $6 \leq x < 2^{7+\sqrt{13}} + 5$.

858.(ИСАА, 2005, июль, №5) Решить неравенство

$$\log_{(2|x|+1)}(3x+2) - \log_{(3x+2)}(2|x|+1) > 0.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}; 0\right) \cup (0; +\infty)$.

859*. (ВМК, 2005, апрель, №1) Решить неравенство

$$6\log_{2x} x + 2\log_{4\sqrt{x}}(2x) \geq 1.$$

Ответ: $0 < x < \frac{1}{16},\ \frac{1}{8} \leq x < \frac{1}{2},\ x \geq 1$.

860.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2006", очный тур-эконом., №3) Решить неравенство

$$\log_{2x} x \geq \log_4 x + \frac{5}{2}.$$

Ответ: $0 < x \leq \frac{1}{8},\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq x < \frac{1}{2}$.

861.(психолог., 1986, июль, №3) Решите неравенство

$$\frac{6 - \lg x^4}{3 + 2\lg x^2} < 2.$$

Ответ: $x < -1;\ -10^{-\frac{3}{4}} < x < 0;\ 0 < x < 10^{-\frac{3}{4}};\ x > 1$.

862.(геолог., 1990, июль, №4) Решите неравенство

$$\frac{\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{x^7}\right)+2}{\log_9 x^6} \geq \frac{5}{\log_x 3}+2.$$

Ответ: $0<x\leq \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, $1<x\leq \sqrt[5]{9}$.

863.(географ., 1992, июль, №3) Решите неравенство

$$(\log_x 2-1)\log_2(2x)\leq \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\left[\frac{1}{4};1\right)\cup[\sqrt{2};+\infty)$.

864.(мех-мат, 1963, №2) Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} x > \log_x 3-\frac{5}{2}.$$

Ответ: $(0;1)\cup\left(\sqrt{3};9\right)$.

865.(почвовед., 2007, июль, №5) Решить неравенство

$$\log_x^3 16+2\log_x^2 16^2+4\log_x 16^4\geq 0.$$

Ответ: $(1;+\infty)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

866.(ИСАА, 1997, июль, №4) Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}|x-2|-\log_{2-x}3\leq 2.$$

Ответ: $(-\infty;1)\cup\left\{\frac{5}{3}\right\}$.

867.(ВМК, 1987, июль, №3) Решите неравенство

$$\log_{(x+1)^2}8+3\log_4(x+1)\geq 9\frac{1}{4}.$$

Ответ: $(0;\sqrt[6]{2}-1]\cup[63;+\infty)$.

868.(ВМК, 1998, апрель, №1) Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_2\left(\frac{4}{x}\right)}\geq \log_2\frac{x}{8}-1.$$

Ответ: $(0;4)\cup\{8\}$.

869.(ВКНМ, 1997, июль, №2) Решите неравенство

$$\log_2^2 x^{\sqrt{2}}\geq \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{x^{7/2}}{8}\right).$$

Ответ: $0<x\leq 2\sqrt{2};\ x\geq 4$.

870.(биолог., 2000, июль, №4) Решите неравенство

$$\log_4\left(16\cdot(x-2)^2\right)\cdot\log_{\frac{1}{16}}^2\frac{(x-2)^4}{64}-\frac{5}{4}\log_{64}(x^3-6x^2+12x-8)^2<\frac{15}{2}.$$

Ответ: $(-6;10)\setminus\left\{\frac{3}{2};2;\frac{5}{2}\right\}$.
871.(физ., 2003, июль, №3) Решить неравенство

$$\log_{25}(5^x-1)\cdot\log_5(5^{x+2}-25)<4.$$

Ответ: $\log_5 626-4<x<\log_5 26$.
872.(ВМК, 2009, №5) Решить неравенство

$$x^{\lg 2}+32\cdot 2^{-\lg x}>18.$$

Ответ: $(0,10)\cup\left(10^4;+\infty\right)$.
873.(ДВИ, 2019, №4) Решите неравенство $3^{\log_3^2 x}+5x^{\log_3 x}<18$.
Ответ: $\left(\frac{1}{3},3\right)$.
874.(ДВИ, 2018, №4) Решите неравенство

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}x}\geq\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\log_x\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\left(0;\sqrt{3}-\sqrt{2}\right]\bigcup\left(1;\sqrt{3}+\sqrt{2}\right]$.
875.(ДВИ, 2017, №4) Решите неравенство

$$x^2\log_7^2 x+3\log_6^2 x\leq x\log_7 x\cdot\log_6 x^4.$$

Ответ: $\{1\}\bigcup\left[\log_6 7;3\log_6 7\right]$.
876.(мех-мат, 1986, июль, №3) Решите неравенство

$$\frac{1}{4}\cdot x^{\frac{1}{2}\log_2 x}\geq 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}.$$

Ответ: $0<x\leq 2^{-2\sqrt{2}};\ x\geq 2^{2\sqrt{2}}$.
877.(физ., 1966, №1) Решить неравенство

$$x^{(\lg x)^2-3\lg x+1}>1000.$$

Ответ: $x>1000$.
878.(почвоведение, 2006, №3) Решить неравенство

$$\left(3\sqrt{x}\right)^{\log_2 x}\geq 1.$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{9}\right]\cup[1;+\infty)$.
879.(эконом., 1987, июль, №4) Решите неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{x-1}(x^2-8x+16)+\log_{4-x}(-x^2+5x-4)>3.$$

Ответ: $(2;5/2)\cup(5/2;3)$.
880.(Ташкент, 2007, №9) Решите неравенство

$$\frac{\log_{x^2}9}{\sqrt{2\log_{x^2}(1+x)+1}-\sqrt{3}}\geq\frac{1}{\log_3(1+x)-\log_3 x^2}.$$

Ответ: $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left(1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

881.(Ташкент, 2006, №8) Решите неравенство

$$\log_7(3-2x)\cdot\log_x(3-2x)\geq\log_7(3x^2-2x^3).$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

882.(олимпиада "Ломоносов-2011", II тур, №4) Решите неравенство

$$\log_5\left(5x^2+2x\right)\cdot\log_5\left(5+\frac{2}{x}\right)>\log_5 5x^2.$$

Ответ: $-\frac{1+\sqrt{2}}{5}<x<-\frac{2}{5}$, $x>\frac{-1+\sqrt{2}}{5}$.

883.(ИСАА, 2006, №6) Решите неравенство

$$3\log_2\left(\frac{1}{3}-x\right)-2\log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|<\log_2\left(\frac{1}{3}-x\right)\cdot\log_{|2x+\frac{1}{3}|}\left(\frac{1}{3}-x\right).$$

Ответ: $x<-\frac{2}{3}, 0<x<\frac{1}{12}$.

884.(фил., 1974, июль, №4) Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$u^3(x)-6u^2(x)+8u(x)\leq 0,$$

где $u(x)=\log_2\frac{4x-1}{3x+1}$.

Ответ: $\frac{1}{4}<x\leq 2;\ -\frac{5}{8}\leq x\leq -\frac{17}{44}$.

885.(эконом., 2001, июль, №4) Решите неравенство

$$\log_2\left(2^x-3\right)\cdot\log_{\sqrt{2}}\left(4^{x+2}-12\cdot 2^{x+3}+144\right)<32.$$

Ответ: $2\log_2 7-4<x<\log_2 7$.

886.(ИСАА, 2003, июль, №5) Решить неравенство

$$\sqrt{(x^2+8x+15)(256x^2-24x-1)}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{\log_{4x^2}(2x^2)\cdot\log_{8x^4}(4x^4)-1}}-1\right]\geq 0.$$

Ответ: $x\leq -5; -3\leq x\leq -2^{-2/3}$, $x\geq 2^{-2/3}$, $x=\frac{1}{8}, x=-\frac{1}{32}$.

887.(ВМК, 1999, июль, №3) Решите неравенство

$$\left|\log_{-2x-1}\sqrt{(2x+5)^6}+3\right|\leq -4+\log_{\frac{1}{-2x-1}}\sqrt{(2x+5)^8}.$$

Ответ: $\left[\frac{-3-\sqrt{5}}{2};-\frac{5}{2}\right)\cup\left(-\frac{5}{2};\frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left(-1;\frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right]$.

888.(мех-мат, 2001, март, №2) Решите неравенство

$$\frac{\log_{(16-6x-x^2)}(x+8)}{\log_{2-x}(16-6x-x^2)}<\frac{1}{4}.$$

Ответ: $(-8;2)\setminus\{1;-3;-3+\sqrt{24};-3-\sqrt{24}\}$.

889.(ВМК, 2002, апрель, №2) Решите неравенство

$$\left|3-\log_2(9x^2-30x+25)\right|\cdot\log_{5-3x}\left(\frac{1}{16}\right)\geq -4.$$

Ответ: $[-1;1]\cup\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$.

890.(мех-мат, 2003, май, №1) Решить неравенство

$$\frac{1}{|7-\log_3 3x|}+\frac{1}{|4-\log_9 9x^2|}\leq\frac{1}{|\log_9 81x|}.$$

Ответ: $(0;1]\setminus\{\frac{1}{81}\}$.

891.(ВМК, 2010, №2) Решите неравенство

$$\frac{1+\log_{x-2}(-x^2+7x-10)}{2-\log_{5-x}(x^2-4x+4)}\leq 2.$$

Ответ: $(2;3)\cup\left(\frac{7}{2};4\right)\cup(4;5)$.

892.(ФГУ, 2001, июль, №5) Решите неравенство

$$\log_4\left(4^x-1\right)\cdot\log_{16}\left(16^{x+1}-8\cdot 4^{x+1}+16\right)>12.$$

Ответ: $0<x<\log_4 257-4;\ \log_4 65<x<+\infty$.

893.(ИСАА, 2002, июль, №4) Решите неравенство

$$\left|\log_{x+1}2+\log_2\frac{x+1}{4}\right|+\left|\log_2(4x+4)+\log_{x+1}2\right|<\frac{17}{2}.$$

Ответ: $-\frac{15}{16}<x<\frac{1-\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}},\ \sqrt[4]{2}-1<x<15$.

894.(мех-мат, 2004, март, (заочный тест), №2) Решить неравенство

$$2^{1+\sqrt{\log_2 x}}+2x^{-\sqrt{\log_x 2}}\leq 5.$$

Ответ: $(1;2]$.

895.(геолог., устный, 2005) Решите неравенство

$$x^{\log_2 9}+3^{\log_2 x}\leq 2.$$

Ответ: $(0;1]$.

3.6.3 Графический метод и метод оценок

896*. (почвовед., 1990, июль, №6) Решите неравенство

$$\log_2(2-3x)>4x+1$$

Ответ: $x<0$.

897.(мех-мат, 1979, июль, №4) Решите неравенство

$$\frac{6}{2x+1} > \frac{1+\log_2(2+x)}{x}.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

898.(фил., 1987, июль, №5) Решите неравенство

$$\frac{9}{3x+2} > \frac{1+\log_3(x+6)}{x}.$$

Ответ: $-\frac{2}{3} < x < 0$.

899*. (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2006", №4) Решить неравенство

$$5^{\log_x 2}\cdot\log_2 x + 5^{\log_2 x}\cdot\log_x 2 \le 10.$$

Ответ: $x=2$, $0<x<1$.

900.(биолог., 2002, июль, №4) Решите неравенство

$$\log_2^2|2x| - 5\log_2|2x| + 2|x|\log_2|2x| - 4|x| + 6 \ge 0.$$

Ответ: $(-\infty;-2]\cup[-1;0)\cup(0;1]\cup[2;+\infty)$.

901.(ВМК, устный, 1999) Решить неравенство

$$\log_2(\sqrt{x}+1)\cdot\log_3(x+2)\le 1.$$

Ответ: $[0;1]$.

902.(ВМК, устный, 2005)Решить неравенство

$$\log_2(2+\sqrt{x+3})\cdot\log_2(1+\sqrt{x})\le 2.$$

Ответ: $[0;1]$.

903.(ФГП, 2005, июль, №3)Решите неравенство

$$\log_{(0.5-|2x^2-5x+2|)}\left(0.5+|8x^2-2x-1|\right)\ge 1.$$

Ответ: $x=\frac{1}{2}$.

904.(хим., 2003, июль, №3) Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(2-|x|) > \log_{\sqrt{10}}(1-x^2).$$

Ответ: $(-1;1)$.

905.(ФНМ, 2001, апрель, №5) Решить неравенство

$$\frac{1}{3}\log_{x+2}(x^3+5,5x^2+10,2x+6,385)\le 1.$$

Ответ: $[-1,9;-1,7]\cup(-1;+\infty)$.

906.(почвовед., 2008, №4) Решите неравенство $\log_{(8x^2)}(-4x^3)\ge 1$.

Ответ: $(-\infty;-2]\cup\left(-2^{-\frac{3}{2}};0\right)$.

907.(почвовед., 1976, июль, №5) Решите неравенство

$$\log_{x\sqrt[6]{3}}(3x^6+2x^2-6)>6.$$

Ответ: $x>\sqrt{3}$.

908.(ВМК, устный, 2002+2005)Решить неравенство

$$\log_3^2(x+y)+\log_3^2(xy)\le 2\log_3(x+y)-1.$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{3+\sqrt5}{2};\frac{3-\sqrt5}{2}\right),\left(\frac{3-\sqrt5}{2};\frac{3+\sqrt5}{2}\right)\right\}$.

909.(ВМК, устный, 2005) Решите неравенство

$$1+\log_3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\log_3(x^2y+xy^2)\le 2\left(\log_3(x+y)-\log_3^2(xy)\right).$$

Ответ: $\left(\frac{3+\sqrt5}{2};\frac{3-\sqrt5}{2}\right)$, $\left(\frac{3-\sqrt5}{2};\frac{3+\sqrt5}{2}\right)$.

3.7 Неравенства с радикалами

3.7.1 Решение возведением в степень

910*. (эконом., 2003, июль, №1) Решить неравенство

$$\sqrt{8+2x-x^2}\le 2x+1.$$

Ответ: $[1;4]$.

911.(олимпиада "Ломоносов-2011", заочный тур, 11 кл., №2)Решить неравенство $\sqrt{x^2-1}\le\sqrt{5x^2-1-4x-x^3}$.

Ответ: $(-\infty;-1]\cup\{2\}$.

912.(МШЭ, 2007, №1)Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-3x+2}\le x-1.$$

Ответ: $\{1\}\cup[2;+\infty)$.

913.(геолог., устный, 2008, июль) Решите неравенство $\sqrt{1-x^2}\le 1+x$.

Ответ: $[0;1]\cup\{-1\}$.

914*. (МШЭ, 2005, июль, №2) Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-2x}+1>x.$$

Ответ: $x\le 0$.

915.(ИСАА, 2004, июль, №1) Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-25}\cdot(x+3)<0.$$

Ответ: $x<-5$.

916.(геолог., 2007, устный) Решите неравенство

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \leq 0.$$

Ответ: $(-\infty;-1] \cup \{2\}$.

917.(ВШБ, 2003, июль, №1) Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{(x+5)(x-3)}}{x+5} \leq 0.$$

Ответ: $(-\infty;-5) \cup \{3\}$.

918.(биолог., 2006, №1) Решить неравенство

$$\sqrt{x+1}(x^2+3x-4) \geq 0.$$

Ответ: $\{-1\} \cup [1;+\infty)$.

919.(ф-т биоинженерии и биоинформатики, 2009, №3) Решить неравенство

$$(x^2-7x+6)\sqrt{x^2-10x+21} \geq 0.$$

Ответ: $(-\infty;1] \cup \{3\} \cup [7;+\infty)$.

920.(географ., 2004, июль, №1) Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^6-64}}{x-3} \geq 0.$$

Ответ: $x > 3; x = \pm 2$.

921.(геолог., 2007, №3) Решите неравенство

$$\sqrt{2^{(x^2-4)}-1} \cdot (x^2-7x+6) \leq 0.$$

Ответ: $\{-2\} \cup [2;6]$.

922.(ДВИ, 2011, №4)Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{5x+3}-1}{\sqrt{3x+2}-1} > 1.$$

Ответ: $-\frac{3}{5} \leq x < -\frac{1}{2}$, $x > -\frac{1}{3}$.

923.(почвовед., 2007, июль, №2) Решить неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-7}} + x \leq \frac{1}{\sqrt{x^2-7}} + 9.$$

Ответ: $(-\infty;-\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7};9]$.

924.(Ташкент, 2008, №6) Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{3x^2-10x}{x-4}} \geq 3x-10.$$

Ответ: $\left[0; \frac{10}{3}\right] \cup (4; 5]$.

925.(Ташкент, 2006, №6) Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{x+8}{2-x}} > x+2.$$

Ответ: $[-8; 0) \cup (1; 2)$.

926.(ИСАА, 2006, №3) Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{x^2+9x-162}{x-2}} > x+9.$$

Ответ: $[-18; -3] \cup (0; 2)$.

927.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2008", №2) Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2(10-x^2)}}{x} \le 2x+5.$$

Ответ: $[-3; 0) \cup (0; \sqrt{10}]$.

928.(геолог., 2006, №2) Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{5}{2}x^2 - x^3} \ge \sqrt{6x - \frac{5}{2}x^2}.$$

Ответ: $\{0\} \cup [2; 2.4]$.

929.(физ., 2007, март, №2) Решить неравенство

$$|x-6|\sqrt{x-3} \ge x^2 - 9x + 18.$$

Ответ: $3 \le x \le 6$.

930.(физ., 1997, май, №3) Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+2x+9} \le x + |2x-3|.$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

931.(физ., 2000, март, №3) Решить неравенство

$$x^2 + \sqrt{3x^3} > x.$$

Ответ: $\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}; +\infty\right)$.

932.(физ., 2000, май, №2) Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 + |3-x| - 10} > x - 3.$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{29}}{2}\right] \cup \left(\frac{22}{7}; +\infty\right)$.

933.(физ., 2002, март, №3) Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{9-4x-x^2}}{x+3} < 1.$$

Ответ: $[-2-\sqrt{13};-3)\cup(0;-2+\sqrt{13}]$.
934.(физ., 2006, №3) Решить неравенство

$$\sqrt{(3-x)\cdot\sqrt{2x^2+2x-4}}\leq 3-x.$$

Ответ: $x=3$, $-4-\sqrt{29}\leq x\leq -2$, $1\leq x\leq -4+\sqrt{29}$.
935.(ФГУ, 2005, июль, №2) Решите неравенство

$$1<\frac{\sqrt{2}(x-4)}{\sqrt{x^2-8x+17}}.$$

Ответ: $(5;+\infty)$.
936.(геолог., 2005, июль, №2) Решите неравенство

$$\sqrt{-x^2-x+6}-x\geq 2.$$

Ответ: $\left[-3;\frac{\sqrt{41}-5}{4}\right]$.
937.(физ., 2005, июль, №2) Решить неравенство

$$\sqrt{5x-x^2+6}<\sqrt{6}-x.$$

Ответ: $[-1;0)$.
938.(геолог., устный, 2005) Решите неравенство

$$\sqrt{5-|x+1|}\leq x-1.$$

Ответ: $\left[\frac{1+\sqrt{13}}{2};4\right]$.
939.(геолог. (геофизика), 1984, №2) Найти все решения неравенства

$$\sqrt{2x^2-6x+4}<x+2.$$

Ответ: $(0;1]\cup[2;10)$.
940.(геолог., 2004, июль, №3) Решите неравенство

$$\sqrt{441-x^2}\leq x+21.$$

Ответ: $[0;21]\cup\{-21\}$.
941.(мех-мат, 2003, март, №2) Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{4x^7-10x^3}{4x-x^3-3}}\leq x^3.$$

Ответ: $x=0$; $\sqrt[4]{\frac{5}{2}}\leq x\leq\sqrt[3]{2}$.
942.(геолог., устный, 2004)Решите неравенство

$$\sqrt{5-|x+1|}\leq 2+x.$$

Ответ: $0 \le x \le 4$.

943.(геолог., устный, 2004)Решите неравенство

$$\sqrt{x(x+4)} + (x+4)\sqrt{\frac{x}{x+4}} \le x+8.$$

Ответ: $[-8;-4) \cup \left[0; \frac{8}{\sqrt{3}}\right]$.

944.(мех-мат, 1996, июль, №2) Решить неравенство

$$\sqrt{8 \cdot 16^x - \frac{1}{2} \cdot 9^x} \le 3 \cdot 4^x - 3^x.$$

Ответ: $x \ge \log_{\frac{4}{3}} \left(3 + \frac{\sqrt{30}}{2}\right)$.

945.(Олимпиада "Ломоносов-2008", №6)Решить неравенство

$$\sqrt{25^x - 2^{3-x}} < 7 \cdot 2^{-x/2} - 2 \cdot 5^x.$$

Ответ: $\log_{50} 8 \le x < \log_{50} 9$.

946.(психолог., 2006, №2) Решить неравенство

$$\sqrt{\log_{x-1}(x-2)} < \sqrt{2}.$$

Ответ: $x \ge 3$.

947.(ФГУ, 2007, №4) Решите неравенство

$$\sqrt{(\log_4 x)^2 - 2} \ge \log_2 \frac{x}{4} - 1.$$

Ответ: $0 < x < 4^{-\sqrt{2}}$, $4^{\sqrt{2}} \le x \le 16 \cdot 4^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$.

948.(биолог., 1980, №3) Решить неравенство

$$\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x.$$

Ответ: $(3; 5]$.

949.(геолог., устный, 2004)Решите неравенство

$$\sqrt{7+x} \ge 7 - 2x.$$

Ответ: $x \ge 2$.

950.(физ., 2003, май, №5) Решить неравенство

$$\sqrt{12x^2 + 42x + 1} + |2x^2 + 7x| \ge 9$$

Ответ: $x \le -4$; $x \ge \frac{1}{2}$.

951.(мех-мат, 1998, июль, №1) Решить неравенство

$$3 \cdot \sqrt{|x+1| - 3} \ge \sqrt{x^2 - 2x - 3}.$$

Ответ: $\left[3; \frac{11+\sqrt{61}}{2}\right]$.

952.(олимпиада "Ломоносов-2005", №6) Решить неравенство

$$3|x| \leq x\left(3x+2-2\sqrt{6+x-x^2}\right).$$

Ответ: $\left[-2; \frac{\sqrt{156}-13}{13}\right] \cup \left[\frac{23}{13}; 3\right] \cup \{0\}$.

953.(ВМК, "Абитуриент-2008", 2008, апрель, №2) Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-2x-|x+1|-3} \geq -2x-3.$$

Ответ: $\left[-\frac{13+\sqrt{37}}{6}; -1\right] \cup [4; +\infty)$.

954.(эконом., 1997, июль, №2) Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{(x^2-2x-15)^3}} \cdot 7^{(x+3)^2(x-5)} \leq 1.$$

Ответ: $(-\infty; -3] \cup \{5\}$.

955.(мех-мат, 1998, март, №3) Решить неравенство

$$\log_2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{1}{2}x+1\right) \cdot \log_3(-2x-x^2) \geq$$
$$\log_3\left(\frac{1}{2}|x|+\frac{3}{2}\right) \cdot \log_2(-2x-x^2).$$

Ответ: $\left(-2; -\frac{3}{2}\right] \cup \{-1\}$.

956.(мех-мат, 2010, №2) Решите неравенство

$$\frac{1-x}{x} > \sqrt{\frac{3x-2}{3x+4}}.$$

Ответ: $\frac{2}{3} \leq x < \frac{4}{5}$.

3.7.2 Метод новой неизвестной

957*. (почвовед., 1999, май, №3) Решить неравенство

$$3 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 3 < 10 \cdot 2^{\sqrt{2-x}}.$$

Ответ: $\left(2-\log_2^2 3; 2\right]$.

958.(ВШБ, 2007, №8) Решить неравенство

$$2\sqrt[3]{(x-1)^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} > 1.$$

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

959.(геолог., 1997, июль, №3) Решить неравенство

$$30 > \frac{x}{60-\sqrt{x}}.$$

Ответ: $[0;900)\cup(3600;+\infty)$.
960.(эконом. (полит. эконом.), 1968, №4) Решить неравенство

$$-9\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}+18 \geq 0.$$

Ответ: $[0;81]\cup[1296;+\infty)$.
961.(физ., 2002, июль, №2) Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{5-x}}{3-x} < 1.$$

Ответ: $(-\infty;1)\cup(3;5]$.
962.(физ., 2001, июль, №2) Решить неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} > \frac{1}{2x-1}.$$

Ответ: $\frac{5}{3} < x < \frac{11-\sqrt{37}}{2}$, $x > 4$.
963.(физ., 2001, май, №2) Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}\cdot 3^{\sqrt{2-x}} > \frac{1}{9}.$$

Ответ: $\frac{-3-\sqrt{13}}{2} < x \leq 2$.
964.(эконом., 1998, июль, №3) Решить неравенство

$$\sqrt{x+8(3-\sqrt{8+x})} < \frac{x+16}{2\sqrt{8+x}-10}.$$

Ответ: $(17;248)$.
965.(эконом., 1999, июль, №2) Решить неравенство

$$4\cdot\sqrt{\frac{2^x-1}{2^x}}+\sqrt{14} \leq 14\cdot\sqrt{\frac{2^{x-2}}{2^x-1}}.$$

Ответ: $(0;3]$.
966*. (биолог., 2005, июль, №4) Решить неравенство

$$\sqrt{x-1} < 3-x.$$

Ответ: $[1;2)$.
967*. (хим., 1998, июль, №2) Решить неравенство

$$\sqrt{x+4} > x+2.$$

Ответ: $[-4;0)$.
968.(ВМК (отд. бакалавров), апрель 2005, №1) Решить неравенство

$$\sqrt{x+2} > x-4.$$

Ответ: $[-2;7)$.
969.(соц., 2005, июль, №5) Решить неравенство

$$\log_{0,5}\left(\sqrt{5-x}-x+1\right) > -3.$$

Ответ: $-4 < x < \frac{1+\sqrt{17}}{2}$.
970.(мех-мат, 1965, №2) Решить неравенство

$$\log_2\left(\sqrt{x+3}-x-1\right) \le 0.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}-3}{2} \le x < 1$.
971.(ИСАА, 1998, июль, №5) Решить неравенство

$$\log_{2x-3}\left(\sqrt{x+2}+x-3\right) \le 1.$$

Ответ: $\left(\frac{3}{2};2\right) \cup (2;+\infty)$.
972.(психолог., 2003, июль, №3) Решить неравенство

$$|3x+1| + \sqrt{3x+4} \le 3.$$

Ответ: $x = -\frac{4}{3};\ -1 \le x \le 0$.
973.(психолог., 1999, июль, №1) Решить неравенство

$$\frac{5x-3}{\sqrt{7x-4}} < 1.$$

Ответ: $\left(\frac{4}{7}; \frac{37+\sqrt{69}}{50}\right)$.
974.(ВШБ., 2003, апрель, №3) Решить неравенство

$$\left|\sqrt{x+4}-2\right| > \frac{6}{\sqrt{x+4}-3}.$$

Ответ: $[-4;5) \cup (21;+\infty)$.
975.(географ., 2005, июль, №3) Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{1-x}}(1+5x) \ge -2$$

Ответ: $\frac{4}{5} \le x < 1$.
976*. (ВМК, 2006, июль, №3) Решить неравенство

$$11\sqrt{2x-\sqrt{48x-144}} > 2x-12.$$

Ответ: $3 \le x < 6$, $6 < x < \frac{133-22\sqrt{6}}{2}$.

3.7.3 Более сложные преобразования

977.(договорные программы, 2008, №5) При каких значениях x числа $x+\sqrt{2x}-4$ и $4+\sqrt{2x}-x$ имеют противоположные знаки?

Ответ: $0 \le x < 2$, $x > 8$.

978.(биолог., 2007, июль, №2) Решить неравенство

$$\frac{x^2+4x+4}{2x+12} \le 1-\frac{\sqrt{x^2+8x+16}}{x+4}.$$

Ответ: $(-\infty;-6)\cup[-2\sqrt{5};-4)\cup\{-2\}$.

979.(олимпиада "Ломоносов-2007", №4) Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{8-x}-|2x-1|}{\sqrt{x+7}-|2x-1|} \le 1.$$

Ответ: $\left[-7;-\frac{3}{4}\right)\cup\left[\frac{1}{2};2\right)$.

980.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2013", №6) Решите неравенство

$$\sqrt{3x-7}-\sqrt{3x^2-13x+13} \ge 3x^2-16x+20.$$

В ответе укажите сумму всех удовлетворяющих неравенству целых значений x

Ответ: 3.

981.(ВШБ, 2008, №2)Решить неравенство

$$\sqrt[3]{x^2-4x+4}-\sqrt[3]{x^2-x-2}-2\sqrt[3]{x^2+2x+1} > 0.$$

Ответ: $-\frac{10}{7} < x < \frac{1}{2}$.

982.(геолог., 1999, май, №7) Решить неравенство

$$\sqrt{4x-x^2-3} \ge \sqrt{x^2-7x+12}-\sqrt{x^2-5x+6}.$$

Ответ: $x=3$.

983.(хим., 2004, июль, №3) Решить неравенство

$$\sqrt{\log_5 x+3}-\sqrt{\log_5 x-2} < \sqrt{\log_5 x-1}.$$

Ответ: $x > 5^{\frac{2\sqrt{21}}{3}}$.

984.(ИСАА, 1999, июль, №5) Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-5}-3}{|x+4|-7} \ge 1.$$

Ответ: $(-\infty;-11)\cup[\sqrt{5};3)$.

985.(ИСАА, 2008, №7) Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-4x-5}+4}{x^2-4x-21} < \frac{2|x+2|+5}{4x^2+16x-9}.$$

Ответ: $\left(-4-\sqrt{6};-\frac{9}{2}\right)\cup\left(-3;\frac{-8+\sqrt{22}}{3}\right)\cup[5;7)$.

986.(хим., 1997, май, №2) Решить неравенство

$$\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2-x}{x}}-\frac{x+1}{2x}\right)^2}\geq 0.$$

Ответ: $(0;2]\setminus\left\{\frac{1}{5};1\right\}$.

987.(ВМК, 1997, апрель, №1) Решить неравенство

$$\sqrt{\log_{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}}(x-2)}\geq 1.$$

Ответ: $\left(2;2+\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}\right]$.

988.(ВМК, 1998, апрель, №2) Решить неравенство

$$\left|\sqrt{x-4}-3\right|>\left|\sqrt{9-x}-2\right|+1.$$

Ответ: $[4;6,5)$.

989.(геолог., 1997, май, №1) Решить неравенство

$$\sqrt{|x+2|-2}>\sqrt{|x+2|-1997}.$$

Ответ: $(-\infty;-1999]\cup[1995;+\infty)$.

990.(эконом. (менеджмент), 1998, июль, №1) Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+3x+2}<1+\sqrt{x^2-x+1}.$$

Ответ: $(-\infty;-2]\cup\left[-1;\frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right)$.

991.(мех-мат, 2003, март (тест перед олимпиадой), №7) Решить неравенство

$$\sqrt{6x-3x^2}-2\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{6x-5-x^2}>3-x.$$

Ответ: $x=2$.

992.(мех-мат, 2003, июль, №1) Решить неравенство

$$2\sqrt{\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+4}}}+3\sqrt{\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x+4}}}\leq 5\sqrt{x+5}.$$

Ответ: $x=-4$.

993.(геолог., 2003, май, №4) Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-6x-7}}{x-7}\geq\frac{x+1}{3}.$$

Ответ: $x\leq -2$, $x=-1$, $7<x\leq 8$.

994.(биолог., 2003, апрель, №2) Решить неравенство

$$1-\sqrt{\frac{1-x}{7-4x}}\leq x.$$

Ответ: $\left[\frac{3}{4};1\right]\cup\left(\frac{7}{4};+\infty\right)$.

995.(географ., 2003, май, №3) Решить неравенство:

$$2\sqrt{9-x^2}<x+3\left(\sqrt{2}+1\right)-\left|x+3\left(\sqrt{2}-1\right)\right|.$$

Ответ: $\left[-3;-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2};0\right)\cup(0;3]$.

996.(ФФМ, 2003, май, №3) Решить неравенство

$$\sqrt{2-x}-\sqrt{4+x}\le\sqrt{x+3}.$$

Ответ: $\left[\frac{-1-2\sqrt{29}}{5};2\right]$.

997.(ИСАА, 2002, июль, №3) Решить неравенство

$$x\sqrt{2-x}\le x^2-x-2-\sqrt{2-x}.$$

Ответ: $(-\infty;-1]\cup\{2\}$.

998.(биолог., 2003, июль, №2) Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-2}}{4-2x}\ge-1.$$

Ответ: $(-\infty;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};2)\cup\left[\frac{8+\sqrt{10}}{3};+\infty\right)$.

999.(мех-мат, 1963, №2) Решить неравенство

$$4x^2+3^{\sqrt{x}+1}+x\cdot3^{\sqrt{x}}<2x^2\cdot3^{\sqrt{x}}+2x+6.$$

Ответ: $\left(0;\log_3^2 2\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

1000.(мех-мат, 2002, май, №2) Решить неравенство

$$\sqrt[3]{2x-x\sqrt{x}-1}+\sqrt{x}+\sqrt[3]{1-2x}\le0.$$

Ответ: $\{0\}\cup\left[\frac{1}{2};1\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$.

1001*. (мех-мат, 1996, март, №2) Решить неравенство

$$\frac{x^3-27+9x(3-x)}{|3-2x|}\le\sqrt{2x-3}.$$

Ответ: $\left(\frac{3}{2};6\right]$.

1002.(мех-мат, 2006, №2) Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{1+3^{-x}}}{\sqrt{1+3^{-x}}-\sqrt{1-3^{-x}}}-\frac{3^{-x}-1}{\sqrt{1-9^{-x}}+3^{-x}-1}\ge\frac{1+\sqrt{1-9^{-x}}}{3^{-x}}.$$

Ответ: $x>0$.

1003.(ВМК, 2004, июль, №2) Решить неравенство

$$\frac{x^2-4}{\sqrt{15+2x-x^2}} \geq |x|-2.$$

Ответ: $(-3;-2] \cup \left[\frac{3-\sqrt{31}}{2}; \frac{\sqrt{23}-1}{2}\right] \cup [2;5)$.

1004.(ФГУ, 2004, июль, №5) Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\min\left(\log_3(3x+5), \sqrt{x^2-x-2}\right) < 2.$$

Ответ: $-\frac{5}{3} < x \leq -1$; $2 \leq x < 3$.

1005.(ВМК, 1990, июль, №4) Решить неравенство

$$\sqrt{9v^2-48v-21}+\sqrt{9v^2-51v-15} \leq |3v-6|.$$

Ответ: $\left[\frac{27-4\sqrt{66}}{9}; \frac{8-\sqrt{85}}{3}\right] \cup \left[\frac{17+\sqrt{349}}{6}; \frac{27+4\sqrt{66}}{9}\right]$.

1006*. (ФНМ, 2005, заочный тур Олимпиады, №4) Найти, при каких значениях x верно неравенство

$$\frac{x^2}{2}-3 \leq \sqrt{2(3-x)}.$$

Ответ: $-1-\sqrt{7} \leq x \leq 1+\sqrt{3}$.

1007.(ВМК, 2001, июль, №6) Функция $f(x)$ определена, возрастает и отрицательна на всей числовой прямой. Решите неравенство

$$\frac{2\cdot f(x^2-2x-112)+\left|f(x^2-2x-112)-3\cdot f(-2x\sqrt{32-2x})\right|}{\left(3\cdot f(-2x\sqrt{32-2x}-112)-2\cdot f(-2x\sqrt{32-2x})\right)^7} > 0.$$

Ответ: $(-13-\sqrt{57}; 8)$.

3.7.4 Графический метод и метод оценок

1008*. (олимпиада "Ломоносов-2006", №6) Решить неравенство

$$\sqrt{4-x}-2 \leq x|x-3|+4x.$$

Ответ: $0 \leq x \leq 4$.

1009.(ВМК, 2009, №9) Решить неравенство

$$\sqrt{5-x}-7x \leq x\cdot|x-3|-7.$$

Ответ: $[1;5]$.

1010.(хим., 2006, №1) Решить неравенство

$$\sqrt{1-|x|} \geq x-2.$$

Ответ: $-1 \le x \le 1$.

1011.(геолог., устный, 2008, июль) Решите неравенство $\sqrt{x}+\sqrt{x^2-2x} \le 2\sqrt{3}$.

Ответ: $\{0\} \cup [2;3]$.

1012*. (Олимпиада "Ломоносов-2010", №4)Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{-x-2}} - \frac{1}{\sqrt{x+4}} \le 1 + \frac{1}{\sqrt{(x+4)(-x-2)}}.$$

Ответ: $-4 < x \le 2\sqrt{\sqrt{5}-2} - 3$.

1013.(ИСАА, 1994, №5) Решить неравенство

$$\left|x - 4^{1+\sqrt{3-x}}\right| \le \frac{5}{3}x - 4 \cdot 4^{\sqrt{3-x}}.$$

Ответ: $x = 3$.

1014.(ФГУ, 2008, №3) Решите неравенство

$$x - \sqrt{6x - x^2 - 8} \le 2 - \sqrt{x^2 - 2x - 3}.$$

Ответ: $x = 3$.

1015*. (ВМК, устный, 2002) Решить неравенство

$$\sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} + \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} \le x^2.$$

Ответ: $x \ge \sqrt[4]{12}$ или $x \le -\sqrt[4]{12}$.

1016.(ВМК, устный, 2001)Решить неравенство

$$4\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt{x - \frac{16}{x}} < x.$$

Ответ: $[4;+\infty) \setminus \left\{\frac{1+\sqrt{65}}{2}\right\}$.

1017.(ВМК, устный, 2003)Решить неравенство

$$x + y^2 + \sqrt{x - y^2 - 1} \le 1.$$

Ответ: $x = 1; y = 0$.

1018.(геолог., устный, 2005) Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x - y^2 - 1} \le 1.$$

Ответ: $x = 1; y = 0$.

1019*. (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2005", №2) Решить неравенство

$$\left|\sqrt{x+3} - 2\right| + \sqrt{x+3} + |x+1| \le x + 3.$$

Ответ: $[-1;1]$.

1020*. (биолог., 2003, июль, №6) Решить неравенство

$$(3-x)\log_2(1+\sqrt{7})^{x^2+3x+2} > \sqrt{2-x}\log_3(8+2\sqrt{7})^{(x+1)\sqrt{x+1}}.$$

Ответ: $(-1;2]$.

1021.(ВМК, 2006, апрель, №2) Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{x^2-22x+121}{x^2-24x+140}} \geq 50x-2x^2-309.$$

Ответ: $x<10$, $x=11$, $x>14$.

1022.(мех-мат, 1973, №3) Решить неравенство

$$4x+8\sqrt{2-x^2} > 4+(x^2-x)\cdot 2^x + 2^{x+1}\cdot x\cdot\sqrt{2-x^2}.$$

Ответ: $(-1;\sqrt{2}]$.

1023*. (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2017", №3) Решите неравенство

$$\frac{8^{-|x-4|}}{\sqrt{x^2-5x}+3} \leq \frac{3\cdot 2^{-|x+2|}}{\sqrt{x^2+13x-14}+9}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству $[-2020;2018]$. Если неравенство не имеет решений, то запишите -1.

Ответ: 4017.

Глава 4

Системы уравнений

4.1 Метод последовательного исключения неизвестных

1024*. (биолог., 1994, июль, №1) Решить систему

$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 48. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(4;1); \left(-\frac{2}{3}; \frac{10}{3}\right)\right\}$.

1025*. (фил., 1980, №3.С) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y - x = 5, \\ zx = (z-4)y + 30, \\ 2zx = (2z-4)y. \end{cases}$$

Ответ: $\{(10;15;6)\}$.

1026.(ДВИ, 2019, №2) Найдите $a+b+c$, если известно, что $a+3b=2$, $b+3c=4$, $c+3a=6$.

Ответ: 3.

1027.(ФНМ, 2000, апрель, №1) Решить систему

$$\begin{cases} 3x + y - z = 4, \\ x - 2y + 3z = 0, \\ x^2 + 2y + z^2 = 6x. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(1;2;1); \left(\frac{44}{25}; -\frac{28}{5}; -\frac{108}{25}\right)\right\}$.

1028.(почвовед., 1994, №2) Решить систему

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x + y = 13, \\ 2^{2x+1} + 3y = 35. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(-1; \frac{23}{2}\right), (2;1)\right\}$.

1029.(эконом. (отд. менеджмента), 2007, №2) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = 81, \\ x+1 = -2\sqrt{y^2+10y+41}. \end{cases}$$

Ответ: $\{(-9;-5)\}$.

1030.(эконом.(менеджмент), 1996, №2) Решить систему

$$\begin{cases} x+3^y = 2, \\ x^3+27^y = 26. \end{cases}$$

Ответ: $\{(-1;1)\}$.

1031.(психолог., 1989, №3) Решить систему

$$\begin{cases} \log_x 25 + 2y = 2, \\ -\left(\log_x 0,2\right)^3 + y = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(5;0),\ \left(\frac{1}{5};2\right)\right\}$.

1032.(мех-мат, 1994, №2) Решить систему

$$\begin{cases} 2^x + 2y = 1, \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\log_2\frac{2}{3};\frac{1}{6}\right)\right\}$.

1033.(мех-мат, 2010, №1) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^y = 4^x + 8, \\ y = \frac{x+1}{\log_2 x}. \end{cases}$$

Ответ: $\{(2;3)\}$.

1034.(геолог., 1987, №4) Решить систему

$$\begin{cases} 2x+3y = 16, \\ \log_2 x + \log_2 y = 3. \end{cases}$$

Ответ: $\{(2;4),(6;4/3)\}$.

1035*. (мех-мат, 2000, июль №2) Решить систему

$$\begin{cases} \log_2(xy)\cdot\log_{4x} y = 2, \\ 8x - y = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\{(5/8;4)\}$.

1036.(психолог., 1991, №3) Решить систему

$$\begin{cases} \log_3 x - 2^y + y = 3, \\ y\cdot 2^y + 2^y\cdot\log_3 x = 4. \end{cases}$$

Ответ: $\{(81;0)\}$.

1037.(ВМК, 1997, апрель, №3) Решить систему

$$\begin{cases} |x^2-4y+3| + y = 1, \\ 2x+2y = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{-3+\sqrt7}{2};\frac{4-\sqrt7}{2}\right)$; $\left(\frac{-5+\sqrt{19}}{2};\frac{6-\sqrt{19}}{2}\right)$.

4.2 Преобразования перед исключением

4.2.1 Расщепление уравнений

1038.(эконом., 2010, №2) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x-y)\sqrt{y+1}=0, \\ \sqrt{x^2+6x+y+10}=-y^2-8y+x+2. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(-6;-1), \left(\frac{-7+3\sqrt{5}}{2}; \frac{-7+3\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

1039.(ДВИ, 2012, август, №2) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^4\cdot\sqrt{x-y}=0, \\ y^2+5y=24+xy. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(0;-8), \left(\frac{24}{5}; \frac{24}{5}\right)\right\}$.

4.2.2 Сложение/вычитание уравнений

1040.(Севастополь, 2008, №4) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x=2-y^2, \\ 2y=2-x^2. \end{cases}$$

Ответ: $(-1-\sqrt{3};-1-\sqrt{3})$, $(-1+\sqrt{3};-1+\sqrt{3})$.

1041.(геолог., 1995, июль, №5) Решить систему

$$\begin{cases} y^2+xy=42x, \\ 6x^2+6xy=7y. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(0;0),\ (1;6),\ \left(\frac{7}{5};-\frac{42}{5}\right)\right\}$.

1042.(соц., 2007, июль, №4) Решить систему

$$\begin{cases} x^2-2y-3=0, \\ y^2+2x-3=0. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1;-1),(-3;3)\}$.

1043*. (ИСАА, 2004, июль, №3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=xyz, \\ y^2+z^2=xyz, \\ z^2+x^2=xyz. \end{cases}$$

Ответ: $(0;0;0)$, $(2;2;2)$, $(2;-2;-2)$, $(-2;2;-2)$, $(-2;-2;2)$.

1044*. (Олимпиада ”Покори Воробьёвы горы-2007”, 10 кл., №5) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=x+y-2z, \\ z^2+x^2=z+2x-y, \\ y^2+z^2=2y+z-x. \end{cases}$$

Ответ: $(0;0;0)$, $(1;1;0)$.

1045.(ВМК, устный, 2002)Решить относительно x, y и z систему уравнений, считая, что a, b и c – длины сторон треугольника

$$\begin{cases} x^2y^2 + x^2z^2 = axyz, \\ y^2z^2 + y^2x^2 = bxyz, \\ z^2x^2 + z^2y^2 = cxyz. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\sqrt{(p-b)(p-c)}; \sqrt{(p-a)(p-c)}; \sqrt{(p-a)(p-b)}\right)$,
$\left(\sqrt{(p-b)(p-c)}; -\sqrt{(p-a)(p-c)}; -\sqrt{(p-a)(p-b)}\right)$,
$\left(-\sqrt{(p-b)(p-c)}; \sqrt{(p-a)(p-c)}; -\sqrt{(p-a)(p-b)}\right)$,
$\left(-\sqrt{(p-b)(p-c)}; -\sqrt{(p-a)(p-c)}; \sqrt{(p-a)(p-b)}\right)$,
где $p = \frac{a+b+c}{2}$; $\{(r;0;0), (0;r;0), (0;0;r)\}$, где $r \in R$.

1046.(ВМК, устный, 2005)Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y + 2x + z = 2 \cdot (x+y)(z+x), \\ z + 2y + x = 4 \cdot (y+z)(x+y), \\ x + 2z + y = (z+x)(y+z). \end{cases}$$

Ответ: $(0,0,0)$, $\left(-\frac{17}{15}, \frac{23}{15}, -\frac{13}{15}\right)$.

1047.(Ташкент, 2006, №10)Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = xyz + z^3 - 11, \\ x^3 + z^3 = xyz + y^3 + 21, \\ y^3 + z^3 = xyz + x^3 + 3. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(1;-2;2), \left(\frac{5}{\sqrt[3]{13}}; \frac{2}{\sqrt[3]{13}}; \frac{6}{\sqrt[3]{13}}\right)\right\}$.

1048.(ВМК, устный, 2002)Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 8(yz + xz + xy) = 36, \\ 6x^2 + y^2 + 5z^2 + 8(yz + xz + xy) = 36, \\ 5x^2 + 6y^2 + z^2 + 8(yz + xz + xy) = 36. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1;1;1), (-1;-1;-1), (3;-3;-3), (-3;3;3), (3;-3;3), (-3;3;-3), (3;3;-3), (-3;-3;3)\}$

1049.(ВМК, 2007, устный) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2, \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2, \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{2}{3}; \frac{27}{8}; \frac{32}{3}\right)$.

4.2.3 Однородные уравнения

1050.(ВМК, устный, 2004)Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2y^2+xy-x^2=0, \\ x^2-xy-y^2+3x+7y+3=0. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(1;-1),(3;-3),\left(-13-\sqrt{157},\frac{-13-\sqrt{157}}{2}\right),\left(-13+\sqrt{157},\frac{-13+\sqrt{157}}{2}\right)\right\}$.

1051.(ВШБ, 2007, №2) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y}+x=6y, \\ x^2-2y=xy. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(2;1),\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{6}\right)\right\}$.

1052*. (географ., 1995, май, №1) Решить систему

$$\begin{cases} y^2+2xy=15, \\ 2x^2+xy=5. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1;3),(-1;-3)\}$.

1053.(фил., 1982, №3С) Решить систему

$$\begin{cases} x^2-4xy+y^2=3, \\ y^2-3xy=2. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

1054.(географ., 2002, июль, №6) Решить систему

$$\begin{cases} x^3=4x+y, \\ y^3=4y+x. \end{cases}$$

Ответ: $(0;0),(\pm\sqrt{5};\pm\sqrt{5}),(\pm\sqrt{3};\mp\sqrt{3})$, $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2};\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2};\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$.

1055*. (геолог., 2003, июль, №4) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2-y^2+2=0, \\ 4y^3-8y+7x^3-2x=0. \end{cases}$$

Ответ: $(0,\sqrt{2})$, $(0,-\sqrt{2})$, $\left(\sqrt{\frac{2}{79}},9\sqrt{\frac{2}{79}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{2}{79}},-9\sqrt{\frac{2}{79}}\right)$.

1056.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2008", №9) Числа x, y, z удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 3x^2+3xy+y^2=75, \\ y^2+3z^2=48, \\ z^2+xz+x^2=9, \\ x,y,z>0. \end{cases}$$

Найти $xy+2yz+3xz$.

Ответ: $24\sqrt{3}$.

4.2.4 Квадратные уравнения

1057*. (эконом., 1980, №3) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2xy + y^2 - 4x - 3y + 2 = 0, \\ xy + 3y^2 - 2x - 14y + 16 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\{(-1;3), (x;2),$ где $x \in R\}$.

1058.(ИСАА, 2008, №3) Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 12 + x - 10y, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = 16 + 6x + 4y. \end{cases}$$

Ответ: $(-8;6)$, $\left(-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3}\right)$.

1059.(ВШБ, 2008, №4)Найти все пары чисел x и y, являющиеся решениями системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy + 1, \\ y(2 - x) = 3xy - 2x - 2. \end{cases}$$

Ответ: $\{(2;1), (0;-1), (-1;0), (1;2)\}$.

1060.(физ., 2007, март, №5) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} z^2 + 2y\sqrt{z} - 1 = 0, \\ y^2 + z^4 = (1 + z^3)y\sqrt{z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}, \sqrt{2}-1\right), \left(\frac{1}{4}\sqrt[4]{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right\}$.

4.2.5 Модули

1061.(физ., 1997, июль, №5)Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y - |x - 3| = 1, \\ |x - y| = 3. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)\right\}$.

1062.(мех-мат, 1970, №2) Решить систему

$$\begin{cases} |xy - 2| = 6 - x^2, \\ 2 + 3y^2 = 2xy. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\sqrt{6};\frac{\sqrt{6}}{3}\right), \left(-\sqrt{6};-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}$.

1063.(физ., 1998, июль, №5)Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + |x + y| = 0, \\ y - 2 + \sqrt{x - y + 5} = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\{(-1;0)\}$.

4.2.6 Радикалы

1064.(физ., 1999, март, №5)Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+3x+2} - |y+2| = 0, \\ 2\sqrt{y^2+4y+4} + \sqrt{x^2-x-2} = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\{(-1;-2)\}$.

1065.(ФНМ, 2002, апрель, №3) Решить уравнение

$$\sqrt{x^2-3xy+y^2+1} + |2x^2+5xy-3y^2| = 0.$$

Ответ: $\{(1;2),(-1;-2)\}$.

1066.(мех-мат, 1984, №4) Решить систему

$$\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3\cdot 2^{y+3x}, \\ \sqrt{3x^2+1+xy} = \sqrt{x+1}. \end{cases}$$

Ответ: $(0;3-\log_2 11)$, $\left(\frac{\log_2(3+2\sqrt{2})-1}{3}; 2-\log_2(3+2\sqrt{2})\right)$.

1067.(геолог., 2000, №5) Решить систему

$$\begin{cases} x+y+3\sqrt{x+y} = 18, \\ x^2+y^2 = 125. \end{cases}$$

Ответ: $\{(11;-2),\ (-2;11)\}$.

1068.(физ., 2006, №5) Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x+y+\sqrt{9x^2-y^2} = 6, \\ y\sqrt{(3x+y)(3x-y)} = 2 \end{cases}$$

и, считая в них x и y координатами точек, указать, какая из этих точек ближе к началу координат.

Ответ: $\left(\frac{8}{9};\frac{5-\sqrt{7}}{3}\right)$, $\left(\frac{8}{9};\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right)$. Первая точка ближе к началу координат.

1069.(физ., 2005, июль, №5) Решить систему

$$\begin{cases} x+4\sqrt{x-y} = y+12, \\ |2(x+1)+y| + 2\,|2x+(y-1)| = 3. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{5}{3};-\frac{7}{3}\right)$.

1070.(физ., 2002, март, №5)Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3\sqrt{3x^2-y^4} = 2x-7y, \\ 6\sqrt{3x^2-y^4} = x-8y. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(0;0),(-2\sqrt{11};\sqrt{11})\right\}$.

4.2.7 Показательные выражения

1071.(географ., 1974, №3) Решить систему

$$\begin{cases} 25\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2y-2}=\frac{1}{5^{2x}}, \\ \sqrt{x+2}+\sqrt{2x+y+14}=\sqrt{x+y+12}. \end{cases}$$

Ответ: $\{(-2;-1)\}$.

1072.(физ., 1999, май, №5)Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{\left(\frac{y}{x}+\frac{8x}{y}\right)}=64, \\ \sqrt{y}-\sqrt{3x}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1;4)\}$.

1073.(физ., 2003, май, №2) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9^x\cdot 7^{2y}=27, \\ 5^y\cdot 4^{x+1}=32. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{3}{2};0\right)$.

1074.(физ., 1998, март, №5)Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5^{\log_4(2x-y)}=1, \\ 9^{3x-2y}-6\cdot 3^{3x-2y}=27. \end{cases}$$

Ответ: $\{(0;-1)\}$.

4.2.8 Логарифмы

1075.(ВШБ, 2003, июль, №4) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5\log_{32}(x+y)+\log_{\frac{1}{2}}(3y-8)=0, \\ x^2+2x+y^2+y=12. \end{cases}$$

Ответ: $(-2;3)$.

1076.(физ., 2000, март, №5)Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{6}}x+2\log_6 y=2, \\ \log_{27}(3y-3x-1)^3+\log_3(3y-3x+1)=\log_3 8. \end{cases}$$

Ответ: $\{(2;3)\}$.

1077.(физ., 1996, июль, №5) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2(3y^2-x^2)=3, \\ 8\log_{16}(-x)+\log_2 y^2=4. \end{cases}$$

Ответ: $\{(-2;-2),(-2;2)\}$.

1078.(геолог., 1980, №3) Решить систему

$$\begin{cases} \log_2(x^2+y^2)=5, \\ 2\log_4 x+\log_2 y=4. \end{cases}$$

Ответ: $\{(4;4)\}$.

1079.(ВМК, "Абитуриент-2008", 2008, апрель, №1) Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{3}}(4x+y-7)=\log_3(2x+y-5), \\ (0,125)^{x-1}=2^{y-6}. \end{cases}$$

Ответ: $\{(0;9)\}$.

1080.(Высшая школа государственного аудита, "Абитуриент-2008 ", №5) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x+\log_{\frac{1}{2}} y=1, \\ x^{\log_4 y}+y^{\log_{\frac{1}{4}} x}=2. \end{cases}$$

Ответ: $\left(1;\frac{1}{2}\right), (2;1)$.

1081.(фил., 1967, №3) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x 3=\log_y 9, \\ x^2-7y^2+26=0. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(\sqrt{2};2)\right\}$.

1082.(эконом.(полит. эконом.), 1975, июль, №3) Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{3+\log_x(1-y)}=\log_x(x\cdot(1-y)), \\ xy=-6. \end{cases}$$

Ответ: $\{(3;-2)\}$.

1083*. (мех-мат, 1989, №4) Решить систему

$$\begin{cases} \log_x y+\log_y x=\frac{5}{2}, \\ 4\sqrt{x}-3\sqrt{y}=1. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{1}{9};\frac{1}{81}\right)\right\}$.

1084.(эконом. (кибернетика), 1977, №3) Решить систему

$$\begin{cases} y^{1-\frac{2}{5}\log_x y}=x^{\frac{2}{5}}, \\ 1+\log_x\left(1-\frac{3y}{x}\right)=\log_x 4. \end{cases}$$

Ответ: $\{(16;4)\}$.

1085.(Севастополь, 2003, май, №6) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (\log_y 2)\cdot\log_2(1-x)=-1, \\ x^{\log_y x}=\sqrt{xy}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

1086.(почвовед., 1998, №4) Решить систему

$$\begin{cases} y^x = 3y, \\ 2\log_3 y + \log_y 3 = 3x. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{3}{2}; 9\right), \left(-1; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$.

1087.(ВМК, устный, 2003)Найти все положительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^{x-y} = y^2, \\ y^{x-y} = x^6 y^4. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1;1), (\sqrt{2}-1; \sqrt{2}+1)\}$.

1088.(мех-мат, 2008, №3) Решить систему

$$\begin{cases} \log_2(2x^3 + 4x^2y - 3x^2) = \log_{11}(4xy^2 + 24y^3 - 12y^2), \\ \log_{11}(x^3 + 6x^2y - 3x^2) = \log_2(8xy^2 + 16y^3 - 12y^2). \end{cases}$$

Ответ: $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

4.2.9 Графические методы и метод оценок

1089.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2012", очный тур)Решите уравнение

$$|1 - x - y - xy| + \left|2x^2y^2 - 2x^2y - 2xy^2 + 2xy - 9\right| + \frac{|xy|}{xy} = -1.$$

Ответ: два решения: $x = -\frac{1}{2}$, $y = 3$ и $x = 3$, $y = -\frac{1}{2}$.

1090*. (ВМК, устный, 2005)Решить систему

$$\begin{cases} \log_2 y - \log_2 x = 3^x - 3^y, \\ 2^{1-x} + 8^{-2x} = 65^x \cdot 4^{-3y}. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1;1)\}$.

1091.(ВМК, устный, 2008, июль) Решить систему

$$\begin{cases} \log_8 \frac{y}{x} = 3^x - 3^y, \\ 2^{1-x} + 8^{-2x} = 65^x \cdot 4^{-3y}, \\ x, y > 0. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1;1)\}$.

1092.(ВМК, устный, 2003)Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 + y^{-4} = y^4 + x^{-4}, \\ 3x^2 + 6xy + 7y^2 = 16. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1;1), (-1;-1), (2;-2), (-2;2)\}$.

1093.(ВМК, устный, 2005) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{y^6} = y^2 + \frac{1}{x^6}, \\ (x^2 - y^2) \cdot 2^{2x-3y+6} + 3x = 12. \end{cases}$$

Ответ: $\{(4; 4), (4; -4)\}$.

1094.(ВМК, 2007, устный) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \log_3 \frac{y}{x}, \\ 2^{x+2} + 8^x = 5 \cdot 4^y. \end{cases}$$

Ответ: $(2; 2)$.

1095.(Высшая школа государственного аудита, "Абитуриент-2008 ", №5) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} y = 1, \\ x^{\log_4 x} + y^{\log_{\frac{1}{4}} x} = 2. \end{cases}$$

Ответ: $\left(1; \frac{1}{2}\right), (2; 1)$.

4.3 Метод новых неизвестных

1096.(почвовед., 2007, июль, №6) Решить систему

$$\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1; 3), (3; 1)\}$.

1097.(геолог., 1997, июль, №6) Найти все решения уравнения

$$|x + y - 3xy + 13| + |x^2y + xy^2 - 30| = 0.$$

Ответ: $(2; 3)$, $(3; 2)$, $\left(\frac{-27+\sqrt{744}}{3}; \frac{-27-\sqrt{744}}{3}\right)$, $\left(\frac{-27-\sqrt{744}}{3}; \frac{-27+\sqrt{744}}{3}\right)$.

1098.(ВМК, 1995, №2) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x + 3xy + y = 3 + 10\sqrt{2}, \\ x^2 + y^2 = 11. \end{cases}$$

Ответ: $\{(3; \sqrt{2}), (\sqrt{2}; 3)\}$.

1099*. (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2006", очный тур-эконом., №1) Для каждой пары чисел $(p; q)$, являющейся решением системы

$$\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + 1 = 0, \\ \log_{10}(pq) = 1, \end{cases}$$

вычислить значение выражения $\frac{q}{p} \cdot \sqrt[6]{\frac{p^{12}}{q^{18}}} - \frac{q}{p^2}$.

Ответ: 7.

1100*. (эконом., 2002, №3) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x + xy - y = 1, \\ xy^2 - x^2y = 30. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1;6), (-6;-1), (1;-5), (5;-1)\}$.

1101.(геолог., 1998, июль, №7) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - 5 = y(1-x), \\ xy^2 - x^2y = 6. \end{cases}$$

Ответ: $(2;3)$, $(-3;-2)$, $(3+2\sqrt{2}; -3+2\sqrt{2}), (3-2\sqrt{2}; -3-2\sqrt{2})$.

1102.(ВМК, устный, 2004)Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + x - y = 5, \\ x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = 6. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{11}{6}; -\frac{7}{6}\right), \left(\frac{7}{4}; -\frac{1}{4}\right)\right\}$.

1103.(геолог., 2001, №5) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy}{2} + \frac{5}{2x+y-xy} = 5, \\ 2x + y + \frac{10}{xy} = 4 + xy. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(1;5), \left(\frac{5}{2}; 2\right)\right\}$.

1104.(физ., 2003, март, №5) Решить систему

$$\begin{cases} \frac{17}{2x^2+3y} + \frac{12}{3x^2-2y} = 3, \\ \frac{6}{3x^2-2y} + \frac{34}{2x^2+3y} = 3 \end{cases}$$

и изобразить на координатной плоскости Oxy ее решения.

Ответ: $(-2;3)$, $(2;3)$

1105.(мех-мат, 1979, №3C) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{2x-y} + \frac{3}{x-2y} = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2x-y} - \frac{1}{x-2y} = \frac{1}{18}. \end{cases}$$

Ответ: $(5;-2)$.

1106.(физ., 1994, май, №5) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x-5| + |y+1| = 2, \\ x = 5 - |y+1|. \end{cases}$$

Ответ: $\{(4;-2), (4;0)\}$.

1107.(мех-мат, 1980, №4C) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - \sqrt{y} = 1, \\ 5x^6 - 8x^3\sqrt{y} + 2y = 2. \end{cases}$$

Ответ: $(\sqrt[3]{4}; 9)$.

1108.(физ., 2003, июль, №3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-y} = 9 - |x+2y|, \\ x(x+4y-2) + y(4y+2) = 41. \end{cases}$$

Ответ: $(5; 1)$, $\left(\frac{1}{3}; -\frac{11}{3}\right)$.

1109.(хим., 1991, №3) Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3, \\ 2xy - y + 6x - 3 = 4. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(1; 1), \left(\frac{5}{2}; -2\right)\right\}$.

1110*. (ВШБ, 2004, июль, №3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{y-2} = 1, \\ x + y - 20 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\{(26; -6), (-9; 29)\}$.

1111.(ДВИ, 2014, №6) Найдите все положительные x, y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^{3/2} + y = 16 \\ x + y^{2/3} = 8 \end{cases}$$

Ответ: $(4; 8)$.

1112.(ВМК, устный, 2004)Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x-y)^4 = 13x - 4, \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{3x-y} = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{5}{16}; -\frac{3}{16}\right), \left(\frac{5}{16}; \frac{13}{16}\right)\right\}$.

1113.(ВМК, устный, 2002)Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+3} = 5. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(4; 1), \left(\frac{121}{64}; \frac{169}{64}\right)\right\}$.

1114.(ВМК, 1985, №1) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 6^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 6^x \cdot 3^y = 12. \end{cases}$$

Ответ: $(1; \log_3 2)$.

1115.(физ., 1976, №3) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} + 3^x \cdot 3^{-y} = 12, \\ 3^x + 3^{-y} = 10. \end{cases}$$

Ответ: $\{(0; -2), (2; 0)\}$.

1116.(физ., 2004, март, №5) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |2^x - 2^y| + 2^x + 3 \cdot 2^y = 12\sqrt{2}, \\ |2^x + 2^{-y}| + 2^x - 33 \cdot 2^{-y} = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right), \left(\frac{7}{2} - \log_2 3; \frac{1}{2} + \log_2 3\right) \right\}$.

1117.(физ., 1999, июль, №4) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 5^{x+1} - \frac{18}{3^{2-y}} = 35, \\ \frac{10}{5^{1-x}} + 2 \cdot 3^{y+1} = 36. \end{cases}$$

Ответ: $(\log_5 3; \log_3 5)$.

1118.(ФГУ, 2008, №6) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 7 + 9^x = 2^y + 4 \cdot 3^x, \\ 11 - 3 \cdot 2^{y+1} = 3^x - 4^y. \end{cases}$$

Ответ: $(1; 2), (\log_3 2; \log 23)$.

1119.(эконом.(менеджмент), 2003, июль, №3) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 4^x + 2^{x+1} \cdot 3^y - 9^y = 0, \\ 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x \cdot 3^y + 9^y = -8. \end{cases}$$

Ответ: $(1/2; \log_3 3\sqrt{2})$.

1120.(эконом., 2003, июль, №3) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 4^x - 19 \cdot 3^{x \log_3 2 + y} + 4 \cdot 9^y = -10, \\ 4^x + 6 \cdot 2^{x + y \log_2 3} - 9^y = 5. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; \log_3 \frac{3}{\sqrt{2}}\right), \left(\log_2 \frac{2}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{2}\right)$.

1121.(ВМК, 1997, июль, №4) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 4^x - 2^x - 2 \cdot 5^y = 1, \\ 25^y + 3 \cdot 2^x - 4 \cdot 5^y = 3. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\log_2 \frac{7+\sqrt{13}}{6}; \log_5 \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$.

1122.(географ., 2001, май, №1) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 9 \cdot 2^x \cdot 5^y - 5 \cdot 3^{y+x} = 3^x \cdot 5^y, \\ 2^{x-2} \cdot 3^{y-x+1} \cdot 5^{1-y} = 1. \end{cases}$$

Ответ: $(2; 1)$.

1123.(психолог., 1992, №2) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 400 \cdot 5^y \cdot 50^x \cdot 100^{x+y} = 1, \\ \log_{0,5x+0,4y}\left(8^{-x} \cdot 4^{-y} + 25^{-2x} \cdot 125^{-y}\right) \cdot \log_{41}(0,5x + 0,4y) = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\{(8\log_5 2 - 6\log_2 5; 8\log_2 5 - 12\log_5 2)\}$.

1124.(физ., 2004, июль, №5) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{x-2y}-\sqrt{2x-2y}=24-x, \\ 2^{x-2y}+2\sqrt{2x-2y}=2x+8. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2};\frac{-5+\sqrt{13}}{4}\right)\right\}$.

1125.(почвовед., 2003, июль, №2) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\log_7(x-y)+7^{xy}=1, \\ 7^{xy}+\log_7(x-y)=1. \end{cases}$$

Ответ: $\{(0;-1),\ (1;0)\}$.

1126.(геолог., 1972, №2) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x+\log_3 y^2=0, \\ \log_2 x^2-\log_{1/3} y=5. \end{cases}$$

Ответ: $\left(2^{\frac{10}{3}};3^{-\frac{5}{3}}\right)$.

1127.(геолог. (общая геология), 1973, №1) Решить систему

$$\begin{cases} \lg 3\cdot\lg(3x)=\lg 2\cdot\lg(2y), \\ \lg x\cdot\lg 2=\lg y\cdot\lg 3. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$.

1128.(ВМК, 1976, №3) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3\cdot 2^x-\log_2 y=2, \\ 2^x\cdot\log_2 y=1. \end{cases}$$

Ответ: $(0;2)$.

1129.(ВМК, 1971, №1) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 6\lg\sqrt{x}+3\cdot 2^y=5, \\ 10\lg x+3\cdot 4^y=17. \end{cases}$$

Ответ: $\left(10^{-\frac{\sqrt{26}}{3}};\log_2\frac{5+\sqrt{26}}{3}\right)$.

1130.(физ., 2002, май, №5) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2^{x+1}\log_9 y-2^{2x}=2, \\ 9\cdot 2^x\cdot\log_{27} y-\log_3^2 y=9. \end{cases}$$

Ответ: $(1;27)$.

1131.(хим., 1985, №5) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} |x-y|-\log_2^2(|x|+y+1)+6=0, \\ (x-y)^2-6\cdot(x-y)\cdot\log_2(|x|+y+1)+5\cdot\log_2^2(|x|+y+1)=0. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(5;2),\left(\frac{93}{2};\frac{33}{2}\right)\right\}$.

1132.(хим., 1993, май, №4) Найдите все решения системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} 6x^2+17xy+7y^2=16, \\ \log_{2x+y}(3x+7y)=3. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{6}{11};\frac{10}{11}\right)\right\}$.

1133.(ВКНМ, 1999, май, №2) Решить систему

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3x}{2}}+\log_3^3 y=504, \\ 4^x-2^{x-1}\log_{\sqrt{3}} y+\log_3^2 y=84. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{(3;1/9)\}$.

1134.(ВМК, 2006, апрель, №1) Найти все решения системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} (x+2y)^{x-y}=25, \\ 2\cdot\log_5(x+2y)+x-y=4. \end{array}\right.$$

Ответ: $(3;1)$.

1135.(ВМК, 1994, май, №5) Числа a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 удовлетворяют соотношению

$$\log_2 a_n\cdot\log_2\left(a_{n-1}\cdot a_{n+1}\right)=\log_2 a_{n-1}\cdot\log_2 a_{n+1}\cdot\log_2\left(4a_n^2\right)$$

при $n=2,3,4$. Известно, что $a_1=2$, $a_5=2^{\frac{1}{25}}$.

Найти $\log_2\left(a_2+2a_3-a_4^4\right)$.

Ответ: 1 или $\frac{10}{9}$.

4.3.1 Тригонометрические подстановки

1136.(мех-мат, 2002, март, №5) Решить систему

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{y}{x}-9xy=2, \\ \frac{z}{y}-9yz=6, \\ \frac{3x}{z}-3zx=2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha,\frac{1}{3}\operatorname{tg}2\alpha,\operatorname{tg}4\alpha\right)$, где $\alpha=\pm\frac{\pi}{7},\pm\frac{2\pi}{7},\pm\frac{3\pi}{7}$.

4.4 Графический метод

1137*. (почвовед., 2000, май, №4) Решите систему уравнений и изобразите множество решений на координатной плоскости (x,y):

$$\left\{\begin{array}{l} |x-y|+2x=6, \\ |2x-y|+3x=6. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{(0;-6);(x;6-x),\ \text{где } x\le 2\}$.

1138.(ВМК, устный, 2002)Решить систему

$$\begin{cases} |x-y| = 2, \\ |x|+|y| = 4. \end{cases}$$

Ответ: $\{(3;1),(1;3),(-3;-1),(-1;-3)\}$.

1139*. (ВМК, устный, 1998 + Московская математическая олимпиада, 1955, 9 кл.) Решить систему

$$\begin{cases} x^3+y^3 = 1, \\ x^4+y^4 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\{(0;1),(1;0)\}$.

1140*. (географ., 1980, №5) Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \left|y+\frac{1}{x}\right|+\left|\frac{13}{6}+x-y\right| = \frac{13}{6}+x+\frac{1}{x}, \\ x^2+y^2 = \frac{97}{36}, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $x<0$ и $y>0$.

Ответ: $\left\{\left(-\frac{3}{2};\frac{2}{3}\right),\left(-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)\right\}$.

1141*. (биолог., 2005, июль, №6) Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2-2x-22y+122} = 2\sqrt{37}-\sqrt{x^2+y^2+2x+2y+2}, \\ \log_{(x+1)}4+\log_y 4 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

1142.(геолог., 2003, май, №7) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{2-x} = 4y\sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2+y^2+1-2x}+\sqrt{x^2+y^2-6x-2y+10} = \sqrt{5}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right)$.

1143.(ВМК, 1996, июль, №5) Решить систему

$$\begin{cases} x^2+y^2-14x-10y+58 = 0, \\ \sqrt{x^2+y^2-16x-12y+100}+\sqrt{x^2+y^2+4x-20y+104} = 2\sqrt{29}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{217-5\sqrt{415}}{29};\frac{180+2\sqrt{415}}{29}\right)\right\}$.

4.5 Метод оценок

1144*. (почвовед., 1979, №5) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41 = 0, \\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\{(2;1)\}$.

1145.(хим., 1998, июль, №3) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x - y) + 2 = 0, \\ z^2 + xz + yz - 4 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\{(-1; 1; 2), (-1; 1; -2)\}$.

1146.(ВМК, устный, 2002)Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2xy - z^2 = 16. \end{cases}$$

Ответ: $\{(4; 4; -4)\}$.

1147.(ФГУ, 2003, июль, №6) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2xy - z^2 = 4. \end{cases}$$

Ответ: $\{(2; 2; -2)\}$.

1148.(Севастополь, 2003, июль, №7) Найдите все тройки чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2, \\ 4xy - 4y - z^2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(2; \frac{1}{2}; -1)\right\}$.

1149*. (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2011", 9-10 кл., №2) Решите систему

$$\begin{cases} x^2 - 2y + 2 = 0 \\ y^2 + 4z + 3 = 0 \\ z^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases}$$

Ответ: $\emptyset$.

1150.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2011", №8) Решите систему

$$\begin{cases} 5x^2 + 3y^2 + 3xy + 2xz - yz - 10y + 5 = 0, \\ 49x^2 + 65y^2 + 49z^2 - 14xy - 98xz + 14yz - 182x - 102y + 182z + 233 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 1; -2)$, $\left(\frac{2}{7}; 1; -\frac{12}{7}\right)$.

1151.(географ., 1981, №5) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0, \\ x^2 + 2x = -y^2 - 2y - 1. \end{cases}$$

Ответ: $\{(-2; -1)\}$.

1152.(географ., 1981, №5) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0, \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1; -1)\}$.

1153.(биолог., 1993, №6 + хим., 1978, №5) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y+2=(3-x)^3, \\ (2z-y)(y+2)=9+4y, \\ x^2+z^2=4x, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z \geq 0$.

Ответ: $\{(2;-1;2),(4;-3;0)\}$.

1154.(ВМК, устный, 2001)Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} (x+3)^3=3-2y, \\ z^2+4y^2=8y, \\ (2z-x)(x+3)=5x+16, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z \geq 0$.

Ответ: $\{(-4;2;0),(-2;1;2)\}$.

1155.(ВМК, 1984, №5) Найдите все решения $(x;y;z)$ системы уравнений

$$\begin{cases} x^3+x^2(13-y-z)+x(2y+2z-2yz-26)+5yz-7y-7z+30=0, \\ x^3+x^2(17-y-z)-x(2y+2z+2yz-26)+y+z-3yz-2=0, \end{cases}$$

такие, что x принадлежит отрезку $[4;7]$.

Ответ: $\{(7;6;6)\}$.

1156*. (ВМК, устный, 2004 + Московская математическая олимпиада, 1957, 2 тур, 8 кл.) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x=\frac{2z^2}{1+z^2}, \\ y=\frac{2x^2}{1+x^2}, \\ z=\frac{2y^2}{1+y^2}. \end{cases}$$

Ответ: $\{(0;0;0),(1;1;1)\}$.

1157.(физ., 1965, №3) Найти все действительные решения системы:

$$\begin{cases} \frac{2x^2}{1+x^2}=y, \\ \frac{2y^2}{1+y^2}=x. \end{cases}$$

Ответ: $\{(0;0);(1;1)\}$.

1158.(ВМК, 2007, устный) При каких n система уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=3, \\ x_1^{-1}+x_2^{-1}+\cdots+x_n^{-1}=3 \end{cases}$$

имеет положительное решение?

Ответ: $n=2;3$.

1159.(ВМК, 2007, устный) При каких n система уравнений

$$\begin{cases} 2^{x_1}+2^{x_2}+\cdots+2^{x_n}=2, \\ 2^{-x_1}+2^{-x_2}+\cdots+2^{-x_n}=2 \end{cases}$$

имеет решение?

Ответ: $n = 2$.

1160*. (Севастополь, 2007, №8) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{1+x^2} = 2^{y-x}, \\ y + \sqrt{1+y^2} = 2^{z-y}, \\ z + \sqrt{1+z^2} = 2^{x-z}. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 0; 0)$.

1161.(ВМК, устный, 2008, июль) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{1+x^2} = 5^{y-x}, \\ y + \sqrt{1+y^2} = 5^{z-y}, \\ z + \sqrt{1+z^2} = 5^{x-z}. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 0; 0)$.

1162.(ВМК, устный, 2004)Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_2 = x_1 + \frac{2}{x_1}, \\ 2x_3 = x_2 + \frac{2}{x_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2x_n = x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}, \\ 2x_1 = x_n + \frac{2}{x_n}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \dots; \sqrt{2}), (-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \dots; -\sqrt{2})\right\}$.

1163.(ВМК, устный, 2002)Решить систему

$$\begin{cases} (x_1 + x_2 + x_3)^3 = 3x_4, \\ (x_2 + x_3 + x_4)^3 = 3x_5, \\ (x_3 + x_4 + x_5)^3 = 3x_1, \\ (x_4 + x_5 + x_1)^3 = 3x_2, \\ (x_5 + x_1 + x_2)^3 = 3x_3. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(0; 0; 0; 0; 0), \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)\right\}$.

1164*. (Олимпиада мех-мат ф-та, 2002, 8 кл., №6) Существуют ли рациональные числа x, y, u, v, удовлетворяющие уравнению

$$(x + y\sqrt{2})^2 + (u + v\sqrt{2})^2 = 7 + 5\sqrt{2}?$$

Ответ: нет.

1165*. (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2006", №9) Существуют ли рациональные числа x, y, u, v, удовлетворяющие уравнению

$$(x + y\sqrt{2})^6 + (u + v\sqrt{2})^6 = 7 + 5\sqrt{2}?$$

Ответ: нет.

Глава 5

Системы неравенств и области на координатной плоскости

5.1 Многоугольники

1166*. (эконом., 1988, №4) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением

$$\left|y - \frac{1}{2}x^2\right| + \left|y + \frac{1}{2}x^2\right| \le 2 + x.$$

Ответ: $S = \frac{15}{2}$.

1167.(Севастополь, 2006, №6) Найдите площадь фигуры на плоскости Oxy, координаты точек которой удовлетворяют неравенствам $1 - x - |y| \ge 0$ и $x - 2|y| \ge 0$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

1168.(геолог.(общая геология), 1981, №3) Изобразить фигуру

$$|x| + |y - 1| \le 4$$

1169.(геолог., 2007, устный) Изобразите множество точек (x, y) плоскости, для которых

$$|2x - |x + y|| \le x + y.$$

1170.(геолог., устный, 2008, июль) Найдите площадь фигуры, задаваемой неравенством

$$|x + 2y| + |x - 1| \le 3.$$

Ответ: $S = 9$.

1171.(геолог., устный, 2001) Найти площадь фигуры

$$|y - 2x| + |y + 2x| \le 2$$

Ответ: $S = 2$.

1172.(ВМК, 1983, №3) Найдите площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости неравенством

$$2|x| + |y + 2x + 1| \le 5.$$

Ответ: $S = 25$.

1173.(ИСАА, 1996, №2) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условиями:

$$\begin{cases} y \ge |x| - 1, \\ y \le -2|x| + 5. \end{cases}$$

Ответ: $S = 12$.

1174.(ДВИ, 2012, №5) Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению $|x| + |x + 3y| + 3|y - 2| = 6$.

Ответ: 6.

1175.(хим., 2002, №2) Решить систему неравенств

$$\begin{cases} |x| + |y - 1| \le 1, \\ |x - 2| + |y - 1| \le 1. \end{cases}$$

Ответ: $(1; 1)$.

1176.(геолог.(геофизика), 1981, №3) Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} y \le 6 - 2|x|, \\ y \ge 2 + 2|x|. \end{cases}$$

Ответ: $S = 4$.

1177.(ВМК, 2002, апрель, №1) Найти площадь фигуры

$$\begin{cases} 3y + 2x \le 8, \\ \sqrt{x^2 + 7x - 8} \le x + 2, \\ 3y + 4 \ge x. \end{cases}$$

Ответ: $S = 4,5$.

1178.(геолог., 1990, июль, №2) Найти площадь треугольника OAB, образованного на плоскости отрезками прямых OA, OB, AB, где O – начало координат, A – точка пересечения прямых $y = 2x$ и $y = -x + 3$, а B – точка пересечения прямой $y = -x + 3$ и оси Ox.

Ответ: $S = 3$.

5.2 Окружности

1179.(эконом., 1994, №4) Составить уравнение окружности наименьшего радиуса, внутри которой помещается множество, заданное на координатной плоскости условием

$$|2y + 3x - 2| + |3x + 6| < 6.$$

Ответ: $(x+2)^2+(y-4)^2=13$.

1180.(геолог., 1999, июль, №3) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости $(x;y)$ системой неравенств:

$$\begin{cases} x\cdot(x+y-\sqrt{2})\le 0, \\ x^2+y^2\le 2. \end{cases}$$

Ответ: $S=\frac{\pi}{2}+1$.

1181.(мех-мат, 1991, июль, №3) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенствами:

$$\begin{cases} x^2+y^2\le 4x-4y-6, \\ x\ge 1. \end{cases}$$

Ответ: $S=\frac{3\pi}{2}+1$.

1182.(геолог., устный, 2003) Изобразите множество всех точек плоскости (x,y), координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{x^2+y^2}{x}\le 2.$$

1183.(геолог., устный, 2001) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенствами:

$$\begin{cases} x^2-4x+y^2+4y\le -6, \\ x\le 2. \end{cases}$$

Ответ: $S=\pi$.

1184.(географ., 2005, июль, №4) Найти периметр фигуры, точки которой на координатной плоскости $(x;y)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y>||x-2|-1| \\ x^2+y^2<4x+2y-3 \end{cases}$$

Ответ: $P=\frac{3\pi+4}{\sqrt{2}}$.

1185.(геолог. (общая геология), 1980, №5) Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости следующей системой:

$$\begin{cases} ||x-y|-|y-1||=x-2y+1, \\ (x-1)^2+(y-1)^2\le 1. \end{cases}$$

Ответ: $S=\frac{\pi}{8}$. Фигура представляет собой объединение двух секторов в круге с центром в точке $(1;1)$ и $R=1$; сумма соответствующих центральных углов равна 45°.

1186.(Севастополь, 1999, июль, №8) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условиями:

$$\begin{cases} ||x-y|-|y-2||=x-2y+2, \\ x^2+y^2\le 4(x+y). \end{cases}$$

Ответ: $S = \pi$. Фигура представляет собой объединение двух секторов в круге с центром в точке $(2;2)$ и $R = 2\sqrt{2}$; сумма соответствующих центральных углов равна 45°.

1187.(почвовед., 2002, май, №6) Определите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенствами:

$$x^2 + y^2 \leq 2|x| + 4|y|.$$

Ответ: $S = 10\pi + 16$.

1188.(хим., 2003, заочный тур, №6) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством:

$$x^2 + y^2 \leq 6|x| - 6|y|.$$

Ответ: $S = 18\pi - 36$.

1189.(ФНМ, 2002, заочный тур, №5) Изобразите на координатной плоскости множество, описываемое неравенством:

$$(|x| + |y| - 1) \cdot (x^2 + y^2 - 2|x|) \geq 0.$$

1190.(ИСАА, 1997, №5) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условиями:

$$\begin{cases} y \leq \sqrt{4 - x^2}, \\ y \geq |x - 1| - 3. \end{cases}$$

Ответ: $S = 2\pi + 7$.

1191.(ФНМ, 2000, апрель, №2) Найдите площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9, \\ y + 1 \geq 0, \\ 3y + 6 \geq 2|x|. \end{cases}$$

Ответ: $S = \frac{9(\pi+1)}{2}$.

1192.(геолог., 1995, №8) Изобразить фигуру, образованную всеми точками (x, y) декартовой плоскости xOy, которые удовлетворяют неравенству

$$x^2 + y^2 + 4(x - |y|) \leq 0.$$

Найдите площадь этой фигуры.

Ответ: $S = 12\pi + 8$.

1193.(ВМК, 1999, №2) На координатной плоскости $(x; y)$ проведена окружность радиуса 4 с центром в начале координат. Прямая, заданная уравнением $y = \sqrt{3}x - 4$, пересекает ее в точках A и B. Найти сумму длин отрезка AB и большей дуги AB.

Ответ: $\frac{16\pi}{3} + 4\sqrt{3}$.

1194*. (эконом., 1991, №5) Найдите площадь фигуры, состоящей из точек, координаты которых удовлетворяют условию:

$$(x^2 + y^2 - x - y) \cdot (x^2 + y^2 - 1) \le 0.$$

Ответ: $S = \frac{\pi}{2} + 1$.

1195.(почвовед., 1996, май, №6) Определите площадь фигуры, расположенной на координатной плоскости и состоящей из точек (x, y), удовлетворяющих неравенству

$$\log_{(x^2+y^2)}(x + y) > 1.$$

Ответ: $S = 1$.

1196.(подгот. отделение эконом./ВМК, 1999, №6) Найдите площадь фигуры, состоящей из точек, координаты которых удовлетворяют условию:

$$\left(2xy + \left(\sqrt{x-y}\right)^4\right)^{2x-2y+1} \ge (x^2 + y^2)^{x^2+y^2-1}.$$

Ответ: $S = 2 + \frac{5\pi}{2}$.

1197.(Ташкент, 2008, №10) Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 9y(y-2) \le 0, \\ 2(y-1)x \ge 3. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$.

1198*. (ДВИ, 2011, №8) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy + 11y^2 \le 1, \\ 4x + 7y \ge 3. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{5}{9}; \frac{1}{9}\right)\right\}$.

1199.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2012", 10–11 кл., №5) Решите систему

$$\begin{cases} |x| + 6y \ge 1 \\ 37x^2 + 37y^2 \le 1. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{1}{37}, \frac{6}{37}\right), \left(-\frac{1}{37}, \frac{6}{37}\right)\right\}$.

5.3 Более сложные фигуры

1200.(геолог., 2007, устный) Изобразите множество точек $M(x, y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $\frac{x}{2y} > 1$.

1201*. (ВМК, устный, 2004) Построить множество точек на координатной плоскости (x, y), координаты которых удовлетворяют равенству

$$2y - |y - x| + y(1 - 2x) + x = 0.$$

1202.(геолог., устный, 2002) Изобразите множество всех точек плоскости (x, y), координаты которых удовлетворяют неравенству

$$3|x-y| \geq 2+(x-y)^2.$$

1203.(эконом., 1972, №2) Изобразить фигуру

$$\begin{cases} 18x^2y^2-4x^3y^2-3x^2y^3=0, \\ 12y^2-2xy^2+3y^3=0. \end{cases}$$

1204.(ВМК, устный, 2003)На плоскости Oxy построить множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x+1}{x+y}=\frac{x^2-1}{x-y}.$$

1205.(геолог., 2007, устный) Изобразите множество точек $M(x, y)$ плоскости, для которых

$$\frac{y-x}{|y+x|} \leq 1.$$

1206.(ВМК, устный, 1999) Изобразить на плоскости геометрическое место точек, удовлетворяющих равенству

$$|y|=x^2-x.$$

1207.(ВМК, устный, 1999) Изобразить на плоскости геометрическое место точек, удовлетворяющих равенству

$$y^2=|x+y|.$$

1208.(ВМК, устный, 1999) Изобразить на плоскости геометрическое место точек, удовлетворяющих равенству

$$|y|=5^{\left|\log_{\frac{1}{5}} x\right|}.$$

1209.(ВМК, устный, 1999) Изобразить на плоскости геометрическое место точек, удовлетворяющих равенству

$$|y-x|+|y-x^2|=2.$$

1210.(ВМК, устный, 2008, июль) Изобразить на координатной плоскости $(x; y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$|y-1|-x^2+3x-2=y+|x^2-3x+2|-1.$$

1211.(Севастополь, 2001, май, №4) Найдите все пары (x, y), удовлетворяющие условию:

$$(|x|-2x) \cdot y^2 \leq 18x \cdot (6-2y).$$

1212.(ВМК, устный, 1999) Изобразить на плоскости геометрическое место точек, удовлетворяющих неравенству

$$2y^2 \leq \log_2 x \cdot (3|y| - 2\log_4 x)\,.$$

1213.(ВМК, устный, 2006) Изобразить на плоскости Oxy геометрическое место точек (x, y), удовлетворяющих равенству

$$\log_2(y-1) = \log_2(x^2-2).$$

1214.(ВМК, устный, 2006) Построить на плоскости Oab геометрическое место точек (a, b), при которых у уравнения $ax^2 + 2bx - a + 4 = 0$

а) нет решений;

б) ровно одно решение;

в) ровно два решения.

1215.(мех-мат, устный, 1994) Изобразить на плоскости (x, y) множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\log_{(x-y)}(x+y) \geq 1.$$

1216.(геолог., устный, 2006) На плоскости Oxy изобразите множество точек, удовлетворяющих условию

$$\log_{(|x|-0.5)}\left(x^2+y^2\right) \leq \log_{(|x|-0.5)} 4.$$

1217.(геолог., устный, 2008, май) На координатной плоскости $(x; y)$ изобразите множество точек, для которых выполняется равенство $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \log_3 \frac{y}{x}$.

1218.(соц., 2008, №6) Изобразите на координатной плоскости множество решений уравнения

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{y+3} = \sqrt{x+y} + 2.$$

Ответ: искомая фигура является объединением двух лучей: $\{(3; y)|y \geq -3\}$ и $\{(x; 1)|x \geq -1\}$.

1219.(геолог. (геофизика), 1982, №5) Построить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$y = 4 - \left|y - \frac{6}{x}\right| - 2\left|\frac{3}{x} - 1\right|,$$

и среди точек этого множества найти все такие, в каждой из которых координата y принимает наибольшее значение.

Ответ: $y_{\max} = 3$ для $2 \leq x \leq 3$.

1220*. (психолог., 1984, №7) Найти все пары чисел x и y, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} \leq 2, \\ x + 3y \geq 2 - \log_4 3. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1+\log_4 3}{2}; \frac{1-\log_4 3}{2}\right)$.

1221.(соц., 2004, апрель, №6) На плоскости Oxy изобразить фигуру, все точки которой удовлетворяют неравенству

$$2^{\frac{1}{2}\log_2 y^2} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{3^{\frac{1}{2}\log_3 x^2} + \frac{1}{2}}.$$

Доказать, что ее площадь S удовлетворяет неравенству $2 < S < 3$.

1222.(ИСАА, 2005, июль, №7) Фигура на плоскости (x, y) состоит из всех точек, через которые не проходит ни одна из кривых, задаваемых соотношением

$$(p^4 + 2p^2 + 9)^2 + (x^2 - y^2)^2 = 16(p^3 + 3p)xy + 2(p^4 + 10p^2 + 9)(x^2 + y^2)$$

при различных действительных значениях p. Найти длину линии, ограничивающей эту фигуру.

Ответ: $8\sqrt{2}$ (эта фигура – внутренность квадрата со стороной $2\sqrt{2}$).

1223.(олимпиада "Ломоносов-2011", II тур, №2) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} + 2x \geq 0, \\ -1 - x^2 \leq y \leq 2 + \sqrt{x}. \end{cases}$$

Ответ: $S = 4$.

1224.(эконом., 2006, №7) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости двойным неравенством

$$|x| + |x-1| + 3|x+1| - |x^2 - 1| - x - 7 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}.$$

Ответ: $8 + 2\pi$.

1225.(мех-мат., 2003, март, №4) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} |y + \log_2 x| + \left|y + 1 - 2^{x-1}\right| = \left|2y - 2^{x-1} + 1 + \log_2 x\right| \\ |x| + |y+1| + |y-1| = x + 2. \end{cases}$$

Ответ: $S = 2$.

1226.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2009", №4)Две параболы $y = x^2$ и $y = 2008 - x^2$, пересекаясь, ограничивают некоторую фигуру. Найдите уравнения всех прямых, делящих площадь этой фигуры пополам.

Ответ: $x = 0$ и $y = kx + 1004$, где k – произвольное действительное число.

1227.(эконом., 1997, июль, №6) Множество точек, расположенных внутри фигуры F, задано на координатной плоскости условием

$$\log_{\left(\frac{x^2+1039}{1147}\right)}\left(\frac{10y - 24 - y^2}{850}\right) > 0.$$

Множества $F(t)$ получаются из F поворотом вокруг начала координат против часовой стрелки на угол t. Найти площадь фигуры, образованной точками, каждая из которых при некотором $t \in [0; \pi]$ принадлежит множеству $F(t)$.

Ответ: $S = 112\pi - 12\sqrt{3}$.

1228.(олимпиада "Ломоносов-2007", №7) Определить, под каким углом видно из начала координат (т.е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке $(0,0)$ помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством

$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{7}{3} - \frac{\pi}{4}$.

1229.(географ., 1997, июль, №6) На координатной плоскости построить множество точек с координатами $(x; y)$, для каждой из которых существует остроугольный треугольник со сторонами 1, $|x|$, $\sqrt{-y}$. Найти уравнения кривых, ограничивающих это множество.

Ответ: $y = -x^2 - 1$, $y = -x^2 + 1$, $y = x^2 - 1$.

1230.(мех-мат, 1998, май, №6) Фигура задана на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} (y^2 - x^2)^2 + 6(y^2 - x^2) - (y + x)^2 + 5y + 7x + 1 < 0, \\ y > 1 - x. \end{cases}$$

Сколько интервалов на прямой $y = 2 - x$ образует ортогональная проекция этой фигуры на указанную прямую.

Ответ: 2.

1231.(олимпиада "Ломоносов-2009", №9) Найдите все пары (x, y), при каждой из которых для чисел

$$u = \sqrt{9 + x^3 - 4x} - x - 2^y \text{ и } v = 3 - x - 2^y$$

справедливы сразу все три следующих высказывания: если $|u| > |v|$, то $u > 0$, если $|u| < |v|$, то $0 > v$, а если $|u| = |v|$, то $u > 0 > v$.

Ответ: $(x; y)$, где $x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty)$, $y \in R$.

5.4 Области на двумерной целочисленной решетке

1232.(МШЭ, 2005, июль, №6) Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 3)^2 < 5, \\ 4y \le x + 8. \end{cases}$$

Ответ: $(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 3)$.

1233.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2013", №8) Три пирата, Джо, Билл и Том, нашли клад, содержащий 70 одинаковых золотых монет, и хотят разделить их так, чтобы каждому из них досталось не менее 10 монет. Сколько существует способов это сделать?

Ответ: 861.

1234.(эконом., 1983, №4) Сколько точек с целочисленными координатами находится внутри криволинейной трапеции, образованной осью абсцисс, прямыми $x = 50$, $x = 244$ и графиком функции $y = \log_3(x + 1)$? Точки, лежащие на границе указанной криволинейной трапеции, не учитывать.

Ответ: 743.

1235.(мех-мат., 1971) Решить в целых числах систему неравенств:

$$\begin{cases} x + y \geq 25, \\ y \leq 2x + 18, \\ y \geq x^2 + 4x. \end{cases}$$

Ответ: $\{(3; 22), (3; 23), (3; 24)\}$.

1236.(ВМК, устный, 1992) Найти все целые значения x и y, удовлетворяющие условию:

$$\begin{cases} 2x - y > 2, \\ x + 3y > 8, \\ 3x + 2y < 17. \end{cases}$$

Ответ: $\{(3; 2), (4; 2), (3; 3)\}$.

1237.(фил., 1977, №1) В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике, но менее, чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

Ответ: 24 – в первом и 7 – во втором.

1238.(хим., 2005, июль, №5) Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - y - 3} + \sqrt{2y - x + 3} = 2\sqrt{3 - x - y}.$$

Ответ: $(2; 0)$.

1239*. (биолог., 1992, №4) Найти все пары целых чисел p и q, удовлетворяющие одновременно двум условиям:

$$\begin{cases} p^2 + q^2 < 18p - 20q - 166, \\ 32p - q^2 > p^2 + 12q + 271. \end{cases}$$

Ответ: $p = 12; q = -8$.

1240.(биолог., 1996, №5) Найти все пары натуральных чисел $(p; q)$, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам:

$$\begin{cases} 18q > 2p + 2q^2 + 27, \\ 7p + 10 \leq 4q. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1;5),(1;6),(2;6)\}$.

1241.(ВМК, 2007, июль, №4)Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x-y\le -25, \\ x^2-y\le 8, \\ 4x+y\le 1. \end{cases}$$

Ответ: $(-5;20),(-5;21)$.

1242.(эконом.(кибернетика), 1973, №2) Найти все пары чисел $(x;y)$, удовлетворяющие одновременно условиям:

$$\begin{cases} x^2-2xy+12=0, \\ x^2+4y^2\le 60, \\ x\in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\left(3;\frac{7}{2}\right)$, $\left(-3;-\frac{7}{2}\right)$.

1243.(хим., 2003, май, 5) Найти все пары целых чисел (x,y), удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} y^3-3x^2-9y+24x-47>0, \\ y^3+x^2-9y-10x+23<0. \end{cases}$$

Ответ: $(4;0)$, $(4;3)$, $(4;-3)$.

Глава 6

Задачи с целочисленными переменными

6.1 Основные теоремы о делимости и признаки делимости

1244.(олимпиада "Ломоносов-2012", II тур, №3) В группу из 17 детей присланы подарки двух видов: каждый подарок первого вида содержит 4 пряника и 9 конфет, а второго – 3 пряника и 11 конфет. Объединив эти подарки, все пряники разделили между детьми поровну. Могло ли случиться при этом, что конфеты разделить поровну не удалось?

Ответ: нет.

1245*. (мех-мат., 2001, март (тест перед олимпиадой), №2) Найти все числа, кратные числу 72 и имеющие десятичную запись вида $\overline{7X531Y}$, где X и Y – цифры.

Ответ: 705312, 795312.

1246.(физ., 1964) Найти все пятизначные числа вида $\overline{34x5y}$ (x и y – цифры), которые делятся на 36.

Ответ: 34056, 34452, 34956.

1247.(ВМК, устный, 2001)Найти все пятизначные числа, делящиеся на 45, запись которых в десятичной системе имеет вид $\overline{53x1y}$ (x и y – цифры).

Ответ: 53010, 53910, 53415.

1248.(олимпиада "Ломоносов-2011", заочный тур, 11 кл., №3)Найти все двузначные числа вида $\overline{XY}$, если число, имеющее шестизначную десятичную $\overline{64X72Y}$, кратно 72.

Ответ: 80, 98.

1249*. (ВМК, устный, 2000+2002+2006) Пусть A, B, C – три натуральных числа, записанных по десятичной системе: A – единицами, число которых $2m$, B – единицами, число которых $m+1$, C – шестерками, число которых m. Доказать, что число $A+B+C+8$ – точный квадрат.

1250*. (физ., 1965, №3) Доказать, что при любом натуральном n число

$$\underbrace{1\ldots1}_{2n\text{ раз}}-\underbrace{2\ldots2}_{n\text{ раз}}$$

есть квадрат целого числа.

1251.(ВМК, устный, 2003)Найти целое число, квадрат которого равен

$$\underbrace{111\ldots111}_{2n\text{ цифр}}-\underbrace{222\ldots222}_{n\text{ цифр}}$$

Ответ: $\underbrace{3\ldots3}_{n\text{ цифр}}$.

1252*. (ВМК, устный, 2002) Докажите, что каждое число последовательности 49, 4489, 444889, 44448889, ... является полным квадратом.

1253*. (ВМК, устный, 2002) Докажите, что каждое число последовательности 25, 1225, 112225, 11122225, ... является квадратом целого числа.

1254*. (ВМК, устный, 2002) Найти все такие натуральные n, при которых число $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}}$ является квадратом целого числа.

Ответ: $n = 1$.

1255*. (ВМК, устный, 2005) Докажите, что натуральное число, десятичная запись которого состоит из 243 единиц, делится на 243.

1256*. (ВМК, устный, 2002+2006) Является ли число $100\,007\cdot 100\,013\cdot 100\,001 + 55$ простым? Ответ надо обосновать.

Ответ: нет, т.к. данное число делится на 11.

1257.(ВМК, устный, 2006 + Московская математическая олимпиада, 1936, 1 тур) Найдите все четырёхзначные числа, являющиеся квадратом целого числа, у которых первая цифра совпадает со второй, а третья цифра совпадает с четвертой.

Ответ: $7744 = 88^2$.

1258*. (ВМК, устный, 2005) Известно, что натуральное трёхзначное число $p = \overline{abc}$ делится нацело на 37. Могут ли числа $q = \overline{bca}$ и $r = \overline{cab}$ также делиться на 37?

Ответ: эти числа обязательно делятся на 37.

1259*. (геолог., устный, 2000 + ВМК, устный, 2006) Доказать, что при любом натуральном n число $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

1260*. (ВМК, устный, 2005)Докажите, что если $(n-1)! + 1$ делится на n, то n – простое число.

1261.(ВМК, устный, 1999)Доказать, что если $a + b + c$ делится нацело на 6, то и $a^3 + b^3 + c^3$ делится нацело на 6, где a, b, c – целые числа.

1262*. (ВМК, устный, 2001+2005) Доказать, что для всех натуральных k число $5^{5k+1} + 4^{5k+2} + 3^{5k}$ делится на 11.

1263*. (ВМК, устный, 2005+2006) Найти все натуральные n, при которых число $2^n - 1$ делится на 7.

Ответ: число $2^n - 1$ делится на 7 тогда и только тогда, когда n делится на 3: $n = 3k$ для некоторого $k \in N$.

1264.(ВМК, устный, 2002)Найти все натуральные n, при которых числа $2^n - 1$ и $2^n + 1$ делятся на 7.

Ответ: $2^n - 1$ делится на 7 при $n = 3k$; $2^n + 1$ не делится на 7 ни при одном натуральном n.

1265.(ВМК, 2007, устный) Пусть $n \geq 3$ – натуральное число. Может ли число несократимых дробей в последовательности

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$$

быть нечётным?

Ответ: нет.

1266*. (Ломоносов-2017, заочный тур) Решите в натуральных числах уравнение $y^{x+y} = x^{x-y}$. В ответе укажите разность $x - y$ для решения (x, y), в котором x – наименьшее, превосходящее 2000.

Ответ. 2058.

6.2 Основная теорема арифметики

1267*. (фил., 1991, №1) Представить число 1991 в виде произведения простых чисел.

Ответ: $1991 = 11 \cdot 181$.

1268*. (ВМК, устный, 2004) Сколько различных натуральных делителей имеет число 210^{37}?

Ответ: 38^4.

1269.(физ., 1964) Сколько множителей 2 имеется в произведении всех целых чисел от 1 до 500 включительно?

Ответ: 494.

1270.(ВМК, устный, 2001)В какой степени входит 2 в разложение на произведение степеней простых чисел произведения

$$P = (n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n-1) \cdot 2n?$$

Ответ: n.

1271.(геолог., устный, 2006) Сколькими нулями оканчивается число 53! (произведение всех целых чисел от 1 до 53)?

Ответ: 12.

1272.(мех-мат, 1962) Сколькими нулями оканчивается произведение всех натуральных чисел от 1 до 1962 включительно?

Ответ: 488.

1273.(ФНМ, 2001, заочный тур, №5) Сколькими нулями оканчивается число 2000! ?

Ответ: 499.

1274*. (почвовед., 2001, май, №5) Решить уравнение в целых числах:

$$3x^2 + 5xy + 2y^2 = 7.$$

Ответ: $\{(5;-4),(-13;20),(-5;4),(13;-20)\}$.

1275.(ВШБ, 2003, июль, №6) Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению

$$2x^2 = 2y^2 + 3xy + 7.$$

Ответ: $\{(3;1),(-3;-1)\}$.

1276*. (мех-мат, устный, 1998) Сколько различных целочисленных пар $(x;y)$ удовлетворяет уравнению

$$x^2 = 4y^2 + 2025?$$

Ответ: 30 пар.

1277.(олимпиада "Ломоносов-2011", заочный тур, 9-10 кл., №4)Дано простое число p. Решите в натуральных числах уравнение $x^2 = y^2 + 2010p$.

Ответ: Если $p \neq 2$, то уравнение не имеет решений. Если $p = 2$, то уравнение имеет четыре решения $(x;y)$: $(1006;1004)$, $(338;332)$, $(206;196)$, $(82;52)$.

1278.(ВМК, 2009, №8) Найти все натуральные числа n, m, k, l, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} nm + kl = 13, \\ nk - ml = 6. \end{cases}$$

Ответ: $(n;m;k;l) = (2;4;1;5)$ или $(5;1;4;2)$.

1279*. (ВМК, устный, 1998) Доказать, что число $\sqrt[3]{2}$ не является рациональным числом.

1280.(геолог., устный, 2006) Является ли число $\sqrt{5}$ рациональным?

1281.(ВМК, устный, 2006) Доказать, что $\sqrt[4]{5}$ не является рациональным числом.

1282.(ВМК, устный, 1998)Доказать, что число $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ – иррациональное.

1283.(эконом., 2005, июль, №6) Найти все рациональные решения уравнения

$$\sqrt{x \cdot (y-1)^2 + 1 - 3y^2} + \log^2_{\left(\frac{|x+3|}{26}\right)} \cos 2\pi x = 0.$$

Ответ: $\left(3;\frac{2}{3}\right)$; $\left(2n^2+2n-1; 1-\frac{1}{n+2}\right)$; $\left(2n^2+2n-1; 1+\frac{1}{n-1}\right)$; $n \in Z$, $n \neq -4;-2;1;3$.

1284*. (ВМК, устный, 2001 + мех-мат, 1964) Найти все целые числа m и n, при которых один из корней уравнения

$$3x^3 + mx^2 + nx + 12 = 0$$

равен $1 + \sqrt{3}$.

Ответ: $m = -12; n = 6$.

1285*. (мех-мат, устный, 2003) Найти тройку натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющих уравнению

$$xa^{z+1} = ya^{z-1} - a$$

как при $a = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$, так и при $a = \frac{-1-\sqrt{13}}{6}$. Конечно ли множество таких троек?

Ответ: $x = 3, y = 1, z = 1$. Нет.

1286*. (эконом., 1993, №5) За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5%, затем 12%, потом $11\frac{1}{9}$% и, наконец, 12,5% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на $104\frac{1}{6}$%. Определите срок хранения вклада.

Ответ: $7 = 1 + 1 + 3 + 2$ месяцев.

1287.(мех-мат, устный, 2005) Найти все целочисленные решения уравнения

$$\left(\frac{45}{8}\right)^{x^3-4x^2+2y+6} = \left(\frac{162}{5}\right)^{y^3-4y^2+2x-1}.$$

Ответ: $x = 2$, $y = 1$.

1288.(мех-мат, 1997, март, №3) Считая x и y целыми числами, решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4^{x^2+2xy+1} = (z+2)\cdot 7^{|y|-1}, \\ \sin\frac{3\pi x}{2} = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1;-1;-1),\ (-1;1;-1)\}$.

1289.(ВМК, отд. бакалавров, 2007, июль, №1) Найти наибольший общий делитель чисел $n = 630$, $m = 675$, $k = 495$.

Ответ: 45.

1290.(олимпиада "Ломоносов-2009", №5) Каким может быть наибольший общий делитель натуральных чисел m и n, если при увеличении числа m на 6 он увеличивается в 9 раз?

Ответ: 3 или 6.

1291*. (эконом., 2000, №2) Интервалы движения морских катеров по трем маршрутам, начинающимся на общей пристани, составляют 30, 36 и 45 минут соответственно. Сколько раз с 7^{40} до 17^{35} того же дня на этой пристани одновременно встречаются катера всех трех маршрутов, если одна из таких встреч происходит в 11^{15}?

Ответ: 4.

1292.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2012", 10–11 кл., №1)В результате опроса учеников школы выяснилось, что ровно 68% учеников знают год рождения А.С.Пушкина, ровно 5/18 учеников умеют доказывать теорему Пифагора, ровно 23/30 учеников любят ходить в кино и ровно 512 учеников читали сказку А. де Сент–Экзюпери "Маленький принц". Найдите минимально возможное количество учеников в этой школе.

Ответ: 900.

1293.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2012", 10–11 кл., №2)Два школьника – Андрей и Борис – 1 сентября 2011 года ровно в полдень поставили свои часы абсолютно точно. У обоих школьников стандартные механические часы с секундной стрелкой и двенадцатичасовым циферблатом.

Известно, что часы Бориса спешат на 30 секунд в сутки, а часы Андрея отстают на 20 секунд в сутки. Укажите точную дату (число, месяц, год), когда в следующий раз их часы без поправок одновременно покажут абсолютно точное время.

Ответ: 30 июня 2023 г.

1294*. (эконом.(менеджмент), 2005, июль, №3) В целях рекламы новой модели автомобиля автосалон установил скидку 10% на каждый седьмой продаваемый автомобиль и 20% на каждый одиннадцатый продаваемый автомобиль новой модели. В случае, если на один автомобиль выпадают обе скидки, то применяется большая из них. Всего было продано 516 автомобилей этой модели. Определить выручку автосалона от продажи автомобилей новой модели, если ее базовая цена составляет 20 000 условных единиц.

Ответ: 10 002 000.

1295.(Севастополь, 2009, №3) Укажите наименьшее натуральное число, отличное от 1, которое при делении на каждое из чисел 2, 3, 4 и 5, даёт в остатке 1.

Ответ: 61.

1296.(мех-мат, устный, 1998) Найти количество трёхзначных чисел, делящихся на 5 или 7 (возможно, одновременно), но не делящихся на 3.

Ответ: 188.

1297.(ВМК, устный, 2005 + Московская математическая олимпиада, 1938, 2 тур)Сколько существует натуральных чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7.

Ответ: 686.

1298*. (ВМК, 2007, устный) Натуральные числа n и m таковы, что

$$\text{Н.О.Д.}(n,m) + \text{Н.О.К.}(n,m) = n + m.$$

Доказать, что одно из них является делителем другого.

1299.(олимпиада "Ломоносов-2007", №6) Натуральные числа a, b и c таковы, что $\text{НОК}(a,b) = 60$ и $\text{НОК}(a,c) = 270$ ($\text{НОК}(x,y)$ – наименьшее общее кратное чисел x и y). Найти $\text{НОК}(b,c)$.

Ответ: 540 или 108.

1300.(геолог., устный, 2004)Является ли число $50^{20} - 49^{11}$ простым?

Ответ: нет.

1301*. (ВМК, устный, 1999) Может ли число $n^4 + 64$ быть простым при каком-либо натуральном n?

Ответ: нет.

1302.(ВМК, устный, 2007+2008) Доказать, что для всех простых чисел p число $p^4 + 4$ является составным.

1303.(ВМК, устный, 2004)Найти все простые числа вида $\frac{n(n+1)}{2} - 1$, $n \in N$.

Ответ: 2 (соответствует $n = 2$) и 5 (соответствует $n = 3$).

1304.(ВМК, устный, 1999)Решить в натуральных числах уравнение

$$3^{x^2+y-1} - 3^{x^2+1} = 486.$$

Ответ: $x = 2; y = 3$.

1305.(ВМК, устный, 1999)Решить в целых числах уравнение

$$9^x = 4y + 1.$$

Ответ: $\left(n; \frac{9^n-1}{4}\right)$, где $n \in Z_+$.

1306.(геолог., устный, 2008, июль) Решите в целых числах уравнение $9^x - 12y = 1$.

Ответ: $x = 0$, $y = 0$.

1307.(ВМК, устный, 1999)Решить уравнение

$$2^x + 1 = y^2$$

в натуральных числах.

Ответ: $(3; 3)$.

1308.(ВМК, 1995, №1) Найти все целые числа n и m, для которых $2mn + n = 14$ и $mn \geq 9$.

Ответ: $m = -1$; $n = -14$.

1309*. (ВМК, устный, 1998 + Московская математическая олимпиада, 1941, 2 тур, 7-8 кл.) Найти целое a, при котором $(x-a)(x-10)+1$ разлагается в произведение $(x + b)(x + c)$ двух сомножителей с целыми b и c.

Ответ: $a = 12$ или $a = 8$.

1310.(ВМК, устный, 2003)Найти все целые a, при которых $x^2 - 3ax + 2a^2+1$ разлагается в произведение $(x+b)(x+c)$ двух сомножителей с целыми b и c.

Ответ: $a = \pm 2$.

1311.(ВМК, устный, 2001)Корни уравнения $x^2 + ax + b + 1 = 0$ являются натуральными числами. Может ли число $a^2 + b^2$ быть простым?

Ответ: нет.

1312*. (ВМК, устный, 1998 + Московская математическая олимпиада, 1956, 1 тур, 7 кл.) Найти все целые числа, на которые может быть сократима дробь $\frac{5l+6}{8l+7}$ при целых l.

Ответ: ± 13.

1313.(ВМК, устный, 2000)При каких натуральных n дробь $\frac{10n+3}{6n+2}$ несократима?

Ответ: дробь несократима при любом натуральном n.

1314.(ВМК, устный, 2003) Доказать, что дробь $\frac{10n+3}{6n+2}$, где $n \in N$, несократима.

1315.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2011", №4) Натуральные числа m, n таковы, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима, а дробь $\frac{4m+3n}{5m+2n}$ сократима. На какие натуральные числа она сокращается?

Ответ: на 7.

1316.(мех-мат, 2000, заочный тур олимпиады "Абитуриент-2000", №5) Пусть m/n – положительная несократимая дробь, и известно, что дробь $\frac{4m+3n}{5m+2n}$ сократима. На какие натуральные числа она сокращается?

Ответ: на 7.

1317.(фил., 1979, №5) Пусть m и n – натуральные числа, причем $\frac{m}{n}$ есть правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$, если известно, что она сократима?

Ответ: на 11.

1318.(географ., 2001, май, №5) Найти все целые значения параметра k, при каждом из которых графики функций

$$y = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x - 2k)$$

и

$$y = \log_2(x - 2k^3 - 3k^2)$$

пересекаются в точке с целочисленными координатами.

Ответ: 0;-2.

1319.(ВМК, устный, 2003)Доказать, что если для некоторых натуральных чисел n и m число $n^2 + m^2 - n$ делится нацело на $2nm$, то n является квадратом натурального числа.

1320.(ИСАА, 2000, июль, №6) Определить сумму всех таких натуральных чисел n, для которых числа 5600 и 3024 делятся без остатка на n и $n + 5$ соответственно.

Ответ: 30.

1321.(ВМК, устный, 2002)Докажите, что для любого натурального $n \geq 2$ число $n^{n-1} - 1$ нацело делится на $(n - 1)^2$.

1322.(ВМК, устный, 2006) Может ли натуральное число при зачёркивании первой цифры уменьшиться:

а) в 58 раз;

б) в 57 раз?

Ответ: а) нет, не может; б) может.

1323.(экзамен для победителей III и IV этапов Всероссийской олимпиады, 2004, №6) Найти все пары натуральных чисел k и l, удовлетворяющих условиям: 1) k и l имеют общий целый делитель, больший 4; 2) $53 < k < l$; 3) $k + l \leq 119$.

Ответ: $(54; 60), (54; 63), (55; 60), (56; 63)$.

1324*. (почвовед., 1977, №5) Рота солдат прибыла на парад в полном составе прямоугольным строем по 24 человека в ряд. По прибытии оказалось, что не все солдаты могут участвовать в параде. Оставшийся для парада состав роты перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше прежнего, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы выстроить так, чтобы число солдат в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько солдат было в роте?

Ответ: 144 человека.

1325*. (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2005", №6 + олимпиада мех-мат ф-та, 2004, 8 класс, №3) В каждом подъезде нового дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. На восьмом этаже третьего подъезда первая квартира имеет номер 106. Какой номер имеет вторая квартира на третьем этаже шестого подъезда?

Ответ: 218.

1326.(олимпиада "Ломоносов-2006", №9) На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник $m \times n$ клеток, причем числа m и n взаимно просты и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найти все возможные значения m и n.

Ответ: $(m; n) = (2; 117)$ или $(3; 59)$.

1327.(географ., 2005, июль, №5) В цехе имелось N одинаковых станков, которые, работая вместе, вытачивали в день 5850 готовых деталей. После модернизации число производимых в день каждым станком деталей возросло на 20%. Это позволило по крайней мере без сокращения объёмов производства уменьшить число станков максимум на 4. Найти N.

Ответ: $N = 26$.

1328.(ИСАА, 1998, №6) При перемножении двух натуральных чисел произведение было ошибочно увеличено на 372. При делении полученного (неверного) произведения на меньший сомножитель получилось в частном 90 и в остатке 29. Найти эти числа.

Ответ: 49 и 83.

1329.(ВМК, 1978, №4) Совокупность A состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найдите числа, из которых состоит A.

Ответ: $A = \{6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210\}$.

1330.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2010", №10) Число P – произведение всех простых чисел, меньших 30. Из натуральных делителей числа P требуется составить множество M, в котором ни одно число не делится нацело на другое. Какое наибольшее количество чисел может содержать множество M?

Ответ: 252.

1331.(ВМК, 1982, №4) На заводе было несколько одинаковых прессов, штампующих детали, и завод выпускал 6480 деталей в день. После реконструкции все прессы заменили на более производительные, но также одинаковые, а их число увеличилось на 3. Завод стал выпускать в день 11200 деталей. Сколько прессов было первоначально?

Ответ: $n = 5$ прессов.

1332.(ВМК, 1982, №4) В университете было несколько библиотек с одинаковым количеством книг в каждой, причем всего книг было 34560. Через некоторое время число библиотек увеличилось на 4, а в каждой из библиотек по-прежнему было по одинаковому количеству книг, но большему чем раньше. Всего книг стало 70875. Сколько библиотек было первоначально.

Ответ: 5.

6.3 Однородные уравнения

1333*. (ВШБ, 2005, июль, №3) Найдите все наборы натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{cases} 11x - 6y = z, \\ z - y = 7, \\ x \leq 20. \end{cases}$$

Ответ: $(7; 10; 17)$, $(14; 21; 28)$.

1334.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2009", №1) В шахматном турнире участвовали англичане, немцы и французы. Каждый англичанин сыграл в шахматы ровно с 5 немцами и 2 французами, каждый немец – с 6 англичанами и 4 французами, а каждый француз – с 3 англичанами и с одинаковым (для всех французов) числом немцев. Найдите это число.

Ответ: 5.

1335.(эконом., 1994, №1) Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 7875x^3 = 1701y^3, \\ |x| \leq 5. \end{cases}$$

Ответ: $\{(0; 0);\ (3; 5);\ (-3; -5)\}$.

1336.(ФГУ, 2004, июль, №4) Компания предложила 350 своим служащим выполнить сверхурочную работу, причем каждому мужчине предлагалось в виде вознаграждения 20 долларов, а каждой женщине – 16 долларов 30 центов. Все женщины согласились с этим предложением, а часть мужчин отказалась. Общая сумма выплаченного вознаграждения составила 5705 долларов. Какова сумма вознаграждения, выплаченного всем женщинам?

Ответ: 2445 долларов.

1337*. (почвовед., 2003, май, №4) Найти все целочисленные решения уравнения

$$x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0.$$

Ответ: $(x; y; z) = (7n; 3n; 2n)$, $n \in Z$.

1338.(соц., 2006, №4) Накануне экзамена Лиза и ее товарищ искали на Воробьёвых горах четырехлистный клевер, приносящий, по народной примете, удачу. В первый день товарищ нашел четырёхлистников на 20% больше, чем Лиза. Во второй день, наоборот, товарищ нашел четырёхлистников на 30% меньше, чем Лиза в этот день. Всего за два дня Лиза нашла четырёхлистников на 10% больше, чем ее товарищ. Какое минимальное количество четырёхлистников могли найти студенты при данных условиях?

Ответ: 525.

1339*. (психолог., 1994, №5) Абитуриенты сдавали экзамены в течение трех дней в одних и тех же аудиториях. Число экзаменовавшихся в каждый день абитуриентов в каждой аудитории было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их можно было провести за два дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причем каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равным числу используемых аудиторий. Найдите минимальное число абитуриентов, которое могло быть проэкзаменовано при этих условиях.

Ответ: 432.

1340.(психолог., 1994, №5) Партия деталей была изготовлена цехом в течение нескольких дней, причём каждый день изготовлялось одно и то же число деталей. Когда треть продукции одного дня была упакована в ящики, то в каждом ящике оказалось столько деталей, сколько ящиков понадобилось для упаковки, причём число ящиков было равно числу дней работы цеха. После отсылки половины всех деталей заказчикам выяснилось, что куб числа заказчиков был равен числу деталей, высланных каждому из заказчиков. Какое минимальное число деталей мог при этих условиях изготовить цех?

Ответ: 41472.

1341.(ВМК, устный, 1998) Найти минимальные натуральные m и n такие, что $2n^2 = 3m^3$.

Ответ: $m = 6, n = 18$.

1342*. (ВМК, устный, 2001) Найти все двузначные числа, квадрат которых равен кубу суммы их цифр.

Ответ: 27.

1343.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2012", очный тур)Вася возвёл какое-то целое число в куб и умножил результат на два. Петя возвёл другое целое число в квадрат и умножил результат на три. Оказалось, что ответы совпали. Какое число взял каждый из ребят, если эти числа отличаются не более, чем на 100 (перечислите все возможные варианты).

Ответ: (а) 6 Вася, 12 Петя; (б) 6 Вася, −12 Петя; (в) 24 Вася, 96 Петя.

1344.(ВМК, устный, 2002 + Московская математическая олимпиада, 1949, 1 тур, 7-8 кл.) Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz.$$

Ответ: единственное решение $(0; 0; 0)$.

6.4 Уравнения вида $ax + by = c$

1345.(фил., 1969, №5) Указать хотя бы одну пару целых положительных чисел k_1 и k_2 таких, что

$$36k_1 - 25k_2 = 1.$$

Ответ: $k_1 = 16$, $k_2 = 23$.

1346*. (фил., 1969) Остаток от деления некоторого натурального числа n на 6 равен 4, остаток от деления n на 15 равен 7. Чему равен остаток от деления n на 30?

Ответ: 22.

1347.(ВМК, устный, 2008, май) Найти остаток от деления целого числа n на 30, если известно, что остаток от его деления на 15 равен 4, а остаток от деления на 18 равен 7.

Ответ: 19.

1348.(ВМК, устный, 1999)Целое число кратно 7 и при делении на 4 дает в остатке 3. Найти остаток от деления этого числа на 28.

Ответ: 7.

1349.(фил., 1970, №7) Сколькими способами сумму в 4 руб 96 коп можно составить из монет по 2 и 15 коп?

Ответ: 17.

1350.(ВМК, 2007, устный) Найти наименьшее натуральное число x такое, что остаток от деления x на 8 на 5 больше остатка от деления x на 5 и в два раза больше остатка от деления x на 7.

Ответ: 206.

1351.(ФНМ, 2001, апрель, №4) Учительница принесла в класс счетные палочки. Дети раскладывали их в пакетики. Когда разложили по 2 палочки в каждый пакетик, то осталась 1 лишняя палочка. Затем разложили по 13 штук в пакетик, и тогда осталось 7 лишних палочек. Когда же палочки разложили по 9 штук в пакетик, то лишних не осталось. Сколько, самое меньшее, было счетных палочек?

Ответ: 189.

1352.(эконом., 2008, №5)Тринадцать пиратов делят клад золотых монет на палубе шхуны. При попытке разделить клад поровну оказалось, что остаётся 8 монет. Налетевшим штормом двух пиратов смыло за борт. Когда оставшиеся пираты снова стали поровну делить клад, то лишними оказались 3 золотые монеты. Затем в перестрелке погибли ещё 3 пирата. Когда уцелевшие пираты опять стали делить клад, то на этот раз оказалось, что остаётся 5 монет. Из какого количества монет состоял клад, если для его переноски достаточно сундука, вмещающего 500 золотых монет.

Ответ: 333.

1353*. (соц., 2005, апрель, №6) Фирма продавала чай в центре города по 7 рублей, а кофе по 10 рублей стакан, на вокзале по 4 рубля и 9 рублей, соответственно. Всего было продано за час 20 стаканов чая и 20 стаканов кофе, при этом выручка в центре и на вокзале оказалась одинаковой. Сколько стаканов кофе было продано в центре?

Ответ: 5 стаканов.

1354*. (ФГУ, 2005, июль, №5) Тёма сделал несколько мелких покупок в супермаркете, имея при себе сто рублей. Давая сдачу с этой суммы кассир ошиблась, перепутав местами цифры, и выплатила рублями то, что должна была вернуть копейками, и, наоборот, копейками то, что полагалось вернуть рублями. Купив в аптеке набор пипеток за 1 руб. 40 коп., Тёма обнаружил ошибку кассира и, пересчитав деньги, нашел, что оставшаяся у него сумма втрое превышает ту, которую ему должны были вернуть в супермаркете. Какова стоимость всех покупок Тёмы.

Ответ: 69 руб. 43 коп.

1355.(эконом., 1998, июль, №7) Каждый из трёх брокеров имел в начале дня акции каждого из видов А и Б общим числом 11, 21 и 29 штук соответственно. Цены на акции в течение всего дня не менялись, причём цена одной акции вида А была больше цены одной акции вида Б. К концу торгового дня брокерам удалось продать все свои акции, выручив от продажи по 4402 рубля каждый. Определить цену продажи одной акции видов А и Б.

Ответ: 426 и 142 рублей.

6.5 Уравнения, приводимые к виду $y = \frac{a(x)}{b(x)}$

1356*. (ИСАА, 1997, июль, №7) Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие уравнению

$$3xy + 14x + 17y + 71 = 0.$$

Ответ: $(-4; -3), (-6; -13), (-14; -5)$.

1357.(геолог, устный, 2001) Решите уравнение в целых числах: $xy = 2x + y$.

Ответ: $\{(0; 0), (2; 4), (-1; 1), (3; 3)\}$.

1358.(геолог, устный, 2004) Решите уравнение $xy = 2003(x + y)$ в целых числах.

Ответ: $\{(0; 0), (4006; 4006), (2002; -2002{\cdot}2003), (-2002{\cdot}2003; 2002), (2004; 2003{\cdot}2004), (2003 \cdot 2004; 2004)\}$.

1359.(геолог., устный, 2005) Решите в целых числах уравнение

$$xy = 2x + 2y.$$

Ответ: $\{(1; -2), (-2; 1), (3; 6), (6; 3), (0; 0), (4; 4)\}$.

1360*. (мех-мат, 2003, Олимпиада, 10 кл., №4) Сколько различных пар натуральных чисел $x \le y$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{70}.$$

Ответ: 14.

1361.(мех-мат, 2004, март, (заочный тест), №4) Сколько различных пар натуральных чисел $x \le y$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2004}.$$

Ответ: 23.

1362.(ВМК, устный, 1997)Найти все целые m, при которых дробь $\frac{2m+25}{m+7}$ представляет собой натуральное число.

Ответ: -18, -6, 4.

1363.(ВМК, устный, 1997)Найти все пары $(x; y)$ натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 - xy - 2x + 3y = 11.$$

Ответ: $(1; 6), (2; 11), (5; 2), (7; 6), (11; 11)$.

1364.(психолог., 1975, №5) Найти все целые положительные решения уравнения

$$2x^2 + 2xy - x + y = 112.$$

Ответ: $(1; 37)$.

1365.(ВШБ, 2004, июль, №6) Найти все пары целых неотрицательных чисел $(k; m)$, являющихся решениями уравнения

$$2k^2 + 7k = 2mk + 3m + 36.$$

Ответ: $(9; 9)$.

1366.(эконом., 1989, №6) Решить в целых числах уравнение

$$9x^2y^2 + 6xy^2 - 9x^2y + 2x^2 + y^2 - 18xy + 7x - 5y + 6 = 0.$$

Ответ: $(0; 2), (-2; 0), (0; 3), (2; 1)$.

1367*. (хим., 1997, май, №6) Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$(x^2 + y^2)(x + y - 3) = 2xy.$$

Ответ: $(0; 0), (2; 2), (0; 3), (3; 0)$.

1368.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2010", №3) Найдите произведение двух трёхзначных чисел, если оно втрое меньше шестизначного числа, получающегося приписыванием одного из этих двух чисел вслед за другим.

Ответ: $55\,788 = 167 \cdot 334$.

1369.(мех-мат, 1992, июль, №4) Мастер делает за 1 час целое число деталей, большее 5, а ученик – на 2 детали меньше. Один мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе – на 1 час быстрее. Из какого количества деталей состоит заказ?

Ответ: 24.

1370.(мех-мат, 1992, №4) Один рабочий на новом станке производит за 1 час целое число деталей, большее 8, а на старом станке – на 3 детали меньше. На новом станке один рабочий выполняет дневную норму за целое число часов, а два рабочих вместе выполняют норму на старых станках на 1 час быстрее. Из какого количества деталей состоит дневная норма, если производительность рабочих одинакова?

Ответ: 36.

1371.(геолог., 2000, май, №6) Любая из трёх барж разной грузоподъёмности может при полной загрузке в каждом рейсе перевезти некоторый груз, причём баржа наименьшей грузоподъёмности – за 15 рейсов. Две другие баржи перевозят весь этот груз за 3 совместных рейса. Сколько рейсов необходимо барже наибольшей грузоподъёмности для перевозки всего груза (недогрузка запрещается)?

Ответ: 4.

1372.(ВМК, 2004, апрель, №3) Найти все целые n, при которых справедливо равенство

$$\frac{5n^2+4n+13}{n+1} = 11 - 8\sqrt{1-8n}.$$

Ответ: $n = -15$.

6.6 Деление с остатком

1373*. (ВМК, устный, 2005 + Московская математическая олимпиада, 1941, 2 тур, 7-8 кл.) Доказать, что квадрат любого простого числа $p > 3$ при делении на 12 дает в остатке 1.

1374.(ВМК, устный, 1999)Доказать, что для любого простого $p > 3$ число $10p^2 - 3p + 2$ составное.

1375.(ВМК, устный, 1997)Доказать, что ни при каком натуральном n число $n^2 + 3n + 1$ не делится на 7.

1376.(ВМК, устный, 2001)Доказать, что число $n^3 - 7n$ $(n \in N)$ делится на 6.

1377.(мех-мат, устный, 1963) Доказать, что числа вида $n^3 + 2n$ $n = 1, 2, \ldots$ делятся на 3.

1378.(ВМК, устный, 2000)Доказать, что при любом нечетном n число $n^3 + 3n^2 - n - 3$ делится на 48.

1379.(ВМК, устный, 2006) Доказать, что $32n^5 - 40n^3 + 8n$ делится нацело на 720 для всех целых $n > 1$.

1380*. (мех-мат, устный, 1998) Доказать, что для любого простого числа $p > 5$ число $p^4 - 50p^2 + 49$ делится на 2880.

1381.(ВМК, устный, 1999)Доказать, что число $n^3 - n + 3$ составное для любого натурального $n > 1$.

1382.(ВМК, устный, 1998)Существует ли такое натуральное число n, что $n^2 + 2n + 3$ делится нацело на 2005?

Ответ: нет.

1383.(ВМК, устный, 2002+2005) Существует ли такое натуральное число n, что $2n^2 + 3n + 4$ делится нацело на 2005?

Ответ: нет.

1384.(ВМК, устный, 2006) Существует ли такое натуральное число n, что $2n^2 + 3n + 4$ делится нацело на 1995?

Ответ: нет.

1385.(ВМК, устный, 1998 + Московская математическая олимпиада, 1946, 1 тур, 9-10 кл.) Доказать, что $n^2 + 3n + 5$ не делится на 121 ни при каком целом n.

1386.(ВМК, устный, 2002) Доказать, что $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится нацело на 120 для всех целых $n > 1$.

1387*. (ВМК, устный, 1998) Известно, что $p, p + 10, p + 14$ – простые числа. Найти все такие p.

Ответ: $p = 3$.

1388.(ВМК, устный, 2002+2005+2006)Доказать, что если p и $8p - 1$ – простые числа, то $8p + 1$ – составное число.

1389.(ВМК, устный, 1998)Доказать, что если p и $8p^2+1$ – простые числа, то $8p^2 - 1$ – тоже простое число.

1390.(ВМК, устный, 2003) k, l, и m – целые числа. Сумма $k^2 + l^2 + m^2$ делится на 4. Доказать, что k, l, и m – четные.

1391.(ВМК, устный, 2003) Натуральное число является полным квадратом и оканчивается на 5. Доказать, что его третья справа цифра четная (подразумевается, что число по крайней мере трехзначное).

1392.(ВМК, устный, 2003)Доказать, что ни при каком натуральном n число $3^n + 2 \cdot 17^n$ не является квадратом натурального числа.

1393.(ВМК, устный, 2003)Доказать, что ни при каком натуральном n число $1 + 2 + \cdots + n$ не может заканчиваться цифрой 7.

1394*. (ВМК, устный, 2005) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые не представимы в виде суммы квадратов двух других натуральных чисел.

1395*. (ВМК, устный, 2004 + Московская математическая олимпиада, 1954, 1 тур, 7-8 кл.) Существуют ли целые числа m и n, удовлетворяющие уравнению

$$m^2 + 1954 = n^2?$$

Ответ: нет.

1396.(ВМК, устный, 1998)Существуют ли целые m и n, удовлетворяющие уравнению $m^2 + 1998 = n^2$?

Ответ: нет.

1397*. (ВМК, устный, 2001) Решить в целых числах уравнение

$$x^2 - 7y^2 = 5.$$

Ответ: $\emptyset$.

1398.(ВМК, устный, 1998)Доказать, что уравнение $x^2 - 5y^2 = 3$ не имеет решений в целых числах.

1399*. (ВМК, устный, 1997)Доказать, что уравнение $x^2 + 4x = 6y^2 + 1$ не имеет целочисленных решений.

1400.(ВМК, устный, 1997)Доказать, что уравнение $x^2 - 4x - 3y^2 = 1$ не имеет целочисленных решений.

1401.(ВМК, устный, 1997)Найти все простые числа x, y, удовлетворяющие равенству $x^2 - 3y = 19$.

Ответ: $x = 5; y = 2$.

1402.(ВМК, устный, 1998)Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных целых чисел не может быть полным квадратом целого числа.

1403.(ВМК, устный, 2005)Существуют ли пятерки последовательных целых чисел, сумма квадратов которых является квадратом целого числа.

Ответ: таких последовательных целых чисел нет.

1404.(ВМК, устный, 2006) Доказать, что сумма четных степеней трех последовательных целых чисел не может быть четной степенью никакого целого числа.

1405.(ВМК, устный, 2008, май) Целые числа n, m, k не делятся на 3. Доказать, что число $n^6 + m^4 + k^2$ делится на 3.

1406.(ВМК, устный, 2008, май) Доказать, что сумма кубов трёх последовательных натуральных чисел делится на 9.

1407.(ВМК, устный, 2001) Найти все простые числа p, q, r, удовлетворяющие равенству

$$p^q + q^p = r.$$

Ответ: $(2; 3; 17)$, $(3; 2; 17)$.

1408.(ВМК, устный, 2001)Решить уравнение в целых числах:

$$2^x + 1 = 3^y.$$

.

Ответ: $\{(1; 1), (3; 2)\}$

1409.(геолог., устный, 2000)Решите в целых числах уравнение:

$$2^x - 1 = y^2.$$

Ответ: $\{(0; 0), (1; 1), (1; -1)\}$

1410.(ВМК, устный, 2003 + геолог., устный, 2007)Доказать, что во всех целочисленных точках x функция

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 10$$

принимает целые значения.

1411.(геолог., устный, 2006) Докажите, что при целых значениях x функция

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 4$$

принимает только целочисленные значения. Каково наименьшее из этих значений?

Ответ: $y_{\min} = -5$.

1412.(ВМК, устный, 2002) Доказать, что если функция $y = ax^2 + bx + c$ при всех целых x принимает целые значения, то $2a$, $a + b$ и c – целые числа. Обратно, если $2a$, $a + b$ и c – целые, то функция $y = ax^2 + bx + c$ при всех целых x принимает целые значения.

1413*. (ВМК, устный, 2005) Докажите, что числа $2^m - 1$ и $2^n - 1$ являются взаимно простыми тогда и только тогда, когда числа m и n – взаимно простые числа.

6.7 Метод оценок

1414.(ДВИ, 2012, август, №6) Найдите все целые числа x, y, z такие, что:

$$5x^2 + y^2 + 3z^2 - 2yz = 30.$$

Ответ: четыре тройки: $(x; y; z) = (\pm 1; \pm 5; 0)$.

1415.(МШЭ, 2007, №6) Найдите все целочисленные решения уравнения

$$x^2 - 14x + 4y^2 + 32y + 88 = 0.$$

Ответ: $\{(12; -4), (2; -4), (10; -2), (4; -2), (10; -6), (4; -6)\}$.

1416.(олимпиада "Ломоносов-2012", заочный тур, 8 кл., №6)Решите в натуральных числах уравнение $a^b + b^a = 2011$.

Ответ: $(1; 2001)$, $(2001; 1)$.

1417*. (ВМК, устный, 2004+2006 + Московская математическая олимпиада, 1963, 1 тур, 8 кл.)Решить в целых числах уравнение

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3.$$

Ответ: $(1; 1; 1)$, $(-1; -1; 1)$, $(1; -1; -1)$, $(-1; 1; -1)$.

1418*. (мех-мат., 1996, май, №1) Найти все целочисленные решения неравенства

$$\sqrt{x^3 - 5x - 3} \leq 6 - x.$$

Ответ: $\{-1; 3\}$.

1419*. (ВМК, устный, 2001) Решить в целых числах уравнение

$$\sqrt{x - \frac{1}{5}} + \sqrt{y - \frac{1}{5}} = \sqrt{5}.$$

Ответ: $(2; 1), (1; 2)$.

1420.(МШЭ, 2006, №5) Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} \left|x^2 - 2x\right| < y + 1, \\ y + |x - 1| < 2. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 0), (1; 1), (2; 0)$.

1421.(психолог., 1973, №4 + ВМК, устный, 2002) Найдите все целочисленные решения неравенства

$$3^{\frac{5}{2}\log_3(12-3x)} - 3^{\log_4 x} > 83.$$

Ответ: $x_1 = 1;\ x_2 = 2$.

1422.(ВМК, 2007, устный) Найти все целые числа x, удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt{46 + 19x - 2x^2} + x \cdot \sqrt{2x^2 - 19x - 33} > 3.$$

Ответ: $x = 11$.

1423.(психолог., 1972, №3) Найти все целые решения неравенства

$$x - 1 < \log_6(x+3).$$

Ответ: $\{-2; -1; 0; 1\}$.

1424.(мех-мат, устный, 2000) Найти все пары (m, n) натуральных чисел, для которых выполняется равенство

$$\log_m(n-7) + \log_n(5m-17) = 1.$$

Ответ: $(4; 9)$, $(5; 8)$.

1425.(мех-мат, 1990, №5) Найти все тройки целых чисел (x, y, z), удовлетворяющие неравенству

$$\log_2(2x+3y-6z+3)+\log_2(3x-5y+2z-2)+\log_2(2y+4z-5x+2) > z^2-9z+17.$$

Ответ: $(5; 4; 4)$.

1426.(фил., 2003, июль, №5) Найти все значения параметра b, при каждом из которых для любого a неравенство

$$(x-a-2b)^2 + (y-3a-b)^2 < \frac{1}{2}$$

имеет хотя бы одно целочисленное решение (x, y).

Ответ: $b \neq \frac{k}{5}$, где $k \in Z$.

1427*. (мех-мат, устный, 2000) Найти все тройки (x, y, z) натуральных чисел, для которых выполняется равенство

$$3xy + 3yz + 3xz = 5xyz + 3.$$

Ответ: $(1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 3; 1), (2; 1; 3), (3; 1; 2), (3; 2; 1)$.

1428*. (ВМК, устный, 2005) Найти все упорядоченные тройки $(x; y; z)$ натуральных чисел, удовлетворяющих равенству

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{30}{13}.$$

Ответ: $(2; 3; 4)$.

1429.(ВМК, устный, 2005 + Московская математическая олимпиада, 1948, 1 тур, 7-8 кл.) Найти все тройки натуральных чисел $k \leq m \leq n$, сумма обратных величин которых равна 1.

Ответ: $(2; 4; 4)$, $(2; 3; 6)$, $(3; 3; 3)$.

1430.(ВМК, устный, 2005)Можно ли представить единицу в виде суммы 2005 попарно различных чисел, обратных натуральным?

Ответ: можно: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{2003}} + \frac{1}{2 \cdot 3^{2003}}$.

1431.(ВМК, устный, 2003+2006) Пусть $n = \overline{abc}$ – трёхзначное число и

$$f(n) = a + b + c + ab + ac + bc + abc.$$

Найти все n, для которых $\frac{n}{f(n)} = 1$.

Ответ: $n = \overline{a99}$, где $a = 1, 2, \ldots, 9$.

1432.(ВМК, 2005, апрель, №3) Найти все целые x и y, удовлетворяющие равенству

$$4x^2 - 2xy + 2y^2 + y - 2x - 1 = 0.$$

Ответ: $x = 0;\ y = -1$.

1433.(ВМК, устный, 2003)Найти все натуральные числа k, l, m, n, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} k^2 + l = m^2, \\ k + l^2 = n^2. \end{cases}$$

Ответ: таких натуральных чисел нет.

1434.(ВМК, устный, 2001)Может ли сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел быть равна сумме четвертых степеней двух других последовательных натуральных чисел?

Ответ: нет.

1435*. (ВМК, устный, 2000) Решить в целых числах уравнение

$$x^2 = 2(xy - y^2 - y).$$

Ответ: $\{(0;0), (-2;-2), (0;-1), (-2;-1)\}$.

1436*. (ВМК, устный, 1999) Найти все натуральные числа x, y, z, для которых

$$xyz = x + y.$$

Ответ: $(1;1;2), (2;2;1)$.

1437.(ВМК, устный, 2001 + геолог., устный, 2008, май)Решить в натуральных числах уравнение

$$k^3 - l^3 = kl + 61.$$

Ответ: $k = 6; l = 5$.

1438.(Севастополь, 2006, №9) Пусть x_1 и x_2 – действительные корни уравнения

$$x^2 + 2bx + b^2 + 2b - 1 = 0.$$

Найдите все действительные значения b, при которых число

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(x_1 - x_2)^2 - 2}{(x_1 + x_2)^2 + 2}$$

целое.

Ответ: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

1439.(мех-мат, устный, 2003) При каких целых n выражение

$$\frac{n^3 + n^2/5 - n + 115}{5n^2 - 4n - 1}$$

принимает целочисленные значения?

Ответ: $n_1 = 0;\ n_2 = -5$.

1440.(мех-мат, 2002, май, №6) При каких x оба числа, $\frac{x^2+4x-1}{7x^2-6x-5}$ и $\frac{1-x}{1+x}$, целые?

Ответ: $1; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}$.

1441.(мех-мат, 2001, июль, №4) Найти все трёхзначные натуральные числа, каждое из которых больше суммы квадратов своих цифр ровно на 517.

Ответ: 618, 659, 698.

1442.(ФГУ, 2004, июль, №6) Каково минимальное число гирь, необходимых для того, чтобы взвесить любой груз массой от 1 до 39 килограммов на рычажных (чашечных) весах, если известно, что этот груз может весить только целое число килограммов?

Ответ: 4 гири (массой 1, 3, 9, 27 кг.).

1443.(Высшая школа государственного аудита, "Абитуриент-2008 ", №7) Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих условию

$$\sqrt{-x^6 - 2x^5y + x^4(2-y^2) + 4x^3y + x^2(2y^2-1) - 2xy - y^2} \times$$
$$\times \log_{\sqrt{y}-2x}\left(-y^2 + (x-2)y - x\right) = 0.$$

Ответ: $(-1; 0)$.

1444*. (мех-мат, 2000, май, №2) Два друга, Ваня и Петя, ходили за грибами. Встретившись перед возвращением домой, они обнаружили, что Ваня нашел 35 грибов, среди которых было несколько подосиновиков, а Петя грибов не нашел. Ваня взял себе белые грибы, а остальные отдал Пете. Петя, обнаружив среди них червивый подберезовик, выкинул его. Сколько было найдено подосиновиков, если доля белых в найденных Ваней грибах оказалась равной доле подосиновиков в принесенных Петей домой грибах?

Ответ: 8.

Глава 7

Прогрессии и числовые последовательности

7.1 Арифметическая прогрессия

1445*. (ВМК (отд. бакалавров), 2005, июль, №1) В возрастающей арифметической прогрессии сумма третьего и седьмого членов равна утроенному второму члену, а произведение первого и четвертого членов равно 40. Найти сумму первых двенадцати членов этой прогрессии.

Ответ: $S_{12} = 126$.

1446.(физ., 1996, май, №2) В арифметической прогрессии сумма первых пяти членов равна 65, а сумма третьего и четвертого членов равна 30. Найти первый член и разность прогрессии.

Ответ: $a_1 = 5$, $d = 4$.

1447.(МШЭ, 2005, июль, №5) Найти четыре числа, которые образуют арифметическую прогрессию, если сумма крайних равна 23 и третье число больше второго на 30%.

Ответ: 7, 10, 13, 16.

1448.(эконом. (отд. менеджмента), 2007, №1) Три числа, $8x$, $3-x^2$ и -4, в указанном порядке образуют убывающую арифметическую прогрессию. Найдите x и укажите разность этой прогрессии.

Ответ: $x = 1$, $d = -6$.

1449.(эконом. (менеджмент), 1998, июль, №2) Второй член арифметической прогрессии $a_1, a_2, \dots$ равен 2, а сумма пятого и шестого членов равна 9. Найти сумму первых двадцати членов прогрессии.

Ответ: $161\frac{3}{7}$.

1450.(географ., 1999, май, №2) Сумма первых пяти членов возрастающей арифметической прогрессии равна 15, а их произведение равно 1155. Найти шестидесятый член прогрессии.

Ответ: 231.

1451.(соц., 1999, июль, №2) Найти первый член и разность арифметической прогрессии, для которой сумма первых пяти членов с нечетными номерами на единицу больше суммы первых пяти членов с четными номерами и равна квадрату первого члена.

Ответ: $a_1 = 1$ или 4, $d = -\frac{1}{5}$.

1452.(Севастополь, 1999, июль, №3) Числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Сумма чисел a_1, a_3, a_5 равна 9. Найти числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, если известно, что a_4 вдвое больше a_2.

Ответ: $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 4,\ a_5 = 5$.

1453.(ВМК, 1990, июль, №2) Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма членов этой прогрессии с нечетными номерами на 15 больше суммы членов с четными номерами. Найти a_{12}, если $a_{20} = 3a_9$.

Ответ: $a_{12} = 17$.

1454.(географ., 1994, июль, №2) Сумма первых двадцати членов арифметической прогрессии (a_n) в пять раз меньше суммы первых двадцати пяти членов арифметической прогресси (b_n). Найдите отношение разности прогрессии (a_n) к разности прогресии (b_n), если известно, что эти разности отличны от нуля и $4a_{12} = b_{19}$.

Ответ: 1.

1455.(ИСАА, 1993, июль, №2) Сумма третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите сумму первых семи членов этой прогрессии.

Ответ: 28.

1456.(геолог., 2005, июль, №5) В арифметической прогрессии квадрат суммы третьего и четвертого ее членов равен сумме второго и пятого ее членов. Чему равна сумма первых шести членов этой прогрессии?

Ответ: 0 или 3.

1457.(хим., 1989, июль, №2) Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ является арифметической прогрессией. Известно, что $a_1 + a_5 + a_{15} = 3$. Найти $a_5 + a_9$.

Ответ: 2.

1458.(ВМК, 1988, июль, №1) Найти сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого ее членов равна 10.

Ответ: 50.

1459.(ВМК, олимпиада "Абитуриент-2007", отд. бакалавров, 2007, апрель, №1) В арифметической прогрессии удвоенный восьмой член на 15 больше третьего члена. Найти сумму первых двадцати пяти членов этой прогрессии.

Ответ: 375.

1460.(ВМК, 1995, апрель, №1) В арифметической прогрессии с отличной от нуля разностью сумма членов с нечётными номерами, не превосходящими 26, равна 169. Найти номер того члена прогрессии, который равен 13.

Ответ: 13.

1461.(ВМК, 2001, апрель, №1) Сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна 27, а сумма первых пяти членов равна 80. Сумма какого числа членов прогрессии равна 486?

Ответ: 12.

1462.(ВМК, 2010, №1) В арифметической прогрессии первый член отрицательный и равен -405, разность равна 18. Сумма абсолютных величин (модулей) первых n членов этой прогрессии равна 5661. Найдите n.

Ответ: $n = 33$.

1463.(почвовед., 2001, май, №4) Найти арифметическую прогрессию, в которой сумма членов, сколько бы начиная с первого их ни взять, всегда равна утроенному квадрату числа этих же членов.

Ответ: $a_1 = 3,\ d = 6$.

1464.(ФГУ, 2005, июль, №1) Можно ли разделить сумму в 196 рублей на 16 разных частей так, чтобы ближайшие по величине части отличались на 50 копеек?

Ответ: можно $(8.50,\ 9.00,\ 9.50, \ldots, 16.00)$.

1465.(географ., 2006, №2) Числа y и z таковы, что последовательность $1,\ \sqrt{y},\ \sqrt{z}$, а также последовательность $1,\ y-1,\ z-y$ являются арифметическими прогрессиями. Найти разность второй прогрессии.

Ответ: 2.

1466.(Севастополь, 2009, №7) Сто три яблока раздали четырнадцати школьникам. Каждому досталось хотя бы одно яблоко. Покажите, что по крайней мере два школьника получили одинаковое количество яблок.

Указание: если бы все школьники получили разное количество яблок, то минимально возможное количество розданных яблок равно 105.

1467.(ФГУ, 2006, №1) На розовом кусте каждое утро, начиная с понедельника, расцветают пять бутонов. Каждое утро садовник срезает три из них. Из скольких роз будет состоять букет, если в ближайшее воскресенье садовник срежет все розы?

Ответ: 17.

1468*. (геолог. (общая геология), 1980, июль, №4) Магазин радиотоваров продал в первый рабочий день месяца 105 телевизоров. Каждый следующий рабочий день дневная продажа возрастала на 10 телевизоров, и месячный план – 4000 телевизоров – был выполнен досрочно, причем в целое число рабочих дней. После этого ежедневно продавалось на 13 телевизоров меньше, чем в день выполнения месячного плана. На сколько процентов был перевыполнен месячный план продажи телевизоров, если в месяце 26 рабочих дней?

Ответ: $42,3\%$.

1469.(геолог. (геофизика), 1980, июль, №4) В гору ехал автомобиль. В первую секунду после достижения пункта A он проезжал 30 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 2 м меньше, чем в предыдущую. Через 9 сек после того, как автомобиль достиг пункта A навстречу ему выехал автобус из пункта B, находящегося на расстоянии 258 м от пункта A. В первую секунду автобус проехал 2 м, в каждую следующую секунду он проезжал на 1 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние проехал автобус до встречи с автомобилем?

Ответ: 20 м.

1470.(биолог., 1991, июль, №3) Время, затрачиваемое велосипедистом на прохождение каждого очередного километра пути, на одну и ту же величину больше, чем время, затраченное им на прохождение предыдущего километра. Известно, что на прохождение второго и четвертого километров после старта он затратил в сумме 3 мин 20 сек. За какое время велосипедист проехал первые 5 км после старта?

Ответ: 8 мин. 20 сек.

1471.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2005", №3 + Олимпиада мехмат ф-та, 2003, 9 кл., №2) Бригада землекопов должна была в 8 ч. начать рыть траншею. Однако, простояв в очереди за лопатами, они приступили к работе позже: первый на 5 минут, второй на 10, третий на 15 и т.д. Вырыв траншею в 12 ч., они ушли на обед, а с 13 до 16 ч. 30 мин. вырыли вторую такую же траншею. Сколько было землекопов?

Ответ: 11 человек.

1472*. (геолог., 1999, июль, №6) Дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots,$ в которой $a_3 = -13$ и $a_7 = 3$. Определить, при каком количестве членов сумма прогрессии будет наименьшей; найти значение этой суммы.

Ответ: $n = 6$; $S_6 = -66$.

1473.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2011", №3)Петя последовательно выписывает целые числа, начиная с 21, так, что каждое следующее число меньше предыдущего на 4, а Вася, глядя на очередное число, подсчитывает сумму всех выписанных к этому моменту чисел. Какая из найденных Васей сумм окажется ближайшей к 55?

Ответ: $56 = 21 + 17 + 13 + 9 + 5 + 1 + (-3) + (-7)$.

1474.(ВМК, 2005, июль, №3) Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ являются арифметическими прогрессиями, $a_{11} = 32$, $b_{21} = 43$. Последовательность $\{c_n\}$ определяется равенством $c_n = (-1)^n \cdot a_n + (-1)^n \cdot b_n$. Сумма первых сорока членов последовательности $\{c_n\}$ равна 100, а сумма первых ее двадцати трех членов равна -60. Найти сумму первых ста членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ и b_{40}.

Ответ: $S_{100} = 15\,050$, $b_{40} = 81$.

1475.(ВМК, 2001, июль, №2) Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии равна 56. Все члены этой прогрессии – натуральные числа. Двенадцатый член больше 67, но меньше 74. Найдите двадцатый член этой прогрессии.

Ответ: $a_{20} = 119$.

1476.(геолог., 2007, №6) Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, больше 337, но меньше 393. Чему равен восьмой член этой прогрессии, если известно, что он кратен четырём?

Ответ: 24.

1477.(психолог., 1967, №4) Найти сумму чисел, являющихся одновременно членами двух арифметических прогрессий 5, 9, 13, ... и 3, 9, 15, ..., если известно, что каждая из этих прогрессий содержит по 200 членов.

Ответ: 27135.

1478*. (олимпиада "Ломоносов-2012", II тур, №1) Найдите первый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots$, если $a_{13} = 0$, а произведение чисел 5^{a_1}, $5^{a_2}, \ldots, 5^{a_{24}}$ равно их среднему арифметическому.

Ответ: $a_1 = 0$.

1479*. (мех-мат., 2000, март, №2) О первых семи членах убывающей арифметической прогрессии известно, что сумма пятых степеней всех этих членов равна 0, а сумма их четвертых степеней равна 51. Найти седьмой член этой прогрессии.

Ответ: $a_7 = -3 \cdot \sqrt[4]{\frac{51}{196}}$.

1480*. (мех-мат., 2002, март, №3) Сумма первых четырнадцати членов арифметической прогрессии равна 77. Известно, что ее первый и одиннадцатый члены – натуральные числа. Чему равен восемнадцатый член прогрессии?

Ответ: $a_{18} = -5$.

1481*. (мех-мат., 2003, март, №1) Найти первый член целочисленной арифметической прогрессии, у которой сумма первых шести членов отличается от суммы следующих шести членов менее чем на 450, а сумма первых пяти членов превышает более чем на 5 сумму любого другого набора различных членов этой прогрессии.

Ответ: $a_1 = 54$.

1482.(мех-мат., 2004, март, №3) Найти все возможные значения суммы убывающей арифметической прогрессии

$$a_1 = \frac{6m - m^2 - 9}{6m - m^2}, a_2 = \frac{6m - m^2 - 12}{6m - m^2}, \ldots, a_n = \frac{(-10)}{6m - m^2},$$

где m – некоторое целое число.

Ответ: $-\frac{21}{5}$, $-\frac{11}{4}$.

1483*. (мех-мат, устный, 2006) Первый член арифметической прогрессии меньше 0, сотый не меньше 74, а двухсотый меньше 200. Количество членов этой прогрессии на интервале $(0,5; 5)$ ровно на два меньше, чем на отрезке $[20; 24,5]$. Найти первый член и разность прогрессии.

Ответ: $a_1 = -\frac{1}{4}$, $d = \frac{3}{4}$.

1484*. (мех-мат., 1996, март, №5) Какое наибольшее число членов может содержать конечная арифметическая прогрессия с разностью 2 при условии, что квадрат ее первого члена в сумме с остальными членами не превосходит 160?

Ответ: 14.

1485*. (ВМК, устный, 2004) Доказать, что существует бесконечно много троек натуральных чисел x, y и z таких, что числа $x(x+1)$, $y(y+1)$ и $z(z+1)$ образуют в указанном порядке возрастающую арифметическую прогрессию.

Ответ: например, $x = n, y = 5n+2, z = 7n+3$, где $n \in N$, или $x = n, y = 29n + 14, z = 41n + 20$, где $n \in N$.

7.2 Геометрическая прогрессия

1486*. (географ., 1998, июль, №2) Найти знаменатель убывающей геометрической прогрессии, если сумма первого, второго и третьего членов прогрессии равна (-7), а пятый член прогрессии меньше второго на 14.

Ответ: $q = 2$.

1487.(психолог., 1987, №1) Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии на $\frac{3}{2}$ больше, чем сумма ее первых трех членов. Пятый член прогрессии равен ее третьему члену, умноженному на 4. Найти ее четвертый член, если известно, что знаменатель прогрессии положителен.

Ответ: $a_4 = \frac{1}{2}$.

1488.(географ., 2003, июль, №1) Разность девятого и третьего членов знакочередующейся геометрической прогрессии равна ее шестому члену, умноженному на $\frac{24}{5}$. Найти отношение десятого к пятому члену прогрессии.

Ответ: $\frac{b_{10}}{b_5} = -5^{-\frac{5}{3}}$.

1489.(ВМК, устный, 2005) В геометрической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$ с положительными членами известны члены $a_{m+n} = A$, $a_{m-n} = B$. Найдите a_m и a_n.

Ответ: $a_m = \sqrt{AB}$, $a_n = \sqrt[2n]{A^{2n-m} \cdot B^m}$.

1490.(олимпиада "Ломоносов-2007", №3) Какие значения может принимать выражение

$$\log_{(b_{11}b_{50})}(b_1 b_2 \ldots b_{60}),$$

где $b_1, b_2, \ldots$ – геометрическая прогрессия?

Ответ: 30.

1491.(ВМК, устный, 2008, июль) Произведение первых одиннадцати членов геометрической прогрессии равно $243\sqrt{3}$. Члены прогрессии с какими номерами определяются на основании этой информации однозначно? Чему они равны?

Ответ: Однозначно можно определить только шестой член; он равен $\sqrt{3}$.

1492*. (эконом. (менеджмент), 1995, июль, №4) В первый год разработки месторождения было добыто 100 тыс. т железной руды. В течение нескольких следующих лет годовая добыча руды увеличивалась на 25% по сравнению с каждым предыдущим годом, а затем на протяжении последующих 3 лет поддерживалась на достигнутом уровне. Общий объем добытой руды за все время добычи составил 850 тыс. т. Сколько лет разрабатывалось месторождение?

Ответ: 6 лет.

1493.(эконом., 1995, июль, №4) В банк помещен вклад в размере 3900 тыс.руб. под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял ко вкладу?

Ответ: 210 тыс. руб.

1494*. (ВМК, 1994, июль, №5) В начальный момент лечения пациенту была произведена первая инъекция 8 единиц некоторого лекарства, а во время каждой последующей инъекции ему вводится 5 единиц того же лекарства. За время между инъекциями количество лекарства в организме уменьшается в 6 раз. Какое количество лекарства будет содержаться в организме пациента после 25-й инъекции?

Ответ: $6 + \frac{2}{6^{24}}$.

1495.(психолог., 1985, №3) Алёша, Боря и Вася покупали блокноты и трёхкопеечные карандаши. Алёша купил 4 карандаша и 2 блокнота, Боря – 6 карандашей и 1 блокнот, Вася – 3 карандаша и 1 блокнот. Известно, что суммы денег, заплаченные Алёшей, Борей и Васей, образуют соответственно первый, второй и третий члены геометрической прогрессии. Сколько стоит блокнот?

Ответ: 18 копеек.

1496.(психолог., 2000, июль, №2) Рассматриваются геометрические прогрессии, у каждой из которых первый член равен десяти, сумма второго и третьего членов равна целому числу, кратному четырем, и не превосходит одной тысячи, а знаменатель больше единицы. Указать знаменатели всех таких прогрессий.

Ответ: $q = \frac{-1+\sqrt{1+\frac{8n}{5}}}{2}$, где $n = 6, 7, \ldots, 250$.

1497*. (биолог., 1993, май, №4) Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1. Известно, что сумма вторых членов прогрессий равна 3, а сумма пятых равна 161. Найти сумму шестых членов прогрессий.

Ответ: 573.

1498.(ВМК, 2003, апрель, №1) Сумма первых двадцати четырех членов геометрической прогрессии с ненулевым первым членом и ненулевым знаменателем в полтора раза больше, чем сумма ее первых восьми членов. Найти знаменатель такой прогрессии.

Ответ: $-1; \sqrt[8]{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}, -\sqrt[8]{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$.

1499.(мех-мат, 1993, май, №2) Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна ее первому члену, умноженному на 5, а сумма первых 15 членов равна 100. Найти сумму первого, шестого и одиннадцатого членов этой прогрессии.

Ответ: 20.

1500.(мех-мат, 1995, март, №1) Найти первый член геометрической прогрессии, если ее третий член равен (-10), а его квадрат в сумме с седьмым членом дает утроенный пятый член.

Ответ: -2.

1501*. (мех-мат., 1999, май, №2) Сумма членов конечной геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель положителен, равна $\frac{40}{27}$, а сумма тех же членов с чередующимися знаками (первый – со знаком "плюс", второй – со знаком "минус"и т.д.) равна $\frac{20}{27}$. Найти знаменатель прогрессии.

Ответ: $q = \frac{1}{3}$.

1502.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2010" (очный тур), №3) Положительные числа b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 составляют геометрическую прогрессию. Сумма логарифмов по основанию 2 от этих чисел равна 15. Найдите эти числа, если $\log_2 b_1 \cdot \log_2 b_5 = -7$.

Ответ: $\frac{1}{2}, 2, 8, 32, 128$.

1503.(мех-мат, 2003, июль, №3) Первый член конечной геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем меньше последнего, но не более чем на 17, а сумма ее членов со второго по последний не меньше 26. Найти знаменатель прогрессии.

Ответ: $q = 2$.

1504.(ВМК, устный, 1999) Доказать, что числа 3, 4, 5 не могут быть членами одной геометрической прогрессии.

1505.(геолог., 2003, май, №3) Целые числа k, n, m в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию с целым знаменателем. Известно, что число m на 39 больше, чем k, а прогрессия не является возрастающей. Чему равна сумма чисел k, n и m?

Ответ: 39.

1506.(эконом., 1990, №4) Натуральные числа k, l, m, взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2835 и 2646 делятся без остатка на l и m соответственно. Найдите числа k, l и m, если известно, что при указанных условиях сумма $k + l + m$ максимальна.

Ответ: $k = 27,\ l = 189,\ m = 1323$.

1507.(ФФМ, 2003, май, №7) Количество сотрудников корпорации ежегодно возрастало в геометрической прогрессии и за 6 лет увеличилось на 20615 человек. Найти первоначальную численность сотрудников корпорации.

Ответ: 1984.

1508.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2009", очный тур: Москва, №6) Все члены геометрической прогрессии $b_1, b_2, \ldots, b_n$ являются целыми числами. Определите, при каких из указанных ниже значений k число $b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_k^2$ делится на $b_1 + b_2 + \cdots + b_k$ независимо от выбора прогрессии, если: а) $k = 3$; б) $k = 4$; в) $k = 5$.

Ответ: $k = 3$ и $k = 5$.

1509.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2009", очный тур: Томск, Улан-Удэ, №2) Сколько членов арифметической прогрессии, состоящей из 2009 чисел, с первым членом 12 и разностью 3 являются также членами бесконечной геометрической прогрессии, первый член и знаменатель которой равны 3?

Ответ: 5.

7.2.1 Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

1510*. (соц., 2005, июль, №3) Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия содержит член $b_n = \frac{1}{6}$. Отношение суммы членов прогрессии, стоящих перед b_n, к сумме членов, стоящих после b_n, равно 6. Найти n, если сумма всей прогрессии равна $\frac{3}{4}$.

Ответ: $n = 2$.

1511.(почвовед., 2007, июль, №3) Сумма положительной бесконечно убывающей геометрической прогрессии в 4 раза больше ее второго члена. Во сколько раз второй член меньше первого?

Ответ: 2.

1512.(ВКНМ, 1999, май, №5) Знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии отрицателен. Найти все целые m, при которых сумма ее членов с нечетными номерами больше суммы ее членов с четными номерами на величину, равную произведению ее второго члена и числа вида $m^2 + 10m + 20$.

Ответ: $-6; -5; -4$.

1513*. (эконом., 1970, №4) Найти хотя бы один такой многочлен третьей степени

$$P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \frac{x}{1 - \frac{x}{2}} - P_3(x) \right| < 0,02$$

при всех $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Ответ: $P_3(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4}$.

7.3 Смешанные задачи

1514.(фил., 2003, март, №3) Даны такие арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ и геометрическая прогрессия $\{b_n\}$, что

$$a_1 = b_1,\ a_4 = b_3,\ a_2a_3 - b_2^2 = 8.$$

Найти разность арифметической прогрессии.

Ответ: $d = \pm 2$.

1515.(почвовед., 1995, июль, №1) Первый член арифметической прогрессии в два раза больше первого члена геометрической прогрессии и в пять раз больше второго члена геометрической прогрессии. Четвертый член арифметической прогрессии составляет 50% от ее второго члена. Найти первый член арифметической прогрессии, если известно, что второй ее член больше третьего члена геометрической прогрессии на 36.

Ответ: 50.

1516.(почвовед., 2000, июль, №2) Первый, четвертый и пятый члены арифметической прогрессии одновременно являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии. Найти все значения, которые может принимать знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ: $1; \frac{1}{3}$.

1517*. (Севастополь, 2004, июль, №4) Три числа, которые являются последовательными членами геометрической прогрессии, дают в произведении 8. Если их умножить соответственно на 16, 5 и 1, то получатся три числа, являющиеся последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите три исходных числа.

Ответ: $1; 2; 4$ или $\frac{1}{4}; 2; 16$.

1518.(биолог., 2007, июль, №4) Положительные числа b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 образуют геометрическую прогрессию, а числа b_5, $6b_3$, $27b_1$ образуют арифметическую прогрессию. Найти все возможные знаменатели геометрической прогрессии b_1, b_2, b_3, b_4, b_5.

Ответ: 3 или $\sqrt{3}$.

1519.(физ., 2002, июль, №5) Три числа, сумма которых равна 39, образуют геометрическую прогрессию. Если к первому числу прибавить 1, от второго числа отнять 1, а от третьего числа отнять 15, то полученные числа образуют арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

Ответ: 3, 9, 27 или 27, 9, 3.

1520.(ВМК, 2004, апрель, №1) Четыре числа a_1, a_2, a_3 и a_4 образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Если к ним прибавить 6, 7, 6 и 1 соответственно, то получатся числа, образующие в том же порядке арифметическую прогрессию. Найти числа a_1, a_2, a_3 и a_4.

Ответ: 2, 4, 8, 16.

1521.(фил., 1985, №2) Коля, Петя, Миша и Ваня ловили рыбу. Оказалось, что количества рыб, пойманных Колей, Петей и Мишей образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Если бы Коля поймал на две рыбы меньше, а Ваня – на двенадцать рыб меньше, то количества рыб, пойманных Колей, Петей, Мишей и Ваней, образовывали бы в указанном порядке арифметическую прогрессию. Сколько рыб поймал Миша, если известно, что он поймал на восемнадцать рыб меньше Вани?

Ответ: 18.

1522*. (Севастополь, 2000, май, №7 + био., 1970, №3) Даны две арифметические прогрессии a_n и b_n. Известно, что

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3,$$

а суммы $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3$ образуют геометрическую прогрессию. Доказать, что $a_1 = b_3, a_2 = b_2, a_3 = b_1$.

1523*. (Севастополь, 2000, май, №7) Даны две геометрические прогрессии a_n и b_n. Известно, что

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3,$$

а произведения a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что $a_1 + b_1 = a_3 + b_3$.

1524.(мех-мат, 1962) Даны арифметическая и геометрическая прогрессии с положительными членами. Первые и вторые члены этих прогрессий совпадают. Докажите, что всякий другой член арифметической прогрессии не больше соответствующего члена геометрической прогрессии.

1525*. (мех-мат, 1997, май, №2) Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. Сумма их первых членов равна (-3), сумма третьих членов 1, а сумма пятых членов равна 5. Найти разность арифметической прогрессии.

Ответ: $d = 2$.

1526*. (психолог., 1967) Найти числа, одновременно являющиеся членами арифметической прогрессии $12, 15, 18, \ldots$ и геометрической прогрессии $1, 3, 9, \ldots$, если известно, что каждая из этих прогрессий содержит по 100 членов.

Ответ: 27, 81, 243.

1527.(ВМК, "Абитуриент-2008", 2008, апрель, №3) Целые числа x, y и z образуют геометрическую прогрессию, а числа $7x - 3$, y^2 и $5z - 6$ – арифметическую прогрессию (в указанных порядках). Найти x, y и z.

Ответ: $x = 3$, $y = 6$, $z = 12$ или $x = 3$, $y = -6$, $z = 12$.

1528.(ВМК, 2009, №2) Положительные числа a и b таковы, что числа a, x и b в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, а числа a, y и b в указанном порядке – геометрическую прогрессию. Может ли разность $x - y$ принимать значения: а) -2009; б) 0; в) 2009?

Ответ: а) нет; б) да; в) да.

1529.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2010", №6) Найдите все значения $k > 2$, при каждом из которых существует непостоянная арифметическая прогрессия $x_1, \ldots, x_k$ и квадратный трёхчлен $f(x)$, для которых $f(x_1), \ldots, f(x_k)$ – геометрическая прогрессия.

Ответ: $k = 3$.

7.4 Функциональные уравнения для последовательностей

1530*. (хим., 2001, июль, №7) Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет уравнению

$$f(x + 1) = f(x) + 2x + 1.$$

Найти $f(2001)$, если $f(0) = 0$.

Ответ: $f(2001) = 2001^2$.

1531.(хим., 2001, май, №7) Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ устроена следующим образом:

1. $a_1 = 1$;

2. каждое последующее число равно удвоенной сумме предыдущих чисел, т.е.

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 = 2, \\ a_3 &= 2(a_1 + a_2), \end{aligned}$$

и т.д.

Найти произведение всех чисел от a_1 до a_{2001}.

Ответ: $2^{2000} \cdot 3^{1999000}$. При $n \geq 2$ последовательность a_n дается формулой: $a_n = 2 \cdot 3^{n-2}$.

1532*. (хим., 1999, июль, №7) Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ определяется следующим правилом:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \\ a_{n+1} &= \begin{cases} a_n + 2, & \text{если число } n \text{ -- нечетное,} \\ 2a_n, & \text{если число } n \text{ -- четное,} \end{cases} \end{aligned}$$

т.е. $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_4 = 10$, $a_5 = 20$, $a_6 = 22$ и т.д. Найти a_{1999}.

Ответ: $a_{1999} = 3 \cdot 2^{1000} - 4$. При $n = 2k - 1$ последовательность a_n дается формулой: $a_n \equiv a_{2k-1} = 3 \cdot 2^k - 4$.

1533*. (хим., 1999, апрель, №7) Функция $f(x)$ удовлетворяет следующему условию: для любых чисел a и b выполняется равенство:

$$f\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{f(a) + 2f(b)}{3}.$$

Найти значение функции $f(1999)$, если $f(1) = 1$, $f(4) = 7$.

Ответ: $f_{1999} = 3997$. При натуральных значениях аргумента x функция $f(x)$ образует арифметическую прогрессию, так что $f(n) = \frac{(n-1)f(4)-(n-4)f(1)}{3} = 2n - 1$.

1534.(географ., 2004, июль, №6) Сколько цифр содержится в десятичной записи 99991-го члена последовательности a_n, если $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 2a_n + 1024$, $\lg 2 = 0,301029\ldots$?

Ответ: 30103; $a_n = \left(2^{n-1} - 1\right) \cdot 2^{10}$.

1535.(мех-мат, устный, 2005) Функция f с областью определения Z удовлетворяет равенствам

$$f(1) = \cos 1, \;\; f(n+1) = f(n) \cdot \cos 1 - \sin n \cdot \sin 1, n \in Z.$$

Для любого ли натурального (целого) n верно неравенство $f(n) > -1$?

Ответ: да ($f(n) = \cos n$).

1536.(мех-мат, устный, 2005) Найти наименьшее значение функции f, определенной на множестве натуральных чисел и удовлетворяющей равенствам:

$$f(1) = \cos 2, \;\; f(n+1) = f(n) \cdot \cos 1 - \sqrt{1 - \left(f(n)\right)^2} \cdot \sin 1, n \in N.$$

Ответ: $\cos 3$ (для четных n $f(n) = \cos 4$; для нечетных n, больших 1, $f(n) = \cos 3$).

1537.(фил., 1998, июль, №4) А, И, Б сидели на трубе. К ним стали по очереди подсаживаться другие буквы так, что порядковый номер очередной буквы в русском алфавите равнялся сумме цифр порядковых номеров двух предыдущих букв. Оказалось, что начиная с некоторого момента буквы стали циклически повторяться.

а) Какая буква (из числа циклически повторяющихся) встречается наиболее часто?

б) Если вместо начальных букв А, И, Б взять другие буквы, то может ли циклически повторяющийся набор состоять из одной буквы? Если да, указать эту букву.

Ответ: а) И, б) Р.

1538.(ВМК, устный, 2006) Последовательность функций $f_n(x)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x, \\ f_{n+1}(x) &= \frac{1}{1-f_n(x)}, \text{ при } n \geq 1. \end{aligned}$$

Найти $f_{2006}(2006)$.

Ответ: $-\frac{1}{2005}$.

1539*. (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2007", №8) Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ целых чисел для некоторой константы k удовлетворяет при каждом натуральном $n > 1$ условию $a_{n-1}a_{n+1} = ka_n$. Найти a_{2007}, если $a_1 = 1$ и $a_2 a_3 = 2007$.

Ответ: ± 2007.

1540.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2009", №8) Найдите первую и две последние цифры десятичной записи числа x_{1001}, если

$$x_1 = 2 \text{ и } x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[10]{2}}x_n + \frac{\sqrt[10]{2}-1}{\sqrt[10]{2}}, \ n \in Z.$$

Ответ: $x_{1001} = 1 + \frac{1}{2^{100}} = 1, \ldots 25$.

1541.(Севастополь, 2008, №10) Найти все возможные значения $f(2008)$, если известно, что числа $f(k)$ задаются формулой

$$f(3m+2n) = f(m) \cdot f(n),$$

определённой для всех целых неотрицательных чисел m, n и $f(1) = f(0)$.

Ответ: 0 или 1 ($f(n)$ либо тождественно равна 0, либо тождественно равна 1).

1542*. (Ломоносов-2017, заочный тур, №10) Пусть $f(x) = x^2 + px + q$. Известно, что неравенство $|f(x)| > \frac{1}{2}$ не имеет решений на отрезке $[1; 3]$. Найдите

$$\underbrace{f\Big(f\Big(\ldots f}_{2017}\Big(\frac{3+\sqrt{7}}{2}\Big)\Big)\ldots\Big)$$

Ответ. $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$.

7.5 Суммирование числовых последовательностей

1543.(геолог., 2007, устный) Найдите сумму всех натуральных двузначных нечётных чисел, меньших 60.

Ответ: 875.

1544.(геолог., устный, 1998) Решить уравнение

$$1+7+13+\dots+x=280.$$

Ответ: $x=55$.

1545*. (мех-мат, 2003, Олимпиада, 10 кл., №1 + Московская математическая олимпиада, 1940, 1 тур, 9-10 кл.) Какое число стоит на 2003-м месте в последовательности

$$1,\ 1,2,\ 1,2,3,\ 1,2,3,4,\ 1,2,3,4,5,\ \dots ?$$

Ответ: $a_{2003}=50$.

1546.(почвовед., 2001, май, №4) Найти сумму n первых членов ряда

$$7+77+777+\dots$$

Ответ: $\frac{1}{9}\left(\underbrace{77\dots7}_{n\text{ раз}}0-7n\right)=\frac{7}{81}\left(10^{n+1}-9n-10\right)$.

1547.(мех-мат, 2005, Олимпиада, 9 кл., №1) Найдите сумму чисел

$$9+990+99900+\dots+\underbrace{99\dots9}_{n\text{ раз}}\underbrace{00\dots0}_{n-1\text{ раз}}.$$

Ответ: $\frac{10^{2n+1}-11\cdot10^n+1}{99}$.

1548.(мех-мат, 2005, Олимпиада, 10 кл., №2) Найдите сумму чисел

$$7+770+77700+\dots+\underbrace{77\dots7}_{n\text{ раз}}\underbrace{00\dots0}_{n-1\text{ раз}}.$$

Ответ: $\frac{7}{891}\left(10^{2n+1}-11\cdot10^n+1\right)$.

1549.(ВМК, устный, 2001)Доказать, что

$$S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots+\frac{1000}{2^{1000}}<2.$$

1550.(ВШБ, 2007, №5) Дана последовательность 20 чисел:

$$2;\ 2\cdot2^2;\ 3\cdot2^3;\ \dots;\ 20\cdot2^{20},$$

в которой k-й член равен $k\cdot2^k$. Найти сумму всех членов данной последовательности.

Ответ: $S = 19 \cdot 2^{21} + 2 = 39\ 845\ 890$.

1551.(эконом., 1964) Найти сумму

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + \cdots + 100 \cdot 2^{99}.$$

Ответ: $99 \cdot 2^{100} + 1$.

1552.(ВМК, устный, 1982) Найти сумму

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}.$$

Ответ: $3 - \frac{2n+3}{2^n}$.

1553*. (ВМК, устный, 1999) Доказать, что

$$\log_{a^2} x + \log_{a^6} x + \cdots + \log_{a^{n(n+1)}} x = \log_a \sqrt[n+1]{x^n}.$$

1554.(ВМК, 2007, устный) Сравнить два числа: $\sum_{k=2}^{15} \log_2\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ и $3 - \log_2 15$.

Ответ: числа равны.

1555.(ВМК, устный, 2006) Решить уравнение

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \cdots + \frac{1}{(x+98)(x+99)} = -1.$$

Ответ: $x = \frac{-99 \pm \sqrt{9405}}{2}$.

1556.(ВМК, устный, 2006) Решить уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x+98} + \sqrt{x+99}} = 9.$$

Ответ: $x = 1$.

1557.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2009", №6)Решите уравнение

$$2^1 \sin\left(x + 1 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + 2^2 \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \cdots + 2^{99} \sin\left(x + 99 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

1558.(ВМК, устный, 2003)Доказать, что

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{1000^2} < 2.$$

1559*. (ВМК, 2007, устный) Доказать, что

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10\ 000}} \geq 100.$$

1560.(Севастополь, 2006, №10) Найдите сумму $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ чисел $a_1, \ldots, a_n$, которые при любом натуральном n удовлетворяют равенству

$$a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n = \frac{n+1}{n+2}.$$

Ответ: $\frac{3n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)}$.

1561*. (ВМК, устный, 2001) Что больше:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}$$

или

$$\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{200}?$$

Ответ: суммы равны.

1562*. [олимпиада "Ломоносов-2011", заочный тур, 9-10 кл., №10] Что больше: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011}$ или $\frac{1}{1006}+\frac{1}{1007}+\cdots+\frac{1}{2011}$?

Ответ: второе число больше.

1563.(ВМК, устный, 2002)Вычислить сумму

$$1-4+9-16+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot n^2$$

в общем виде и конкретно при $n=100$.

Ответ: $(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$; при $n=100$ сумма равна -5050 .

1564*. (ВМК, устный, 2002) Вычислить сумму

$$S=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{i}{(i+1)!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$$

в общем виде и при $n=8$.

Ответ: $S=1-\frac{1}{(n+1)!}$; при $n=8$ $S=\frac{362879}{362880}$.

1565.(ВМК, устный, 2002)Что больше,

$$S=1!\cdot 1+2!\cdot 2+3!\cdot 3+\cdots+n!\cdot n$$

или $(n+1)!$?

Ответ: $S=(n+1)!-1<(n+1)!$.

1566.(ВМК, устный, 2000+2003 + Московская математическая олимпиада, 1950, 2 тур, 7-8 кл.) Доказать, что

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

1567*. (мех-мат, устный, 1963) Доказать, что

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

1568.(ВМК, устный, 1982 + Московская математическая олимпиада, 1951, 2 тур, 7-8 кл.) Найти сумму

$$1^3+2^3+\cdots+n^3.$$

Ответ: $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Глава 8

Текстовые задачи

8.1 Простые задачи на составление уравнений

1569.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2009", очный тур: Москва, №1) Дети в садике за один день съедают столько же яблок, сколько и груш. Найдите отношение количества мальчиков к количеству девочек в этом садике, если известно, что каждый мальчик съедает за день 3 яблока и 2 груши, а каждая девочка – 1 яблоко и 3 груши.

Ответ: 2.

1570.(Севастополь, 2008, №1) Пообедав в кафе, однокурсники решили поделить расходы поровну. Если каждый внесёт по 23 гривны, то для оплаты обеда не хватит 20 гривен. Если же каждый внесёт по 29 гривен, то после оплаты останется 10 гривен. Сколько было однокурсников и сколько стоил обед?

Ответ: 5 однокурсников, 135 гривен.

1571.(Севастополь, 2006, №1) Школьника попросили возвести некоторое число в квадрат, а затем прибавить 5. Но школьник перепутал последовательность действий: сначала прибавил 5, а затем сумму возвел в квадрат. Оказалось, что в обоих случаях ответ одинаков. Найдите этот ответ.

Ответ: 9.

1572.(соц., 2002, июль, №4) Куплен товар двух сортов: первого на 1200 руб. и второго на 1500 руб. Товара второго сорта куплено на 10 кг больше, чем первого и по цене на 20 руб. за 1 кг меньше. Сколько куплено товара первого сорта?

Ответ: 15 кг.

1573*. (фил., 1972, №1) Известно, что 0,5 кг лука, 3 кг картофеля и 1 кг огурцов стоят вместе 2 руб. 38 коп., а 2 кг лука и 4 кг огурцов стоят 8 руб. 20 коп. Сколько стоят 1 кг лука, 2 кг картофеля и 2 кг огурцов вместе?

Ответ: 4 руб. 32 коп.

1574.(фил., 1971, №1) Четыре школьника сделали в магазине канцелярских товаров следующие покупки: первый купил пенал и ластик, заплатив

40 коп.; второй купил ластик и карандаш, заплатив 12 коп.; третий купил пенал, карандаш и две тетради, заплатив 50 коп.; четвертый купил пенал и тетрадь. Сколько заплатил четвертый школьник?

Ответ: 39 коп.

1575.(Олимпиада мех-мат ф-та, 2003, 8 кл., №1) Продавец взвесил поочередно три выбранных покупателем арбуза, и его весы показали 6, 7 и 8 кг. Когда же покупатель взвесил все три арбуза вместе на тех же весах, они показали всего 20 кг. На сколько килограммов обманывают весы при каждом взвешивании, если известно, что эта величина постоянна?

Ответ: 0,5 кг.

1576.(олимпиада "Ломоносов-2009", №1) На сколько одно из двух положительных чисел больше другого, если их среднее арифметическое равно $3\sqrt{2}$, а среднее геометрическое равно $\sqrt{2}$.

Ответ: 8.

1577.(Высшая школа государственного аудита, 2008, №9) Покупатель просит отвесить ему 2 кг конфет одного сорта. В распоряжении продавщицы есть гиря массой 1 кг и неисправные рычажные (чашечные) весы – разрегулирование произошло из-за смещения чашек относительно центра весов. Продавщица решила поступить так. Сначала она положила гирю на левую чашку весов и уравновесила её конфетами, которые после взвешивания отдала покупателю. Затем положила гирю на правую чашку, вновь уравновесила её конфетами и после взвешивания также отдала их покупателю, который расплатился за 2 кг. Выгодно ли такое решение покупателю?

Ответ: да (в том смысле, что он получит больше 2 кг конфет).

1578.(ФГП, 2005, июль, №1) В турнире борцов участвуют 127 спортсменов. Борец выбывает из соревнований сразу после поражения в поединке. Сколько поединков требуется провести, чтобы выявить победителя турнира?

Ответ: 126.

1579.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2010", №1) В волейбольном турнире каждая команда сыграла с каждой командой ровно по одному разу, причём 25% команд ни разу не выиграли. Известно, что в волейболе нет ничьих. Сколько команд участвовало в турнире?

Ответ: 4.

1580.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2012", очный тур)В школе было три урока. Но только 4 школьника были на всех уроках. Каждый из остальных "учеников" присутствовал только на двух уроках, а один из уроков прогулял. На математике в классе было 17 человек, на физике – 18, на русском – 19. Сколько школьников присутствовало и на математике, и на физике (не имеет значения, удостоили ли они своим посещением урок русского языка).

Ответ: 10.

1581.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы", 2013, №2) Дневная смена мастера длится на 10% дольше, чем смена ученика. Если бы ученик работал столько времени, сколько мастер, а мастер – столько, сколько ученик, они изготовили бы одинаковое количество деталей. На сколько процентов деталей в день делает мастер больше, чем ученик?

Ответ: 21.

1582.(ФГУ, 2004, июль, №1) Тест, который должен пройти испытуемый, состоит из 26 вопросов. За каждый неверный ответ у испытуемого вычитается пять очков, а за каждый правильный – начисляется восемь очков. Испытуемый дал ответы на все вопросы. На сколько вопросов он ответил правильно, если в итоге сумма полученных им очков оказалась равной нулю?

Ответ: 10.

1583.(МШЭ, 2007, №5) Для перевозки 90 т груза затребовали некоторое количество одинаковых грузовиков. В связи с тем, что на каждую машину погрузили на 0,75 т меньше, дополнительно было затребовано ещё 4 грузовика. На сколько процентов увеличилось число грузовиков по сравнению с первоначальной заявкой?

Ответ: на 20%.

1584.(ВШБ, 2004, июль, №5) Сколько времени в течение суток на электронном табло вокзальных часов, которые показывают время в диапазоне от 00:00 до 23:59, присутствует хотя бы одна цифра 3?

Ответ: 8 час. 15 мин.

1585.(эконом. (политэкономия), 1972, №3) Один учебник алгебры, два учебника геометрии и два учебника тригонометрии стоят вместе 2 руб. 10 коп., а три учебника алгебры, один учебник геометрии и один учебник тригонометрии стоят вместе 2 руб. 30 коп. Сколько стоят учебник геометрии и учебник тригонометрии вместе?

Ответ: 80 коп.

1586.(эконом., 1987, №2) В магазине продано 12 тонн орехов трёх сортов по цене соответственно 2 руб., 4 руб., и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 42 тыс. руб. Известно, что количества тонн проданных орехов соответственно первого, второго и третьего сортов образуют арифметическую прогрессию. Сколько тонн орехов каждого сорта продано в магазине?

Ответ: 5,5 т., 4 т., 2,5 т.

1587.(геолог., 1986, №4) Студенческий строительный отряд оборудовал прямоугольную спортплощадку площадью 0,1 га, установив с противоположных более длинных сторон трибуны, а с двух других сторон – проволочную сетку. Стоимость установки одного погонного метра трибун и сетки равны соответственно 7 руб. и 3 руб. На установку трибун и сетки израсходовано 820 рублей. Найти длины сторон спортплощадки.

Ответ: 50 м, 20 м.

1588.(почвовед., 1984, №1) Площади трех участков земли относятся как 4:3:5. Средняя урожайность всех трех участков одинакова и составляет 28 ц с 1 га. Известно, что с третьего участка собрано на 84 ц зерна больше, чем с первого. Определить, какова площадь каждого из трех участков.

Ответ: 12 га, 9 га, 15 га.

1589*. (почвовед., 1992, №2) Шофер грузовика, занятого на строительстве, при постоянной продолжительности рабочего дня перевозит грузы трех типов: щебень, песок и кирпич, соответственно по разному расходуя горючее. В первый день половину рабочего дня он возил щебень, а половину – песок; во второй день 1/7 времени возил щебень, 4/7 времени – песок и 2/7 времени – кирпич; в третий день 1/4 времени – щебень, 3/8 времени – песок и столько же времени – кирпич. На сколько процентов израсходует шофер дневной норматив горючего, возя целый день щебень, если в первый день он израсходовал его на 95%, во второй – на $101\frac{3}{7}$%, а в третий – на 101,25%?

Ответ: 90%

1590.(ФГУ, 2006, №5) Четыре отраслевых предприятия K, L, M, N, обсуждая планы объединения усилий, установили, что без K три оставшихся будут контролировать 55% рынка отрасли; без L три другие - 60%; K, L, N без M – 66%; три предприятия без N – 73% рынка отрасли. Какова доля каждого из этих предприятий на рынке?

Ответ: $\frac{89}{300}, \frac{74}{300}, \frac{56}{300}, \frac{35}{300}$ (доля рынка, не контролируемая ни одним из предприятий K, L, M, N, равна $\frac{46}{300}$).

1591.(мех-мат., 2003, март (тест перед олимпиадой), №4 + Олимпиада, 9 кл., №1) Ваня хотел купить на рынке 2 яблока, 3 апельсина и 5 бананов. Однако он перепутал и купил 2 банана, 3 яблока и 5 апельсинов, потратив в точности запланированную сумму. Расположить яблоко, апельсин и банан в порядке возрастания цены, если известно, что яблоко дороже банана.

Ответ: апельсин, банан, яблоко.

1592.(мех-мат, 2009, №2) В некоторой компании каждый сотрудник либо правдивец (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжёт). Каждого из сотрудников спросили про каждого из остальных, правдивец тот или лжец. Всего было получено 32 ответа "правдивец" и 40 ответов "лжец". На сколько отличается в этой компании количество сотрудников-правдивцев от количества сотрудников-лжецов?

Ответ: 1.

1593.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2010" (очный тур), №1) У Пети есть два разных стакана цилиндрической формы. Он заметил, что банку сока можно так разлить по этим стаканам, что уровень сока в первом стакане составит 12 см., а во втором – 10 см., или так, что уровень сока в первом стакане составит 8 см., а во втором – 12 см. На каком уровне окажется сок в каждом из этих стаканов, если сок из банки разлить по стаканам поровну?

Ответ: 16 см и 8 см.

8.2 Задачи на многозначные целые числа

1594*. (почвовед., 2003, май, №3) Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 6, а в остатке 8.

Если же число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, разделить на разность между цифрами десятков и единиц исходного числа, то в частном получится 15, а в остатке 2.

Найти это число.

Ответ: 74.

1595.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2013", №3) Найдите сумму всех двузначных чисел, у каждого из которых сумма квадратов цифр на 37 больше произведения тех же цифр.

Ответ: 231.

1596.(психолог., 1984, №6) Найти все все натуральные трёхзначные числа, каждое из которых обладает следующими свойствами:

– первая цифра числа в 3 раза меньше суммы двух других его цифр;

– разность между самим числом и числом, получающимся из него перестановкой двух последних его цифр, неотрицательна и делится на 81 без остатка.

Ответ: 233, 390,466, 699.

1597.(ИСАА, 1991, №4) При перемножении двух натуральных чисел, разность которых равна 10, была допущена ошибка: цифра сотен в произведении увеличена на 2. При делении полученного (неверного) произведения на меньший из множителей получилось в частном 50 и в остатке 25. Найти множители.

Ответ: 35 и 45.

1598.(ИСАА, 1998, июль, №6) При перемножении двух натуральных чисел произведение было ошибочно увеличено на 372. При делении полученного (неверного) произведения на меньший сомножитель получилось в частном 90 и в остатке 29. Найти эти числа.

Ответ: 49 и 83.

1599.(геолог., 1999, май, №4) Найти такое натуральное двузначное число, что сумма квадрата числа его десятков и ушестерённого квадрата числа единиц равна умноженной на пять сумме произведения цифр этого числа и 1.

Ответ: 74.

1600.(физ., 1983, №4) После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 7 и в остатке 6. После деления этого же двузначного числа на произведение его цифр в частном получается 3 и в остатке 11. Найти это двузначное число.

Ответ: 83.

1601.(ВМК, устный, 2002)Найти все четырёхзначные числа, являющиеся квадратом целого числа, у которых первая цифра совпадает со второй, а третья цифра совпадает с четвертой.

Ответ: 7744.

1602*. (мех-мат, 2001, июль, №4) Найти все трёхзначные натуральные числа, каждое из которых больше суммы квадратов своих цифр ровно на 517.

Ответ: 618, 659, 698.

1603*. (мех-мат, 2006, №1) Игорь и Володя решали задачу: некоторое заданное трёхзначное число прологарифмировать по основанию 2, из полученного числа вычесть некоторое заданное натуральное число, а затем разность разделить на то же самое натуральное число. Игорь перепутал и в первом действии прологарифмировал по основанию 3, а Володя посчитал правильно. Когда они сверили свои результаты, оказалось, что полученные ими числа взаимно обратны. Найти исходное трёхзначное число.

Ответ: 216.

1604.(договорные программы, 2007, август, №8) К десятичной записи целого числа $n \neq 0$ приписали справа какую-то цифру. К получившемуся новому числу прибавили квадрат числа n, а затем вычли 3. Получилось число $14n$. Какое число было взято и какая цифра была приписана?

Ответ: $n = 1$, приписана цифра 6; $n = 2$, приписана цифра 7; $n = 3$, приписана цифра 6; $n = 4$, приписана цифра 3; $n = -1$, приписана цифра 2; $n = -2$, приписана цифра 9.

1605.(олимпиада "Ломоносов-2011", заочный тур, 9-10 кл., №1)Найдите наименьшее натуральное число, которое больше суммы своих цифр на 1755 (год основания Московского университета).

Ответ: 1770.

1606.(олимпиада "Ломоносов-2012", заочный тур, 9 кл., №4)На доске написано трёхзначное число, все цифры которого отличны от нуля. Учитель стёр его левую цифру и приписал её к оставшемуся двузначному числу справа. Ученик заметил, что новое трёхзначное число оказалось на 18 меньше, чем исходное. На какую величину может измениться новое число, если учитель проделает с ним те же действия? Найдите все возможные значения этой величины.

Ответ: 180 (исходное число имеет вид $\overline{c+2, c+2, c}$, где $c = 1; 2; \ldots; 7$).

8.3 Задачи на проценты

1607.(ВМК, устный, 2008, июль) Пачка масла дороже пачки маргарина на 25%. На сколько процентов пачка маргарина дешевле пачки масла?

Ответ: на 20%.

1608.(Севастополь, 2009, №4) С 1 мая магазин увеличил цену на масло на 10%. Однако с 1 июня цена была снижена, при этом она оказалась такой же, как и до первоначального повышения цены. На сколько процентов была снижена цена с 1 июня?

Ответ: $9\frac{1}{11}\%$.

1609.(МШЭ, 2006, №4) Антикварный магазин продал картину со скидкой 10% по сравнению с первоначально назначенной ценой и получил при этом 8% прибыли. Сколько процентов прибыли предполагал получить магазин первоначально?

Ответ: 20%.

1610.(МШЭ, 2005, июль, №3) Цена товара изменяется два раза в год: в апреле она повышается на 20%, а в сентябре снижается на 20%. Какова будет цена товара в декабре 2005 г., если в январе 2004 г. она составляла 6250 руб.?

Ответ: 5760 руб.

1611.(олимпиада "Ломоносов-2011", заочный тур, 8 кл., №1)Избавившись от колорадского жука, фермер стал собирать с 24 га столько картофеля, сколько прежде собирал с 27 га. На сколько процентов повысилась урожайность картофеля?

Ответ: на 12,5%.

1612.(олимпиада "Ломоносов-2011", заочный тур, 7 кл., №1)После обработки сада средством от гусениц садовод заметил, что с 12 кустов смородины стал получаться такой же урожай, как прежде с 15 кустов. На сколько процентов повысилась урожайность смородины в саду?

Ответ: на 25%.

1613.(олимпиада "Ломоносов-2011", заочный тур, 11 кл., №1)Два куска сыра имеют форму прямоугольного параллелепипеда каждый. Длина первого куска на 50% больше длины второго куска, а ширина и высота первого куска соответственно на 20% и 30% меньше ширины и высоты второго куска. У какого куска сыра объём больше и насколько?

Ответ: объём второго куска больше объёма первого куска на $\frac{4}{21} = 19\frac{1}{21}\%$.

1614.(Ташкент, 2008, №9) В коммерческий банк был сделан вклад под фиксированный процент годового дохода. За первые два года величина вклада возросла на 21 000 у.е., а за третий год она увеличилась ещё на 12 100 у.е. Определить, какова была первоначальная величина вклада.

Ответ: 100 000 у.е.

1615.(Ташкент, 2007, №8) В коммерческом банке сроком на два года был сделан вклад в размере 1 200 000 у.е. При этом клиент рассчитал, что если в конце каждого года он будет снимать со своего вклада по 380 000 у.е., то по истечении двух лет его вклад составит 770 000 у.е. Какой процент годовых по вкладу установлен в данном банке?

Ответ: 15%.

1616.(Ташкент, 2006, №3) Величина вклада в банке второго клиента на 40% больше величины вклада первого клиента. Определите величины вкладов каждого клиента, если величина вклада второго клиента на 2400 у.е. больше, чем величина вклада первого клиента.

Ответ: 6 000 у.е., 8 400 у.е.

1617*. (соц., 2004, июль, №3) Популярность продукта А за 2002 год выросла на 20%, в следующем году снизилась на 10%, а в конце 2004 года сравнялась с популярностью продукта Б. Популярность продукта Б в 2002 году снизилась на 20%, затем на протяжении одного года не изменилась, а за 2004 год выросла на 40%. Как изменилась популярность продукта А за 2004 год, если в начале 2002 года она составляла $\frac{2}{3}$ от популярности продукта Б?

Ответ: популярность продукта А за 2004 год выросла на $55\frac{5}{9}\%$.

1618.(соц., 2004, апрель, №3) На факультете X отличники составляют 10% от общего количества студентов этого факультета, на факультете Y – 20%, а на факультете Z – лишь 4%. Найти средний процент отличников по всем трем факультетам, если известно, что на факультете Y учится на

50% больше студентов, чем на факультете X, а на факультете Z – вдвое меньше, чем на факультете X.

Ответ: 14%.

1619.(соц., 2003, июль, №4) В городе N на должность мэра на выборах баллотировались 3 кандидата: Акулов, Баранов и Воробьев. В начале предвыборной компании предпочтения избирателей распределялись как 1:2:1. По окончании предвыборной гонки 40% избирателей города N отказались участвовать в выборах, у остальных же предпочтения не изменились. Сколько процентов сторонников каждого кандидата отказались от голосования, если по окончании предвыборной гонки соотношение голосов стало 3:3:3,6?

Ответ: 25%, 62,5%, 10%.

1620.(соц., 2001, июль, №3) В городе N за последний год численность населения уменьшилась на 4%, а число безработных увеличилось на 5%. Сколько процентов от общего числа жителей составляют безработные, если год назад их было 8%?

Ответ: $8\frac{3}{4}$%.

1621.(соц., 2000, июль, №2) В городе N в течение 2 лет наблюдался рост числа жителей. Во втором году процент роста числа жителей города N увеличился на 1 по сравнению с процентом роста числа жителей в первом году. Найти процент роста числа жителей в первом году, если известно, что он на 5,2 меньше, чем процент роста населения за два года.

Ответ: 4%.

1622.(соц., 1998, июль, №3) В городе N 9% коренного населения в зимний период занято народным промыслом. Летом 36% коренного населения уезжает из города, но общая численность населения за счёт приезжающих туристов составляет $4/5$ от численности в зимний период. Определить, какая часть от общей численности населения в летний период занята народным промыслом, если среди коренного населения доля занятых народным промыслом осталась такой же, как в зимний период.

Ответ: 7,2%.

1623.(соц., 1998, июль, №3) В университете города М 6% студентов обучались на платной основе, причем эта доля была одинакова на всех курсах. Летом 22% студентов были выпущены из стен университета, но за счет приема абитуриентов численность студентов составила $6/5$ от прежней. Определить, какая доля студентов будет обучаться на платной основе, если новый набор осуществлялся только на места, финансируемые из госбюджета.

Ответ: 3,9%.

1624.(фил., 2005, июль, №2) На вступительном экзамене по математике 15% поступающих не решили ни одной задачи, 144 человека решили задачи с ошибками, а число верно решивших все задачи относится к числу не решивших вовсе, как 5:3. Сколько человек экзаменовалось по математике в этот день?

Ответ: 240 человек.

1625.(фил., 2002, апрель, №3) Автор и редактор вносят исправления в рукопись. При каждом прочтении автор увеличивает объём рукописи на 10 страниц, а редактор каждый раз сокращает её на 20%.

а) Каким был первоначальный объём рукописи, если после того, как её один раз прочитал автор, а потом дважды прочитал редактор, её объём состави 800 страниц?

б) Каким был первоначальный объём рукописи, если после прочтения автором, а затем редактором, и опять автором и редактором, её объём остался прежним?

Ответ: а) 1240 стр.; б) 40 стр.

1626.(фил., 2001, июль, №4) Писатель-западник (З) и писатель-славянофил (С) опубликовали по одной книге. З употребляет букву "ф" в среднем на страницу текста на 75% чаще, чем С. Тираж книги писателя С на 5% больше, чем тираж книги писателя З. Количество страниц в книге у З на 10% меньше, чем количество страниц в книге у С. На сколько процентов в опубликованных текстах З букв "ф" больше или меньше, чем в текстах С?

Ответ: 50%.

1627.(ФГП, 2005, июль, №6) Общий процент прибыли за весь товар, проданный в трех магазинах, расположенных в разных районах города, составил $26,8\%$. Через первый магазин было продано 60% всего товара, через второй – 40% оставшейся части товара. С какой прибылью продан товар через третий магазин, если прибыль от продажи в первом составила 30%, а во втором – 25%?

Ответ: 20%.

1628.(ФГУ, 2008, №2) Предприятие выплатило заработную плату своим сотрудникам, перечислило 26% от заработной платы в социальные фонды и закупило необходимое оборудование, кроме того, предприятие ещё выплатило 15% от всех указанных затрат в виде налога государству. Для всех выплат предприятию потребовалось 202 400 рублей. Если бы заработная плата увеличилась на 10%, а затраты на оборудование возросли на 30%, то суммарные затраты в этом случае составили бы уже 234 140 рублей. Сколько предприятие потратило средств на заработную плату, на закупку оборудования?

Ответ: 100000 руб. – на заработную плату, 50000 руб. – на оборудование.

1629.(ФГУ, 2007, №5) Город административно поделён на пять частей: западную, северную, восточную, южную и центральную. Средняя цена дизельного топлива по бензозаправочным станциям восточного района составляет 18 рублей за литр, в западном – 18 рублей 35 копеек, в центральном – 20 рублей с полтиной, в северном районе 17 рублей с четвертью соответствено, в южном совпадает со средней ценой по всем бензозаправкам города. Известно, что в центральной части бензозаправочных станций в полтора раза больше, чем в западной, а на востоке на треть больше, чем на западе. Во сколько раз бензозаправочных станций в северном районе меньше, чем на востоке, если средняя цена дизельного топлива по заправочным станциям города составляет 18 рублей 60 копеек?

Ответ: в 1 раз (в северном районе столько же бензозаправочных станций, сколько и в восточном).

1630.(ФГУ, 2007, №7) Общество рыболовов и охотников, две трети которого – рыболовы, а одна треть – охотники, решило переизбрать правление. Председатель общества подготовил проект состава правления из 100 человек. Какое наибольшее число охотников можно было включить в проект состава правления, чтобы за него проголосовало более половины членов общества, если известно, что за проект проголосует столько процентов рыболовов, сколько рыболовов в предложенном проекте, и столько процентов от числа охотников, сколько в нём охотников?

Ответ: 49.

1631.(ФГУ, 2003, июль, №3) Три предприятия A, B и C на паритетных (равных) началах прокладывают необходимую им шоссейную дорогу длиной 16 км. Предприятие A взяло на себя прокладку 10 км дороги, предприятие B – остальных 6 км, а предприятие C внесло всю свою долю деньгами, уплатив 16 миллионов условных денежных единиц. Как эти деньги должны быть распределены между предприятиями A и B?

Ответ: A – 14 млн., B – 2 млн.

1632.(ФГУ, 2001, июль, №3) В магазине одежды проводилась распродажа. Костюмы продавались со скидкой 20%, плащи – со скидкой 40%. Покупатель купил костюм и плащ за 9180 рублей в сумме, заплатив на 32% меньше их суммарной первоначальной цены. Найдите первоначальные цены костюма и плаща.

Ответ: 5400 рублей и 8100 рублей.

1633.(ИСАА, 2007, №2)Фермер получил кредит в банке под определённый процент годовых. Через год фермер в счёт погашения кредита вернул в банк $\frac{1}{6}$ часть от всей суммы, которую он должен был банку к этому времени. А ещё через год в счёт полного погашения кредита фермер внёс в банк сумму, на 20% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

Ответ: 20%.

1634.(ИСАА, 2005, июль, №4) Магазин закупил некоторое количество товара и начал его реализацию по цене на 20% выше цены, назначенной производителем, чтобы покрыть затраты, связанные с его транспортировкой, и другие дополнительные расходы. Оставшуюся после реализации часть товара магазин уценил на 15% с тем, чтобы покрыть только затраты на закупку этой части товара у производителя и его транспортировку. Сколько процентов от цены, назначенной производителем, составляла стоимость транспортировки товара.

Ответ: 2%.

1635.(ИСАА, 1994, №1) Суммарный доход двух предприятий возрастёт втрое, если доход первого предприятия останется неизменным, а доход второго увеличится в четыре раза. Найти отношение первоначальных доходов этих предприятий и выяснить, во сколько раз надо увеличить доход первого предприятия, оставляя первоначальный доход второго, чтобы их суммарный доход возрос в четыре раза.

Ответ: 1 : 2; 10.

1636.(ВШБ, 2005, июль, №5) На ферме средняя урожайность зерновых с гектара в 2003 году выросла на некое число процентов по сравнению с 2002 годом. В 2004 году средняя урожайность сократилась по сравнению с 2003 годом на такое же число процентов, на которое она выросла в 2003 году. В результате в 2004 году средняя урожайность составила 1980 килограмм с гектара. Если бы в 2004 году средняя урожайность продолжала расти тем же темпом, как и в 2003 году, то она составила бы в 2004 году 2420 килограмм с гектара. Определите, какова была средняя урожайность зерновых с гектара в 2002 году, и каким был темп роста средней урожайности с гектара в 2003 году.

Ответ: 2000 кг; 10%.

1637.(ВШБ., 2003, июль, №2) В банке общая сумма кредитов, выданных населению, составляет 25% от суммы кредитов, выданных предприятиям. Какой процент от общего объема кредитования в этом банке приходится на долю предприятий?

Ответ: 80%.

1638.(ВШБ., 2003, апрель, №2) После того, как 1500 новых вкладчиков открыли в банке счета на общую сумму в 7 млн. 800 тыс. руб., средний размер вклада, составлявший 6 тыс. руб., уменьшился на 10%. Определить число старых вкладчиков банка.

Ответ: 500.

1639.(эконом.(менеджмент), 2003, апрель, №2) Для заготовки сена фермер три раза с интервалом в неделю скашивал на заливном лугу одно и то же количество травы. После трех покосов масса травы на лугу уменьшилась на $78,3\%$ по сравнению с ее первоначальным значением до начала покосов. Определить, сколько процентов от первоначальной массы травы на лугу составляет масса всей скошенной травы, если еженедельный прирост травы составляет 10%.

Ответ: 90%.

1640.(эконом., 2001, июль, №2) Брокерская фирма приобрела два пакета акций, а затем их продала на общую сумма 7 миллионов 680 тысяч рублей, получив при этом 28% прибыли. За какую сумму фирма приобрела каждый из пакетов акций, если при продаже первого пакета прибыль составила 40%, а при продаже второго – 20%?

Ответ: 2 млн. 400 тыс. рублей и 3 млн. 600 тыс. рублей.

1641.(эконом. (кибернетика), 1979, №3) Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года $5/6$ некоторого количества денег положили в первый банк, оставшуюся часть – во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 670 денежным единицам, к концу следующего года – 749 денежным единицам. Было подсчитано, что если бы первоначально $5/6$ исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть – в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равна 710 денежным единицам. В предположении, что исходное количество денег первоначально целиком положено в первый банк, определить величину вклада по истечении двух лет.

Ответ: 726.

1642.(эконом. (политэкономия), 1971, №1) Выработка продукции за год работы предприятия возросла на $P\%$, а на следующий год она возросла на 10% больше, чем в первый год. Определить, на сколько процентов увеличилась выработка за первый год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59%.

Ответ: 17%.

1643.(геолог., 1998, июль, №4) Из цистерны в бассейн сначала перелили 50% имеющейся в цистерне воды, затем ещё 100 л, затем ещё 5% от остатка. При этом количество воды в бассейне возросло на 31%. Сколько воды было в цистерне, если в бассейне первоначально было 2000 л воды?

Ответ: 1000 л.

1644.(геолог., 1996, №6) В двух банках в конце года на каждый счет начисляется прибыль: в первом банке – 50% к текущей сумме на счете, во втором – 75% к текущей сумме на счете. Вкладчик в начале года часть имеющихся у него денег положил в первый банк, а остальные деньги – во второй банк, с таким расчетом, чтобы через два года суммарное количество денег на обоих счетах утроилось. Какую долю денег вкладчик положил в первый банк?

Ответ: $\frac{1}{13}$.

1645.(геолог., 1994, №7) Геологическая информационная система поставляется на четырёх дискетах. При установке их на компьютер каждая из дискет увеличивает объём этой системы на определённое количество % по отношению к предыдущему объёму: первая дискета – на 10 %, вторая дискета – на 12%, третья дискета – на 25%, четвёртая дискета – на 30%. На сколько % в результате увеличится объём этой системы?

Ответ: 100,2%.

1646.(Севастополь, 2002, июль, №3) В банк кладётся 1000 руб. В каком случае вкладчик получит через год больше денег: если банк начисляет 6% годовых от имеющей суммы один раз в год, или если вклад через каждые три месяца увеличивается на 1.5%?

Ответ: второй вариант выгоднее.

1647.(Севастополь, 2001, июль, №1) В коробке находятся красные и синие шары, причём синие шары составляют 1% от общего числа шаров. После того, как из коробки взяли часть красных шаров, доля синих от общего числа оставшихся в коробке шаров составила 2%. Найдите отношение числа взятых красных шаров к первоначальному общему числу шаров в коробке.

Ответ: $1 : 2$.

1648.(почвовед., 1993, №1) Разделите число 128 на четыре части так, чтобы первая часть относилась ко второй как 2:3, вторая к третьей – как 3:5, а третья к четвертой – как 5:6.

Ответ: 16, 24, 40, 48.

1649.(почвовед., 1992, №2) Самолёт, осуществляя полёт по заданному маршруту, может лететь в метеоусловиях A, $Б$ и $В$ с одной и той же скоростью, но по разному расходуя горючее. В первый раз самолёт находился в метеоусловиях A половину полётного времени, в метеоусловиях $Б$ – треть времени, в метеоусловиях $В$ – $1/6$ полётного времени. Во второй раз он находился четверть времени в метеоусловиях A и $3/4$ – в метеоусловиях $В$. В третий раз – по четверти полётного времени в метеоусловиях A и $Б$, а половину времени – в метеоусловиях $В$. На сколько процентов израсходует самолёт полётный норматив горючего, двигаясь весь путь в метеоусловиях $В$, если в первый раз он израсходовал его на $101\frac{2}{3}\%$, во второй – на 92,5, а в третий - на 97,5%.

Ответ: 90%.

1650.(биолог., 2003, апрель, №3) В симпозиуме по математическим проблемам в биологии, проходившем в течение трех дней, участвовали биологи и математики. В первый день работы симпозиума в нем приняли участие ученые обеих специальностей. На второй день на симпозиум прибыли дополнительно специалисты по математике; при этом доля числа биологов в общем числе участников симпозиума изменилась, и разность ее значений в первый и во второй день составила $\frac{1}{20}$. На третий день к работе симпозиума присоединились специалисты-биологи, в результате чего доля числа математиков в общем количестве участников изменилась, и разность ее значений во второй и в третий день составила $\frac{7}{100}$. По окончании симпозиума оказалось, что первоначальная доля числа биологов больше окончательной доли числа математиков, причем разность их значений равна $\frac{1}{25}$. Найти долю числа биологов среди участников симпозиума в первый день.

Ответ: 51%.

1651.(Олимпиада "Ломоносов-2010", №3)Два вкладчика вложили деньги в общее дело. После этого один из них добавил ещё 1 млн. р., в результате чего его доля увеличилась на 0,04, а когда он добавил ещё 1 млн. р., его доля увеличилась ещё на 0,02. Сколько денег ему нужно добавить, чтобы увеличить свою долю ещё на 0,04?

Ответ: 8 млн. р.

1652.(мех-мат, 2001, март, (тест перед олимпиадой), №1)Толя полил удобрением помидоры на участке из расчета 2 лейки на 5 кустов, а надо было – 3 лейки на 7 кустов. Из какого расчета ему нужно дополнительно полить кусты, чтобы исправить ошибку?

Ответ: 1 лейка на 35 кустов.

1653.(МШЭ, 2008, №6)Среди 40 ненулевых чисел, среднее арифметическое которых равно 5, есть как положительные, так и отрицательные числа. Какие из перечисленных ниже утверждений относительно этих чисел верны, а какие нет? Ответ обосновать.

а) Среднее арифметическое положительных чисел больше 5;

б) Модуль наименьшего отрицательного числа меньше чем наибольшее положительное число;

в) Максимальное положительное число не меньше 5;

г) Количество положительных чисел больше количества отрицательных чисел.

Ответ: утверждения а) и в) истинны для любых наборов чисел; утверждения б) и г) для некоторых наборов чисел являются ложными.

1654.(биолог., 2008, №5) Среди 30 ненулевых чисел, среднее арифметическое которых равно 4, есть числа обоих знаков. Какие из следующих утверждений про эти числа обязательно справедливы (а какие – не обязательно):

а) среднее арифметическое положительных чисел больше 4;

б) отрицательных чисел меньше, чем положительных;

в) сумма модулей отрицательных чисел меньше, чем сумма положительных;

г) модуль наибольшего отрицательного числа меньше, чем наибольшее положительное число?

Ответ: Утверждения а), в) обязательно справедливы; утверждения б), г) для некоторых наборов чисел являются ложными.

1655.(эконом., 2008, №7)По итогам года средняя (т.е. в расчёте на одно предприятие) прибыль по отрасли составила 2 млн. у.е., хотя часть предприятий работала в убыток. Для каждого из перечисленных ниже утверждений выяснить, всегда ли оно верно. Ответ обосновать.

1. Количество прибыльных предприятий превосходит количество убыточных.

2. Суммарная прибыль всех прибыльных предприятий больше 4 млн. у.е.

3. Наибольшая величина прибыли среди всех предприятий больше 2 млн. у.е.

4. Средняя прибыль по всем прибыльным предприятиям больше среднего убытка по всем убыточным предприятиям.

Ответ: утверждения 2 и 3 верны всегда; утверждения 1 и 4 для некоторых значений числа предприятий и их прибыльности являются неверными.

1656.(Высшая школа государственного аудита, 2008, №3) Подводя еженедельно баланс финансовой деятельности, в турфирме отмечают неделю либо как прибыльную при положительном балансе, либо как убыточную – при отрицательном. Общий доход за 52 недели – 26 миллионов рублей прибыли. Какие из следующих утверждений при этом справедливы, а какие – нет:

а) убыточных недель меньше, чем прибыльных,

b) абсолютная величина суммарного баланса по убыточным неделям меньше, чем суммарный баланс по прибыльным неделям,

c) абсолютная величина баланса в самую убыточную неделю меньше, чем величина баланса в самую прибыльную неделю,

d) средняя величина недельного баланса по прибыльным неделям составляет не менее полумиллиона рублей,

e) наибольшая величина недельной прибыли больше полумиллиона рублей?

Ответ следует обосновать.

Ответ: утверждения b, d справедливы всегда; утверждения a, c, e ошибочны (т.е. не являются справедливыми всегда).

8.4 Задачи на смеси и сплавы

1657*. (физ., 1978, №2.С) Руда содержит 40 % примесей, а выплавленный из нее металл содержит 4 % примесей. Сколько получится металла из 24 тонн руды?

Ответ: 15 тонн.

1658*. (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2017", №5) Имеется два сплава. Первый сплав содержит 90% примесей, а второй – соответственно 30% примесей. Определите, в какой пропорции следует соединить эти сплавы, чтобы получился новый сплав, в котором содержится 40% примесей.

В ответе укажите отношение массы первого сплава к массе второго в виде десятичной дроби, округлив её при необходимости до двух знаков после запятой.

Ответ: 0.2.

1659.(олимпиада "Ломоносов-2012", заочный тур, 10-11 кл., №1)Хозяйка растворила 4 пакетика удобрений в воде, которой полила имеющиеся у неё 5 горшков рассады. Однако воды оказалось слишком много, и 2/5 раствора перелилось через край. По инструкции, удобрять надо было из расчёта не менее, чем 5 пакетиков на 4 горшка. Какое наименьшее целое число пакетиков удобрений хозяйке потребуется ещё, чтобы удобрить рассаду по инструкции?

Ответ: 4.

1660.(геолог., 1997, май, №5) В свежих грибах влага составляет $\frac{9}{10}$ от общей массы, а в сушеных – $\frac{1}{10}$. Сколько нужно собрать грибов, чтобы заготовить 1 пуд сушеных грибов?

Ответ: 9 пудов.

1661.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2011", 9-10 кл., №1) Морская вода содержит 5% соли (по массе). Сколько чистой воды нужно добавить в 30 кг морской воды, чтобы содержание соли стало равным 1,5%?

Ответ: 70 кг.

1662.(олимпиада "Ломоносов-2009", №2) В свежих грибах содержание воды колеблется от 80% до 99%, а в сушёных – от 20% до 40%. В какое наименьшее число раз при этих ограничениях может уменьшиться вес грибов в результате сушки?

Ответ: 80.

1663.(почвовед., 1999, июль, №5) Какое количество воды надо добавить в один литр 10%-го водного раствора спирта, чтобы получить 6%-ый раствор?

Ответ: 2/3 л.

1664.(фил., 2000, июль, №1) Имеется 40 литров 0,5% раствора и 50 литров 2% раствора уксусной кислоты. Сколько нужно взять первого и сколько второго раствора, чтобы получить 30 литров 1,5% раствора уксусной кислоты?

Ответ: 10 и 20 л.

1665.(эконом., 1965, №1) Один сплав содержит медь и олово в отношении 2:1, а другой – в отношении 3:2. По скольку частей нужно взять каждого из этих сплавов, чтобы получить третий сплав, в котором медь и олово содержатся в отношении 27:17?

Ответ: 9 и 35.

1666.(факультет ВМК, 1996, №2) Первый раствор содержит 20% азотной кислоты и 80% воды, второй – 60% азотной кислоты и 40% воды. Первая смесь была получена из 15 литров первого раствора и некоторого количества второго раствора. Смешав то же самое количество второго раствора с 5 литрами первого, получили вторую смесь. Сколько литров второго раствора было использовано для приготовления первой смеси, если известно, что процентное содержание воды во второй смеси в два раза больше процентного содержания кислоты в первой.

Ответ: 5 литров.

1667.(почв., 1978, №3.С) Имеется два слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке в два с половиной раза больше, чем процентное содержание золота во втором слитке. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток, в котором будет 40 % золота. Найти, во сколько раз первый слиток тяжелее ворого, если известно, что при сплавке равных по весу частей первого и второго слитков получается слиток, в котором содержмтся 35 % золота.

Ответ: Первый слиток в 2 раза тяжелее второго.

1668.(экон. (полит. экон.), 1980, №4) Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40 % олова, а второй – 26 % меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30 % цинка. Определить, сколько кг олова содержится в получившемся новом сплаве.

Ответ: 170 кг.

1669.(геолог., 2001, май, №6) При проведении опыта раствор A был получен растворением ненулевого объёма кислоты в воде. Раствор B был получен из раствора A добавлением некоторого объёма воды, при этом концентрация раствора (отношение объёма кислоты к общему объёму раствора) уменьшилась на 40%. Раствор C получен из раствора B добавлением нового количества воды, в два раза большего по объёму, чем было добавлено к раствору A при получении B. Во сколько раз концентрация раствора B больше концентрации раствора C?

Ответ: 1,8 раза.

1670*. (геолог., 1995, №6) Имеются два слитка, содержащие медь. Масса второго слитка на 3кг больше, чем масса первого слитка. Процентное содержание меди в первом слитке – 10%, во втором – 40%. После сплавливания этих двух слитков получился слиток, процентное содержание меди в котором – 30%. Определите массу полученного слитка.

Ответ: 9 кг.

1671.(географический факультет, 1981, №3) Имеется два раствора серной кислоты в воде: первый – 40%, второй – 60%. Эти два раствора смешали, после чего добавили 5 кг чистой воды и получили 20% раствор. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг 80% раствора, то получился бы 70% раствор. Сколько было 40% и 60% растворов?

Ответ: 1 кг 40-процентного и 2 кг 60-процентного раствора.

1672.(ФНМ, 2004, апрель, №1) Для приготовления водного раствора кислоты взяли 4 литра 40%-го и 6 литров 60%-го растворов кислоты. Затем часть полученной смеси вылили и добавили такое же количество чистой воды, в результате чего получился 39%-ый раствор кислоты. Сколько литров воды было добавлено?

Ответ: 2,5 литра.

1673*. (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2006", №1 + мех-мат, Олимпиада, 10 кл., №1) Чашка до краев наполнена черным кофе в количестве 100 мл, а в кувшин налито 300 мл молока. Какое количество кофе надо перелить из чашки в кувшин и, перемешав, снова наполнить ее до краев полученной смесью, чтобы молока и кофе в чашке оказалось поровну?

Ответ: 60 мл.

1674.(геолог., 2006, №5) В сосуде объемом 5 литров находилось некоторое количество 30%-ного раствора кислоты. Затем в сосуд было добавлено какое-то количество 40%-ного раствора такой же кислоты, в результате чего сосуд был заполнен полностью. После этого из сосуда было отлито 0.5 литра полученного раствора и затем опять налито такое же количество 40%-ного раствора. В результате сосуд оказался заполненным 34%-ным раствором. Сколько литров раствора было в сосуде первоначально? Процентные содержания растворов считаются объемными.

Ответ: $3\frac{1}{3}$ л.

1675.(геолог. (геофиз.), 1981, №5) Для составления смеси из двух жидкостей A и B были взяты два сосуда: первый емкостью 10 литров, второй – 20 литров. Сначала в оба сосуда было налито всего 15 литров жидкости A. Затем первый сосуд был дополнен доверху жидкостью B и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд был дополнен доверху смесью из первого сосуда. После того как в первый сосуд было добавлено жидкости A столько, сколько было в него ее налито сначала, отношения количества жидкости A ко всему объему имеющейся жидкости в сосуде для первого и второго сосудов стали равными. Сколько литров жидкости A было налито первоначально в первый сосуд?

Ответ: 3 литра.

1676.(ВМК, 2000, июль, №2) Имеется некоторое количество раствора соли в воде. После испарения из раствора 1 л воды концентрация соли возросла на 0,05, а после разведения получившегося раствора 39 л воды концентрация соли стала в три раза меньше первоначальной. Найти концентрацию соли в исходном растворе, считая массу 1 л воды равной 1 кг.

Ответ: 90%.

1677.(биолог., 1966, №1) Имеются два раствора одной и той же соли в воде. Для получения смеси, содержащей 10 г соли и 90 г воды, берут первого раствора вдвое больше по весу, чем второго. Через неделю из каждого килограмма первого и второго раствора испарилось по 200 г воды, и для получения такой же смеси, как и раньше, требуется первого раствора уже вчетверо больше по весу, чем второго. Сколько граммов соли содержалось первоначально в 100 г каждого раствора?

Ответ: 5 г и 20 г.

1678.(геолог., 1996, май, №5) В одном декалитре кислотного раствора 96% объема составляет кислота. Сколько воды можно долить, чтобы концентрация кислоты в полученном растворе была не больше 40%?

Ответ: не менее 1,4 декалитров.

1679.(биолог., 1976, №3) Имеются две смеси N1 и N2, составленные из одних и тех же веществ А, Б, В, но взятых в различных весовых соотношениях. В смеси N1 вещества В в 9 раз меньше, чем вещества А и в 2 раза меньше, чем вещества Б. Соединив 6 кг смеси N1 с 3 кг смеси N2 и добавив 1 кг вещества А, получили новую смесь, в которой вещества А в 6 раз больше, чем вещества Б, а вещества В столько же, сколько вещества Б. Требуется определить весовое соотношение веществ А, Б, В в смеси N2.

Ответ: 8:1:3.

1680.(психолог., 1986, №4) В три сосуда налито по 1 кг различных растворов поваренной соли. Если смешать 200 г первого раствора и 100 г второго раствора, то в полученной смеси будет содержаться столько же соли, сколько ее содержится в 100 г третьего раствора. Количества соли в трех растворах, взятых в порядке номеров растворов, образуют геометрическую прогрессию. Сколько граммов второго раствора нужно взять, чтобы в них содержалось столько же соли, сколько ее содержится в 100 г третьего раствора?

Ответ: 200 г.

1681.(фил., 1990, №4) От двух сплавов массой 7 кг и 3 кг с различным процентным содержанием магния отрезали по куску одинаковой массы. Затем кусок, отрезанный от первого сплава, сплавили с остатком второго сплава. Кусок, отрезанный от второго сплава, сплавили с остатком первого сплава. Определить массу каждого из отрезанных кусков, если новые сплавы получились с одинаковым процентным содержанием магния.

Ответ: 2,1 кг.

1682.(почвовед., 1997, №4) В сосуде находится 10%-ный раствор спирта. Из сосуда отлили $1/3$ содержимого, а оставшуюся часть долили водой так, что сосуд оказался заполненным на $5/6$ первоначального объема. Какое процентное содержание спирта оказалось в воде?

Ответ: концентрация спирта – 8%.

1683.(геолог., 1989, №5) В баке находилось 100 литров смеси кислоты с водой. Из бака отлили часть смеси и добавили равное по объему количество воды, которое на 10 литров превышает первоначальное количество кислоты в смеси. Затем снова отлили такое же количество смеси, как в первый раз, в результате чего количество кислоты в баке уменьшилось в четыре раза по сравнению с количеством ее в исходной смеси. Определить количество воды в исходной смеси.

Ответ: 60 литров.

1684*. (геолог., 1989, № 5) В сосуде находилось 9кг раствора соли в воде. Из сосуда отлили часть раствора и добавили количество воды, равное по весу отлитой части раствора. Затем опять вылили столько же по весу раствора, сколько в первый раз. После этого количество соли в сосуде уменьшилось в $9/4$ раз по сравнению с исходным количеством. Определить первоначальное количество соли в сосуде, если известно, что вес добавленной воды вдвое меньше первоначального веса соли в растворе.

Ответ: первоначально в сосуде находилось 6 кг соли.

1685.(экономический факультет (полит.экономия), 1979, №3) Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 литра глицерина, а к оставшемуся глицерину долили 2 литра воды. После перемешивания снова отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. Наконец, опять перемешали, отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. В результате этих операций объем воды в сосуде стал на 3 литра больше объема оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?

Ответ: глицерина - 0,5 литра, воды - 3,5 литра.

1686.(ВМК, олимпиада "Абитуриент-2007", №3) В двух одинаковых сосудах объемом по 30 л каждый, содержится всего 30 л спирта. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд, затем из второго сосуда отливают в первый 12 л новой смеси. Сколько спирта было первоначально в каждом сосуде, если во втором сосуде оказалось на 2 л спирта меньше, чем в первом?

Ответ: 20 л в первом и 10 л во втором.

1687.(почвовед., 1988, №4) Два вида удобрений А и Б отличаются весовым содержанием азота, калия и фосфора. В удобрении А азота содержится в три раза, а фосфора в два раза больше по весу, чем калия. В удобрении Б соответственно азота в $5/3$ раза больше, а фосфора в 1,5 раза меньше, чем калия. Можно ли за счет смешивания удобрений А и Б приготовить удобрение, в котором азота в два раза, а фосфора в три раза больше, чем калия?

Ответ: нельзя.

8.5 Задачи на совместную работу

1688*. (ФГУ, 2002, июль, №5) Одна труба наполняет бассейн на 2 часа, а другая на 4 часа 30 минут дольше, чем наполняет этот бассейн обе трубы, открытые одновременно. За сколько часов может наполнить бассейн каждая труба в отдельности?

Ответ: 5 часов и 7 часов 30 минут.

1689.(ФГУ, 2009, №6) Четыре бригады, сменяя друг друга, осваивали месторождение полезных ископаемых в течение трёх лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. В течение четырёх месяцев второго года работа не производилась, а всё остальное время работала только одна из бригад. Отношения времён работы первой, второй, третьей и четвёртой бригад и количества выработанной продукции соответственно равны: в первый год – 5:2:1:4 и 10 млн. т; во второй год – 1:2:3:2 и 7 млн.т; в третий год – 4:1:2:5 и 14 млн.т. Сколько млн. т полезных ископаемых выработали бы за 4 месяца бригады, работая все вместе?

Ответ: 12.

1690.(соц., 2003, июль, №5) Двое рабочих изготовили 316 деталей, причем вторым сделано на 4 детали меньше первого. Известно, что первый рабочий работал на три дня дольше второго, при этом в день изготовлял на 2 детали меньше. Сколько деталей в день делал каждый рабочий?

Ответ: первый рабочий делал 10 деталей в день, второй – 12.

1691.(фил., 2004, июль, №5) Криптографическая лаборатория получила задание расшифровать три текста одинакового объема. Капитан Иванов на расшифровку первого и второго текстов в сумме затратил 40,5 минут, а на расшифровку второго и третьего – 37,5 минут. Оказалось также, что второй текст он расшифровывал с такой же скоростью, как в среднем первый и третий. За какое время капитан Иванов выполнил задание?

Ответ: 58,5 мин.

1692.(фил., 1981, №4) Каждый из рабочих должен был изготовить 36 одинаковых деталей. Первый рабочий приступил к выполнению своего задания на 4 минуты позже второго, но $1/3$ задания они выполнили одновременно. Полностью выполнив свое задание, первый рабочий после двухминутного перерыва снова приступил к работе и к моменту выполнения задания вторым рабочим изготовил еще две детали. Сколько деталей в час изготавливал каждый рабочий?

Ответ: первый рабочий изготовлял в час 20 деталей, второй рабочий – 18 деталей.

1693.(фил., 1979, №4) Три автоматические линии выпускают одинаковую продукцию, но имеющим разную производительность. Производительность всех трех одновременно действующих линий в 1,5 раза выше производительности первой и второй линий, работающих одновременно. Сменное задание для первой линии вторая и третья линии, работая одновременно, могут выполнить на 4 ч 48 мин быстрее, чем его выполняет первая линия; это же задание вторая линия выполняет на 2 ч быстрее по сравнению с первой линией. Найти время выполнения первой линией своего сменного задания.

Ответ: 8 ч.

1694.(фил., 1969, №1) В бассейн проведено три трубы, по которым в него течет вода. Первая и вторая трубы вместе наполняют бассейн на $\frac{35}{18}$ часа быстрее, чем первая и третья трубы вместе, а вторая и третья трубы вместе наполняют его за 10 часов. Какую часть бассейна в час наполняет вторая труба, если она одна наполняет его в $\frac{7}{5}$ раза дольше, чем одна первая труба?

Ответ: $\frac{1}{14}$.

1695.(ВШБ, 2006, №5) На заводе имеется две автоматические производственные линии. Известно, что при непрерывной работе первая производственная линия выполняет план за 150 часов, а вторая производственная линия при непрерывной работе выполняет этот же план за 300 часов. За сколько часов будет выполнен данный план, если известно, что обе производственные линии начнут работу одновременно и при этом первая производственная линия после каждых 20 часов непрерывной работы будет останавливаться на одночасовой профилактический перерыв, а вторая производственная линия будет останавливаться на часовой профилактический перерыв через каждые 11 часов непрерывной работы.

Ответ: 106 час.

1696.(эконом., отд. менеджмента, 2006, №5) Две бригады однотипных комбайнов задействованы на уборке урожая с картофельного поля. Время уборки поля одной первой бригадой отличается от времени уборки поля одной второй бригадой не более, чем на $\frac{1}{20}$-ю часть от времени уборки поля одним комбайном. Если сначала первая бригада уберет первую половину поля, а затем вторая бригада уберет оставшуюся половину поля, то затраченное на уборку поля время составит $\frac{1}{10}$-ю часть от времени уборки поля одним комбайном. Определить количество комбайнов в каждой бригаде.

Ответ: первая бригада – 10 комбайнов, вторая бригада – 10 комбайнов.

1697.(эконом., 2006, №4) Две бригады рабочих одинаковой квалификации задействованы на прополке поля от сорняков. Время прополки поля одной первой бригадой отличается от времени прополки поля одной второй бригадой не более, чем на $\frac{1}{21}$-ю часть времени прополки поля одним рабочим. Если сначала седьмая часть первой бригады прополет первую половину поля, а затем пятая часть второй бригады прополет оставшуюся половину поля, тогда затраченное на прополку поля время составит $\frac{3}{8}$-х от времени прополки поля одним рабочим. Определить численность бригад.

Ответ: первая бригада – 14 человек, вторая бригада – 20 человек.

1698.(эконом.(менеджмент), 2002, июль, №4) Бригада рабочих выполняет задание за 42 дня. Если бы в бригаде было на 4 человека больше и каждый рабочий бригады работал бы на 1 час дольше, то это же задание было бы выполнено за 30 дней. При увеличении бригады ещё на 6 человек и рабочего дня ещё на 1 час всё задание было бы закончено за 21 день. Определите численность бригады и продолжительность рабочего дня.

Ответ: в бригаде 20 рабочих, а продолжительность рабочего дня равна 6 часов.

1699.(эконом., 1984, №4) Пятьдесят два землекопа, работающие с одинаковой производительностью, были разбиты на две бригады, каждая из которых вырыла по одинаковому котловану. Обе бригады работали с перерывами на отдых. Первая бригада, закончив работу на 1 час позже второй, отдыхала не менее полутора часов. Вторая бригада отдыхала не более 1 часа 20 минут. Если бы обе бригады работали без перерывов, то первая могла бы вырыть котлован в 1,5 раза больше, а вторая – в 1,4 раза больше. Определить число землекопов в каждой бригаде.

Ответ: 24 и 28.

1700.(экон. (полит. экон.), 1977, №1) Для разгрузки парохода выделено две бригады грузчиков. Если ко времени, за которое может самостоятельно разгрузить пароход первая бригада, прибавить время, за которое может самостоятельно разгрузить пароход вторая бригада, то получится 12 часов. Определить эти времена, если их разность составляет 45 % времени, за которое обе бригады могут разгрузить пароход совместно?

Ответ: $6\frac{2}{3}$ ч; $5\frac{1}{3}$ ч.

1701.(геолог., 1998, май, №4) Первая бригада выполняет работу на 2 часа быстрее второй бригады и на 7 часов медленнее, чем обе бригады, работающие одновременно. Выполнят ли бригады, работающие одновременно, эту работу быстрее, чем за 7 час. 57 мин.?

Ответ: Время выполнения работы составляет $\sqrt{63}$ час., что меньше, чем 7 час. 57 мин.

1702.(геолог., 1997, июль, №5) В момент, когда два бассейна были пустыми, 5 труб одинаковой производительности были подключены для заполнения первого бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на $1/3$ его объёма, 2 трубы переключили для заполнения второго бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на $1/2$ его объёма, ещё одну трубу переключили для заполнения второго бассейна. После этого оба бассейна наполнились доверху одновременно. Найти отношение объёмов бассейнов. (Временем на переключение пренебречь).

Ответ: $V_2 : V_1 = 31 : 36$.

1703.(геолог., 1994, №9) Четыре бригады разрабатывали месторождение нефти в течение трёх лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. В течение пяти последних месяцев второго года и первых трёх месяцев третьего года работа не проводилась, а всё остальное время работала только одна из бригад. Отношения времён работы первой, второй, третьей и четвёртой бригад и количества выработанной продукции соответственно равны:

в первый год $4 : 5 : 2 : 1$ и 17 млн. т.

во второй год $2 : 3 : 1 : 1$ и 10 млн. т.

в третий год $1 : 2 : 2 : 4$ и 11 млн. т.

Сколько млн. т. нефти выработали бы за 2 месяца четыре бригады, работая вместе?

Ответ: 10 млн. т.

1704.(геолог., 1985, №3) Первый рабочий изготовил 60 деталей на три часа быстрее второго. За сколько часов второй рабочий изготовит 90 деталей, если работая вместе, они изготовили за один час 30 деталей?

Ответ: 9 часов.

1705.(геолог. (общ. геол.), 1979, №4) Экскаваторщик получил задание выкопать две траншеи одинаковой глубины на различных участках строительной площадки. Экскаватор сначала вырыл первую траншею длиной 5 метров, потом доехал до второго участка и вырыл вторую траншею длиной 3 метра. Время, затраченное на прокладку первой траншеи, на 1 час 12 минут меньше, чем время, затраченное на переезд экскаватора и рытье второй траншеи. Если бы производительность экскаватора была в 4 раза меньше, то время, затраченное на прокладку первой траншеи, равнялось бы времени переезда экскаватора с одного места работы на другое. Определить длину траншеи, выкапываемой экскаватором за один час.

Ответ: 15 м.

1706.(геолог. (геофиз.), 1977, №1) В бак может поступать вода через одну из двух труб. Через первую трубу бак можно наполнить на час быстрее, чем через вторую трубу. Если бы емкость бака была больше на 2 м^3, а пропускная способность второй трубы была бы больше на $4/3$ м^3, то для наполнения бака через вторую трубу понадобилось бы столько же времени, сколько требуется для пропуска 2 м^3 воды через первую трубу. Какова емкость бака, если известно, что за время его наполнения через вторую трубу через первую трубу могло бы поступить 3 м^3 воды?

Ответ: 2 м^3.

1707.(Севастополь, 2003, май, №2) Бассейны A и B одинаковой емкости заполняются водой через несколько труб. Через каждую трубу в бассейне A поступает воды на 20% меньше, чем через каждую трубу в бассейне B. Количество труб, заполняющих бассейн A, на 20% больше числа труб, заполняющих бассейн B. Какой бассейн заполнится быстрее?

Ответ: бассейн B.

1708*. (психолог., 2005, июль, №5) По вечерам Солоха зазывала Пацюка к себе на ужин и угощала варениками. Вареники у Солохи были вкусны и всегда на удивление одинаковы: в какой день ни возьми – все точь-в-точь как один. Ужинали они только вдвоем, да так уважительно, что уж если кто-то из них кушал вареники, то другой в это время не кушал, а нахваливал, и наоборот, если кто-то не кушал вареников, то другой в это самое время обязательно их кушал. Каждый из них кушал размеренно, поглощая вареники со своей постоянной скоростью, одною и той же в разные вечера, причем Пацюк поглощал вареники втрое быстрее Солохи.

В первый вечер они съели полную миску вареников за 3 часа, причем 2 часа кушал вареники Пацюк, а один час кушала Солоха. Во второй вечер к радости хозяйки не дольше, чем за 3 часа, была поглощена вся другая миска вареников, а в третий вечер – целая третья миска, причем не быстрее, чем за 1 час. Больше Пацюк в гости к Солохе почему-то не ходил.

А миски у Солохи были таковы, что коли сложить бы все вареники, приготовленные и съеденные в первый вечер, с двумя такими мисками, какая в третий вечер была съедена, то получилась бы как раз миска вареников, выкушанных во второй вечер. Какую долю всех приготовленных к этим трем ужинам вареников съел Пацюк?

Ответ: $\frac{15}{17}$.

1709.(географ./биоинж. и биоинформ., 2003, май, №4) Двум тракторам **Т1** и **Т2** необходимо вспахать два поля **А** и **Б**. Если **Т1** начнет вспахивать поле **А** и в это же время **Т2** начнет вспахивать поле **Б**, то к моменту, когда **Т1** закончит работу на **А**, трактору **Т2** останется вспахать a гектар на поле **Б**. Если же, наоборот, одновременно **Т1** начнет работать на **Б**, а **Т2** на **А**, то к моменту, когда **Т1** закончит вспахивать **Б**, трактору **Т2** останется b гектар на **А**. Известно, что числа a и b различны, а разность $b-a$, уменьшенная на 25%, равна разности площадей полей **А** и **Б**, выраженной в гектарах. Какова производительность трактора **Т2**, если производительность **Т1** равна 9300м^2/день?

Ответ: 3100м^2/день.

1710.(географ., 1986, №3) Три цистерны одинакового объёма начинают одновременно заполняться водой, причём в первую цистерну поступает 100 литров воды в минуту, во вторую 60 и в третью 80. Известно, что в начальный момент первая цистерны пуста, вторая и третья частично заполнены, и что все три цистерны будут заполнены одновременно. Во сколько раз количество воды в начальный момент времени во второй цистерне больше, чем в третьей?

Ответ: в 2 раза.

1711.(почвовед., 2005, июль, №4) Грузовики трех типов: A, B и C возили кирпич. В первый день работали по пять грузовиков каждого типа и выполнили весь объем работы за 3 часа 12 минут. Во второй день за 6 часов 40 минут этот же объем работы выполнили по два грузовика типов A и B и четыре грузовика типа C. За сколько часов был бы выполнен весь объем работы, если бы кирпич возили два грузовика типа A и два грузовика типа B?

Ответ: 10 часов.

1712.(почвовед., 1986, №3) Два трактора разной мощности, работая одновременно, вспахали поле за 2 часа 40 минут. Если бы первый трактор увеличил скорость вспашки в два раза, а второй – в полтора раза, то поле было бы вспахано за 1 час 36 минут. За какое время вспахал бы поле первый трактор, работая с первоначальной скоростью?

Ответ: 8 часов.

1713.(почвовед., 1981, №1) Три бригады работают с постоянной производительностью, прокладывая рельсовые пути. Первая и третья бригады, работая совместно, прокладывают 15 км путей в месяц. Три бригады вместе укладывают в месяц путей в два раза больше, чем первая и вторая бригады при их совместной работе. найти, сколько километров путей укладывает в месяц третья бригада, если известно, что вторая бригада совместно с третьей уложили некоторый участок пути в четыре раза быстрее, чем его уложила бы одна вторая бригада.

Ответ: Третья бригада укладывает в месяц 9 км пути.

1714.(биолог., 2003, июль, №4) Три пустых бассейна D, F и G одинакового объема заполняли водой из труб с постоянными производительностями. Бассейны D и G начали заполнять одновременно, а бассейн F позднее. Первым был заполнен бассейн D. Через 20 минут после начала заполнения бассейна F объем воды в нем сравнялся с объемом воды в бассейне G. Бассейн F был заполнен через 80 минут после начала заполнения бассейнов D и G, и за 40 минут до окончания заполнения бассейна G. Определить, на сколько минут позже начали заполнять бассейн F, чем бассейны D и G, если известно, что бассейн F заполнялся в $\frac{5}{3}$ раза быстрее бассейна D.

Ответ: 40 минут.

1715.(биолог., 1977, №3.С) Две бригады рабочих начали работу в 8 часов. Сделав вместе 72 детали, они стали работать раздельно. В 15 часов выяснилось, что за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая. На другой день первая бригада делала в 1 час на одну деталь больше, а вторая бригада в 1 час на 1 деталь меньше. Работу бригады начали вместе в 8 часов и, чделав 72 детали, снова стали работать раздельно. Теперь за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая уже к 13 часам. Сколько деталей в 1 час делала каждая бригада?

Ответ: первая бригада делала в один час 13 деталей, а вторая – 11 деталей.

1716.(хим., 1986, №2) Четыре одинаковых насоса, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и треть второго танкера (другого объёма) за 11 часов. Если бы три насоса наполнили первый танкер, а затем один из них наполнил четверть второго танкера, то работа заняла бы 18 часов. За сколько часов три насоса могут наполнить второй танкер?

Ответ: 8 часов.

1717.(ВМК, 2009, №6) Вова должен вскопать 300 $м^2$ земли, а Валера – на 200 $м^2$ больше. Они начинают работу одновременно и работают с постоянной скоростью (каждый – со своей). Через некоторое время работы оказалось, что Валере осталось вскопать в два раза больше, чем Вове. Кто из них раньше закончит работу?

Ответ: Вова.

1718.(ВМК, 2006, июль, №1) Двое рабочих получили на день одинаковые задания. Их производительности в течение дня не меняются. Первый рабочий приступил к выполнению задания в 9 часов утра, а второй начал выполнять задание спустя три часа. К началу обеденного перерыва они вместе выполнили половину их общего задания на двоих. Обеденный перерыв длился 1 час. Затем рабочие продолжили свою работу. В 16 часов того же дня рабочие одновременно завершили выполнение каждый своего задания. Найти время начала обеденного перерыва.

Ответ: 13 часов.

1719.(ВМК, 1989, №3) Для вспашки трех совершенно одинаковых полей выделено три трактора различной производительности. Каждое поле вспахивается одним трактором. Первый трактор начал работу на $\frac{1}{2}$ часа раньше второго, а третий – на $\frac{1}{3}$ часа позже второго. Вспашка полей велась тракторами равномерно и без остановок. Через некоторое время после начала работы третьего трактора оказалось, что к этому моменту каждый из тракторов выполнил одинаковую часть запланированной работы. Через сколько минут после завершения работы второго трактора закончил работу первый, если третий выполнил всю работу на 12 минут раньше, чем второй?

Ответ: 18 мин.

1720.(ВМК, 1981, №1) Три сенокосилки участвовали в покосе травы с поля площадью 25 га. За один час первая сенокосилка скашивает 3 га, вторая – на b га меньше первой, а третья – на $2b$ га больше первой. Сначала работали одновременно первая и вторая сенокосилки и скосили 11 га, а затем оставшуюся часть площади скосили, работая одновременно, первая и третья сенокосилки. Определить значение b $(0 < b < 1)$, при котором все поле скошено за 4 часа, если работа велась без перерыва.

Ответ: $b = \frac{1}{2}$.

1721.(ВМК, 1975, №4) Два грузовика доставили со склада на стройку одно и то же количество кирпича и одно и то же количество цемента, причем каждый из них доставлял сначала кирпич, а затем цемент, перевозя за каждую поездку груз одного и того же веса. Первый грузовик начал работу на 40 минут раньше, а закончил на 40 минут позже второго. При этом интервал времени между окончаниями доставки кирпича грузовиками был не более 20 минут.

Если бы первый грузовик начал работу на 1 час 5 мин раньше второго, уменьшив свою производительность на 10%, а производительность второго грузовика не изменилась, то второй грузовик закончил бы работу на 55 минут раньше первого, а интервал времени между окончаниями доставки кирпича грузовиками был бы не менее 25 минут.

Если бы производительность первого грузовика уменьшилась на 2 тонны в час, а производительность второго грузовика не изменилась, то первый грузовик затратил бы на выполнение всей работы в два раза больше времени, чем второй грузовик на доставку кирпича. Сколько всего цемента было доставлено на стройку?

Ответ: 42 т.

8.6 Задачи на движение

1722*. (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2007", №1) Из пункта A вышел пешеход. Одновременно с ним из пункта B во встречном направлении выехал велосипедист. Они двигались с постоянными скоростями и через час расстояние между ними равнялось 3 км, а еще через час – 14 км. Найти расстояние между пунктами A и B.

Ответ: 20 км (если $v_1 + v_2 = 17$ км/час) или 8 км (если $v_1 + v_2 = 11$ км/час).

1723.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2007", 10 кл., №2) Турист отправляется в поход из A в B и обратно и проходит весь путь за 3 ч. 41 мин. Дорога из A в B идет сначала в гору, потом по ровному месту, потом под гору. На каком протяжении дорога проходит по ровному месту, если скорость туриста при движении в гору 4 км/ч, под гору 6 км/ч, по ровному месту 5 км/ч, а расстояние от A до B составляет 9 км?

Ответ: 4 км.

1724.(Олимпиада "Покори Воробьевы горы-2008", №1) Группа туристов отправилась в 12:00 из лагеря по маршруту. В 12:30 штурман вспомнил, что оставил в лагере компас, и сбегал за ним в лагерь, догнав шедшую с прежней скоростью группу в 14:00. В котором часу штурман прибыл в лагерь, если бежал он с постоянной скоростью и в лагере не задерживался?

Ответ: 12:48.

1725.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2009", очный тур: Челябинск, №3) По пути из дома на рынок Валера купил в ларьке газету "Московский комсомолец" и стал её читать. На рынке он прервал чтение, купил картошку и пошёл обратно. Пройдя мимо ларька, Валера вновь продолжил чтение газеты. Каково расстояние от дома до рынка, если путь занял 1 *час*, скорость Валеры налегке составила 6 *км/час*, с картошкой – 3 *км/час*, а чтение газеты снизило скорость до 3 *км/час* и 2 *км/час* соответственно?

Ответ: 1,5 *км*.

1726.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2011", 9-10 кл., №5) По шоссе в одну сторону с постоянными скоростями движутся автомобиль и мотоциклист, а навстречу им с постоянной скоростью идёт пешеход. Когда автомобиль и мотоциклист были в одной точке, до пешехода было 30 км. Когда автомобиль и пешеход встретились, мотоциклист отстал от автомобиля на 5 км. На сколько километров обогнал автомобиль мотоциклиста на момент встречи мотоциклиста и пешехода?

Ответ: на 6 км.

1727.(олимпиада "Ломоносов-2011", II тур, №1) Два поезда, содержавшие по 15 одинаковых вагонов каждый, двигались навстречу друг другу с постоянными скоростями. Ровно через 28с после встречи их первых вагонов пассажир Саша, сидя в купе третьего вагона поравнялся с пассажиром встречного поезда Валерой, а ещё через 32с последние вагоны этих поездов полностью разъехались. В каком по счёту вагоне ехал Валера?

Ответ: 12.

1728.(олимпиада "Ломоносов-2011", заочный тур, 11 кл., №4) Пройдя 2/5 длины узкого моста, пешеход заметил, что сзади к мосту приближается машина. Тогда он пошёл назад и встретился с машиной у начала моста. Если бы он продолжал идти вперед, то машина догнала бы его у конца моста. Найти отношение скорости машины к скорости пешехода.

Ответ: 5.

1729.(олимпиада "Ломоносов-2011", заочный тур, 8 кл., №5)Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно отправились два поезда. Известно, что в 14:00 они встретились и, не меняя скорости, продолжили движение. Один поезд прибыл в пункт B в 18:00, а другой прибыл в пункт A в 23:00. В какой момент времени поезда отправились в путь?

Ответ: в 8:00.

1730.(олимпиада "Ломоносов-2011", заочный тур, 7 кл., №7)Из-за пробки на выезде из города междугородный автобус прошёл первую треть пути в полтора раза медленнее расчётного времени. Сможет ли автобус без опоздания прибыть в пункт назначения, если на оставшейся части пути увеличит скорость на треть?

Ответ: да.

1731.(Олимпиада "Ломоносов-2008", №4)Лиса преследовала кролика по прямолинейной дорожке, ведущей к норе кролика. Их скорости были постоянны. В некоторый момент расстояние от кролика до норы было равно 7 м, а до лисы – 13 м. В некоторый следующий момент расстояние между кроликом и норой стало вдвое меньше расстояния между ним и лисой.

Успела ли лиса догнать кролика, прежде чем тот юркнул в нору?

Ответ: нет.

1732.(ДВИ, 2017, №6) Василий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта A нужно добраться вниз по реке до пункта B, причём в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Василий вызвался самостоятельно доехать до пункта B на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта A. Однако, помчавшись восемь километров, Василий заметил на берегу машущего ему рукой Григория, который просил по старой дружбе довести его до пункта C. И хоть пункт C Василий уже проехал, он согласился. По пути в пункт C Василий с Григорием встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Василия, откуда те крикнули, что им до пункта B осталась треть пути и чтобы Василий нигде не задерживался. Доставив Григория в пункт C, Василий немедленно помчался догонять друзей. Найдите расстояние между пунктами B и C, если известно, что оба катера пришли в пункт B одновременно, скорости катеров постоянны, а Василий, действительно, нигде не задерживался.

Ответ: 4 км.

1733.(ДВИ, 2015, №6) Велосипедист Василий выехал из пункта А в пункт Б. Проехав треть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадёжно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошёл пешком обратно в пункт А за новым велосипедом. В момент поломки из пункта А выехал мотоциклист Григорий. На каком расстоянии от пункта А он встретит Василия, если пункт Б отстоит от пункта А на 4 км, а Василий доберётся до пункта А тогда же, когда Григорий до пункта Б? Скорости велосипеда, мотоцикла и пешехода считать постоянными.

Ответ: 1 км.

1734.(ДВИ, 2015, №6) Лыжник Григорий ехал по довольно пологому склону, но, проехав две трети пути, проявил неуклюжесть и сломал лыжи. Отбросив их за ненадобностью, он тут же побрёл обратно. В момент поломки с вершины горы стартовал лыжник Василий и, проехав 800 метров, встретил Григория. Найдите длину трассы, если известно, что Василий закончил спуск ровно тогда, когда Григорий добрался до вершины горы. Скорости лыжников и пешехода считать постоянными.

Ответ: 2 км.

1735.(ДВИ, 2013, №5) От биостанции до границы заповедника вверх по реке ровно 14 км. В 7:00 браконьеры вошли на катере в заповедник и направились в сторону биостанции. Через некоторое время им навстречу с биостанции вышел катер рыбинспекции. Браконьеры тут же развернулись и направились обратно к границе заповедника. В 7:38, когда браконьеры оказались ровно посередине между рыбинспекторами и границей, рыбинспекторы осознали, что они идут с браконьерами на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно на биостанцию. До биостанции они добрались ровно в тот момент, когда браконьеры выехали за пределы заповедника - в 7:50. Найдите наименьшее расстояние, на котором находились браконьеры и рыбинспекторы, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

Ответ: 4 км.

1736.(договорные программы, 2008, №3) Два друга шли по узкому мосту и, пройдя $\frac{3}{7}$ его длины, увидели приближающийся к мосту грузовик. Тогда они бросились бежать в противоположные стороны, но с одинаковой скоростью. С одним из них грузовик поравнялся у начала моста, а с другим – у конца. Во сколько раз скорость грузовика превышала скорость бегущих?

Ответ: в 7 раз.

1737.(фил., 1999, июль, №1) Расстояние в 160 км между пунктами A и Б автомобиль проехал со средней скоростью 40 км/ч. Часть пути по ровной дороге он ехал со скоростью 80 км/ч, а другую часть, по бездорожью, – со скоростью 20 км/ч. Какое расстояние автомобиль проехал по ровной дороге?

Ответ: $106\frac{2}{3}$ км.

1738.(ФГУ, 2007, №1) На велотреке, имеющем форму окружности, из диаметрально противоположных точек одновременно стартуют два велосипедиста со скоростями 775 и 800 метров в секунду соответственно. Сколько полных кругов проедет первый велосипедист к моменту, когда догонит второго, если длина велотрека равна четверти километра?

Ответ: 15.

1739.(ФГУ, 2005, июль, №7) Для того, чтобы сделать полный круг по кольцевому маршруту, автомобилю требуется 150 л бензина. На маршруте расположены пять промежуточных пунктов, в каждом из которых имеется запас в 30 л бензина. Покажите, что найдется пункт, в котором автомашина с пустыми баками и достаточным запасом пустых канистр может заправиться, стартовать и, пополняя запас бензина в четырех встречных пунктах, сделать полный круг.

1740.(ФГУ, 2002, июль, №1) Из деревни в город вышел турист. Первую половину пути он шёл пешком со скоростью 5 км/ч, а затем оставшуюся часть пути ехал на автобусе. Найдите среднюю скорость движения туриста на всём маршруте, если скорость автобуса равна 45 км/ч.

Ответ: 9 км/ч.

1741.(Высшая школа государственного аудита, 2008, №1) Населённые пункты A и B расположены на берегу реки, текущей со скоростью 4 км/час. Моторная лодка, скорость которой в стоячей воде равна 8 км/час, проплыв из пункта A в пункт B, мгновенно разворачивается и вновь возвращается в пункт A. С какой постоянной скоростью должна плыть лодка по озеру, чтобы за то же время она смогла бы проплыть такое же расстояние?

Ответ: 6 км/час.

1742.(ИСАА, 2001, июль, №3) Из пункта А в пункт Б, расстояние между которыми равно 10 км, отправились в разное время пешеход, всадник и велосипедист. Известно, что их скорости постоянны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Первым из А вышел пешеход, которого в середине маршрута обогнал велосипедист, выехавший из А на 50 минут позже пешехода. В пункт Б пешеход прибыл одновременно с всадником, выехавшим из А на 1 час 15 минут позже пешехода. Определите скорости участников маршрута.

Ответ: 4 км/час; 8 км/час; 12 км/час.

1743.(эконом. (полит.экономия), 1985, №5) Из пункта A в пункт $Б$ вышел пешеход. Не позже, чем через 40 минут вслед за ним вышел второй. В пункт $Б$ сначала пришел один из пешеходов, а другой достиг $Б$ не ранее, чем через час после этого. Если бы пешеходы вышли одновременно, то они прибыли бы в пункт $Б$ с интервалом не более, чем в 20 минут. Определить, сколько времени требуется каждому пешеходу на путь из A в $Б$, если скорость одного из них в 1,5 раза больше скорости другого.

Ответ: 40 минут первому и 1 час второму.

1744.(эконом. киб., 1985, №4) В 6 часов утра из пункта A в пункт B по течению реки отправились лодка и катер. Лодка прибыла в пункт B в 16 часов того же дня. Катер, дойдя до пункта B, сразу повернул назад и на своем пути из B в A встретил лодку не позднее 14 часов, а прибыл в пункт A не ранее 22 часов того же дня. Найти время прибытия катера в пункт B, если его собственная скорость (скорость в стоячей воде) вдвое больше собственной скорости лодки.

Ответ: 12 часов.

1745.(эконом., 1980, №5) На прямой дороге расположены последовательно пункты A, B, C, D. Расстояния от пункта A до пунктов B,C и D находятся в отношении $1:2:4$. В направлении от A к D по дороге через равные промежутки времени с одной и той же скоростью едут автобусы. Из A в D вышли в разное время три пешехода и пошли по дороге с одной и той же скоростью. Первого пешехода после выхода из пункта A и до прихода в пункт B обогнали 3 автобуса. Второго пешехода после выхода из пункта A и до прихода в пункт C обогнали 4 автобуса; известно, что когда он выходил из пункта A, через пункт A не проезжал очередной автобус. Третий пешеход вышел из A и прибыл в D, когда через эти пункты проезжали очередные автобусы. Сколько автобусов обогнали третьего пешехода в пути между A и D?

Ответ: 8 автобусов.

1746.(эконом. (кибернетика), 1977, №2) Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. В тот момент, когда он проехал $1/4$ пути между A и B, из B в A выехал мотоциклист, который, прибыв в A, не задерживаясь, повернул обратно и одновременно с велосипедистом прибыл в B. Время движения мотоциклиста до первой встречи с велосипедистом равно времени движения мотоциклиста из A в B. Считая скорости мотоциклиста при движении из A в B и из B в A различными, найти, во сколько раз скорость мотоциклиста при движении из A в B больше скорости велосипедиста.

Ответ: скорость мотоциклиста при движении из A в B в 4 раза больше скорости велосипедиста.

1747.(геолог., 2010, №2) Спортсмены Иванов и Петров участвовали в марафоне. Первую половину пути Иванов бежал в два раза быстрее Петрова. Потом он подвернул ногу и оставшуюся половину пути бежал в два раза медленнее Петрова. Петров же всё время бежал с постоянной скоростью и пробежал всю дистанцию за 4 часа. Сколько времени понадобилось Иванову, чтобы добраться до финиша?

Ответ: 5 часов.

1748.(геолог., 2004, июль, №6) Две группы геологов исследуют маршрут, проходящий от пункта A через пункт B до пункта C. Первая группа проходит весь маршрут за 2, а вторая – за 3 дня. Расстояние между A и B вдвое меньше расстояния между B и C. Скорости движения групп на участках AB и BC постоянны, но на участке AB скорости обеих групп в m раз меньше, чем их скорости на участке BC. Группы выходят одновременно из A и C навстречу друг другу. Если первая группа выходит из A, а вторая из C, то они встречаются в B. Если же первая выходит из C, а вторая из A, то они встречаются в пункте D. Какую часть от длины всего маршрута составляет расстояние между B и D? Чему равно значение m?

Ответ: $\frac{1}{9}$, $m = 3$.

1749.(геолог., 2003, июль, №3) Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов А и В и, встретившись через 45 минут, без остановки продолжили движение, каждый в своем направлении. За какое время проходит путь между А и В каждый из пешеходов, если известно, что первый пришел в В на 2 часа позже, чем второй пришел в А?

Ответ: 3 часа (первый), 1 час (второй).

1750.(геолог., 2002, июль, №4) Пункт C расположен между пунктами A и B, $AC = 2 \cdot BC$. Из пунктов C и B одновременно навстречу друг другу вышли два поезда. Время, затраченное вторым поездом на путь от B до A, не менее чем в 6 раз превосходит время, затраченное первым поездом на путь от C до B. Третий поезд, скорость которого равна разности скоростей первых двух, затратил на путь от A до B не менее, чем в 9 раз больше времени, чем первый поезд затратил на путь от C до места встречи со вторым. Чему равно отношение скоростей первого и второго поездов?

Ответ: 2.

1751.(геолог., 2000, июль, №3) От причала A к причалу B отплыли катер и лодка, причём скорость катера в 5 раз больше скорости лодки. Известно, что они плыли с постоянными скоростями, но катер сделал несколько остановок. Сколько времени катер затратил на все остановки, если он доплыл до причала B за 2 часа, а лодка за 4 часа?

Ответ: 1 час 12 минут.

1752.(геолог., 1993, №3) На берегу озера расположены пункты A и B. Из пункта A в пункт B отправился катер, а через 1 час после этого из пункта B в пункт A вышла моторная лодка. Ещё через 1 час они встретились и, не останавливаясь, продолжили движение. Катер прибыл в пункт B через 2 часа 20 минут после того, как в пункт A прибыла моторная лодка. Через какое время после начала движения произошла бы их встреча, если бы они одновременно отправились навстречу друг другу?

Ответ: 5/4 часа.

1753.(геолог., 1988, №5) Путь из A в B проходит первые 80 км по шоссе, а оставшиеся 120 км – по грунтовой дороге. Первую часть пути автобус проезжает на 2 часа быстрее, чем вторую. Автобус совершил более четырёх рейсов по маршруту из A в B и обратно. На это, включая стоянки в конечных пунктах, ушло менее одной недели (т. е. менее 168 часов). За время, которое он был при этом в движении, атобус мог бы проехать 2100 км, если бы двигался со скоростью, средней арифметической между скоростями движения по шоссе и грунтовой дороге. Найти скорости движения автобуса по шоссе и по грунтовой дороге.

Ответ: 40 км/час – скорость по шоссе; 30 км/час – скорость по грунтовой дороге.

1754.(геолог., 1987, №5) В 7 часов утра от первого причала отплыли две лодки. Сначала они плыли 8 км по озеру, каждая с постоянной скоростью, а затем 5 км по течению реки до второго причала. Первая лодка прибыла на место не позднее 9 час. 50 мин., а вторая – не ранее 10 час. 40 мин. того же дня. Чему равна скорость каждой лодки в стоячей воде, если скорость течения реки – 2 км/час, а скорость второй лодки в стоячей воде составляет 75% от скорости первой лодки в стоячей воде?

Ответ: 4 км/час; 3 км/час.

1755.(геолог. (геофиз.), 1980, июль, №4) В гору ехал автомобиль. В первую секунду после достижения пункта A он проехал 30 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 2 м меньше, чем в предыдущую. Через 9 с после того, как автомобиль достиг пункта A, навстречу ему выехал автобус из пункта B, находящегося на расстоянии 258 м от пункта A. В первую секунду автобус проехал 2 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 1 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние проехал автобус до встречи с автомобилем?

Ответ: 20 м.

1756.(геолог. (геофиз.), 1979, июль, №4) Расстояние между двумя городами скорый поезд проходит на 4 часа быстрее товарного и на 1 час быстрее пассажирского. Известно, что скорость товарного поезда составляет 5/8 скорости пассажирского и на 50 км/ч меньше скорости скорого. Найти скорости товарного и скорого поездов.

Ответ: Скорости товарного и скорого поездов равны соответственно 50 км/ч и 100 км/ч.

1757.(геолог. (геофиз.), 1978, июль, №5) Пункт A стоит в поле на расстоянии 8 км от дороги. На дороге, которая является прямой линией, стоит пункт B. Скорость движения автомобиля по дороге в два раза больше, чем по полю. Известно, что если ехать из A по прямой до некоторой находящейся на дороге точки C, отличной от B, а затем по дороге до B, то при любом выборе точки C на это уйдет не меньше, чем потребуется, если ехать из A в B напрямик по полю. Чему равно расстояние от A до B?

Ответ: 8 км$\leq |AB| \leq \frac{16}{\sqrt{3}}$ км.

1758.(геолог. (общ. геол.), 1978, июль, №2) Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, а через четверть часа вслед за ним выехал автомобиль. На половине пути от A до B автомобиль догнал велосипедиста. Когда автомобиль прибыл в пункт B, велосипедисту оставалось проехать еще треть пути. За какое время велосипедист проехал путь от A до B, если известно, что скорости велосипедиста и автомобиля постоянны на всем пути от пункта A до пункта B?

Ответ: 45 минут.

1759.(геолог. (общ. геол.), 1977, июль, №2) Два бегуна стартовали один за другим с интервалом в две минуты. Второй бегун догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта, а пробежав от точки старта 5 км, он повернул обратно и встретился с первым бегуном. Эта встреча произошла через 20 минут после старта первого бегуна. Найти скорость второго бегуна.

Ответ: Скорость второго бегуна равна 20 км/ч.

1760.(Севастополь, 2008, №5) От дачи до дома Таня на машине доезжает за 40 минут, а на велосипеде – за два с половиной часа. В воскресенье Таня часть пути проделала на машине, а оставшуюся часть проехала на велосипеде, затратив на весь путь один час. Какую часть пути от дачи до дома Таня проехала на велосипеде?

Ответ: $\frac{2}{11}$.

1761.(Севастополь, 2007, №5) Таня и Миша одновременно вышли навстречу друг другу по одной и той же прямой дороге: Таня идёт из школы к озеру, а Миша – в обратном направлении. Через час после начала движения они ещё не встретились, и расстояние между ними равнялось 1 км. Ещё через час расстояние между ними составляло 4 км, причём каждый из них не достиг конечного пункта движения. Найдите расстояние между школой и озером, если Таня и Миша двигались с постоянными, возможно, различными скоростями.

Ответ: 6 км.

1762.(Севастополь, 2003, июль, №3) Команда бегунов, состоящая из Тани и Миши, участвовала в эстафете. Таня и Миша пробежали этапы равной длины, Миша со скоростью 8 м/сек, а Таня – 6 м/сек. Какова была средняя скорость команды?

Ответ: $\frac{48}{7}$ м/сек.

1763.(Севастополь, 2002, май, №3) Самолёт летает по маршруту Москва – Симферополь – Москва. Скорость самолёта 450 км/ч. На сколько процентов изменится длительность полёта по маршруту Москва – Симферополь – Москва в безветренную погоду по сравнению с полётом при наличии ветра, когда на участке Симферополь – Москва скорость самолёта уменьшается на 50 км/ч, а на участе Москва – Симферополь увеличивается на 50 км/ч?

Ответ: Полёт при ветре продолжительнее на 1.25%.

1764.(почвовед., 2008, №2) Ученик шёл от дома до школы со скоростью 3 км/ч и опоздал на урок на 1 мин. В другой раз он пошёл со скоростью 4 км/ч и пришёл за 3 мин до начала урока. С какой скоростью ему нужно идти в следующий раз, чтобы прийти в точности к началу урока?

Ответ: 3,2 км/час.

1765.(психолог., 1988, №4) Из городов A и B навстречу друг другу одновременно вышли два товарных поезда. Они двигались без остановок, встретились через 24 часа после начала движения и продолжили свой путь, причём первый поезд прибыл в пункт B на 20 часов позднее, чем второй поезд прибыл в A. Сколько времени был в пути первый поезд?

Ответ: 60 часов.

1766.(психолог., 1984, №2) Подъём в гору турист прошёл за 2 часа. На спуск с горы, который на 18 км длиннее подъёма, турист затратил вдвое больше времени, чем на подъём в гору. Найти общую длину пройденного туристом пути, если каждый километр при спуске турист проходил на 10 минут быстрее, чем при подъёме.

Ответ: 30 км.

1767*. (психолог., 1982, №5) Из пункта A в пункт B вышел пешеход, и одновременно из пункта B в пункт A выехал мотоциклист. Встретив в пути пешехода, мотоциклист сразу же развернулся, довез пешехода до пункта B, а затем тотчас же снова поехал в пункт A, куда и беспрепятственно добрался. Во сколько раз больше времени мотоциклист затратил на дорогу до пункта A по сравнению с тем временем, за которое он проехал бы путь от B до A, не подвозя пешехода, если известно, что пешеход в четыре раза быстрее добрался до пункта B по сравнению с тем временем, которое ему понадобилось бы, чтобы пройти весь путь от A до B пешком?

Ответ: $\frac{11}{4}$.

1768.(психолог., 1978, №3) Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист?

Ответ: 2 км.

1769.(географ., 2006, №4) Длина дороги, соединяющей два населенных пункта, равна 280 километров. Легковой автомобиль проезжает дорогу за 4 часа, а грузовик – за 5 часов. По дороге оба автомобиля двигаются с постоянными скоростями, кроме участков, где в соответствии с ограничениями их скорость равна 40 километров в час. При отсутствии этих ограничений скорости легковой автомобиль проезжал бы дорогу на 1 час и 10 минут быстрее грузовика. Найти а) суммарную длину участков, где скорость ограничена 40 километрами в час; б) скорости легкового автомобиля и грузовика.

Ответ: $s = 40$ км; скорость легкового автомобиля 80 км/час, грузовика – 60 км/час.

1770.(географ., 2004, июль, №3) Пункты A и B соединены двумя дорогами. Первая дорога разделена паромной переправой с одним паромом. На второй дороге препятствий нет. Переправа на пароме занимает $\frac{1}{2}$ часа. Паром работает без перерывов. Из пункта A по первой дороге выезжает автомобиль, скорость движения которого по дороге равна 60 км/ч. Одновременно с ним из пункта B по той же дороге выезжает трактор со скоростью 20 км/ч. Автомобиль без задержки переправляется паромом и встречает трактор, ожидающий паром. После прибытия в пункт B автомобиль без остановки возвращается по второй дороге и прибывает в пункт A на 15 минут раньше трактора, затратив на обратный путь на $\frac{1}{2}$ часа больше, чем на путь из A в B. Найти:

а) разность между длинами второй и первой дорог, не учитывая длину переправы;

б) длину второй дороги, если известно, что поехав обратно по первой дороге автомобиль прибыл в пункт A одновременно с трактором.

Ответ: а) 60 км; б) 97,5 км.

1771.(географ., 2002, май, №4) Пункты A и B соединены двумя дорогами. Первая дорога в два раза короче второй и проходит через пункт C. Одновременно по короткой дороге из пункта A в пункт B выехали соответственно грузовик и мотоцикл, каждый из которых, доехав до пункта C, вернулся в свой исходный пункт и продолжил движение по другой дороге. В итоге грузовик и мотоцикл одновременно прибыли соответственно в пункты B и A. Скорости грузовика и мотоцикла постоянные. Если бы грузовик двигался со скоростью мотоцикла, а мотоцикл – со скоростью грузовика, то в момент возвращения мотоцикла в пункт B грузовик также прибыл в этот пункт. Найти: а) отношение скоростей грузовика и мотоцикла; б) время движения грузовика, с момента начала движения до встречи с мотоциклом на второй дороге, если известно, что в пункт C он добрался на 35 минут раньше мотоцикла.

Ответ: а) 2:3; б) 2 ч 48 мин.

1772.(географ, 2001, май, №3) Из пункта A в пункт B одновременно выехали велосипедист со скоростью 25 км/ч и мотоциклист. Доехав до пункта B, мотоциклист развернулся и сразу направился к пункту A, через некоторое время встретив велосипедиста. Если бы скорость мотоциклиста была на 37,5% меньше, расстояние от места встречи до пункта B уменьшилось бы в 3 раза. Найти скорость мотоциклиста.

Ответ: 50 км/ч.

1773.(географ., 2000, июль, №5) Из пункта A в пункт $Б$ вниз по течению притока отправляется катер, скорость которого в стоячей воде равна v. В пункте $Б$, где приток впадает в реку, катер поворачивает к пункту B, расположенному вверх по течению реки. Расстояния от A до $Б$ и от $Б$ до B равны. Скорости течения притока и реки равны u_1 и u_2 соответственно. На координатной плоскости (u_1, u_2) укажите область, для всех точек которой время движения по маршруту $A \to Б \to B$ меньше, чем время, которое затратил бы катер на прохождение такого же расстояния в стоячей воде.

1774.(географ., 1999, июль, №3) По реке из пункта A в пункт B выплыл катер. Одновременно из пункта B в пункт A выплыла моторная лодка. Пройдя четверть пути от B к A, лодка встретилась с катером. Катер, достигнув пункта B, повернул обратно и прибыл в пункт A одновременно с лодкой. Во сколько раз скорость катера больше скорости лодки?

Ответ: 9/7.

1775.(географ., 1989, №2) Из пункта A в пункт B, находящийся на расстоянии 12 км от пункта A, по горной дороге со скоростью 6 км/час поднимается в гору пешеход. Одновременно с ним из пункта A в пункт B выехал автобус. Доехав до пункта B менее чем за один час, автобус поехал обратно навстречу пешеходу и встретил его через 12 минут после начала движения из пункта B. Найти скорость автобуса на подъёме, если известно, что она в 2 раза меньше его скорости на спуске.

Ответ: 15 км/час.

1776.(географ., 1988, №3) Из пункта A в пункт C, находящийся на расстоянии 20 км от A, выехал грузовик. Одновременно с ним из пункта B, расположенного между A и C на расстоянии 15 км от A, в пункт C вышел пешеход, а из C навстречу им выехал автобус. За какое время грузовик догнал пешехода, если известно, что это произошло через полчаса после встречи грузовика с автобусом, а пешеход до встречи с автобусом находился в пути втрое меньше времени, чем грузовик до своей встречи с автобусом.

Ответ: 45 минут.

1777.(географ., 1985, №3) Из пунктов A и B, находящихся друг от друга на расстоянии 120 км, по прямолинейным дорогам, сходящимся в пункте C под углом, величина которого равна 60°, одновременно выехали грузовик и автобус соответственно со скоростями 40 км/ч и 60 км/ч. Автобус прибыл в пункт C на 1 час раньше грузовика. Найти время движения автобуса.

Ответ: 2 часа.

1778.(географ., 1978, № 1) Пароход, отчалив от пристани A, спустился вниз по течению реки на 60 км до устья впадающего в реку притока и поднялся вверх по притоку (против течения) на 20 км до пристани B. Весь путь от A до B пароход прошел за 7 часов. Скорость течения реки и скорость течения притока равны 1 км/ч. Найти собственную скорость парохода. (Собственная скорость – скорость в неподвижной воде.)

Ответ: Собственная скорость парохода 11 км/час.

1779.(географ., 1977, №4) Грузовик и гоночный автомобиль выехали одновременно из пункта A и должны прибыть в пункт C. Грузовик, двигаясь с постоянной скоростью, доехал до пункта C, проделав путь, равный 360 км. Гоночный автомобиль проехал по окружной дороге и сначала доехал до пункта B, расположенного в 120 км от пункта A, двигаясь со скоростью, вдвое большей скорости грузовика. После пункта B он увеличил свою скорость на 40 км/ч и проехал путь от пункта B до пункта C, равный 1000 км. Он прибыл в пункт C на 1 час 15 минут позднее грузовика. Если бы гоночный автомобиль весь свой путь от пункта A до пункта C ехал с той же скоростью, что и от пункта B до пункта C, то в пункт C он прибыл бы на 1 час позднее грузовика. Найти скорость грузовика.

Ответ: 60 км/ч

1780.(почвовед., 2006, №4) Из деревни в одном и том же направлении вышли три пешехода: второй – через 2 минуты после первого, а третий – через 3 минуты после второго. Через 5 минут после своего выхода из деревни третий пешеход догнал второго, а еще через 2 минуты – первого. Через сколько минут после своего выхода из деревни второй пешеход догнал первого?

Ответ: 28 минут.

1781.(почвовед., 1989, №2) Из пункта A в пункт B автомобиль доехал за 5 часов, двигаясь в пределах населённых пунктов со скоростью 60 км/ч, а по шоссе вне населённых пунктов – со скоростью 80 км/ч. Обратный путь из B в A занял 4 часа 36 минут. При этом в пределах населённых пунктов автомобиль двигался со скоростью 50 км/ч, а по шоссе – 90 км/ч. Каково расстояние между пунктами A и B?

Ответ: 390 км.

1782.(почвовед., 1987, №3) Один турист преодолевает расстояние 20 км на 2,5 часа быстрее, чем другой. Если бы первый турист уменьшил свою скорость на 2 км/ч, а второй увеличил бы свою скорость в 1,5 раза, то они затратили бы на тот же путь одинаковое время. Найти скорость второго туриста.

Ответ: 4 км/час.

1783.(почвовед., 1982, №1) Легковой и грузовой автомобили движутся по шоссе навстречу друг другу с постоянными скоростями. За 1/2 ч до того, как они встретились, расстояние по шоссе между ними равнялось 75 км. Найти скорость легкового автомобиля, если известно, что для того, чтобы проехать 90 км, ему потребовалось бы на 20 мин больше, чем грузовому автомобилю, чтобы проехать 40 км.

Ответ: 90 км/ч.

1784.(биолог., 2006, №5) Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 2 км, вниз по течению реки одновременно начинают движение соответственно плот и лодка. В тот же момент времени из пункта B навстречу плоту начинает движение катер. Собственная скорость лодки равна скорости течения, собственная скорость катера в два раза превышает скорость течения. Встретив плот, катер мгновенно разворачивается и следует до встречи с лодкой, после чего снова разворачивается и движется в сторону плота до встречи с ним, затем опять к лодке и т.д. Сколько раз катер встретит плот за время, в течение которого плот преодолеет расстояние, равное 1000 км?

Ответ: 7 раз.

1785.(биолог., 2003, июль, №4) Три мотоциклиста A, B и C участвовали в показательном заезде, двигаясь по трассе от старта до финиша с постоянными скоростями. Мотоциклисты A и C стартовали одновременно, а мотоциклист B спустя некоторое время. Первым к финишу пришел мотоциклист A. Мотоциклист B через 1 час после своего старта догнал мотоциклиста C на трассе и прибыл на финиш через 4 часа после старта мотоциклистов A и C, и за 2 часа до финиша мотоциклиста C. Найти отношение скорости мотоциклиста A к скорости мотоциклиста C, если известно, что мотоциклист A двигался в $\frac{8}{5}$ раза медленне мотоциклиста B.

Ответ: $\frac{15}{8}$.

1786.(биолог., 1988, №3) Из двух пунктов одновременно выехали навстречу друг другу с постоянными скоростями мотоциклист и велосипедист. Они встретились через 45 минут после начала движения. Определить, сколько времени затратит на путь между исходными пунктами мотоциклист, если известно, что ему для этого потребуется на 2 часа меньше, чем велосипедисту.

Ответ: 1 час.

1787.(биолог., 1987, №2) Из пункта A по реке отправляется плот. Одновременно навстречу ему отправляется катер из пункта B, расположенного ниже по течению относительно пункта A. Встретив плот, катер сразу поворачивает и идёт вниз по течению. Найти, какую часть пути от A до B пройдёт плот к моменту возвращения катера в пункт B, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки.

Ответ: $\frac{2}{5}$ пути от A до B.

1788.(биолог., 1986, №3) Из пункта A по одному и тому же маршруту одновременно выехали грузовик и легковой автомобиль. Скорость легкового автомобиля постоянна и составляет $\frac{6}{5}$ скорости грузовика. Через 30 минут вслед за ними из того же пункта выехал мотоциклист со скоростью 90 км/час. Найти скорость легкового автомобиля, если известно, что мотоциклист догнал грузовик на один час раньше, чем легковой автомобиль.

Ответ: 72 км/час.

1789.(биолог., 1979, №2) Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 2400 км, навстречу друг другу выезжают одновременно пассажирский и скорый поезда. Каждый из них идет с постоянной скоростью, и в некоторый момент они всетречаются. Если бы оба поезда шли со скоростью скорого поезда, то их встреча произошла бы на три часа раньше фактичекого момента встречи. Если бы оба поезда шли со скоростью пассажирского поезда, то их встреча произошла бы на пять часов позже фактического момента встречи. Найти скорости поездов.

Ответ: Скорость пассажирского поезда равна 60 км/ч, скорость скорого 100 км/ч.

1790.(биолог., 1978, №2.C) В реку впадает приток. Пароход отходит от пристани A на притоке, идет вниз по течению 80 км до реки, далее по реке вверх против ечения до пристани B, затратив 18 часов на весь путь от A до B. Затем пароход возвращается обратно. Время обратного движения от B к A по тому же пути равно 15 часам. Собственная скорость парохода, т.е. скорость парохода в стоячей воде, равна 18 км/ч. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Каково расстояние от пристани A до пристани B и какова скорость притока?

Ответ: Расстояние от пристани A до пристани B равно 290 км; скорость притока 2 км/ч.

1791.(ФНМ, 1999, май, №3) Из города в деревню одновременно отправились бегун Б и пешеход $П_1$, а в тот же момент из деревни в город вышел пешеход $П_2$. Скорости пешеходов были равны. Встретившись, Б и $П_2$ некоторое время стояли на месте, а затем направились в деревню. При этом Б побежал с прежней скоростью, равной 12 км/ч, а $П_2$ уменьшил свою скорость в полтора раза. В результате в деревню сначала прибежал Б, а затем через промежуток времени, в два раза больший длительности встречи Б и $П_2$, одновременно пришли оба пешехода. Найти скорость пешехода $П_1$.

Ответ: 6 км/час.

1792.(хим., 1984, №2) Из пункта A в пункт B выходит поезд. В момент прибытия этого поезда в B оттуда выходит другой поезд, который следует в A. Время, которое прошло от выхода первого поезда из A до прибытия туда второго поезда, в $4\frac{1}{6}$ раза превышает время, которое затратили бы поезда до момента встречи, если бы вышли одновременно из A и B навстречу друг другу. Скорости обоих поездов постоянны, причём скорость второго поезда на 20 км/час превышает скорость первого поезда. Чему равна скорость каждого поезда?

Ответ: 40 км/час, 60 км/час.

1793.(хим., 1981, №3) Из города A в город B выехал автомобиль. Одновременно с ним из пункта C, расположенного между A и B, в город A выехал второй автомобиль. Первый прибыл в B одновременно с прибытием второго в A. Затем автомобили одновременно выехали навстречу друг другу, встретились в пункте D и одновременно прибыли первый в A, второй в B. Каждый автомобиль ехал со своей постоянной скоростью, но второй сделал остановку на пути от C к A, а первый остановку той же продолжительности на пути от B к D. Найти расстояние между C и D, если известно, что расстояние от A до C равно 270 км, а расстояние от C до B равно 180 км.

Ответ: 20 км.

1794.(хим., 1979, июль, №3) От пристани A вниз по течению реки одновременно отплыли пароход и плот. Пароход, доплыв до пристани B, расположенной в 324 км от пристани A, простоял там 18 часов и отправился назад в A. В тот момент, когда он находился в 180 км от A, второй пароход, отплывший от A на 40 часов позднее первого, нагнал плот, успевший к этому времени проплыть 144 км. Считая, что скорость течения реки постоянная, скорость плота равна скорости течения реки, а скорости пароходов пароходов в стоячей воде постоянны и равны между собой, определить скорости пароходов и течения реки.

Ответ: Скорости пароходов 15 км/ч, скорость реки 3 км/ч.

1795.(хим., 1978, №2) Из пункта A в пункт B выехал грузовой автомобиль. Через 1 час из пункта A в пункт B выехал легковой автомобиль, который прибыл в пункт B одновременно с грузовым автомобилем. Если бы грузовой и легковой автомобили одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 час 12 минут после выезда. Сколько времени провел в пути от A до B грузовой автомобиль?

Ответ: 3 часа.

1796.(хим., 1977, №1) Из пункта A в пункт B доставлена почта. Сначала ее вез мотоциклист; проехав 2/3 расстояния от пункта A до пункта B, он передал почту ожидавшему его велосипедисту, который и доставил ее в пункт B (время, потребовавшееся на передачу почты, считается равным нулю). При этом почта была доставлена из пункта A в пункт B за промежуток времени, необходимый, чтобы проехать от пункта A до пункта B со скоростью 40 км/ч. Изветсно, что если бы мотоциклист и велосипедист выехали из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу, то они встретились бы через промежуток времени, необходимый для проезда от пункта A до пункта B со скоростью 100 км/ч. Найти скорость мотоциклиста, считая, что она больше скорости велосипедиста.

Ответ: 80 км/ч.

1797.(хим., 1967, №1) Из двух пунктов A и B, расстояние между которыми равно 78 км, выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста (соответственно P_A и P_B) и встретились через 3,9 часа. Через сколько часов встретятся эти же велосипедисты, если они выедут из тех же пунктов одновременно навстречу друг другу и если скорость велосипедиста P_A увеличится вдвое, а скорость велосипедиста P_B уменьшится на 2 км/час. Известно, что скорость велосипедиста P_A меньше 9 км/час, а точка второй встречи велосипедистов отстоит от точки первой встречи на 16,8 км в сторону пункта B.

Ответ: 3 часа.

1798.(ВМК, 2006, июль, №1) Из города A в город B в 6 часов утра выехал грузовой автомобиль. Шесть часов спустя из города B в город A по той же дороге выехал ему навстречу легковой автомобиль. Автомобили движутся с постоянными скоростями. По предварительной договоренности они одновременно приехали в поселок C, расположенный на дороге между A и B. Разгрузка и оформление документов длились пять часов. Затем грузовой и легковой автомобили продолжили каждый свой путь. Легковой и грузовой автомобили прибыли соответственно в города A и B одновременно в 23 часа того же дня. Найти время прибытия автомобилей в населенный пункт C.

Ответ: 14 часов.

1799*. (ВМК, 2002, июль, №4) Из пункта A в пункт B в 8 часов утра вышел пешеход. Спустя два часа из пункта A вслед за пешеходом по той же дороге выехали велосипедист и мотоциклист. Известно, что скорость мотоциклиста в три раза больше скорости велосипедиста. Не позднее, чем через 15 минут после своего выезда из пункта A мотоциклист обогнал пешехода и продолжил путь в пункт B. Велосипедист обогнал пешехода спустя не менее 45 минут после обгона пешехода мотоциклистом. Пешеход прибыл в пункт B в 14 часов того же дня. Найдите время прибытия мотоциклиста в пункт B.

Ответ: 10 часов 40 минут того же дня.

1800.(ВМК, 2001, апрель, №3) Из пункта A в пункт B выехал первый велосипедист. Одновременно с ним с такой же скоростью из B в A выехал второй велосипедист. Через некоторое время первый велосипедист увеличил скорость на 10 км/час. Если бы первый велосипедист сразу двигался с увеличенной скоростью, то его встреча со вторым велосипедистом состоялась бы на три часа раньше. Известно, что расстояние между A и B равно 180 км, в момент изменения скорости первым велосипедистом расстояние между ним и вторым велосипедистом было меньше 70 км, на весь путь из A в B первый велосипедист затратил 15 час. Найдите первоначальную скорость велосипедистов.

Ответ: 10 км/час.

1801.(ВМК, 1999, апрель, №1) Пункты A, B, C и D расположены на одной прямой в указанной последовательности. Пешеход выходит из пункта A со скоростью 5 км/час и направляется в пункт D. Достигнув пункта D, он поворачивает обратно и доходит до пункта B, затратив на всю дорогу 5 час. Известно, что расстояние меду A и C он прошёл за 3 часа, а расстояние между A и B, B и C, C и D (в заданном порядке) образуют геометрическую прогрессию. Найти расстояние между B и C.

Ответ: 5 км.

1802.(подготовительное отделение ВМК/эконом./физ., 1999, №3) Шоссе, соединяющее пункты A и C, проходит через пункт B. В 10^{00} из A в C выехал автомобиль, а в 12^{00} из B в C выехал колесный трактор. Автомобиль и трактор двигались с постоянными скоростями, причем скорость трактора равнялась 18 км/час. В 13^{30} расстояние между автомобилем и трактором равнялось 195 км, а в 16^{00} оба они одновременно прибыли в пункт C. Найти расстояние между пунктами A и C.

Ответ: 576 км.

1803.(ВМК, 1997, июль, №1) Пункты A, B и C расположены на реке в указанном порядке вниз по течению. Расстояние между A и B равно 4 км, а между B и C – 14 км. В 12 час. из пункта B отплыла лодка и направилась в пункт A. Достигнув пункта A, она сразу же повернула назад и в 14 час. прибыла в пункт C. Скорость течения реки равна 5 км/час. Найти скорость лодки в стоячей воде.

Ответ: 10 км/час.

1804.(ВМК, 1992, №4) Из города A в город B выехал автомобиль. Спустя некоторое время из B в A выехал мотоцикл. Скорости автомобиля и мотоцикла на всём пути постоянные, и они движутся по одному шоссе. Автомобиль до встречи с мотоциклом находился в пути 7 часов 80 минут, а мотоцикл до встречи ехал 3 часа. Мотоцикл прибыл в A в 23 часа, а автомобиль прибыл в B в 16 часов 30 минут. Найти время отправления мотоцикла из города B.

Ответ: 11 часов.

1805.(ВМК, 1989, №3) Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через 2 часа из пункта A выехал велосипедист, а ещё через 30 минут – мотоциклист. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались равномерно и без остановок. Через некоторое время после выезда мотоциклиста оказалось, что к этому моменту все трое преодолели одинаковую часть пути от A до B. На сколько минут раньше пешехода в пункт B прибыл велосипедист, если пешеход прибыл в пункт B на 1 час позже мотоциклиста?

Ответ: 48 минут.

1806.(ВМК, 1977, №4) Города A, B, C, D, расположенные так, что четырехугольник – $ABCD$ выпуклый, соединены прямолинейными дорогами AB, BC, CD, AD, AC. Их длины соответственно равны 6, 14, 5, 15 и 15 км. Из одного из этих городов одновремено вышли три туриста, идущие без остановок с постоянными скоростями. Маршруты всех туристов различны, причем каждый из них состоит из трех дорог и проходит через все города. Первый и второй туристы перед прохождением третьих дорог своих маршрутов встретились в одном городе, а третий закончил маршрут на час раньше туриста, закончившего маршрут последним. Найти скорости туристов, если скорость третьего больше скорости второго и на $1/2$ км/ч меньше скорости первого, причем скорости всех туристов заклчены в интервале от

5 км/ч до 8 км/ч.

Ответ: v_1=7 км/ч v_2=$6\frac{1}{3}$ км/ч v_3=$6\frac{1}{2}$ км/ч.

1807.(ВМК, 1974, №4) На дороге, ведущей из пункта A в пункт B, находится пункт C. Из пункта A в пункт B по этой дороге с постоянными скоростями вышли два пешехода. Второй пешеход вышел из пункта A на 12 минут позже первого, но прибыл в пункт B на 18 минут раньше него. При этом через пункт C пешеходы прошли с интервалом не более 6 минут. Если бы второй пешеход вышел из пункта A через 15 минут после первого, увеличив свою скорость на 20%, а скорость первого пешехода не изменилась, то второй пешеход прибыл бы в пункт B на 35 минут раньше первого, а через пункт C пешеходы прошли с интервалом не менее 5 минут. Если бы первый пешеход уменьшил свою скорость на 1 км/ час, а скорость второго пешехода осталась бы первоначальной, то первый пешеход потратил бы на путь от A до C в 3 раза меньше времени, чем второй пешеход на весь путь от A до B. Найти длину пути от A до C.

Ответ: 2 км.

1808.(ВМК, 1970, №3) Из города A в город B, находящийся на расстоянии 105 км от A, с постоянной скоростью v км/ч выходит автобус. Через 30 мин вслед за ним из A со скоростью 40 км/ч выезжает автомобиль, который, догнав в пути автобус, поворачивает обратно и движется с прежней скоростью. Определить все те значения v, при которых автомобиль возвращается в A позже, чем автобус приходит в B.

Ответ: $30 < v \leq 33,6$.

1809.(мех-мат, 2010, №5) Из лесу выскочил заяц и помчался по прямой в направлении тернового куста. На полпути до куста заяц напоролся на колючку и стал бежать в полтора раза медленнее. Когда зайцу оставалось до куста 50 метров, из лесу (из того же места) выбежал волк и погнался за зайцем. Когда заяц добежал до куста, волку оставалось до него 10 метров. На каком расстоянии от леса находится терновый куст, если известно, что волк всё время бежал со скоростью, с которой первоначально бежал заяц?

Ответ: 80 метров.

1810.(мех-мат, 2005, июль, №1) Согласно расписанию, автобус курсирует по маршруту из пункта A в пункт B и обратно с постоянной скоростью и без остановок. На пути из A в B он был вынужден на некоторое время остановиться, поэтому на обратном пути увеличил скорость на 25%. Приехав в A с 10-минутным отклонением от расписания, он уменьшил свою последнюю скорость на 24% и прибыл в B вовремя. Какова была продолжительность вынужденной остановки?

Ответ: 28 мин.

1811*. (мех-мат, 2004, июль, №5) Дорога проходит последовательно через пункты A, B, C и D. Расстояние от A до B равно 24 км. Из A в D выехал с постоянной скоростью автомобиль. Одновременно с ним из B в D отправились с постоянными скоростями велосипедист и мотоциклист. Когда автомобиль догнал велосипедиста, мотоциклист обгонял их на 6 км. В пункте C автомобиль догнал мотоциклиста, и, доехав до D, сразу поехал обратно в A, встретившись с велосипедистом во второй раз в C. Найти расстояние между B и C, если известно, что время от начала движения до момента повторной встречи автомобиля и велосипедиста в два раза больше, чем время от начала движения до того момента, когда автомобиль впервые догнал мотоциклиста.

Ответ: 16 км.

1812.(мех-мат., 2003, март (тест перед олимпиадой), №8) Между пунктами A и B организовано движение автобусов, следующих друг за другом с интервалом ровно в 7 мин. Каждый из них проезжает путь в одну сторону без остановок ровно за 25 мин. и, постояв некоторое время на конечной остановке, едет в другую сторону. Сколько автобусов обслуживает маршрут, если на стоянке в пункте A или B никогда не бывает более одного автобуса?

Ответ: 8 или 9.

1813.(мех-мат, 2002, июль, №3) Из пункта A в пункт C выехал с постоянной скоростью велосипедист. За два километра до промежуточного пункта B он решил, что необходимо ехать быстрее, и увеличив скорость в пункте B, продолжил движение с постоянной скоростью вплоть до пункта C. Приехав в C, велосипедист обнаружил, что время движения с каждой из скоростей было прямо пропорционально соответствующей скорости и что на первые 18 км пути он затратил времени в полтора раза больше, чем на последние 18 км. Найти расстояние между пунктами A и B, если известно, что расстояние между A и C равно 75 км.

Ответ: $300/13$ км.

1814*. (мех-мат, 2000, июль, №3) Длина дороги, соединяющей пункты A и B, равна 2 км. По этой дороге курсируют два автобуса. Достигнув пункта A или пункта B, каждый из автобусов немедленно разворачивается и следует без остановок к другому пункту. Первый автобус движется со скоростью 51 км/ч, а второй – со скоростью 42 км/ч. Сколько раз за 8 часов движения автобусы

а) встретятся в пункте B;

б) окажутся в одном месте строго между пунктами A и B,

если известно, что первый стартует из пункта A, а второй – из пункта B?

Ответ: а) 6; б) 192.

1815.(мех-мат, 1997, июль, №3) Из пункта A в пункт B со скоростью 80 км/ч выехал автомобиль, а через некоторое время с постоянной скоростью выехал второй. После остановки на 20 мин в пункте B второй автомобиль поехал с той же скоростью назад и через 48 км встретил первый автомобиль, шедший навстречу. Найти расстояние от A до места первой встречи автомобилей, если $AB = 480$ км и в момент прибытия первого автомобиля в B расстояние между автомобилями было равно 120 км.

Ответ: 160 км.

1816.(мех-мат, 1993, №6) Из пункта A в пункт B с постоянными скоростями выехали два мотоциклиста, а из B в A одновременно с ними выехал третий мотоциклист с постоянной скоростью 60 км/час. Через 45 минут расстояние между первым и вторым мотоциклистами было в два раза больше, чем между первым и третьим. Через 1 час после старта расстояние между первым и вторым мотоциклистами было равно расстоянию между первым и третьим, а расстояние, которое осталось проехать третьему мотоциклисту до A, было равно расстоянию между первым и вторым мотоциклистами через 1 час 30 мин после старта, а также было равно $2/5$ расстояния между первым и третьим мотоциклистами через 1 час 30 мин после старта. Найдите расстояние между пунктами A и B.

Ответ: 90 км.

1817.(мех-мат, 1987, №4) Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B, расположенных на расстоянии 60 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию C. Если бы один из них увеличил свою скорость на 25 км/час, а другой – на 20 км/час, то они прибыли бы одновременно на станцию C, но на 2 часа раньше. Найти скорости поездов.

Ответ: 50 км/час, 40 км/час.

1818.(мех-мат, 1986, №4) Путь из села в город идет сначала по грунтовой дороге, а затем по шоссе. Из села в город в 7 часов утра выехал автомобилист, и одновременно с ним из города в село выехал мотоциклист. Мотоциклист двигался по шоссе быстрее, чем по грунтовой дороге в $1\frac{2}{3}$ раза, а автомобилист – в $1\frac{1}{2}$ раза (движение обоих по шоссе и по грунтовой дороге считать равномерным). Они встретились в 9 часов 15 минут, автомобилист приехал в город в 11 часов, а мотоциклист приехал в село в 12 часов 15 минут. Определить, сможет ли автомобилист приехать в город до 11 часов 15 минут, если он весь путь из села в город будет ехать с первоначальной скоростью.

Ответ: нет.

1819.(мех-мат, 1972, №2) Пункты A и B соединены двумя дорогами, одна из которых на 3 км короче другой. Из B в A по более короткой дороге вышел пешеход и одновременно из A по той же дороге выехал велосипедист. Пешеход и велосипедист одновременно прибыли в A через два часа после начала движения. За это время пешеход прошел один раз путь от B до A, а велосипедист проехал два раза в одном направлении по кольцевому маршруту, образованному двумя названными дорогами. Найти скорости пешехода и велосипедиста, если известно, что их вторая встреча произошла на расстоянии 3,5 км от пункта B.

Ответ: скорость пешехода – 3 км/час, скорость велосипедиста – 15 км/час.

1820.(мех-мат, 1969, №1) Деревня расположена на берегу реки, а школа – на шоссе, пересекающем реку под прямым углом. Зимой школьник ходит из деревни в школу напрямик на лыжах и тратит на дорогу 40 минут. Весной, в распутицу, он идет берегом реки до шоссе, а дальше – по шоссе до школы, и тратит на дорогу 1 час 10 минут. Наконец, осенью он проходит вдоль реки половину расстояния, отделяющего деревню от шоссе, а дальше идет напрямик. При этом он доходит до школы быстрее чем за 57 минут. Установить, что дальше: деревня от шоссе или школа от реки, если известно, что пешком школьник ходит всегда с одной и той же скоростью, а на лыжах – со скоростью, на 25% большей (реку и шоссе считать прямыми линиями).

Ответ: деревня от шоссе дальше, чем школа от реки.

1821.(мех-мат, 1969, №1) Пункты A и B находятся на дорогах, пересекающихся под углом $ABC = 60°$. Из пункта A в B можно доехать на автобусе – сначала по одной дороге до перекрестка C, потом по другой, – затратив 11 мин. Если пойти из A в B пешком напрямик, то это займет 1 час. 10 мин., а если сначала дойти кратчайшим путем до дороги, на которой стоит пункт B, а затем подъехать на автобусе, – то еще больше времени, даже если на автобус сесть сразу.

Каково расстояние от пункта A до перекрестка, если скорость пешехода равна 3 км/час, а скорость автобуса – 30 км/час? (Дороги считать прямыми.)

Ответ: 4 км.

1822.(мех-мат, 1968, №5) Из пункта A в пункт C в 9 часов утра отправляется скорый поезд. В это же время из пункта B, расположенного между пунктами A и C, выходят два пассажирских поезда, первый из которых следует в пункт A, а второй – в пункт C, причем скорости пассажирских поездов равны. Скорый поезд встречает первый пассажирский поезд не позже, чем через 3 часа после его отправления, потом проходит пункт B не ранее 14 часов того же дня и, наконец, прибывает в пункт C одновременно со вторым пассажирским поездом через 12 часов после встречи с первым пассажирским поездом. Найти время прибытия в пункт A первого пассажирского поезда.

Ответ: 16 час 30 мин.

1823.(мех-мат, 1965) Города A и B расположены на берегу реки, причем город B расположен ниже по течению. В 9 часов утра из города A в город B отправляется плот, плывущий относительно берегов со скоростью течения реки. В этот же момент из города B в город A отправляется лодка, которая встречается с плотом через 5 часов. Доплыв до города A, лодка мгновенно повернула обратно и приплыла в город B одновременно с плотом.

Успели ли лодка и плот приплыть в город к 9 часам вечера (того же дня)?

Ответ: нет.

1824.(мех-мат, 1963, №3) Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B; первый пошел из A в B, второй – из B в A. Каждый идет с постоянной скоростью без остановок и, придя в свой конечный пункт, немедленно поворачивает обратно. Когда они встретились во второй раз, то оказалось, что первый пешеход прошел на 4 км больше, чем второй. Продолжая идти дальше, первый пешеход прибыл в A через 1 час после второй встречи, а второй в B – через два с половиной часа после этой встречи. Определить скорость первого пешехода.

Ответ: 4 км/час.

1825.(олимпиада "Ломоносов-2006", №5) Из пункта A в пункт B в 8^{00} выехал велосипедист, а через некоторое время из B в A вышел пешеход. Велосипедист прибыл в B через 6 часов после выхода оттуда пешехода. Пешеход пришел в A в 17^{00} того же дня. Скорости велосипедиста и пешехода постоянны. Какую долю пути из A в B проехал велосипедист до его встречи с пешеходом?

Ответ: $\frac{3}{5}$.

1826.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2005", №1 + Олимпиада мехмат ф-та, 2003, 8 кл., №3) Три брата возвращались с совместной рыбалки домой, где их ожидал бочонок холодного кваса. Старший брат шел втрое медленнее младшего и вдвое медленнее среднего. Придя домой, младший сразу принялся за бочонок и выпил 7-ю его чпсть к приходу среднего брата, который присоединился к младшему и стал поглощать квас с такой же скоростью. Досталось ли кваса старшему брату?

Ответ: нет.

8.6.1 Движение по окружности

1827*. (географ., 1965, №1) Два тела движутся равномерно по окружности в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 2 сек. быстрее второго и догоняет второе тело каждые 12 сек. За какое время каждое тело проходит окружность?

Ответ: 4 сек. и 6 сек. соответственно.

1828.(почвовед., 2002, май, №1) Определить величину угла между часовой и минутной стрелками часов, показывающими 1 ч 10 мин, при условии, что обе стрелки движутся с одинаковыми скоростями.

Ответ: 25 градусов.

1829.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2011", №1) Какое время между 14:10 и 15:10 показывают часы в тот момент, когда угол между минутной и часовой стрелками равен $90°$?

Ответ: 15 час. 00 мин. или 14 час. $27\frac{3}{11}$ мин.

1830.(мех-мат, 2001, март, (тест перед олимпиадой), №7) Какое точное время между 3 и 4 часами ночи показывают часы в момент, когда положения их часовой и минутной стрелок совпадают?

Ответ: 3 час $16\frac{4}{11}$ мин.

1831.(олимпиада "Ломоносов-2009", №8) Настенные часы сломались, отчего минутная стрелка стала в произвольные моменты времени мгновенно менять направление своего движения на противоположное, вращаясь со своей прежней угловой скоростью. Все потенциальные показания (в минутах) этой стрелки целиком заполняют промежуток $[0; 60)$.

а) Может ли такая стрелка в течение одного часа бесконечно много раз показать каждое из двух чисел 10 и 40?

б) Какое наибольшее количество раз в течение четырёх суток может встретиться самое редкое (за эти четверо суток) показание такой стрелки?

Ответ: а) Да. б) 96.

1832*. (биолог., 2005, июль, №5) На беговой дорожке стадиона длиной 400 м одновременно со старта в одном направлении начинают забег два спортсмена на дистанцию 10 км. Каждый из них бежит со своей постоянной скоростью. Первый спортсмен приходит на финиш на 16 мин. 40 сек.

раньше второго и через 43 мин. 20 сек. после того, как он второй раз на дистанции (не считая момента старта) обогнал второго спортсмена. Известно, что скорость первого спортсмена больше 100 м/мин. Сколько всего раз первый спортсмен обгонял второго на дистанции после старта?

Ответ: четыре раза.

1833.(биолог., 1999, июль, №6) Два велосипедиста стартуют одновременно из двух точек круговой велотрассы: первый из точки A, а второй из точки B — и едут в противоположных направлениях с постоянными скоростями. Известно, что из их первых 15 встреч на трассе после старта только третья из пятнадцати состоялась в точке B. Найти отношение скорость первого велосипедиста к скорости второго, если известно, что к моменту их пятой встречи каждый из велосипедистов проехал не менее одного круга.

Ответ: 7:5.

1834.(ВМК, 1980, №5) Две точки движутся с постоянными скоростями по разным окружностям, которые лежат в одной плоскости и имеют общий центр. Направление движения одной точки – по часовой стрелке, другой – против часовой стрелки. В момент начала движения обе точки и центр окружностей лежат на одной прямой, а расстояние между точками 16/7 см. После старта расстояние между точками сначала уменьшалось, а через 11 с составило $\sqrt{207}/7$ см. Кроме того, с интервалом в 11 с было зафиксировано два момента, когда расстояние равнялось $\sqrt{158}/7$ см, а в промежутке между этими моментами расстояние ни разу не принимало значение $\sqrt{158}/7$ см. Найти минимальное расстояние между точками.

Ответ: $\frac{12}{7}$.

1835.(мех-мат, 1988, №5) Два мотоциклиста стартовали раздельно в одной точке стадиона в гонке на 30 кругов, причём второй начал движение, когда первый прошёл полкруга. Один из зрителей вышел со стадиона, когда мотоциклисты были рядом. Когда через 4 минуты он вернулся, мотоциклисты снова были рядом. Если бы первый мотоциклист после 14 кругов увеличил скорость в 4 раза, то они финишировали бы одновременно. Определить, с какой разницей во времени финишировали мотоциклисты, если пришедший первым проезжал за минуту более 5 кругов.

Ответ: 0,9 минут.

1836.(мех-мат, 1970, №3) Три гонщика (A, потом B и затем C) стартуют с интервалом в 1 мин из одной точки кольцевого шоссе и двигаются в одном направлении с постоянными скоростями. Каждый гонщик затрачивает на круг более двух минут. Сделав три круга, гонщик A в первый раз догоняет B у точки старта, а еще через три минуты он вторично обгоняет C. Гонщик B впервые догнал C также у точки старта, закончив 4 круга. Сколько минут тратит на круг гонщик A?

Ответ: 3 минуты.

8.7 Задачи с целочисленными переменными

1837.(социо., 1997, №4) В дошкольном учреждении провели опрос. На вопрос: "Что Вы предпочитаете, кашу или компот?" – большая часть ответила: "Кашу", меньшая: "Компот", а один респондент: "Затрудняюсь ответить".

Далее выяснили, что среди любителей компота 30% предпочитают абрикосовый, а 70% – грушевый.

У любителей каши уточнили, какую именно кашу они предпочитают. Оказалось, что 56,25% выбрали манную, а 37,5% – рисовую, и лишь один ответил: "Затрудняюсь ответить".

Сколько детей было опрошено?

Ответ: 27.

1838.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2012", очный тур)Пятая часть персонала фирмы работает в транспортном отделе, ещё 52 сотрудника – в отделе продаж, остальные – в нескольких цехах, в каждом из которых работает $\frac{1}{7}$ персонала фирмы. Чему равна общая численность персонала?

Ответ: 140.

1839.(ИСАА, 2008, №4) На собрании акционеров было принято решение увеличить прибыль предприятия за счёт расширения ассортимента выпускаемой продукции. Экономический анализ показал, что:

дополнительные доходы, приходящиеся на каждый вид новой продукции, оказываются равными 75 млн. руб.;

дополнительные расходы при освоении первого вида новой продукции составляют 13 млн. руб., а освоение каждого последующего вида требует на 7 млн. руб. расходов больше, чем освоение предыдущего вида.

Очередной вид пролукции принимается к производству при условии, что он принесёт прибыль. Верно ли, что в результате решения акционеров:

а) предприятие может освоить более 11 видов новой продукции?

б) предприятие может освоить 9 видов новой продукции?

в) возможный наибольший прирост прибыли составит менее 310 млн. руб.?

г) возможный наименьший прирост прибыли составит более 65 млн. руб.?

Ответ следует обосновать.

Ответ: а) нет; б) да; в) да; г) нет.

1840.(ВШБ, 2007, №3) Для производства некоторого изделия используются автоматические станки, имеющие одинаковую производительность и изготавливающие за смену определённое количество изделий, выражаемое целым числом. В первый день в течение рабочей недели непрерывно работало несколько станков, и в результате в совокупности было изготовлено более 55 изделий. Во второй день непрерывно в течение рабочей смены работало на два станка больше, чем в первый день, и было изготовлено в совокупности менее 73 изделий. В третий день непрерывно в течение рабочей смены работало на три станка больше, чем в первый день, и было изготовлено в совокупности 80 изделий. Определить, сколько станков работало в первый день.

Ответ: 7 станков.

1841.(эконом. (отд. менеджмента), 2007, №5) Для рытья котлована первоначально планировалось использовать звено экскаваторов одной модели, однако перед началом работы в звено было добавлено дополнительно 4 экскаватора той же модели. В результате котлован был вырыт на 3 часа ранее первоначально запланированного срока. Определите время, за которое котлован мог быть вырыт одним экскаватором, если в этом случае, при расходе топлива 20 кг в час, необходимое для работы экскаватора количество топлива находится в пределах от 1,2 до 1,71 тонн.

Ответ: 72 часа.

1842.(эконом., 2007, №4) Бригаде грузчиков выделена некоторая сумма денег на разгрузку баржи, однако 3 человека заболели и в работе не участвовали. Оставшиеся выполнили задание, заработав каждый на 1,5 тысячи рублей больше, чем в случае работы в составе полной бригады. Определите выделенную бригаде сумму, если 5%-ный сбор за её банковский перевод обошёлся работодателю дополнительно в величину, находящуюся в пределах от 1,2 до 1,6 тысяч рублей.

Ответ: 27 000 рублей.

1843.(эконом. (полит. экон.), 1978, июль, №4) Груз вначале погрузили в вагоны вместимостью по 80 тонн, но один вагон оказался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 тонн, однако понадобилось на восемь вагонов больше и при этом все равно один вагон остался не полностью загруженным. Наконец, груз переложили в вагон вместимостью 50 тонн, однако понадобилось еще на 5 вагонов больше, при этом все такие вагоны были загружены полностью. Сколько тонн груза было?

Ответ: 1750 т.

1844.(соц., 2005, июль, №6) Группа школьников решила купить музыкальный центр, при этом каждый внес одинаковую сумму. Однако, в последний момент двое из них отказались, и каждому из оставшихся пришлось добавить 100 рублей. Сколько школьников первоначально участвовало в покупке, и какова цена музыкального центра, если известно, что она заключена в пределах от 17000 до 19500 рублей?

Ответ: 20 школьников, 18000 рублей.

1845.(соц., 2007, июль, №3) Один рабочий бригады, состоящей из 5 человек, производит в среднем 14 деталей в час, причем каждый из рабочих производит в час целое число деталей, не превышающее 16. Сколько деталей в час может делать при этих условиях рабочий с самой низкой производительностью?

Ответ: от 6 до 14 деталей в час.

1846.(фил., 1978, июль, №1) Двум бригадам, общей численностью 18 человек, было поручено организовать в течение трех суток непрерывное круглосуточное дежурство по одному человеку. Первые двое суток дежурили члены первой бригады, распределив между собой это время поровну. Известно, что во второй бригаде три девушки, а остальные юноши, причем девушки дежурили по одному часу, а все юноши распределили между собой остаток дежурства поровну. При подсчёте оказалось, что сумма продолжительностей дежурств каждого юноши второй бригады и любого члена первой бригады меньше девяти часов. Сколько человек в каждой бригаде?

Ответ: в бригадах было по 9 человек.

1847.(фил., 1977, июль, №1) В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в три раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике, но менее, чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

Ответ: В первом ящике 24 детали, а во втором ящике 7 деталей.

1848*. (фил., 2002, июль, №6) ...Словарь людоеда из племени "Мумбо-Юмбо"составляет 300 слов. Эллочка Щукина легко и свободно обходилась тридцатью...

Однажды людоед начал посещать проповеди миссионера, поэтому его словарный запас стал, оставаясь целочисленным, увеличиваться на некоторое число процентов за каждые полгода. Эллочка поступила в вечернюю школу и каждый месяц стала узнавать целое число новых слов, равное 50% от того количества слов, которое людоед знал к концу первого полугодия. Однако через несколько месяцев Эллочка бросила школу.

Какое наибольшее целое число месяцев могла проучиться Эллочка в школе, чтобы при этих условиях словарь людоеда после одного года посещения проповедей остался богаче словаря Эллочки?

Ответ: 2.

1849.(эконом. киб., 1986, №5) В течение нескольких дней двое рабочих изготовляли специальных детали, причём ежедневная выработка деталей у каждого рабочего была постоянной. В итоге за все эти дни второй рабочий изготовил на k деталей больше, чем первый, где число k удовлетворяет неравенствам $127 \leq k \leq 132$. Если бы первый рабочий увеличил ежедневную выработку в 2 раза, то за то же количество дней он изготовил бы на 77 деталей больше, чем второй. Сколько дней рабочие изготовляли детали? Какова была ежедневная выработка у каждого из них?

Ответ: 11 дней, 19 деталей и 31 деталь.

1850.(эконом., 1986, №5) Линию, связывающую города A и B, обслуживают самолёты трёх типов. Каждый самолёт первого, второго и третьего типа может принять на борт соответственно 230, 110 и 40 пассажиров, а также 27, 12 и 5 контейнеров. Все самолёты линии могут принять на борт одновременно 760 пассажиров и 88 контейнеров. Найти число действующих на линии самолётов каждого типа, зная, что их общее число не превосходит 8.

Ответ: 2; 2; 2.

1851.(геолог., 1984, №5) Трое мальчиков хотели вместе купить две одинаковые игрушки. Сложив все имеющиеся у них деньги, дети не смогли купить даже одну игрушку. Если бы у первого мальчика было вдвое больше денег, то им на покупку двух игрушек не хватило бы 34 копеек. Когда третьему мальчику добавили денег в размере, в два раза большем, чем у него было, то после покупки игрушек у детей оставалось 6 копеек. Сколько стоили игрушки, если первоначально у второго мальчика было на 9 копеек больше, чем у первого?

Ответ: 70 копеек.

1852*. (психолог., 1977, июль, №3) Производительность первого автомобильного завода не превышает 950 машин в сутки. Производительность второго автомобильного завода первоначально составляла 95% от производительности первого завода. После ввода дополнительной линии второй завод увеличил производство машин в сутки на 23% от числа машин, выпускаемых в сутки на первом заводе, и стал их выпускать более 1000 штук в сутки. Сколько автомобилей за сутки выпускал каждый завод до реконструкции второго завода? Предполагается, что каждый завод в сутки выпускает целое количество машин.

Ответ: 900 и 855.

1853.(мех-мат, 2008, устный) Группа самолётов, пятая часть из которых – бомбардировщики, вылетела с аэродрома. При этом не более 10 из них полетели на запад, а остальные – на восток. Оказалось, что число самолётов, полетевших на восток, больше 50%, но меньше 55% от общего количества. Сколько самолётов полетели на запад?

Ответ: 7.

1854.(мех-мат, 2009, №2) После рыбалки в ведре у Бориса (ведро у него вмещает не более 100 рыб) оказалось карасей на 25% меньше, чем у Андрея. Зато Андрей поймал других рыб на 25% меньше, чем Борис. Сколько всего рыб поймал Андрей, если известно, что это количество составляет 55% от общего количества пойманных Борисом и Андреем рыб?

Ответ: 77.

1855.(биолог., 2001, июль, №4) Из аэропорта одновременно вылетают два самолёта и сразу набирают скорость и высоту. Они летят по замкнутым круговым маршрутам: первый — по окружности радиуса R, а второй — по окружности радиуса r. Предполагается, что самолёты летят безостановочно с одинаковыми постоянными скоростями, и каждый из них облетает свою окружность за целое число часов. Кроме того, не ранее, чем через 43 часа и не позднее, чем через 49 часов после вылета произошли следующие события: первый самолёт облетел свою окружность 4 раза, а второй облетел свою окружность 5 раз, — и разрыв во времени между этими событиями составил не менее 2 часов. Найти $\frac{r}{R}$.

Ответ: 3/4.

1856.(биолог., 2007, июль, №7) За 2005 год число книг в фонде библиотеки поселка Р увеличилось ровно на 0,4%, а за 2006 год – ровно на 0,8%, оставшись при этом меньше 50 тысяч. На сколько книг увеличился фонд библиотеки поселка Р за 2006 год?

Ответ: 251.

1857.(хим., 1998, май, №4) Определить число студентов, сдавших экзамен, если известно, что шестая часть из них получили оценку "удовлетворительно", 56% получили оценку "хорошо", а 14 человек получили оценку "отлично", причём эти отличники составляют более 4%, но менее 5% от искомого числа студентов.

Ответ: 300.

1858.(ВМК, 1986, №3) В академическом собрании сочинений, включающем менее 20 томов, число томов с художественными произведениями кратно числу томов с публицистикой. Если число томов с художественными произведениями увеличить в два раза, то их станет на 14 больше, чем томов с письмами. Сколько томов с публицистикой содержит собрание сочинений?

Ответ: 6.

1859.(фил., 1986, №5) Имеются два ящика с яблоками, причём в первом ящике 15 яблок, а во втором 16 яблок. Разрешается проводить в любом порядке и любом количестве следующие операции: а) увеличить на 2 число яблок в первом ящике и одновременно уменьшить на 2 их число во втором; б) увеличить на 1 число яблок в первом ящике и одновременно уменьшить на 2 их число во втором; в) уменьшить на 1 число яблок в первом ящике и одновременно увеличить на 2 их число во втором; г) уменьшить на 2 число яблок в первом ящике и одновременно уменьшить на 1 их число во втором. Можно ли, совершая такие действия, добиться того, чтобы одновременно в первом ящике оказалось 50 яблок, а во втором – 25 яблок. Ответ обосновать.

Ответ: нет.

1860.(Олимпиада "Ломоносов-2010", №9)На доске написан квадратный трёхчлен $x^2+9x+47$. Таня (по своему усмотрению) увеличивает или уменьшает на 1 коэффициент при x, после чего Ваня увеличивает или уменьшает на фиксированное число m свободный член, а далее эти действия повторяются. Как только написанный на доске многочлен имеет целый корень, Ваня получает оценку "пять". Может ли он обеспечить себе пятёрку при любых действиях Тани, если: а) $m = 2$; б) $m = 3$?

Ответ: а) да; б) нет.

8.8 Прочие задачи

1861.(почвовед., 2008, №5) Один из учеников, Алик, Боря, Витя или Гоша разбил в классе стекло. На вопрос, кто это сделал, они дали следующие противоречивые ответы.

Алик: стекло разбил Витя.

Боря: ни Витя, ни Алик этого не делали.

Витя: Боря стекла не разбивал.

Гоша: Это сделал Боря.

Можно ли по этим ответам однозначно определить виновника, если солгать мог только он сам, а также не более, чем один из остальных трёх школьников?

Ответ: да; виновник – Гоша.

8.9 Теория множеств и комбинаторика

1862.(Высшая школа государственного аудита, 2008, №7) Из 102 школьников выпускных классов пятёрку по истории имеют 28 человек, по географии

– 30, по математике – 25 человек. Среди тех, у кого пятёрка по истории, восемь школьников имеют пятёрку по географии, и семеро – по математике, а среди имеющих пятёрку по географии у шестерых пятёрка и по математике. Трое имеют пятёрки по истории, географии и математике. Сколько школьников не имеют пятёрок ни по одному из этих предметов.

Ответ: 37.

1863.(ВМК, 2008, №5)В шахматном турнире, проходившем по круговой системе (все участники играют между собой ровно один раз), участвовало $n \geq 15$ игроков. Если шахматная партия заканчивалась победой одного из игроков, то победитель получал 1 очко, а его соперник – 0 очков. Если партия между игроками заканчивалась вничью, то каждый игрок получал 0,5 очка. Известно, что итогам турнира число участников, набравших не более пяти очков, равно 11. Сколько участников турнира набрали по 7 очков? Ответ должен быть обоснован.

Ответ: 0.

1864.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2009", №3) Для 50 детей детского сада закуплены 50 одинаковых тарелок. По краю каждой тарелки равномерно расположены 5 белых кружочков. Воспитатели хотят перекрасить какие-либо из этих кружочков в другой цвет так, чтобы все тарелки стали различными. Какое наименьшее число дополнительных цветов потребуется им для этого?

Ответ: 2 цвета.

1865.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2008", №10) Найти наименьшее значение n, для которого любой коллектив, где каждый недолюбливает не более семи из остальных, можно разбить на не более чем n частей так, чтобы ни в какой части не нашлось двух человек, хотя бы один из которых недолюбливает другого.

Ответ: 15.

1866.(олимпиада "Ломоносов-2011", II тур, №7) Какое наименьшее (одинаковое) число карандашей нужно положить в каждую из 6 коробок, чтобы в любых 4 коробках нашлись карандаши любого из 26 заранее заданных цветов (карандашей имеется достаточное количество)?

Ответ: 13.

1867.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2011", №10) Имеются 12 карандашей попарно различной длины. Сколькими способами можно уложить их в коробку в 2 слоя по 6 карандашей так, чтобы в каждом слое карандаши были упорядочены по возрастанию длины (слева направо), а каждый карандаш верхнего слоя лежал строго над карандашом нижнего слоя и был короче его?

Ответ: 132.

1868.(олимпиада "Ломоносов-2012", II тур, №8) В течение дня выставку посетили по одному разу ровно 1000 человек, причём в любой момент на выставке находилось менее 38 посетителей. Какое наибольшее количество человек, не встречавшихся (попарно) на выставке друг с другом, можно при этом гарантированно выбрать из всех посетителей?

Ответ: $n = 28$.

Глава 9

Задачи с параметрами

9.1 Прямой метод решения

1869.(эконом., 2007, №1) Для каждого значения x, удовлетворяющего условию

$$x^2 - |x| - 42 = 0,$$

найдите все числа y, для которых выполнено неравенство

$$-7\sqrt{y^2 - 10y + 34} \geq 4x + 7.$$

Ответ: условию $x^2 - |x| - 42 = 0$ удовлетворяют $x = \pm 7$. Для $x = 7$ множество решений неравенства пусто, а для $x = -7$ неравенству удовлетворяет только $y = 5$.

1870*. (ВМК, 2006, июль, №5) При каждом значении параметра d решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - y^2 - dx + 3dy - 2d^2} + \sqrt{x - y + d} \cdot \sqrt{4 - 2x + d} +$$
$$+\sqrt{-2x^2 - 2xy + (5d+4)x + (d+4)y - 2d^2 - 8d} = 4.$$

Ответ: при каждом $d \in R$ уравнение имеет единственное решение $(x; y) = \left(\frac{3d+8}{6}; \frac{3d}{2}\right)$.

1871*. (ВМК, устный, 2006) Для всех значений параметра $a \in (0; 1)$ решить уравнение

$$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x + \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x = 1.$$

Ответ: при всех $a \in (0; 1)$ уравнение имеет единственный корень $x = 2$.

1872.(мех-мат, 2009, №4) При всех значениях параметра c решить систему

$$\begin{cases} \frac{9}{\sqrt{x+c}} + \frac{16}{\sqrt{y-c}} \leq 22 - \sqrt{x+c} - 4\sqrt{y-c}, \\ 2^{x-11} \cdot \log_2(4-y) = 1. \end{cases}$$

Ответ: при $c=-2$ система имеет единственное решение $(11;2)$; при $c\neq-2$ множество решений – пусто.

1873.(ВМК, устный, 2008, июль) При всех значениях параметра a решить уравнение
$$2^{\frac{x^2+1}{x^2}}+2^{\frac{x^2-1}{x^2}}=a.$$

Ответ: если $a\leq 4$, то уравнение не имеет корней; если $a>4$, то уравнение имеет два корня: $x=\pm\frac{1}{\sqrt{\log_2(a+\sqrt{a^2-16})-2}}$.

1874.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2009", очный тур: Москва, №5) Найдите все значения параметра a, при которых все решения уравнения
$$3^{1-x^2-2ax-2a}=\log_3\left(\frac{|x+a|+5|a-1|}{2|a-1|}\right)$$
принадлежат отрезку $[-3;0]$.

Ответ: $\frac{1}{2}\leq a<1$, $1<a\leq 2$.

1875.(олимпиада "Ломоносов-2009", №3) При каждом значении a найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению
$$\log_3\left(\frac{x^2}{x-1}-a+1\right)=\log_3\frac{x^2}{x-1}-\log_3(a-1).$$

Ответ: По смыслу задачи параметр $a\in(1;+\infty)$. Если $a\in(1;2]$, то уравнение не имеет корней. Если $a=3$, то уравнение имеет один корень: $x=2$. Если $a\in(2;+\infty)\setminus\{3\}$, то уравнение имеет два корня: $x_1=a-1$, $x_2=\frac{a-1}{a-2}$.

1876.(физ., 2006, №7) При каких значениях a сумма квадратов корней уравнения
$$(2\log_a|x-1|-\log_a x-1)\cdot(2\log_{a^2}|x+5|-\log_a 3a+1)=0$$
больше, чем $8a+1$?

Ответ: $0<a<2-\sqrt{3}$, $a>2+\sqrt{3}$.

1877.(физ., 2007, март, №7)Парабола $y=x^2-ax-\frac{3a^2}{4}+2a+8$ пересекает ось Ox в двух различных точках A и B, точка C – вершина параболы. При каком значении a площадь $\triangle ABC$ равна $(4a-1)\sqrt{a^2-2a-8}$?

Ответ: $a=7$.

1878*. (ВМК (отделение прикладной информатики), 2001, №3) При всех значениях параметра b решить неравенство
$$|b-2x|\leq x+3.$$

Ответ: если $b>-6$, то $\frac{b-3}{3}\leq x\leq b+3$; если $b=-6$, то $x=-3$; если $b<-6$, то $\emptyset$.

1879.(МШЭ, 2006, №7) При всех значениях параметра b решите неравенство
$$2(b-1)\sqrt{3x+1}+1\geq 3bx+b-3x.$$

Ответ: если $b=1$, то $x \geq -\frac{1}{3}$; если $b>1$, то $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$; если $b<1$, то $x=-\frac{1}{3}$, $x \geq 1$.

1880*. (психолог., 2001, №5) При каждом значении параметра a решить неравенство

$$ax^4 + x^3 + (2a+3a^3)x^2 + 2x + 6a^3 > 0.$$

Ответ: если $a \leq -\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, то $\emptyset$;
если $a \in \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{12}}; 0\right)$, то $\left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}; \frac{-1-\sqrt{1-a^4}}{2a}\right)$;
если $a=0$, то $(0;+\infty)$;
если $a \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[4]{12}}\right)$, то $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{1-a^4}}{2a}; +\infty\right)$;
если $a=\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, то $(-\infty;+\infty) \setminus \left\{-\frac{\sqrt[4]{12}}{2}\right\}$;
если $a>\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, то $(-\infty;+\infty)$.

1881.(психолог., 2006, №5) При всех a решить систему неравенств

$$\begin{cases} |2x+2a| > |x| + a, \\ ax < 0. \end{cases}$$

Ответ: если $a<0$, то $x \in (0;-a) \cup (-a;+\infty)$; если $a>0$, то $x \in (-\infty;-3a) \cup \left(-\frac{a}{3}; 0\right)$; если $a=0$, то множество решений неравенства пусто.

1882.(физ., 1995, июль, №7) Для всех значений a решить неравенство

$$3^{\sqrt{x+1}} > 2^{a-1}.$$

Ответ: если $a<1$, то $x \geq -1$; если $a \geq 1$, то $x > ((a-1)\log_3 2)^2 - 1$.

1883.(физ., 1996, март, №7) Для любого допустимого значения a решить неравенство

$$2 - \log_a x < \log_a(x-1).$$

Ответ: если $0<a<1$, то $1<x<\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$; если $a>1$, то $x>\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$.

1884.(физ., 1996, май, №7) Для любого значения a решить уравнение

$$(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}} = (\log_9 4)^{\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}.$$

Ответ: если $a=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, то $x=\frac{-5+\sqrt{3}}{2}$; если $a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, то $x=\frac{-5-\sqrt{3}}{2}$; если $a \neq \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$, то уравнение не имеет корней.

1885.(физ., 1997, июль, №7) Для любых значений a решить неравенство

$$a-2 < (a-1)\sqrt{x+1}.$$

Ответ: если $a<1$, то $-1 \leq x < \left(\frac{a-2}{a-1}\right)^2 - 1$; если $1 \leq a < 2$, то $x \geq -1$; если $a \geq 2$, то $x > \left(\frac{a-2}{a-1}\right)^2 - 1$.

1886.(физ., 1998, март, №8)При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} \log_3(y-3) - 2\log_9 x = 0, \\ (x+a)^2 - 2y - 5a = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Ответ: $-\frac{7}{3} \leq a < 6$.

1887.(физ., 1998, июль, №7)Для любых допустимых значений a решить неравенство

$$\log_a (3a^x - 5) < x + 1.$$

Ответ: если $0 < a < 1$, то $x < \log_a \frac{5}{3-a}$; если $1 < a < 3$, то $\log_a \frac{5}{3} < x < \log_a \frac{5}{3-a}$; если $a \geq 3$, то $x > \log_a \frac{5}{3}$.

1888.(физ., 1999, март, №7)Для любых допустимых значений a решить уравнение

$$\log_a \left(x^2 - 3a\right) = \log_a(a^2 - 3x).$$

Ответ: если $0 < a < 1$ или $1 < a \leq 3$, то уравнение имеет один корень $x = -a - 3$; если $a > 3$, то уравнение имеет два корня: $x_1 = -a - 3$, $x_2 = a$.

1889.(физ., 1999, июль, №8)Для любого допустимого значения a решить неравенство

$$\log_{2a} \left(\log_3 x^2\right) > 1$$

и найти, при каком значении a множество точек x, не являющихся решениями неравенства, представляет собой промежуток, длина которого равна 6.

Ответ: если $0 < a < \frac{1}{2}$, то множество решений – объединение двух интервалов: $(-3^a; -1)$ и $(1; 3^a)$; если $a > \frac{1}{2}$, то множество решений – объединение двух промежутков: $(-\infty; -3^a)$ и $(3^a; +\infty)$. Множество решений является промежутком длины 6 при $a = 1$.

1890.(физ., 2000, май, №7)Для каждого допустимого значения a решить неравенство

$$a^x(a-1)^x - 2a^{x+1} - (a-1)^x + 2a \leq 0$$

и найти, при каких значениях a множество решений неравенства представляет собой промежуток длины 2.

Ответ: если $1 < a < 2$, то множество решений – объединение двух промежутков: $\left(-\infty; \log_{a-1}(2a)\right]$ и $[0; +\infty)$; если $a = 2$, то множество решений – промежуток $[0; +\infty)$; если $a > 2$, то множество решений – отрезок $\left[0; \log_{a-1}(2a)\right]$. Множество решений является промежутком длины 2 при $a = 2 + \sqrt{3}$.

1891.(физ., 2001, март, №7)Для любого значения a решить неравенство

$$3(2x - a) + 5a\sqrt{2x - a} - 2a^2 > 0.$$

Ответ: если $a < 0$, то $x > 2a^2 + \frac{a}{2}$; если $a \geq 0$, то $x > \frac{a^2}{18} + \frac{a}{2}$.

1892.(физ., 2001, май, №7)Для каждого целого значения m найти все решения уравнения

$$\log_{\frac{m^2}{4}+x^2}(3x)^{m^2+1} = m^2 + 1.$$

Ответ: если $m = 0$, то уравнение имеет единственный корень $x = 3$; если $m = \pm 1$, то уравнение имеет 4 корня: $x = \pm\frac{3\pm 2\sqrt{2}}{2}$; если $m = \pm 2$, то уравнение имеет 2 корня: $x = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; если $m = \pm 3$, то уравнение имеет 2 корня: $x = \pm\frac{3}{2}$; если $m = \pm 4, \pm 5, \ldots$, то уравнение не имеет корней.

1893.(физ., 2002, июль, №7)Для каждого значения a решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{9}}(x^2 - 6x - a^2 - 5a + 12) < -1$$

и найти, при каких значениях a множество чисел x, не являющихся решениями этого неравенства, представляет собой отрезок на числовой оси, длина которого меньше $2\sqrt{3}$.

Ответ: если $-3 < a < -2$, то множество решений – R; если $a \leq -3$ или $a \geq -2$, то $x < 3 - \sqrt{a^2 + 5a + 6}$, $x > 3 + \sqrt{a^2 + 5a + 6}$. Множество чисел x, не являющихся решениями неравенства, образует отрезок, длина которого меньше $2\sqrt{3}$, при $\frac{-5-\sqrt{13}}{2} < a \leq -3$, $-2 \leq a < \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$.

1894.(физ., 2003, март, №7)Для каждого допустимого значения a в уравнении

$$\sqrt{x} + \sqrt{\sqrt{a} - x} = a$$

1) найти число различных решений уравнения;

2) найти эти решения.

Ответ: допустимыми являются $a \geq 0$. Если $a = 0$, то уравнение имеет единственный корень $x = 0$; если $0 < a < 1$, то уравнение не имеет корней; если $1 \leq a < \sqrt[3]{4}$, то уравнение имеет два корня $x = \frac{\sqrt{a}\pm a\sqrt{2\sqrt{a}-a^2}}{2}$; если $a = \sqrt[3]{4}$, то уравнение имеет единственный корень $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; если $a > \sqrt[3]{4}$, то уравнение не имеет корней.

1895.(физ., 2003, май, №7)Для каждого допустимого значения a решить неравенство

$$\sqrt{7 - \log_a x^2} > \log_a x \cdot \left(1 - 2\log_{|x|} a\right).$$

Ответ: допустимыми являются $a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$. Если $0 < a < 1$, то $a^3 < x < 1$, $x > 1$; если $a > 1$, то $0 < x < 1$, $1 < x < a^3$.

1896.(физ., 2004, март, №7) Для каждого значения a решить уравнение

$$\log_2^2\left(\frac{x-3a}{x}\right) + 4\left[\log_4(x-3a)\right]\log_2 x - 8\log_4^2 x = 0.$$

Ответ: если $a = 0$, то $x > 0$; если $a \neq 0$, то $x = \frac{3a+\sqrt{9a^2+4}}{2}$.

1897.(физ., 2005, июль, №7) Для каждого допустимого значения a решить неравенство

$$\log_{ax}\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \log_{a^2-2}(a-1) < 0.$$

Ответ: если $\sqrt{2} < a < \sqrt{3}$, то $x > \frac{1}{a}$; если $\sqrt{3} < a < 2$ или $a > 2$, то $0 < x < \frac{1}{a}$.

1898.(ВШБ, 2006, №2) Решить уравнение $\sqrt{-x^2 + 8x - 12} = m - 2$, при условии, что m – простое число.

Ответ: если $m = 2$, то уравнение имеет два корня: $x_1 = 2$, $x_2 = 6$; если $m = 3$, то уравнение имеет два корня: $x_1 = 4 + \sqrt{3}$, $x_2 = 4 - \sqrt{3}$; для других простых чисел m уравнение не имеет корней.

1899*. (геолог., отд. геофизики, 1977, №5) Найти все значения параметра k, при каждом из которых существует хотя бы одно общее решение у неравенств

$$x^2 + 4kx + 3k^2 > 1 + 2k \text{ и } x^2 + 2kx \leq 3k^2 - 8k + 4.$$

Ответ: $k < \frac{1}{2}$, $k > \frac{3}{2}$.

1900.(экзамен для победителей III и IV этапов Всероссийской олимпиады, 2004, №4) При каждом значении параметра a решить систему

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 8a^2, \\ xy = 2a^2. \end{cases}$$

Ответ: если $a = 0$, то единственное решение $(0, 0)$; если $a \neq 0$, то два решения: $(2a, a)$ и $(-2a, -a)$.

1901.(ВМК, 2006, апрель, №6)Найти значения параметра a, при которых все решения неравенства

$$\left|x^2 + (a+1)x + a^2\right| + x \leq 7$$

содержатся в множестве $(-\infty; -1)$.

Ответ: $a < -\frac{8}{3}$ или $a > \frac{1+\sqrt{33}}{2}$.

1902.(геолог., устный, 1999) Для всех значений a решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x} + \sqrt{1 - x} = a.$$

Ответ: если $a = 1$, то $x = 0$; если $a = -1$, то $x = 1$; если $a \neq \pm 1$, то $\emptyset$.

1903.(Севастополь, 2003, июль, №9) Для всех значений параметра $a \in (2; 4)$ найдите все целые числа x и y, удовлетворяющие равенству

$$x^2 + 5xy + 6y^2 = a.$$

Ответ: если $a \neq 3$, то уравнение не имеет решений в целых числах; если $a = 3$, то уравнение имеет четыре решения: (3;-2), (-3;2), (-7;2), (7;-2).

1904.(ВМК, устный, 2002)Для всех значений параметра $a \in (0; 1)$ решить уравнение

$$\left(\frac{1 - a^2}{1 + a^2}\right)^x + \left(\frac{2a}{1 + a^2}\right)^x = 1.$$

Ответ: для всех $a \in (0; 1)$ уравнение имеет один корень $x = 2$.

1905.(ФГУ, 2003, июль, №5) Для каждой пары чисел a и b найдите все решения неравенства

$$b \cdot x^2 + a \leq 0.$$

Ответ: множество решений неравенства есть:

$\emptyset$, если $a > 0$, $b \geq 0$;

$(-\infty;+\infty)$, если $a \le 0$, $b \le 0$;
$\left(-\infty;-\sqrt{-\frac{a}{b}}\right] \cup \left[\sqrt{-\frac{a}{b}};+\infty\right)$, если $a > 0$, $b < 0$;
$\left[-\sqrt{-\frac{a}{b}};\sqrt{-\frac{a}{b}}\right]$, если $a \le 0$, $b > 0$.

1906.(эконом. (кибернетика), 1983, №6) Для каждого неотрицательного a решить неравенство

$$16a^3x^4 + 8a^2x^2 + 16x + a + 4 \ge 0.$$

Ответ: если $a = 0$, то $x \ge -\frac{1}{4}$; если $a \in (0;1)$, то $x \le \frac{-1-\sqrt{1-a}}{2a}$ или $x \ge \frac{-1+\sqrt{1-a}}{2a}$; если $a \ge 1$, то $x \in R$.

1907.(ФГУ, 2005, июль, №6) Найдите все значения a, для которых при любом положительном b уравнение

$$a\log_{\left(\frac{1}{x}-2\right)} 4 = \log_2\left(\frac{1}{x}-2\right) - b$$

имеет хотя бы одно решение, меньшее $1/3$.

Ответ: $a \ge 0$.

1908.(физ., 2003, май, №7) Для каждого допустимого значения параметра a решить неравенство

$$\sqrt{7-\log_a x^2} > (\log_a x)\cdot(1 - 2\log_{|x|} a).$$

Ответ: если $0 < a < 1$, то $a^3 < x < 1,\ x > 1$; если $a > 1$, то $0 < x < 1, 1 < x < a^3$.

1909.(мех-мат, 1994, июль, №6) При всех значениях параметра a решить уравнение

$$2x^2 + 2ax - a^2 = \sqrt{4x + 2a + 3a^2}.$$

Ответ: если $a = 0$, то $x_1 = 0; x_2 = 1$;
если $a \in \left(-\frac{2}{\sqrt{3}};0\right) \cup \left(0;\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, то $x = \frac{1-a+\sqrt{1+3a^2}}{2}$;
если $a \in \left(-\infty;-\frac{2}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{3}};+\infty\right)$, то $x_1 = \frac{1-a+\sqrt{1+3a^2}}{2}$, $x_2 = \frac{-1-a-\sqrt{3a^2-3}}{2}$;

1910.(Севастополь, 2005, №10) Пусть числа x и y удовлетворяют неравенствам

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) \ge \log_{\frac{1}{2}} y$$

и

$$\log_2(x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5) \le \log_2 5.$$

Найдите все a, для которых максимальное значение выражения $ax+y$ равно 4.

Ответ: $a = 2\sqrt{10} - 6$.

1911.(мех-мат, устный, 1999) Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$|ax + 2y - 5| + a|x + 2ay - 2| \le 3a$$

задает на координатной плоскости параллелограмм с внутренностью.

Ответ: $0 < a < 1$; $a > 1$.

1912.(олимпиада "Ломоносов-2012", II тур, №4) Найдите все значения $a > 0$, при каждом из которых из неравенства

$$x^2 + y^2 \le a$$

следует неравенство

$$(|x| + 3)(|y| + 3) \le 25.$$

Ответ: $0 < a \le 8$.

1913.(географ., 1997, май, №6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых множество точек пространства с координатами $(x; y; z)$, удовлетворяющих уравнению

$$|x - 2a| + |x + 2a| + |y - 2a| + |y + 2a| + |z - a| + |z + a| = a^2 + 9,$$

1. содержит шар радиуса $r = \frac{\pi}{2}$,
2. имеет ненулевой объём и содержится в шаре радиуса $R = \pi$.

Ответ: 1) $a = \pm 9$; 2) $a = \pm 1$.

1914.(мех-мат, 1997, июль, №5) Для всех значений параметра a решить уравнение

$$\left| x^4 + \frac{2a-1}{3}x^2 + \frac{2a^2+a+2}{12} \right| = \frac{a}{2} \cdot \left| x^2 + \frac{a}{3} - \frac{1}{6} \right| + \frac{a+1}{6}.$$

Ответ: если $a < -1$, то $\emptyset$;
если $-1 \le a \le 0$, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2-a}{6}}$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-a}{2}}$;
если $0 < a < \frac{1}{2}$, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2-a}{6}}$;
если $\frac{1}{2} \le a \le 2$, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2-a}{6}}$; $x_3 = 0$;
если $a > 2$, то $x = 0$.

1915.(ВМК (отд. бакалавров), 2003, июль, №4) При всех значениях параметра c решите уравнение

$$4^x + c \cdot 25^x = 3 \cdot 10^x.$$

Ответ: если $c \le 0$, то $x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{3+\sqrt{9-4c}}{2}$;
если $0 < c < \frac{9}{4}$, то $x_1 = \log_{\frac{2}{5}} \frac{3-\sqrt{9-4c}}{2}$, $x_2 = \log_{\frac{2}{5}} \frac{3+\sqrt{9-4c}}{2}$;
если $c = \frac{9}{4}$, то $x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{3}{2}$;
если $c > \frac{9}{4}$, то корней нет.

1916.(ВМК (отд. бакалавров), 2004, июль, №4) При всех значениях параметра d решите неравенство

$$4^x - d \le 2^{x+2}.$$

Ответ: если $d < -4$, то $\emptyset$;

если $d=-4$, то $\{1\}$;
если $-4<d<0$, то $\left[\log_2(2-\sqrt{d+4});\log_2(2+\sqrt{d+4})\right]$;
если $d\geq 0$, то $\left(-\infty;\log_2(2+\sqrt{d+4})\right]$.

1917.(ФНМ, 2004, апрель, №6) При каких значениях параметра a неравенство

$$\begin{aligned}&(3+2\sqrt{2})^x+(a^4+6-4a^2)(3-2\sqrt{2})^x+2^{2y}\\&-a\cdot 2^{y+1}+a^2-\sqrt{8}\leq 0\end{aligned}$$

имеет хотя бы одно решение (x,y)?

Ответ: $a=\sqrt{2}$.

1918.(эконом. (менеджмент), 2002, июль, №6) Найти все значения a, при которых неравенство

$$\begin{aligned}&\sqrt[4]{x^2-6ax+10a^2}+\sqrt[4]{3+6ax-x^2-10a^2}\geq\\&\sqrt[4]{\sqrt{3}a+24-\frac{3}{\sqrt{2}}+\left|y-\sqrt{2}a^2\right|+\left|y-\sqrt{3}a\right|}\end{aligned}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

1919.(Севастополь, 2003, май, №8) При всех натуральных значениях n решите неравенство

$$\sqrt[n]{(1+2^x)^2}-\sqrt[n]{1-4^x}\geq\sqrt[n]{(1-2^x)^2}.$$

Ответ: если число n – нечетное, то

$$x\geq\log_2\left(\frac{2^n-(\sqrt{5}-1)^n}{2^n+(\sqrt{5}-1)^n}\right);$$

если число n – четное, то

$$\log_2\left(\frac{2^n-(\sqrt{5}-1)^n}{2^n+(\sqrt{5}-1)^n}\right)\leq x\leq 0.$$

1920.(хим., 2000, май, №6) При каждом значении параметра a решить неравенство

$$\sqrt{x+2a}>x+\sqrt{2a}.$$

Ответ: допустимыми являются неотрицательные значения a;
если $0\leq a<\frac{1}{8}$, то $\left(0;1-2\sqrt{2a}\right)$;
если $a=\frac{1}{8}$, то $\emptyset$;
если $\frac{1}{8}<a\leq\frac{1}{2}$, то $\left(1-2\sqrt{2a};0\right)$;
если $a>\frac{1}{2}$, то $[-2a;0)$.

1921.(эконом. (менеджмент), 1996, №6) При каких значениях параметра p площадь фигуры, заданной на координатной плоскости уравнением

$$|2x+y|+|x-y+3|\leq p,$$

будет равна 24?

Ответ: $p = 6$.

1922.(физ., 2002, март, №7) Для каждого значения a решить систему

$$\begin{cases} 4\log_4^2 x + 9\log_8^2 y \leq 4(a^2 + a), \\ \log_2^2 xy \geq 8(a^2 + a). \end{cases}$$

Ответ: Если $a < -1$ или $a > 0$, то $\left(2^{\sqrt{2(a^2+a)}}; 2^{\sqrt{2(a^2+a)}}\right)$ или $\left(2^{-\sqrt{2(a^2+a)}}; 2^{-\sqrt{2(a^2}}\right.$

если $a = -1$ или $a = 0$, то $\{(1;1)\}$;

если $-1 < a < 0$, то $\emptyset$.

1923.(ВМК, 1981, №4) Для каждого значения параметра a найти все x, удовлетворяющие равенству

$$\begin{aligned} [1 + (a+2)^2]\log_3(2x - x^2) \quad &+ \quad [1 + (3a-1)^2]\log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = \\ &= \quad \log_3(2x - x^2) + \log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Ответ: если $a = \frac{1}{3}$, то $x = 1$; если $a \neq \frac{1}{3}$, то $\emptyset$.

1924.(ВМК, 1989, июль, №5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{\frac{1}{\pi}}\left(\frac{a^2 + 4\pi^2 + 4}{4x - x^2 - 2(a - 2\pi)|x - 2| + 4\pi a}\right) - \sqrt{(x - 5a + 10\pi - 34)(|\pi - x| - a + \pi + 2} =$$

имеет по крайней мере одно целочисленное решение.

Ответ: $a_1 = 2\pi - 8$, $a_2 = 2\pi$, $a_3 = 2\pi - 1$.

1925.(мех-мат., 2003, май, №6) Найти все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\log_x \frac{x - a}{1 - ax} + \log_{x-1} \frac{x - a - 1}{a + 1 - ax} \geq 0$$

имеет хотя бы три целочисленных решения.

Ответ: $-1 \leq a < \frac{1}{5}$.

1926.(ИСАА, 2007, №6)Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$6x^2 + 4a^2 + 6ax - 3x - 24a + 35 < 0$$

содержит хотя бы одно целое число.

Ответ: $2 < a < 7$.

1927.(геолог., 2003, июль, №7) Найдите все значения a, для каждого из которых существует целое четное n, удовлетворяющее равенству

$$5^a n^2 - 5^a + n^2 5^{2-a} = 40n + 5^{2-a}.$$

Ответ: $a_1 = 1 + \log_5 \frac{8+\sqrt{55}}{3}$, $a_2 = 1 + \log_5 \frac{8-\sqrt{55}}{3}$, $a_3 = \log_5 \frac{16+\sqrt{31}}{3}$, $a_3 = \log_5 \frac{16-\sqrt{31}}{3}$.

1928.(геолог., устный, 2000) Найти наибольшее целое значение a, при котором уравнение
$$(3-x)^5 = |x+a|^5$$
не имеет решений.

Ответ: $a=-4$.

1929.(геолог., 2010, №6) Найдите наименьшее и наибольшее значения параметра a, при которых уравнение
$$\sqrt{x-a}+\sqrt{x^3+1}=2$$
имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $a_{\min}=-5$, $a_{\max}=\sqrt[3]{3}$.

1930.(Олимпиада "Ломоносов-2008", №3)При каких значениях a существует единственное решение системы
$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ (x-3)^2+(y+4)^2=a? \end{cases}$$

Ответ: $a=9$ или $a=49$.

1931.(мех-мат, 2009, устный) Найти все значения параметра c, при каждом из которых множество всех точек координатной плоскости, координаты которых $(x;y)$ удовлетворяют системе
$$\begin{cases} \frac{x^2+y^2-16x+10y+65}{x^2+y^2-14x+12y+79}\le 0, \\ (x-c)(y+c)=0 \end{cases}$$
является отрезком.

Ответ: $5-2\sqrt{6}<c<8-2\sqrt{6}$, $5+2\sqrt{6}<c<8+2\sqrt{6}$.

1932.(ИСАА, 2002, июль, №7) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система
$$\begin{cases} x^2+y^2-6|x|-6|y|+17\le 0, \\ x^2+y^2-2y=a^2-1 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $-6\le a\le 1-\sqrt{13}$; $\sqrt{13}-1\le a\le 6$.

1933.(почвовед., 2006, №7) Определить, при каких значениях параметра b при любых значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} x^2+y^2-5x+6y+4=0, \\ y+ax+ab=0 \end{cases}$$
имеет ровно два различных решения (x,y).

Ответ: $-4<b<-1$.

1934.(психолог., 2004, июль, №5) Найти все значения параметра a, при которых уравнение
$$\left|x^2-5|x|\right| = a(x+4)$$

имеет ровно три различных корня.

Ответ: $a_1 = 0$; $a_2 = 1$.

1935.(фил., 2004, июль, №6) Дана система уравнений

$$\begin{cases} y = a|x - 3a|, \\ |x| = b - |y|. \end{cases}$$

а) При каких значениях параметров a и b эта система относительно неизвестных x и y имеет бесконечно много решений?

б) На плоскости (x, y) изобразить множество точек, координаты которых таковы, что система относительно неизвестных a и b имеет ровно три решения.

Ответ: а) $a = 1, b = 3$ или $a = -1, b = 3$; б) искомое множество состоит из двух частей: первая часть расположена в первой четверти и ограничена снизу осью Ox, а сверху – параболой $y = \frac{x^2}{12}$; вторая часть расположена в третьей четверти и ограничена сверху осью Ox, а снизу – параболой $y = -\frac{x^2}{12}$.

1936.(ФГУ, 2002, июль, №6) Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left(3\sqrt{x|x|} + |y| - 3\right)(|x| + 3|y| - 9) = 0, \\ (x - a)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Ответ: -4; 4; 6.

1937.(ВШБ., 2003, апрель, №8) Найти все значения параметра p, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x| + |y| - p) \cdot (|x| + |y| + |x + y| - 2p) = 0, \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{p^2} \end{cases}$$

имеет ровно 4 различных решения.

Ответ: $p = 2^{\frac{1}{4}}, 2^{-\frac{1}{4}} < p \leq 1$.

1938.(географ., 2000, июль, №6) Даны функции $f(x, y) = |y| + 3|x| - 3$ и $g(x, y, a) = y^2 + (x - a) \cdot (x + a)$.

а) При каком наименьшем положительном значении параметра a система уравнений

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y, a) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения?

б) При этом значении параметра a найдите площадь фигуры, координаты (x, y) всех точек которой удовлетворяют неравенству

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y, a)} \leq 0.$$

Ответ: $a = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $S = \frac{60 - 9\pi}{10}$.

1939.(почвовед., 1995, №5) При каких значениях параметра b система уравнений

$$\begin{cases} 4y = 4b + 3 - x^2 + 2x, \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$

имеет два действительных решения?

Ответ: $-2 < b < 0$.

1940.(хим., 1986, №5) Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|}, \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Ответ: $a_1 = -\frac{1}{4}$; $a_2 = -\frac{1}{32}$.

1941.(географ., 1994, №5) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $2 \le a < 3$ или $3 < a \le 4$.

1942.(ФФМ, 2003, май, №6) Найти все действительные значения параметра a, при которых не найдется ни одной такой пары чисел (u, v), чтобы функция

$$f(x) = vx^4 + a(au-1)x^3 - 2u - 2$$

удовлетворяла одновременно двум условиям $f(-1) \ge -2u$ и $f(1) \le -2$.

Ответ: -1.

1943.(олимпиада "Ломоносов-2012", заочный тур, 10-11 кл., №5)Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|x-1| + |x-2| + \dots + |x-2012| = ax + b$$

ни при одном значении параметра b не имеет ровно двух корней.

Ответ: $a \ge 2012$, $a \le -2012$.

1944.(мех-мат, 2009, №4) Найти все целые значения x из отрезка $[19; 29]$, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{a^6 + 8a^5 - 2}{a^x} \le 1,$$

где a – корень уравнения

$$y^{17} + 2y^{11} + 4y^5 = 1.$$

Ответ: 19, 20, 21, 22, 23.

1945.(ВМК, 2010, №5) Найдите все значения параметра a, при которых система имеет решение:

$$\begin{cases} 64 \cdot 25^{-\sqrt{y}} + (8 - 40a) \cdot 5^{-\sqrt{y}} - 5a \le 0, \\ 40 \cdot 5^{-\sqrt{y}} = 80 \cdot 2^x + 5a + a \cdot 2^{-x}. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{4}{5} \le a \le \frac{72 - 16\sqrt{14}}{5}$.

9.2 Графический метод решения

1946*. (ВМК, 1982, №5) При всех a решить уравнение

$$|x+3|-a|x-1|=4$$

и определить, при каких a оно имеет ровно два решения.

Ответ: при $|a|>1$ $x=1$; при $a=1$ $x\geq 1$; при $|a|<1$ $x_1=1$, $x_2=\frac{a+7}{a-1}$; при $a=-1$ $-3\leq x\leq 1$. Два решения – при $|a|<1$.

1947.(геолог., 1991, №6) При всех значениях параметра a решить уравнение

$$|x+2|+a|x-4|=6.$$

Ответ: при $a<-1$ $x=4$; при $a=-1$ $x\geq 4$; при $-1<a<1$ $x_1=4$, $x_2=\frac{4a-8}{a+1}$; при $a=1$ $-2\leq x\leq 4$; при $a>1$ $x=4$;

1948.(геолог., 2001, май, №7) При каких значениях y уравнение

$$|3x+6|+|3x-8|=yx+12$$

имеет единственное решение x?

Ответ: $y=\frac{3}{4}$; $y=-1$; $y\leq -6$; $y\geq 6$.

1949*. (хим., 1987, №5) Найти все значения параметра p, при каждом из которых множество всех решений неравенства

$$(p-x^2)(p+x-2)<0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2\leq 1$.

Ответ: $p\leq 0$, $p\geq 3$.

1950.(физ., 2007, июль, №7) Для каждого значения a из промежутка $(-3;0)$ найти число различных решений уравнения

$$\left(2x^2-5ax+2a^2\right)\sqrt{x-\frac{2}{a}}=0.$$

Ответ: если $-3<a\leq -2$, то уравнение имеет 1 корень; если $-2<a\leq -1$, то уравнение имеет 2 корня; если $-1<a<0$, то уравнение имеет 3 корня.

1951.(физ., 1994, июль, №7)Для каких значений a система неравенств

$$\begin{cases} -x^2+12x-a\geq 0,\\ x\leq 2 \end{cases}$$

выполняется хотя бы при одном значении a?

Ответ: $a\leq 20$.

1952.(физ., 1997, март, №7) Найти все значения a, при которых неравенство

$$\log_a(x^2+4)>1$$

выполняется для всех значений x.

Ответ: $1 < a < 4$.

1953.(физ., 1997, май, №7) Найти все значения a, при которых неравенство

$$\frac{x-2a-4}{x+3a-2} \le 0$$

выполняется для всех x из промежутка $1 \le x \le 3$.

Ответ: $a \le -\frac{3}{2}$, $a > \frac{1}{3}$.

1954.(физ., 2000, июль, №7)При каких значениях a неравенство

$$\left(x^2 - (a+2)x - 2a^2 + 4a\right)\sqrt{1-x} \le 0$$

имеет единственное решение?

Ответ: $\frac{1}{2} \le a \le 1$.

1955.(физ., 1993, май, №7) Для любого a решить уравнение

$$2|x| + |x-3| = a.$$

Ответ: $\emptyset$, если $a < 3$; $\{0\}$, если $a = 3$; $\{a-3, \frac{3-a}{3}\}$, если $3 < a \le 6$; $\{\frac{a+3}{3}, \frac{3-a}{3}\}$, если $a > 6$.

1956.(ВШБ, 2004, июль, №8) Найти все значения параметра $p \in [-4; 4]$, при которых неравенство

$$(p-2)\cdot((x+1)(p-3)+2x) > 0$$

выполняется при любых $x \ge 0$.

Ответ: $p \in [-4; 1] \cup (3; 4]$.

1957.(геолог., устный, 2005) При каких значениях параметра a уравнение

$$|x-a| = \frac{x}{2} + 1$$

имеет не более одного корня?

Ответ: $a \le -2$.

1958.(ИСАА, 2000, июль, №5) Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$|x^2 - 2x + a| > 5$$

не имеет решений на отрезке $[-1; 2]$.

Ответ: $-4 \le a \le 2$.

1959.(психолог, 2003, июль, №5) При каких значениях параметра a уравнение

$$2|x-9a| - 2a^2 + 35 + x = 0$$

не имеет решений? При каких (остальных) значениях параметра a все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-30; 63]$?

Ответ: $-\frac{5}{2} < a < 7$; $\frac{9-\sqrt{211}}{2} \le a \le -\frac{5}{2}$, $a = 7$.

1960.(договорные программы, 2008, №9) Найдите все a, при каждом из которых среди решений неравенства

$$\log_5(x^2 + 2ax - a + a^2) \le 1$$

найдутся два числа, разность которых равна 1.

Ответ: $-\frac{19}{4} \le a < 4$.

1961.(ВМК/эконом/физ (подготовительное отд.), 2000, №6) При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{|x-2|(x-3)}{x^2-2x-3} = a$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a < -1;\ a = 0;\ a = \frac{1}{4};\ a \ge 1$.

1962*. (географ., 2004, июль, №5) При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |x-a| + |y-a| + |a+1-x| + |a+1-y| = 2, \\ y + 2|x-5| = 6 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a_1 = 2;\ a_2 = \frac{16}{3}$.

1963*. (мех-мат, устный, 1998) Найти количество корней уравнения

$$\{x\} - \frac{1}{2} = \log_2 \frac{a}{x}$$

для каждого значения $a \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{2}\right]$.

Ответ: 2.

1964*. (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2006", очный тур-ВМК, №3) При каких значениях параметра a уравнение

$$x2^{ax} = 2$$

не имеет решений.

Ответ: $a < -\frac{1}{2e\ln 2}$.

1965.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2006", очный тур-ВМК, №3) При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_3(ax) = 3x$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $a < 0$ или $a \ge 3e\ln 3$.

1966.(соц., 2007, июль, №8) При каких значениях c уравнение

$$-\sqrt{16-x^2} = c + x$$

имеет единственное решение?

Ответ: $-4 < c \le 4$, $c = -4\sqrt{2}$.

1967.(геолог., 2002, май, №7) При каких положительных значениях параметра a неравенство

$$\frac{a+2x}{ax-4} \ge \frac{5}{x}$$

выполнено для всех $x > 10$?

Ответ: $\frac{2}{5} \le a \le \frac{11}{2}$.

1968*. (олимпиада "Ломоносов-2005", №8) Найти все значения a, при которых уравнение
$$||x+a|-2x|-3x = 7|x-1|$$
имеет не более одного корня.

Ответ: $-6 \le a \le 4$.

1969*. (МШЭ, 2007, №8) При каких значениях параметра a уравнение
$$16^x - 3\cdot 2^{3x+1} + 2\cdot 4^{x+1} - (4-4a)\cdot 2^{x-1} - a^2 + 2a - 1 = 0$$
имеет три различных корня?

Ответ: $a \in (0;5) \setminus \{1;4\}$.

1970.(хим., 2005, июль, №6) При каких значениях параметра a уравнение
$$|x| + \left|\frac{x+1}{3x-1}\right| = a$$
имеет ровно три решения?

Ответ: $a = 2$.

1971.(эконом. (полит. эконом.), 1983, №6) Определить, при каких значениях a уравнение
$$x - \frac{a}{2} = 4\left|4|x| - a^2\right|$$
имеет ровно три корня. Найти эти корни.

Ответ: $a = -\frac{1}{8}$; $a = -2$,
при $a = -\frac{1}{8}$ $x = 0$; $-\frac{1}{136}$; $\frac{1}{120}$,
при $a = -2$ $x = -1$; $\frac{15}{17}$; $\frac{17}{15}$.

1972.(эконом. (полит. эконом.), 1977, №5С) Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство
$$3 - |x-a| > x^2$$
имеет хотя бы одно отрицательное решение.

Ответ: $-\frac{13}{4} < a < 3$.

1973.(мех-мат, 1971, №4) Найти все значения α, при которых система неравенств
$$\begin{cases} x^2 + 2x + \alpha \le 0, \\ x^2 - 4x - 6\alpha \le 0 \end{cases}$$
имеет единственное решение.

Ответ: $\alpha_1 = 0; \alpha_2 = 1$.

1974*. (мех-мат, 2001, март, №6) Найти все значения a, при которых система
$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \le 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \ge 0 \end{cases}$$
имеет единственное решение.

Ответ: $a_1 = -\frac{3}{4}$, $a_2 = \frac{4}{3}$.

1975.(мех-мат, 1971, №4) Найти все значения α, при которых решения системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2x \le \alpha - 1, \\ x^2 - 4x \le 1 - 4\alpha \end{cases}$$

образуют на числовой оси отрезок длины 1.

Ответ: $\alpha_1 = \frac{1}{4}; \alpha_2 = 1$.

1976.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2009", очный тур: Томск, Улан-Удэ, №4) При каких значениях параметра a все решения неравенства

$$|x - a| \le 3 - x^2$$

образуют отрезок длины 1?

Ответ: $a = \pm 3$.

1977.(почвовед., 1996, №6) Определить, при каких значениях a решения неравенства

$$\sqrt{x + a} \ge x$$

образуют на числовой прямой отрезок длины $2|a|$.

Ответ: $a_1 = 2; a_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

1978.(ВМК, 2004, июль, №5) Для каждого значения параметра a найти число решений уравнения

$$\frac{2}{16^x} - \frac{1}{8^x} - \frac{a+8}{4^x} + \frac{4-2a}{2^x} - a^2 + 4a + 5 = 0.$$

Ответ: если $a = 1 - \sqrt{2}$, $a < -\frac{5}{4}$ или $a \ge 5$, то один корень; если $a = -\frac{5}{4}$, $-1 \le a < 1 - \sqrt{2}$ или $1 - \sqrt{2} < a < 5$, то два корня; если $-\frac{5}{4} < a < -1$, то три корня.

1979.(ВМК, 1995, апрель, №4) Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$\left| \frac{1}{x} + 2a \right| > x.$$

Ответ: при $a \ge -1$ $(-\infty; 0) \cup (0; a + \sqrt{a^2 + 1})$;
при $a < -1$ $(-\infty; 0) \cup (0; a + \sqrt{a^2 + 1}) \cup (-a - \sqrt{a^2 - 1}; -a + \sqrt{a^2 - 1})$.

1980.(ВМК, 2003, апрель, №5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 5^{2x^2+3y^2-4x+8y+16} + 5^{y^2+8x-5} \le 126 \cdot 5^{x^2+2y^2+2x+4y+4}, \\ x^2 + y^2 + 12x - 8y = a; \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, но среди этих решений нет удовлетворяющих условию $2x + 3y = 0$.

Ответ: $66 - 2\sqrt{117} < a < 66 + 2\sqrt{117}$.

1981.(биолог., 2003, апрель, №6) Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{a - f(x)} = 0, \\ y^2 + \left(a - 5 \cdot 10^6\right) y + 25 \cdot 10^{10} = 0, \\ z^2 + 5 \cdot 10^3 \cdot z + a = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, где

$$f(x) = \left|x - 1^2\right| + \left|x - 2^2\right| + \cdots + \left|x - 203^2\right|.$$

Ответ: $2\ 101\ 608 \leq a \leq 4\ 000\ 000$; $6\ 000\ 000 \leq a \leq 6\ 250\ 000$.

1982.(эконом., 1992, №6) Найти все значения параметра p, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства

$$x^2 + 5(x+1) + 3|x-p| + p \leq 0$$

максимально.

Ответ: $p = -5$, $-\frac{7}{2} \leq p \leq -\frac{13}{4}$.

1983.(психолог., 1999, июль, №6) Найти все значения параметра a, при которых существует ровно 5 различных наборов $(x; y; z)$ натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 12x^2 - 4x - 2xy + 3y - 9 = 0, \\ ayz + axz + axy > xyz. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{5}{11} < a \leq \frac{6}{13}$.

1984.(мех-мат, 1997, май, №6) Найти все значения a, при каждом из которых среди решений неравенства

$$\sqrt{(a - x^2)(x^2 + a)} + a > x$$

есть ровно два различных целочисленных решения.

Ответ: $-15 \leq a < -5$, $a = 1$.

1985*. (эконом.(менеджмент), 2003, июль, №6) Найти все значения b, при которых уравнение

$$3 \cdot \sqrt[5]{x+4} - 7b^2 \cdot \sqrt[5]{32x + 96} = \sqrt[10]{x^2 + 7x + 12}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $(-\infty; -\sqrt{2/7}] \cup [-\sqrt{1/7}; \sqrt{1/7}] \cup [\sqrt{2/7}; +\infty)$.

1986.(эконом., 2003, июль, №6) Найти все значения a, при которых уравнение

$$5 \cdot \sqrt[3]{x+3} - 3a^2 \cdot \sqrt[3]{8x - 16} = \sqrt[6]{x^2 + x - 6}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $-1 < a < -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}} < a < 1$.

1987.(Олимпиада "Ломоносов-2010", №7)Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 25^x - 13 \cdot 5^x + a < 0, \\ 12\sin^4 \pi x - \cos 4\pi x = 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $a < 13\sqrt{5} - 5$.

1988.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2012", 10–11 кл., №8)При каждом действительном значении параметра a найдите количество различных действительных корней уравнения $16x^4 + ax^2 + 1 = 32x^3 + 8x$.

Ответ: при $a > 24$ нет корней, при $a = 24$ один корень $x = \frac{1}{2}$, при $-40 < a < 24$ два корня, при $a = -40$ три корня, при $a < -40$ четыре корня.

1989.(ДВИ, 2013, №8) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sin(x - a\ln|x|) = x + 1$ имеет бесконечно много решений.

Ответ: $a \neq 0$.

1990*. (ДВИ, 2012, №7) Определите, при каких значениях параметра a уравнение

$$a\sqrt{x+y} = \sqrt{3x} + 2\sqrt{y}$$

имеет единственное решение (x, y).

Ответ: $a < \sqrt{3}$, $a > \sqrt{7}$.

9.3 Использование определения корня (решения)

1991*. (хим, 2003, июль, №1) Найти все значения параметра a, при которых множество решений неравенства

$$\frac{a}{x-a} > 0$$

содержит точку $x = 1$.

Ответ: $(0; 1)$.

1992.(геолог., 1971, №3) При каких значениях a квадратное уравнение

$$x^2 - (a+3)x + a^2 = 0$$

имеет корень $x = 3$?

Ответ: $a_1 = 0$, $a_2 = 3$.

1993.(психолог., 1994, июль, №2) Известно, что $x = 1$, $y = -1$ – одно из решений системы

$$\begin{cases} 2ax + by = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{1111\pi}{6}, \\ ax^2 + by^2 = 2. \end{cases}$$

Найдите все решения данной системы.

Ответ: $\left\{(1; -1),\ \left(-\frac{1}{5}; \frac{7}{5}\right)\right\}$.

1994*. (биолог., 1970, №5) Числа a и b таковы, что система

$$\begin{cases} a^2x - ay = 1 - a, \\ bx + (3 - 2b)y = 3 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = y = 1$. Найти числа a и b.

Ответ: $a = 1$, $b = -1$.

1995.(географ., 1991, №5) Найти все действительные значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 8xy - 25 = 0, \\ x^2 = y + 2x, \end{cases}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Ответ: $|a| \geq \frac{5\sqrt{5}}{4}$.

1996*. (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2007", №3) Какие значения, в зависимости от параметра a, может принимать выражение

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2,$$

в котором числа x_1, x_2 – два различных корня уравнения $x^3 - 2007x = a$?

Ответ: *если* данное уравнение имеет два различных корня, то каковы бы ни были эти корни, искомое выражение равно 2007.

1997*. (географ., 2002, июль, №3) Квадратное уравнение $x^2 - 6px + q = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2. Числа p, x_1, x_2, q – четыре последовательных члена геометрической прогрессии. Найти x_1 и x_2.

Ответ: $x_1 = 2; x_2 = 4$ или $x_1 = -3; x_2 = 9$.

1998*. (эконом., вечернее отд., 1998, июль, №7) Найти все значения a, при которых уравнения

$$x^3 + 2ax^2 - a^2x - 2a^3 + 2 = 0$$

и

$$x^3 - ax^2 - 10a^2x + 10a^3 - 1 = 0$$

имеют хотя бы один общий корень.

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

1999.(геолог., 1997, июль, №8) При каких значениях α уравнения

$$(2x - 1)\alpha^2 - (x^2 - x + 1)\alpha - (x^3 - 4x^2 + 3) = 0,$$
$$(5 - 3x)\alpha^2 + (5x^2 - 5x - 2)\alpha - (2x^3 - 8x^2 + 6) = 0$$

не имеют общего решения?

Ответ: $\alpha \neq 0; 1; -\frac{3}{4}$.

2000*. (соц., 2002, июль, №6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(1 + a)x^2 + (1 - a)x + a + 3 = 0$$

имеет по крайней мере один корень и все его корни являются целыми числами.

Ответ: $a_1 = -1$, $a_2 = -3$, $a_3 = -\frac{5}{7}$.

2001.(олимпиада "Ломоносов-2011", II тур, №6) При каких значениях a, b и c множество действительных корней уравнения

$$x^5 + 2x^4 + ax^2 + bx = c$$

состоит в точности из чисел -1 и 1?

Ответ: $a = -6$, $b = -1$, $c = -4$.

2002.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2010" (очный тур), №5) Найдите все значения параметра a, при которых для любого значения параметра b неравенство

$$(a+b)x^2 + (3b-4a-7)x + 4a - 2b + 6 \geq 0$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $a \geq -1$.

9.4 Использование свойств линейных уравнений/линейной функции

2003*. (ВМК (отд. бакалавров), 2002, июль, №2) При каких значениях параметра b уравнение

$$9x + b^2 - (2-\sqrt{3})b - 2\sqrt{3} = b^4x - b^2(b+\sqrt{3})$$

не имеет корней?

Ответ: $b = \sqrt{3}$.

2004.(ВМК, 2002, июль, №1) При каких значениях параметра b уравнение

$$b^4x + b^2 + (2+\sqrt{2})b + 2\sqrt{2} = b^2(b+\sqrt{2}) + 4x$$

имеет бесконечно много корней?

Ответ: $b = -\sqrt{2}$.

2005.(географ., 1970, №4) При каких значениях параметра α система уравнений

$$\begin{cases} \alpha x - 4y = \alpha + 1, \\ 2x + (\alpha+6)y = \alpha + 3 \end{cases}$$

не имеет решений?

Ответ: $\alpha = -4$.

2006*. (географ., 1970, №4) При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} 2x + ay = a + 2, \\ (a+1)x + 2ay = 2a + 4 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

Ответ: $a = 3$.

9.5 Использование свойств квадратного трёхчлена

2007*. (фил., 2004, июль, №1) При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 + x + \frac{2a-1}{a+5} = 0$$

не имеет решений?

Ответ: $a < -5$, $a > \frac{9}{7}$.

2008.(ВМК, устный, 1994)Известно, что квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет действительных корней и $9a+3b+c>0$. Определите знак a.

Ответ: $a > 0$.

2009.(ВМК, устный, 2008, май) При каких значениях a один из корней уравнения $x^2-2ax-a=0$ больше 1, а другой – меньше 1?

Ответ: $a > \frac{1}{3}$.

2010.(биолог., 1975, №2) Найти все значения параметра p, при которых квадратное уравнение

$$(8x)^2+\left(2^{\frac{1}{p}+7}-80\right)x+9=0$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $p=-\frac{1}{2}$.

2011.(хим, 2003, май, №1) Найти все значения параметра b, при каждом из которых уравнение

$$(b+1)x^2+(b+2)x+1=0$$

имеет единственное решение.

Ответ: $0; -1$.

2012*. (соц., 2005, апрель, №5) При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{(a+4)x^2+6x-1}{x+3}=0$$

имеет единственное решение.

Ответ: $-4; -13; -\frac{17}{9}$.

2013.(Ташкент, 2007, №7)При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{(a-3)x^2+5x-2}{x-4}=0$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a_1=3$, $a_2=-\frac{1}{8}$, $a_3=\frac{15}{8}$.

2014.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2013", №4) Определите, сколько существует различных значений a, при которых уравнение $(1-a^2)x^2+ax+1=0$ имеет единственное решение.

Ответ: 4.

2015.(географ., 1980, июль, №1) Найти все значения параметра k, при которых уравнение

$$x^2-2kx+k^2+2k-1=0$$

имеет два различных действительных решения.

Ответ: $k < \frac{1}{2}$.

2016.(ВМК, 1980, июль, №4) При каких значениях параметра a уравнение

$$(3a-1)x^2+2ax+3a-2=0$$

имеет два действительных решения.

Ответ: $\frac{9-\sqrt{17}}{16} < a < \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} < a < \frac{9+\sqrt{17}}{16}$.

2017.(Севастополь, 2008, №7) Найти все такие значения параметра a, что уравнение

$$ax^2 + (4a^2 - 3)x - 10 = 0$$

имеет два различных корня, модули которых равны.

Ответ: $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2018.(мех-мат, 1989, июль, №6) Найти наибольшее из значений z, для которых существуют числа x, y, удовлетворяющие уравнению

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 4.$$

Ответ: $z_{\max} = \sqrt{5}$.

2019.(физ., 1989, №5) Найти все значения параметра m, при каждом из которых уравнение

$$(2x)^2 - 4x\,(m \cdot 3^m)^{\frac{1}{2}} + 3^{m+1} + m - 3 = 0$$

имеет корни. Выяснить знаки корней при различных значениях m.

Ответ: При $m = 0$ уравнение имеет единственный корень $x = 0$. При $m = 3$ уравнение имеет единственный положительный корень. При $m > 3$ уравнение имеет два положительных корня. При $m < 0$ и $0 < m < 3$ уравнение не имеет корней.

2020.(биолог., 2007, июль, №8) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$ax^2 + (a+4)x + a + 1 = 0$$

имеет ровно один отрицательный корень.

Ответ: $a = \frac{2+2\sqrt{13}}{3}$ или $-1 < a \le 0$.

2021*. (соц., 2001, №5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых расстояние между корнями уравнения

$$ax^2 + (2a+2)x + (a+3) = 0$$

больше 1.

Ответ: $-2 - \sqrt{2} < a < 0$, $0 < a < -2 + 2\sqrt{2}$.

2022.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2009", очный тур: Нижний Новгород, Курск, №4) При каких значениях параметра a строго между двумя корнями уравнения $ax^2 + x + 2a^2 = 0$ находится ровно один корень уравнения $ax^2 + 2x - 2a^2 = 0$ и строго между двумя корнями второго уравнения находится ровно один корень первого уравнения?

Ответ: $-\frac{\sqrt[3]{3}}{2} < a < 0$.

2023.(соц., 2004, июль, №6) Для каждого положительного значения параметра c изобразить множество тех пар (b, a), для каждой из которых уравнение

$$bx^2 + ax - \frac{b}{4} + c = 0$$

имеет два различных отрицательных корня, и указать все значения параметра a, при каждом из которых множество соответствующих значений b состоит из двух непересекающихся интервалов.

Ответ: множество соответствующих значений b состоит из двух непересекающихся интервалов при $a \in (0; 2c]$.

2024.(ВШБ, 2006, №7) Даны два уравнения:

$$3x^2 - 3ax + 5b = 0 \quad \text{и} \quad 4x^2 - 4bx + 7a = 0.$$

Найти значения параметров a и b, при которых выполняются следующие условия:

1. меньший корень первого уравнения на 1 больше меньшего корня второго уравнения;
2. больший корень первого уравнения на 2 меньше большего корня второго уравнения;
3. сумма квадратов корней первого уравнения на 19 меньше суммы квадратов корней второго уравнения.

Ответ: $a = 8$, $b = 9$.

2025.(ВШБ, 2007, №7) Дано уравнение $x^2 + ax + a - 1 = 0$. Найти все значения параметра a, при которых отношение суммы квадратов корней данного уравнения к произведению корней данного уравнения равно максимальному значению функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, \text{ при } x \le 3, \\ x - 6, \text{ при } 3 \le x \le 8, \\ -2x + 18, \text{ при } x \ge 8. \end{cases}$$

Ответ: $a = 2$ ($f_{\max} = 2$; при указанном значении параметра данное уравнение имеет два совпадающих корня $x_1 = x_2 = -1$).

2026.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2008", №3)При каких значениях параметра a каждый из квадратных трёхчленов имеет хотя бы один корень, причем все их корни – целые числа?

$$x^2 + ax + 2008 \text{ и } x^2 + 2008x + a$$

Ответ: $a = -2009$.

2027.(почвовед., 2004, май, №6) Шарик радиуса r брошен в стакан, образованный вращением параболы $y = 3x^2$ вокруг оси Oy. При каком наибольшем значении r шарик достигнет дна стакана (точки $O = (0, 0)$)?

Ответ: $r_{\max} = \frac{1}{6}$.

2028*. (эконом., 1974, №6) Найти все значения величины h, при которых уравнение

$$x(x + 1)(x + h)(x + 1 + h) = h^2$$

имеет четыре различных корня.

Ответ: $h < -2-\sqrt{5}$, $2-\sqrt{5} < h < 0$, $0 < h < \sqrt{5}-2$, $h > 2+\sqrt{5}$.

2029.(биолог., 2008, №7) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^4 + (a+1)x^3 + (2a+1)x^2 - (a+1)x + 1 = 0$$

на промежутке $(-\infty; -1)$ имеет не менее двух корней.

Ответ: $a > 3+\sqrt{20}$.

2030.(физ., 1993, июль, №7)Уравнение $ax^2 + bx + 2 = 0$, где $a < 0$, имеет одним из своих корней число $x = 3$. Найти действительные корни уравнения $ax^4 + bx^2 + 2 = 0$.

Ответ: $\pm\sqrt{3}$.

2031.(физ., 1994, май, №7)При каких значениях a уравнение

$$2a(x+1)^2 - |x+1| + 1 = 0$$

имеет четыре различных решения?

Ответ: $0 < a < \frac{1}{8}$.

2032.(почвовед., 1999, май, №6) Найти все значения параметра β, при которых уравнение

$$(x^2 + x)(x^2 + 5x + 6) = \beta$$

относительно x имеет ровно три корня.

Ответ: $\beta = \frac{9}{16}$.

2033.(физ., 1981, №2) Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $\pm\sqrt{2}$.

2034*. (биолог., 1986, №5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 8, \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $a \le -1$, $a \ge 3$.

2035*. (мех-мат, устный, 2006) Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2xy - ax - 2ay + a^2 - 2 = 0, \\ 4x^2 + 4y^2 - 8ax - 4ay - 7a^2 - 20a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = -2$.

2036.(ВМК, 2009, №10) Найти все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения параметра b система

$$\begin{cases} az^2 = y - bx, \\ (2b+3)x = by - 2z + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение (x, y, z).

Ответ: $-1 \le a \le \frac{1}{3}$.

2037.(ВМК, устный, 2006) Найти все значения x, при которых существуют действительные a и b такие, что

$$\begin{cases} a^2 = 3b, \\ a^2 + (b-x)^2 = 3. \end{cases}$$

Ответ: $-\sqrt{3} \le x \le \frac{7}{4}$.

2038*. (мех-мат, 1987, №5) Найти все пары значений параметров a и b, для каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x+y) = x - y + a, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений (x, y).

Ответ: $(1; -2)$, $(-1; -2)$, $(t; 2)$, где t – произвольное действительное число.

2039*. (мех-мат, 1986, №5) Найти все значения a, при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} bx - y - az^2 = 0, \\ (b-6)x + 2by - 4z = 4 \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение (x, y, z).

Ответ: $-\frac{1}{4} \le a \le \frac{1}{3}$.

2040.(физ., 1988, №5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} axy + x - y + \frac{3}{2} = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{-7 \pm 4\sqrt{2}}{2}$.

2041*. (биолог., 1987, №5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 9x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 13y + 3 = 0, \\ 13x^2 + 6xy + 10y^2 + 16x + 2y - 4ax - 6ay + a^2 - 2a + 3 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $\frac{2}{3} - \sqrt{2} \le a \le \frac{2}{3} + \sqrt{2}$.

2042.(Севастополь, 2006, №7) Для всех действительных значений a найдите число точек пересечения графиков функций $y = \sqrt{2x-1}$ и $y = x + a$.

Ответ: если $a < -\frac{1}{2}$, то графики пересекаются в одной точке; если $-\frac{1}{2} \leq a < 0$, то две точки пересечения; если $a = 0$, то одна точка пересечения; если $a > 0$, то графики не пересекаются.

2043.(эконом. (менеджмент), 2005, июль, №6) Найти все целые значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения

$$\sqrt[3]{x^6} - \left(\frac{1}{a} - 2\right) \cdot \sqrt[4]{x^4} + 1 - \frac{2}{a} = 0$$

являются целыми числами.

Ответ: $a = 2$.

2044.(физ., 2000, март, №7)При каких значениях b уравнение

$$25^x - (2b+5)5^{x-\frac{1}{x}} = 10b \cdot 5^{-\frac{2}{x}} = 0$$

имеет ровно два решения?

Ответ: $0 < b < \frac{1}{50}$, $b > \frac{25}{2}$.

2045.(МШЭ, 2005, июль, №8) При каких значениях параметра b уравнение

$$(b-2) \cdot 4^x + (2b-5) \cdot 10^x = (3b-7) \cdot 25^x$$

имеет единственное решение?

Ответ: $b \leq 2;\ b = \frac{9}{4},\ b \geq \frac{7}{3}$.

2046.(мех-мат, 1993, №2) Найдите все значения a, при которых уравнение

$$4^x + (a^2+5) \cdot 2^x + 9 - a^2 = 0$$

не имеет решений.

Ответ: $-3 \leq a \leq 3$.

2047.(ф-т биоинженерии и биоинформатики, 2009, №9) Найти все значения параметра b, при каждом из которых уравнение $b \cdot 3^{-2x} + b + 1 = -3^{-4x-1}$ имеет ровно два корня, больший из которых не меньше $\frac{1}{2}$.

Ответ: $-1 < b < -\frac{7}{9}$.

2048.(биолог., 1973, №5) Найти все значения действительного параметра α, для которых неравенство

$$4^x - \alpha \cdot 2^x - \alpha + 3 \leq 0$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $\alpha \geq 2$.

2049.(мех-мат., 2003, май, №4) Числа p и q подобраны так, что уравнение

$$2^{1+x} + p + q2^{1-x} = 0$$

имеет ровно два различных корня, а их сумма равна 4. Найти произведение различных корней уравнения

$$(x^2 - 5x - 300)(x^2 - px - q) = 0.$$

Ответ: 4800.

2050*. (ВМК, 2003, июль, №5) Найти все значения параметра α, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 4^x - 2^{x+y} \le \frac{108\alpha-161}{2\alpha-3}, \\ 5 \cdot 2^{x+y} - 9 \cdot 4^y \ge 54 \end{cases}$$

имеет решение.

Ответ: $\alpha > \frac{3}{2}$.

2051.(ВМК, устный, 2005)Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 4x \le a, \\ y^2 - 4y - 2x + 8 \le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a = 0$.

2052.(эконом., 1977, №4.С) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_2 (4^x - a) = x$$

имеет два решения.

Ответ: $-\frac{1}{4} < a < 0$.

2053.(мех-мат, 2002, май, №4) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{a+1} x + \log_x (19 - 8a) = 2$$

имеет по крайней мере два корня и при этом произведение всех его корней не меньше $0,01$?

Ответ: $-\frac{9}{10} \le a < 0$, $2 < a < \frac{9}{4}$, $\frac{9}{4} < a < \frac{19}{8}$.

2054.(фил., 2005, июль, №7) При каких целых a неравенство

$$2 \log_{\frac{1}{2}} a - 3 + 2x \log_{\frac{1}{2}} a - x^2 < 0$$

верно для любого значения x?

Ответ: $a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$.

2055.(физ., 1998, май, №7)Найти все значения a, при которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 + ax + 1\right) < 1$$

выполняется для всех x из промежутка $x < 0$.

Ответ: $a < \sqrt{2}$.

2056.(ФГУ, 2006, №6) Найдите значения a, для которых неравенство

$$(a + b + 36)x^2 - 5(x - 1)(b + 1) \le 0$$

имеет решение при любом b.

Ответ: $a \le -35$.

2057*. (почвовед., 1974, №4) Найти все значения a, при которых неравенство

$$\frac{x-2a-1}{x-a}<0$$

выполняется для всех таких x, что $1 \leq x \leq 2$.

Ответ: $\frac{1}{2}<a<1$.

2058.(почвовед., 2003, июль, №6) Найти все значения параметра b, при каждом из которых отрезок $[-3;-1]$ целиком содержится среди решений неравенства

$$\frac{x-3b}{b-2x}<0.$$

Ответ: $b<-6;\ b>-\frac{1}{3}$.

2059.(ВМК, устный, 2004)Найти минимальное и максимальное значения параметра a, при котором неравенство

$$3a+\frac{1}{4}-ax+a^2x^2 \leq 0$$

выполняется для всех $x \in [-1, 0]$.

Ответ: $a_{\min}=-2-\frac{\sqrt{15}}{2}$, $a_{\max}=-\frac{1}{12}$.

2060.(ВМК, 1988, №5) Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left((2x+a)\sqrt{22a-4a^2-24}-2(x^2+x)\lg a\right)\cdot\lg\frac{36a-9a^2}{35}=0$$

имеет по крайней мере два корня, один из которых неотрицателен, а другой не превосходит -1.

Ответ: $a=\frac{5}{3};\ a=\frac{3}{2};\ a\in[2;4)$.

2061.(биолог., 1999, июль, №5) Найти все значения y, удовлетворяющие условию $y>\frac{1}{2}$, такие, что неравенство

$$\begin{aligned}&16y^3+6y^3x-4y^3x^2-50y^2-11y^2x+10y^2x^2\\&+52y+4yx-8yx^2-18+x+2x^2>0\end{aligned}$$

выполняется при всех x из интервала $1<x<2y$.

Ответ: $\frac{5}{6}\leq y<1,\ 1<y\leq\frac{3}{2}$.

2062*. (ВМК, 1997, апрель, №5) Найти все значения x, при которых неравенство

$$\sqrt{x^2+2x+b}>bx^2+(1-b)(2x-1)-2$$

выполняется для всех b из отрезка $[-2;0]$

Ответ: $(-\infty;-1-\sqrt{3}]\cup\left[-1+\sqrt{3};\frac{7+\sqrt{22}}{3}\right)$.

2063.(мех-мат, 1991, №5) Найти все пары чисел p и q, при которых неравенство

$$|x^2+px+q|>2$$

не имеет решений на отрезке $[1;5]$.

Ответ: $p = -6$; $q = 7$.

2064.(мех-мат, 1992, №6) Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$(a + 2)x^3 - (1 + 2a)x^2 - 6x + (a^2 + 4a - 5) > 0$$

хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку $[-2; 1]$.

Ответ: $x < -1$, $-1 < x < 0$, $x > 2$.

2065.(ВМК, устный, 2004)Найти a так, чтобы сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + (2 + a)x - (2 + a) = 0$$

была наименьшей.

Ответ: $a = -2$.

2066.(ИСАА, 1992, июль, №6) При каких значениях параметра a сумма s квадратов корней уравнения

$$x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$$

является наибольшей? Чему равна эта сумма?

Ответ: $a = -3$; $s = 18$.

2067.(соц., 2003, июль, №6) Определить все значения параметра a, при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3 + (a^2 - 9a)x^2 + 8ax - 64 = 0$$

образуют геометрическую прогрессию. Найти эти корни.

Ответ: $a = 7$, $x_1 = 2; x_2 = 4; x_3 = 8$.

2068.(психолог., 1970, №2) Найти все отличные от нуля значения a, при которых уравнение

$$x^8 + ax^4 + a^4 = 0$$

имеет ровно четыре корня, образующих в порядке возрастания арифметическую прогрессию.

Ответ: $a = -\frac{9}{82}$.

2069.(ВМК, устный, 2002) Найти все значения параметра p, при которых уравнение

$$361x^4 - (57p + 722)x^2 + p^2 = 0$$

имеет четыре корня, образующие арифметическую прогрессию.

Ответ: $p = 114$, $p = -6$.

2070.(ВМК, устный, 2007+2008) Определить значения y, при которых уравнение относительно x

$$x^2 - y \cdot \sqrt{3} \cdot |x| - \sqrt{3} \cdot |x| + y^2 = 0$$

имеет четыре действительных корня, являющиеся членами арифметической прогрессии.

Ответ: $y_1 = 3$, $y_2 = -\frac{3}{7}$.

2071.(ВМК, 2007, устный)При каких значениях параметра a уравнение

$$125x^3 + 125ax^2 + 50a^2x + 8a^3 = 0$$

имеет три различных действительных корня, образующих геометрическую прогрессию?

Ответ: таких значений нет.

2072.(ВМК, 2007, устный)При каких значениях параметра a уравнение

$$54x^3 + 54ax^2 + 9a^2x - a^3 = 0$$

имеет три действительных корня, образующих арифметическую прогрессию?

Ответ: при любых a.

2073.(ВШБ, 2003, июль, №8) Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$25x^5 + 25(a-1)x^3 - 4(a-7)x = 0$$

имеет ровно 5 различных решений, а сами решения, упорядоченные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию.

Ответ: $a = -2$.

9.6 Использование свойств инвариантности

2074*. (хим., 1999, июль, №6) Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left|\frac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1} + 2a\right| = a^2 + 1$$

имеет нечетное число решений.

Ответ: $a_1 = 1$, $a_2 = -1$.

2075.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2012", очный тур)Найдите все значения параметра a, при каждом из которых графики функций $f(x) = 3^{2x^2-4x+3} + a^3$ и $g(x) = a \cdot 3^{x^2-2x+3} - 5$ имеют ровно три общие точки.

Ответ: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{\sqrt{33}-1}{2}$.

2076.(почвовед., 2007, июль, №7) Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (5-2\sqrt{6})^x + (5+2\sqrt{6})^x - 5a = y - |y| - 8, \\ x^2 - (a-4)y = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$.

2077.(ФГУ, 2007, №6) Найти все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} |bx| - |y| = 2a, \\ (x-b)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Ответ: $a = \frac{t^2}{|t|+2}$, $b = t$, где $t \neq 0$; $a = \frac{t^2}{|t|-2}$, $b = t$, где $|t| > 2$.

2078.(мех-мат, 1966, №5) Найти все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} \left|\frac{x^y-1}{x^y+1}\right| = a, \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$$

имеет только одно решение.

Ответ: $a = 0$, $0 < b \leq 1$.

2079.(эконом. (кибернетика), 1987, №6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a = \frac{4}{3}$.

2080.(хим., 1986, №5) Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|}, \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Ответ: $a_1 = -\frac{1}{4}$; $a_2 = -\frac{1}{32}$.

2081.(ФГУ, 2008, №7) Найдите все значения параметра a из интервала $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x + \sqrt{3} \cdot y| + |y - \sqrt{3} \cdot x| = 2 \cdot \sin a, \\ (\sqrt{3} \cdot x + y)^2 + (\sqrt{3} \cdot y - x)^2 = 4 \cdot \cos a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Ответ: $a_1 = \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $a_2 = \arccos(\sqrt{2} - 1)$.

2082.(мех-мат, 1966, №5) Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет только одно решение (a, x, y – действительные числа).

Ответ: $a = 0$.

2083.(мех-мат, 1966, №5) Найти все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

имеет только одно решение (a, b, x, y, z – действительные числа).

Ответ: $a = b = -2$.

2084.(мех-мат, 2000, март, №5) При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{x} + \left(\frac{3}{2}\right)^{a-x} - \frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^{a} - \frac{8}{5}\right) \times \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2a-2x-3} - 4\left(\frac{3}{2}\right)^{2a-5} + 2\right) = 0$$

имеет хотя бы одно решение и каждое его решение является целым числом?

Ответ: $a = 1$, $a = \frac{5}{2}$.

Глава 10

Функции

10.1 Область определения функции

2085*. (географ., 1997, май, №1) Найти область определения функции

$$y = \sqrt{x^2 - x - 2} + \log_{3+x}(9 - x^2).$$

Ответ: $(-3; -2) \cup (-2; -1] \cup [2; 3)$.

2086.(эконом., 1989, №1) Найти область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{-x^2 + x + 20}}.$$

Ответ: $(-4; -3] \cup [3; 5)$.

2087.(ВМК, 1983, №1) Найти область определения функции

$$y = \sqrt{16 - x^2} \cdot \log_2(x^2 - 5x + 6).$$

Ответ: $[-4; 2) \cup (3; 4]$.

2088.(географ., 1993, №3) Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{4x - x^2 - 4}{x^2 + x - 2}}.$$

Ответ: $(-2; 1) \cup \{2\}$.

2089.(физ., 1993, май, №5) Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{3^x - 4^x}{x^2 + 4x + 3}}.$$

Ответ: $x < -3$, $-1 < x \leq 0$.

2090.(геолог., устный, 2003) Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{(x^2 - 3x + 2) \cdot \lg(3 - x)}.$$

Ответ: $(-\infty; 1] \cup \{2\}$.

2091.(геолог., 1999, июль, №1) Найти область определения функции

$$y = \Big(\log_{\frac{1}{2}}(x+3)\Big) \cdot \sqrt{\frac{25}{(x+2)^2} - 1}.$$

Ответ: $(-3; -2) \cup (-2; 3]$.

2092.(физ., 1987, №4) Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x^2 - 2x)}.$$

Ответ: $-\frac{1}{3} \leq x < 0$, $\frac{2}{3} < x \leq 1$.

2093.(физ., 1993, май, №5) Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\log_{1/2}(x^2 - 9) + 4}.$$

Ответ: $-5 \leq x < -3$, $3 < x \leq 5$.

2094.(МШЭ, 2005, июль, №4) Найдите множество определения функции

$$y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(2 \cdot 9^{-x} - 3^{-x}\right)}.$$

Ответ: $0 \leq x < \log_3 2$.

2095.(ВШБ., 2003, апрель, №5) Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\log_{\frac{4}{x}} \frac{1}{2} - \log_2(2x) \cdot \log_{\frac{8}{x}} \frac{1}{2}}.$$

Ответ: $\{2\} \cup (4; 8)$.

2096.(почвовед., 2008, №1) Найти область определения функции

$$y = \frac{2x+7}{x+2+\sqrt{2x+7}}.$$

Ответ: $\left[-\frac{7}{2}; +\infty\right) \setminus \{-3\}$.

10.2 Графики

2097*. (геолог., устный, 1998) Построить график функции

$$y = \left(x^2\right)^{\log_{\sqrt{x}} 2}.$$

2098.(геолог., устный, 2008, июль) Постройте график функции $y = x^{\log x^2(x)}$.

2099.(геолог., устный, 2008, июль) Постройте график функции $y = \log_2(1 - 2|x|)$.

2100.(геолог., устный, 1999) Построить график функции

$$y = x^{|\log_x 2|}.$$

2101.(геолог., 2007, устный) Постройте график функции $y = 2^{\frac{|x|-x}{x}}$.
2102.(геолог., устный, 2000) Построить график функции

$$y = 2\frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{|x| - x}.$$

2103.(геолог., устный, 2000) Построить график функции

$$y = \log_{1-x} x \cdot \lg(1-x).$$

2104.(геолог., устный, 2001) Постройте график функции

$$y = \lg\left(\frac{x^2}{|x|}\right).$$

2105.(геолог., устный, 2001) Постройте график функции

$$y = \frac{|\log_2 x| + \log_2 x}{\log_2 x}.$$

2106.(геолог., устный, 2002+2006) Постройте график функции

$$y = \frac{\log_x 3 - \log_3 x}{\log_x 3x}.$$

2107.(ВМК, устный, 2003) Постройте график функции

$$y = 2^{\log_4 x^2} \cdot 3^{\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)}.$$

2108*. (ВМК, устный, 2004) Построить график функции

$$y = 1 + x^2 - x^4.$$

2109.(ВМК, устный, 2004)Построить график функции

$$y = \frac{|x|}{1-x}.$$

2110.(психолог., 1966, №5) Построить график функции

$$y = \frac{|x-3| + |x+1|}{|x+3| + |x-1|}.$$

2111.(мех-мат, устный, 1994) Для каждого $a > 0$ найти уравнения всех прямых, проходящих через начало координат и имеющих ровно две общие точки с графиком функции

$$y = x|x + 2a| + a^2.$$

Ответ: $y = kx$ при $k = 0; -\frac{a}{2}; 4a$.

10.3 Чётность/нечётность

2112.(геолог., устный, 2008, июль) Является ли функция $y = \log_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ нечётной?

Ответ: да.

2113.(геолог., 2007, устный) Является ли чётной функция $y = \log_2 \frac{x-1}{x+1}$?

Ответ: нет.

2114.(ВМК, устный, 2006) Найти все значения a, при которых функция

$$f(t) = \frac{t}{e^t - 1} + at, t \neq 0,$$

является чётной.

Ответ: $a = \frac{1}{2}$.

2115.(мех-мат, устный, 2007, июль) При каких значениях параметра a функция

$$f(x) = (a - x)5^{x+7+4a} - (a + x)5^{a^2-x-5}$$

является нечётной?

Ответ: $a_1 = 6$, $a_2 = -2$.

2116.(мех-мат, устный, 2007, июль) При каких значениях параметра a функция

$$f(x) = (x + a)3^{x-2+a^2} + (a - x)3^{8-x-3a}$$

является чётной?

Ответ: $a_1 = -5$, $a_2 = 2$.

2117*. (почвовед., 2004, июль, №7) Доказать, что график функции

$$y = 4x + \log_2\left(\frac{x^2 + 5x}{x^2 + 3x - 4}\right)$$

имеет центр симметрии, и найти координаты (x, y) этого центра симметрии.

Ответ: координаты центра симметрии: $(-2, -8)$.

2118*. (мех-мат, устный, 1998) При каких значениях a график функции

$$y(x) = (x + a)(|x + 1 - a| + |x - 3|) - 2x + 4a$$

имеет центр симметрии?

Ответ: $a = -\frac{2}{3}$.

2119*. (мех-мат, устный, 2006) График функции $g(x)$ симметричен графику функции $f(x) = 2|x-3|-2|x|+3x-3$ относительно точки $(2; 2)$. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$f(x - a) = g(x + a)$$

имеет бесконечно много решений.

Ответ: $-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{7}{3}$.

10.4 Монотонность

2120.(ВМК, устный, 2005)Пусть $(a-b)(a-c)(b-c) \neq 0$ и

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}.$$

Существуют ли такие значения a, b и c, при которых из неравенства $x_1 > x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$? Ответ обосновать.

Ответ: не существуют, т.к. $f(x) \equiv 1$ при всех x.

2121*. (ВМК, устный, 2004) Доказать, что любой многочлен 2-й степени можно представить в виде разности двух многочленов, возрастающих на всей числовой оси.

2122.(эконом., 2007, №6) Найдите все значения a, при которых функция

$$f(x) = |2-x| \cdot x + \arcsin\left(\frac{a}{10}\right)$$

не является монотонно возрастающей на отрезке числовой оси, который соединяет корни квадратного трёхчлена

$$x^2 - (a^2 - 8a + 14)x + (a^2 - 6a + 6)(8 - 2a).$$

Ответ: $3 - \sqrt{5} < a < \frac{7}{2}$, $5 < a \leq 10$.

10.5 Область значений

2123*. (Севастополь, 2005, №2) Найдите область значений функции

$$y = \sqrt{2x - x^2 + 4}.$$

Ответ: $[0; \sqrt{5}]$.

2124.(геолог., устный, 2003) Найдите область значений функции

$$y = -\sqrt{55 - 6x - x^2}.$$

Ответ: $[-8; 0]$.

2125.(геолог., устный, 2000) Найти множество значений функции

$$y(x) = -\sqrt{55 - 6x - x^2}.$$

на отрезке $-4 \leq x \leq 4$.

Ответ: $[-8; -\sqrt{15}]$.

2126.(геолог., 2007, устный) Определите множество значений функции

$$y = \sqrt{x - 2x^2 + 1}.$$

Ответ: $\left[0; \frac{3\sqrt{2}}{4}\right]$.

2127.(эконом., 2005, июль, №2) Найти произведение всех целых значений, которые принимает функция

$$y = \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{\sqrt{3}} + 3$$

на отрезке $\left[1; \frac{9}{2}\right]$.

Ответ: 24.

2128.(ДВИ, 2014, №2) Найдите максимальное значение функции $\log_{1/2}\left(x^2 - 6x +\right.$

Ответ: -3.

2129.(ФФМ, 2003, май, №5) Найти область значений функции

$$y = \log_{(16x-12-4x^2)}\left(\frac{|x+1| + |x-5|}{3}\right).$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

2130*. (ИСАА, 2003, июль, №1) Числа x, y изменяются в пределах: $3 \le x \le 4$, $1 \le y \le 2$. В каких пределах изменяется выражение $A = 4^{x-2y-1} - 4y + 4x - 4$?

Ответ: $\frac{1}{16} \le A \le 12$.

2131.(ВМК, устный, 2000+2003)Доказать, что функция

$$f(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$$

принимает только положительные значения.

2132*. (ВМК, устный, 2004) Найти множество значений функции

$$y = \frac{x}{1 + x^2}.$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

2133.(ВМК, 2003, июль, №3) Найти множество значений функции

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - x.$$

Ответ: $\left[-2; -\frac{3}{2}\right) \cup [-1; +\infty)$.

2134.(олимпиада "Ломоносов-2012", II тур, №6) Найдите множество значений функции

$$f(x) = \log_2 x \cdot \log_2 \frac{64}{x} \cdot \sqrt{\log_3(11-x) \cdot \log_3 \frac{9}{11-x}}.$$

Ответ: $[0; 9]$.

2135*. (геолог., 2005, июль, №7) Найдите все значения, которые может принимать сумма $x + a$ при условии

$$|2x + 4 - 2a| + |x - 2 + a| \le 3.$$

Ответ: $[-1; 5]$.

2136.(ВМК, устный, 2007) Известно, что $16y^2 + x^2 = 4$. Какие значения может принимать xy?

Ответ: из отрезка $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

2137.(ВМК, устный, 2005)Какие значения может принимать выражение $x + 2y^2$, если $2x^2 + y^2 \leq 1$?

Ответ: из отрезка $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{33}{16}\right]$.

2138.(ВМК, 2007, устный) Найти множество всех значений выражения $3a^2 + \frac{b^2}{3}$, если

$$9(a^2 + 3) = b^2 + 2\left|18a^2 + 3b^2 - 9\right|.$$

Ответ: отрезок $[3; 5]$.

2139.(ВМК, 2007, устный)Найти множество всех значений выражения $2a^2 + \frac{b^2}{2}$, если

$$4a^2 + 6\left|4a^2 + b^2 - 6\right| = b^2 + 10.$$

Ответ: $\left[\frac{13}{7}; \frac{13}{5}\right] \cup \left[\frac{23}{7}; \frac{23}{5}\right]$.

2140.(психолог., 1999, №4) Найти все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции

$$f(x) = \frac{4x - a}{x^2 - 4x + 7}$$

содержит полуинтервал $\left[-\frac{4}{3}; 1\right)$. Определить при каждом таком a множество значений функции $f(x)$.

Ответ: $a = 9$, $\left[-\frac{4}{3}; 1\right]$.

2141*. (эконом., 1998, №5) Найти все действительные значения c, для которых все числа из области значений функции

$$f(x) = \frac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2}$$

принадлежат интервалу $(-1; 2)$.

Ответ: $3 - 2\sqrt{3} < c < -6 + 2\sqrt{15}$.

2142.(ИСАА, 2003, июль, №6) Функция $y(x) = x^2 + 2(c - d)x + 3c - d$ такова, что $y(1) \cdot y(-1) \leq 0$ и $|c - d| \geq 1$. Найти значения c и d, при которых множество значений функции $f(x) = |y(x)|$ на отрезке $[-1, 1]$ будет наименьшим; указать это множество.

Ответ: $(c, d) = (-1, -2)$ или $(0, 1)$, множество значений $[0, 2]$.

2143.(ДВИ, 2014, №8) Пусть

$$f(x, y) = \sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y,$$

$$g(x, y) = -\sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Ответ: $\left[-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right]$.

10.6 Экстремумы функций одной переменной

2144*. (почвовед., 2004, июль, №1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^2 - 3x$ при $x \in [-1; 3]$.

Ответ: $y_{\max} = 9$, это значение достигается при $x = 3$; $y_{\min} = -\frac{9}{8}$, это значение достигается при $x = \frac{3}{4}$.

2145*. (почвовед., 2003, июль, №4) Найти наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{3x^2 + 5} - \sqrt{3x^2}$$

на отрезке $[0; 3]$.

Ответ: $y_{\min} = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$; это значение достигается при $x = 3$.

2146.(физ., 1978, №2) Исследовать на экстремум функцию

$$y(x) = \sqrt{2x^2 - x + 2}.$$

Ответ: $y_{\min} = \frac{15}{8}$; это значение достигается при $x = \frac{1}{4}$ и является единственным экстремумом.

2147.(ДВИ, 2011, №6)Найдите наибольшее из значений функции

$$\frac{9^x}{4^x - 6^x + 9^x}$$

и точку x, в которой это значение достигается.

Ответ: $f_{\max} = \frac{4}{3}$, $x = \frac{1}{\log_2 3 - 1}$.

2148.(ВМК, устный, 2005)Найдите наибольшее значение функции

$$y = \log_2^4 x + 12\log_2^2 x \cdot \log_2 \frac{8}{x}$$

на отрезке $[1; 64]$.

Ответ: 81; это значение достигается при $x = 8$.

2149.(ВМК, устный, 2004)Найти наибольшее значение функции

$$y = x\sqrt{1 - 3x^2}.$$

Ответ: $y_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

2150.(ВМК, устный, 2005)Действительные x, y, a таковы, что

$$\begin{cases} x + y = a - 1, \\ x \cdot y = a^2 - 7a + 14. \end{cases}$$

При каких a сумма $x^2 + y^2$ принимает наибольшее значение?

Ответ: $a = 5$.

2151.(ВМК, устный, 2006) Действительные x, y, a таковы, что

$$\begin{cases} x + y = 3a + 1, \\ x \cdot y = 2a^2 + 13a - 11. \end{cases}$$

При каких a сумма x^2+y^2 принимает наименьшее значение?

Ответ: $a=1$.

2152.(ВМК, отд. бакалавров, 2006, июль, №5) Пусть (x,y) – решение системы уравнений

$$\begin{cases} x+3y=\alpha-2, \\ x^2+9y^2=2\alpha+6. \end{cases}$$

При каком α произведение xy принимает наименьшее значение?

Ответ: $\alpha=3$.

2153.(физ., 1995, март, №7)Найти минимальное значение произведения xy, где x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x+y=3a-1, \\ x^2+y^2=4a^2-2a+2. \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{9}{10}$; это значение соответствует $a=\frac{2}{5}$.

2154.(геолог., 2007, №7) Числа x,y,z таковы, что

$$\begin{cases} x+1=z+y, \\ xy+z^2+14-7z=0. \end{cases}$$

При каких значениях z сумма x^2+y^2 максимальна? Найдите это максимальное значение.

Ответ: максимальное значение x^2+y^2 достигается при $z=5$ и равно 8.

2155*. (эконом., 1991, №4) Определить наименьшее значение функции

$$F(r)=(r-2)\cdot(4+(r-1)(r-4))\cdot(r-3),\ \ r\in R.$$

Ответ: $F_{\min}=-\frac{7}{16}$; это значение достигается при $r=\frac{5}{2}$.

2156.(ВМК, устный, 2000)Найти наименьшее значение функции

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+10.$$

Ответ: $f_{\min}=9$; это значение достигается при $x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$.

2157.(ВМК, устный, 2001)Найти наибольшее значение функции

$$f(x)=-(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+11.$$

Ответ: $f_{\max}=12$; это значение достигается при $x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$.

2158.(геолог., устный, 2000) Найти значение a, при котором минимально расстояние между корнями уравнения

$$x^2+(a-34)x-35a-36=0.$$

Ответ: $a=-36$.

2159*. (соц., 2004, апрель, №2) Дана функция

$$y(x)=|x-3|+|2x-4|+1.$$

а) Найти наименьшее значение функции $y(x)$.

б) Решить неравенство $y(x) > 8$.

Ответ: а) $y_{\min} = 2$, это значение достигается при $x = 2$; б) $x < 0$, $x > \frac{14}{3}$.

2160.(геолог., 2007, устный) Найдите минимальное значение функции $y = |x+2| + |x-1|$.

Ответ: $y_{min} = 3$.

2161*. (хим., 2000, заочный тур, №1) Найти наименьшее значение функции

$$y = |x-3| + |x| + |x+3| + |x+5|.$$

Ответ: $f_{\min} = 11$; это значение достигается при $x \in [-3; 0]$.

2162.(геолог., устный, 2008) Найти минимальное значение функции

$$y = |x-2006| + |x-2007| + |x-2008|.$$

Ответ: $y_{\min} = 2$.

2163.(фил., 1984, №3) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = -x^2 + 3|x-1| + 2$$

на отрезке $[-2; 2]$.

Ответ: $y_{\max} = \frac{29}{4}$; $y_{\min} = 1$.

2164.(психолог., 1985, №4) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \left|x^2 + x\right| + \left|x^2 - 3x + 2\right|$$

на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Ответ: $y_{\max} = 4$; $y_{\min} = \frac{3}{2}$.

2165.(ВМК, устный, 2004)Найти максимальное значение на отрезке $[0; 1]$ функции

$$y = \min\left(1-x, 2x-1, \frac{x}{3}\right).$$

Ответ: $y_{\max} = \frac{1}{4}$, это значение достигается при $x = \frac{3}{4}$.

2166.(ВМК, устный, 2004)Найти наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1}.$$

Ответ: 2; это значение достигается при $x = -1$ и $x = 0$.

2167.(эконом. (полит. эконом.), 1969, №5) При каком действительном x выражение $\frac{2x-1}{2x-x^2-4}$ примает наименьшее значение?

Ответ: $y_{\min} = -\frac{1+\sqrt{13}}{6}$; это значение достигается при $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

2168.(фил., 1972, №3) При каком действительном x величина $t = \frac{\sqrt{x^2+16}}{3} - \frac{x}{5}$ принимает наименьшее значение?

Ответ: $x = 3$.

2169*. (геолог., устный, 2003) Найдите минимальное значение функции

$$y = 2x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}.$$

Ответ: 0; это значение достигается при $x = 0$.

2170.(эконом., 1975, №5) При каком значении x выражение

$$x^2 + 3 + \frac{1}{x^2 + 4}$$

принимает наименьшее значение.

Ответ: $x = 0$.

2171.(эконом. (менеджмент), 1997, июль, №6) Найти все значения параметра a, при которых периметр фигуры, заданной на координатной плоскости условием

$$\log_{\left(\frac{2-|ay|}{3}\right)} \left(\frac{a^2 + x^2}{2a^2}\right) > 0,$$

будет наименьшим.

Ответ: $a = \pm\sqrt{2}$.

2172*. (ВМК, устный, 2003) Найти наибольшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{3}} + \sqrt[6]{1 + x}.$$

Ответ: $f_{\max} = 2$; это значение достигается при $x = 0$.

2173*. (мех-мат, 2004, Олимпиада, 8 кл., №4) Найдите минимальное значение функции

$$y = \sqrt{(x-2)^2 + (x-4)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (x-6)^2}.$$

Ответ: 5; это значение достигается при $x = \frac{22}{7}$.

2174.(ВМК, 1991, №5) Проверить справедливость неравенства $y \le 3,17$, где y – наименьшее на интервале $(0; 1)$ значение функции

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+0,003)^{0,45}} + \frac{3}{(1-x)^{0,48}}\right) \\ &+ \quad \frac{1}{2}\left|\frac{1}{(x+0,003)^{0,45}} - \frac{3}{(1-x)^{0,48}}\right|. \end{aligned}$$

2175.(ВМК, устный, 2004)Найти наибольшее значение функции

$$y = (1-x)^5(1+2x)^2(1+x)$$

на отрезке $[-0.5; 1]$.

Ответ: 1; это значение достигается при $x = 0$.

2176*. (ВШБ, 2005, июль, №8) Найдите все значения параметра a, при которых наибольшее значение квадратного трехчлена

$$2x^2 - 2ax + a^2 - 2a - 4$$

на отрезке $1 \le x \le 3$ не превосходит 2.

Ответ: $2 \le a \le 2 + 2\sqrt{2}$.

2177.(геолог., 2006, №8) Найдите значения a, при которых наибольшее значение функции

$$f(x) = 2x^2 + x(5 - 3a) + a^2 - 3a + 4$$

на отрезке с концами в точках $a-1$ и -4 минимально. Укажите это значение.

Ответ: $a = -5$, $f = -4$.

2178*. (мех-мат, устный, 1994) Для каждого $a > 0$ найти наибольшее значение величины $|x - 2a|$ при условии

$$2|x| + |x - 3a| \le 9a.$$

Ответ: $4a$; это значение достигается при $x = -2a$.

2179.(мех-мат, устный, 1994) Для каждого $a > 0$ найти наименьшее значение величины

$$x^2 - |x + a| + x - a$$

на отрезке $[-3; 3]$.

Ответ: -1 если $0 < a < \frac{1}{2}$; $-2a$ если $a \ge \frac{1}{2}$.

10.7 Экстремумы функций нескольких переменных

2180.(мех-мат, 2006, №6) Найти минимальное значение выражения

$$|2x - y - 1| + |x + y| + |y|,$$

где x и y – произвольные действительные числа.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

2181.(почвовед., 2008, №7) Определите, какое наименьшее значение может принимать выражение

$$|x - 3y - 4| + |3y + 8 - x| + \sqrt{x^2 - xy - 2y^2},$$

и найдите суммарную длину линий, состоящих из всех точек $(x; y)$ координатной плоскости, в которых это значение достигается.

Ответ: $\min = 4$; $l = \sqrt{2} + 4\sqrt{5}$.

2182*. (ВМК, устный, 2001) Найти наименьшее значение выражения

$$f(x, y) = x^2 + 5y^2 + 4xy + 6y + 10.$$

Ответ: 1; это значение достигается в точке $(6; -3)$.

2183.(ВМК, устный, 2003) Найдите наибольшее значение выражения

$$x^2y - y^2x,$$

где $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

Ответ: $\frac{1}{4}$; это значение достигается при $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$.

2184*. (мех-мат, 2001, Олимпиада, 8 кл., №4) Найти наибольшее значение выражения
$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$$
при $x, y, z \in [-1; 1]$.

Ответ: 8. Это значение достигается в шести точках вида $(\pm1; \pm1; \pm1)$, исключая точки $(1; 1; 1)$ и $(-1; -1; -1)$.

2185.(мех-мат, 2001, Олимпиада, 9 кл., №4) Найти наибольшее значение выражения
$$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\dots+(x_{12}-x_{13})^2+(x_{13}-x_1)^2$$
при $x_1, \dots, x_{13} \in [0; 1]$.

Ответ: 12; это значение достигается, например, при $x_1 = x_3 = \dots = x_{13} = 0$, $x_2 = x_4 = \dots = x_{12} = 1$.

2186.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2011", №7)Найдите наибольшее значение выражения
$$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\dots+(x_{2010}-x_{2011})^2+(x_{2011}-x_1)^2$$
при $x_1, \dots, x_{2011} \in [0; 1]$.

Ответ: 2010; оно достигается, например, при $x_1 = x_3 = \dots = x_{2011} = 1$, $x_2 = x_4 = \dots = x_{2010} = 0$.

2187.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2011", 9-10 кл., №4) Найдите наибольшее значение выражения
$$|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\dots+|x_{2010}-x_{2011}|+|x_{2011}-x_1|$$
при $x_1, \dots, x_{2011} \in [0; 1]$.

Ответ: 2010; оно достигается, например, при $x_1 = x_3 = \dots = x_{2011} = 1$, $x_2 = x_4 = \dots = x_{2010} = 0$.

2188.(мех-мат, устный, 2004) Найти наименьшее значение выражения
$$(x-y)^2+3(y-z)^2-5(z-x)^2,$$
если $x, y, z \in [-1; 1]$.

Ответ: -17; это значение достигается в точках $(-1; 0,5; 1)$ и $(1; -0,5; -1)$.

2189.(ВМК, 2001, июль, №3) Среди всех решений системы
$$\begin{cases} 3y+2x \ge 2, \\ x^2+y^2-2x-4y \le 4, \end{cases}$$
найти такое, при котором выражение
$$f = x^2+y^2+4x+6y+13$$
принимает наименьшее значение.

Ответ: $\left\{\left(\frac{4}{13}; \frac{6}{13}\right)\right\}$.

2190*. (ВШБ, 2004, июль, №7) Найти наибольшее значение выражения $3x-2y$ на множестве переменных x, y, удовлетворяющих условию $4x^2+y^2 = 16$.

Ответ: 10.

2191.(психолог., 1986, июль, №6) Найти наибольшее из значений, которые принимает выражение $x + 3y$, если x и y удовлетворяют неравенству $x^2 + xy + 4y^2 \leq 3$.

Ответ: $\max = 2\sqrt{2}$.

2192*. (хим., 1997, июль, №6) Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $x^2 + 2y^2$, если $x^2 - xy + 2y^2 = 1$.

Ответ: $\min = \frac{8-2\sqrt{2}}{7}$, $\max = \frac{8+2\sqrt{2}}{7}$.

2193.(ВМК, 2000, июль, №5) Найти наибольшее значение выражения

$$4x^2 + 80x + y + 43,$$

при условии, что

$$6x^2 + 32x + y + 283 \leq 0 \text{ и } x^2 + 86x + y + 202 \geq 0.$$

Ответ: $\max = 30$.

2194.(биолог., 1989, №5) Числа x, y, z таковы, что $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $2x + y - z$?

Ответ: $\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

2195.(ВМК, устный, 2004)Числа a, b, c таковы, что $3a^2 + b^2 + c^2 = 4$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $a - 2b + c$?

Ответ: $\frac{-8\sqrt{3}}{3}$.

2196.(ВМК, устный, 2003+2008) Найдите минимальное значение выражения

$$(x + y)(y + z),$$

если x, y, z – положительные числа и $xyz(x + y + z) = 9$.

Ответ: 6.

2197.(ВМК, устный, 2003)Найдите наименьшее значение выражения

$$x^2 + 5y^2 + 8z^2,$$

если $xy + xz + yz = -1$.

Ответ: 4.

2198.(ВМК, 2007, устный) Найти наименьшее значение выражения $9x^2 + 5y^2 + 2z^2$, если $xy - xz + yz = 1$.

Ответ: 6.

2199.(ВМК, 2007, устный)Найти наибольшее значение выражения $xy + yz + xy$, если $17x^2 + 9y^2 + 2z^2 = 18$.

Ответ: 3.

2200.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2010", №8) Найдите наименьшее значение величины $2|x| - |y|$ при условии

$$\log_4(x + 2y) + \log_4(x - 2y) = 1.$$

Ответ: $\sqrt{15}$.

2201.(мех-мат, 2002, июль, №6) Найти минимальное значение выражения $(x+y-z)^2$ при условии, что числа x, y и z удовлетворяют одновременно каждому из неравенств

$$1 \le (x+y)^2 \le \frac{4}{3},$$
$$8 \le (y+z)^2 \le 9,$$
$$10 \le (z+x)^2 \le 11.$$

Ответ: $\frac{1}{4}(3+\sqrt{8}-\sqrt{11})^2$.

2202*. (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2005", №8 + олимпиада мех-мат ф-та, 2004, 9 кл., №5) Найти наименьшее значение выражения:

$$\sqrt{(x-9)^2+4}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(y-3)^2+9}.$$

Ответ: 13; это значение достигается в точке $(x_0, y_0) = \left(\frac{21}{5}, \frac{7}{4}\right)$.

2203.(мех-мат, 2007, июль, №5) Найти наибольшее значение выражения

$$\sqrt{(x-1)(y-x)}+\sqrt{(7-y)(1-x)}+\sqrt{(x-y)(y-7)}$$

при $x \in [-2; 3]$ и $y \in [0; 11]$.

Ответ: 3.

2204.(ДВИ, 2015, №8) Найдите все пары $(\alpha; \beta)$, при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4-3\sin\alpha}{2+\cos 2\alpha}+\frac{2+\cos 2\alpha}{\beta^2+\beta+1}+\frac{\beta^2+\beta+1}{\sqrt{\beta}+1}+\frac{\sqrt{\beta}+1}{4-3\sin\alpha}.$$

Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in Z$; $\beta = 0$.

2205.(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2009", №9)Какое наибольшее значение может принимать квадратичная функция в точке 2009, если её значения в трёх точках -1, 0 и 1 принадлежат отрезку $[0; 1]$?

Ответ: $f_{\max} = 2009^2$.

2206.(эконом. (кибернетика), 1982, №5) Построить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$y = 2\left|1+\frac{1}{x}\right|+\frac{2}{x}-|y+4|,$$

и среди точек этого множества найти все такие, в каждой из которых координата y принимает наименьшее значение.

Ответ: $y_{\min} = -3$ для $-1 \le x < 0$.

2207.(ФГП, 2005, июль, №8) Переменные x, y связаны условием $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = 0$. Найдите все значения параметра a, при которых разность между наибольшим и наименьшим значением выражения $2ax - 3y - 10$ больше 12.

Ответ: $|a| > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2208.(географ., 1985, №5) Найти все значения параметра a, удовлетворяющие условию $-1 < a < 1$, для каждого из которых выражение

$$1 + 2\sqrt{x^2 - 2axy + y^2 - 6y + 10} + 2$$

принимает наименьшее значение лишь при одной паре чисел x, y.

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{10}} \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{10}}$.

2209.(географ., 1986, №5) Для каждого значения параметра a, удовлетворяющего неравенствам $0 < a < 2$, найти наименьшее значение выражения

$$x^2 + y^2 - 2a(x + y)$$

при условии $\cos\left(\frac{\pi}{2}xy\right) = 1$.

Ответ: если $0 < a < 4 - 2\sqrt{2}$, то $-a^2$; если $4 - 2\sqrt{2} \leq a < 2$, то $8 - 8a$.

2210.(эконом. (кибернетика), 1985, №5) Среди всех решений (x, y, z, v) системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z^2 + v^2 = 9, \\ xv + yz \geq 6 \end{cases}$$

найти такие, при которых выражение $x+z$ принимает наибольшее значение.

Ответ: $x = \frac{4}{\sqrt{13}}$, $y = \frac{6}{\sqrt{13}}$, $z = \frac{9}{\sqrt{13}}$, $v = \frac{6}{\sqrt{13}}$.

2211.(географ., 2000, заочный тур олимпиады "Абитуриент МГУ-2000", №10) Переменные x, y, u, v удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ u^2 + v^2 = 25. \end{cases}$$

При условии, что сумма $xu + yv$ минимальна, найти: а) максимальное значение суммы $x + v$; б) минимальное значение суммы $y + u$.

Ответ: а) $\sqrt{34}$; б) $-\sqrt{34}$.

2212.(ИСАА, 2004, №6) Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $\frac{y^2}{25} + \frac{w^2}{144}$, если величины x, y, z, w удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0, \\ z^2 + w^2 - 2w - 143 = 0, \\ xw + yz - x + w + 2z - 61 \geq 0. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{4201+120\sqrt{601}}{3600}$ и $\frac{4201-120\sqrt{601}}{3600}$ соответственно.

2213.(ВМК, устный, 2001)Пусть $f(t) = \sqrt{1 + t^2} - t$. Какие значения может принимать выражение

$$f(x) \cdot f(y) + f(x) \cdot f(z) + f(y) \cdot f(z)$$

при следующих ограничениях:

$$xy + xz + yz = 1, \; x > 0, \; y > 0, \; z > 0?$$

.

Ответ: это выражение равно 1.

10.8 Экстремумы функций целочисленных переменных

2214.(эконом., 1971, №3) Найти максимальный член последовательности

$$a_n = -n^2 + 14n - 45 + \frac{4}{(2n-17)^2+2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ответ: $a_7 = 4\frac{4}{11}$.

2215.(геолог., 2007, устный) Найдите наибольший член последовательности $a_n = -2n^2 + 7n - 4$, $n \in N$.

Ответ: $a_2 = 2$.

2216.(ВМК, устный, 2004)Пусть x, y – целые числа. Найти наименьшее положительное число N, если $N = 6x + 3y$.

Ответ: $N_{\min} = 3$.

2217.(соц., 2008, №5) Среди учеников начальной школы провели опрос: кто любит зиму, а кто – лето. Оказалось, что 90% любителей зимы любят и лето, а 72% любителей лета любят и зиму. Зато 10% всех опрошенных не любят ни зимы, ни лета. Сколько процентов опрошенных любят только один из этих сезонов, но не любят другой. Каким при этом могло быть наименьшее число опрошенных?

Ответ: 30%; 30.

2218.(ВМК, устный, 2001+2003+2005+2006) Найти минимальное значение величины $x + y$, если x, y – целые числа, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} |y - 2x + 1| \leq 3, \\ y > -4. \end{cases}$$

Ответ: -5 (оно достигается при $x = -2$, $y = -3$).

2219.(ВМК, 2007, устный) На какую минимальную величину могут отличаться друг от друга натуральные числа m и n, если известно, что дробь $\frac{89}{3m+7n}$ является натуральным числом?

Ответ: 3.

2220*. (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы-2007", 10 кл., №3) Найдите наименьшее значение выражения $|33 - 40k - 25n|$ при целых k и n.

Ответ: 2.

2221.(мех-мат, 2008, устный) Числа a и b таковы, что многочлен $P(x) = -2x^3 + ax + b$ при каждом целом x принимает целое значение, кратное 3. Какое наименьшее положительное значение может принимать $P\left(\frac{5}{2}\right)$?

Ответ: $\frac{3}{4}$.

2222*. (мех-мат, устный, 2005) Пусть q и d – наименьшее общее кратное и, соответственно, наибольший общий делитель натуральных чисел x и y. Найти наименьшее значение величины $q : d$ при условии $3x = 8y - 29$.

Ответ: 4.

2223*. (мех-мат, 2003, Олимпиада, 9 кл., №4) Найти наибольшее значение разности $y - v$ при условии, что натуральные числа x, y, z, u, v, w удовлетворяют уравнению

$$x + \cfrac{1}{y + \cfrac{2003}{z}} = u + \cfrac{1}{v + \cfrac{2003}{w}}.$$

Ответ: 2002.

2224.(олимпиада "Ломоносов-2007", №10) В течение четверти учитель по пению ставил детям оценки "1", "2", "3", "4" и "5". Среднее арифметическое всех оценок Вовочки оказалось равным в точности 3,5. И тогда, по предложению Вовочки, учитель заменил одну его оценку "4" парой оценок "3" и "5". Доказать, что от этого средняя оценка Вовочки по пению увеличилась. Найти наибольшее возможное значение после такой замены: а) одной оценки "4" ; б) всех его оценок "4"?

Ответ: а) $3\frac{2}{3}$; б) $3\frac{8}{11}$.

2225.(ВМК, устный, 2008)Среди чисел вида $36^k - 5^m$ (k, m – натуральные числа) найти наименьшее по абсолютной величине.

Ответ: $11 = 36^1 - 5^2$.

10.9 Текстовые задачи на экстремумы

2226*. (географ., 2001, июль, №3) Числа a, b, c в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, а числа $a-c, c-b, 2a$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Какое минимальное значение может принимать число $2a^2 - 4b^2 - c^2 + 4bc + 6a$?

Ответ: -9.

2227.(ФГП, 2006, №2) Прибыль P предприятия за год определяется соотношением $P = A\sqrt{X} - X$, где X – расходы на производство, A – некоторая положительная величина. В 2004 году прибыль P оказалась положительной и составила 40% от расходов X. В 2005 году расходы выбраны так, чтобы прибыль была максимальной. Найдите отношение расходов в 2004 году к расходам в 2005 году.

Ответ: $\frac{100}{49}$.

2228.(Высшая школа государственного аудита, "Абитуриент-2008 ", №3) Инвестору предлагаются два проекта для вложения денежных средств. В каждом проекте зависимость прибыли Y от вложений X определяется квадратичной функцией $Y(X) = A \cdot X^2 + B \cdot X$ с коэффициентами A и B, зависящими от проекта. Известно, что при инвестировании средств только в первый проект максимальная прибыль в 200 тысяч рублей достигается при вложении 100 тысяч рублей, а при инвестировании только во второй проект максимальная прибыль в 150 тысяч рублей достигается при вложении 150 тысяч рублей. Инвестор решил вложить 290 тысяч рублей в оба проекта. Какую сумму ему следует вложить в каждый из проектов, чтобы общая прибыль была максимальной? Найдите максимальную общую прибыль.

Ответ: 110 тысяч рублей – в первый проект и 180 тысяч рублей – во второй. Максимальная общая прибыль равна 342 тысячи рублей Отметим, что этот же доход можно получить, если потратить 90 тысяч рублей на первый проект и 120 тысяч рублей – на второй (что в сумме составит 210 тысяч рублей).

2229.(геолог., 1997, май, №7) Стоимость изготовления m коробок пропорциональна $17 + 5m + m^2$. Определить количество коробок, при котором стоимость изготовления одной коробки минимальна.

Ответ: 4.

2230.(эконом., 1994, №5) Предприятие производит детскую обувь и является убыточным. Известно, что при изготовлении m пар обуви в месяц расходы предприятия на выпуск одной пары обуви составляют не менее $\frac{126000}{m} + 9 - |3 - \frac{5400}{m}|$ тыс. руб., а цена реализации каждой пары обуви при этом не превосходит $18 - \frac{1}{4000}m$ тыс. руб. Определить ежемесячный объём производства, при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего из возможных в данных условиях уровня. Вариант полной остановки производства исключён.

Ответ: 12000 или 24000 пар обуви.

2231.(эконом. (вечер.), 1997, июль, №4) Банк планирует вложить на 1 год 40% имеющихся у него средств клиентов в проект X, а остальные 60% – в проект Y. В зависимости от обстоятельств проект X может принести прибыль в размере от 19% до 24% годовых, а проект Y – от 29% до 34% годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке. Определить наименьший и наибольший возможный уровень процентной ставки по вкладам, при которых чистая прибыль банка составит не менее 10% и не более 15% годовых от суммарных вложений в проекты X и Y.

Ответ: 10% и 20%.

2232.(геолог., 2001, июль, №6) Пункты A и B расположены на двух различных дорогах, представляющих собой две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в пункте C. Два мотоциклиста одновременно начинают движение: первый из пункта A по направлению к C, а второй из B по направлению к C. Через какое время после начала движения расстояние между мотоциклистами будет наименьшим и каким, если скорость первого мотоциклиста равна 44 км/час, второго – 33 км/час, а каждое из расстояний от пункта A до пункта C и от пункта B до пункта C равно 275 км?

Ответ: 7 час., 55 км.

2233.(географ., 2000, май, №5) Эпицентр циклона, движущийся прямолинейно, во время первого измерения находился в 24 км к северу и 5 км к западу от метеостанции, а во время второго измерения находился в 20 км к северу и $3\frac{1}{3}$ км к западу от метеостанции. Определите наименьшее расстояние, на которое эпицентр циклона приблизится к метеостанции.

Ответ:$\frac{60}{13}$ км.

2234.(ВМК, устный, 2004)Стоимость эксплуатации катера, плывущего со скоростью v км/час составляет $90 + 0.4v^2$ рублей в час. С какой скоростью должен плыть катер, чтобы стоимость одного километра пути была наименьшей?

Ответ: 15 км/час.

2235.(ФГУ, 2003, июль, №1) Автозаправочные станции E и F расположены на расстоянии 3 км одна от другой. Где наиболее выгодно разместить бензосклад, если на АЗС E ежедневно поставляется 8 тонн бензина, а на АЗС F – 4 тонны?

Ответ: в пункте E.

2236.(географ., 2002, июль, №4) Тележка с передними колёсами диаметром 30 см и задними колёсами диаметром 40 см движется по прямой дороге, проходящей через точки A и B. Между точками A и B ровно 100 метров. Точка A покрашена. Через точку A проезжают правые колёса тележки, и в точках соприкосновения с ней красятся. В свою очередь, при каждом соприкосновении с дорогой эти точки оставляют свой след в виде точек на дороге. Никакие точки на дороге, кроме точки A, колёса не окрашивают. Тележка движется по направлению от точки A в сторону точки B. Найти: а) наименьшее расстояние между соседними окрашенными точками; б) количество окрашенных точек на отрезке AB.

Ответ: а) 10π; б) 160.

2237.(олимпиада "Ломоносов-2005", №9) Группа отдыхающих в течение 2 ч 15 мин каталась на моторной лодке по реке с постоянной скоростью (относительно воды) попеременно то по течению, то против: в каждую сторону не менее, чем по 1 ч. В итоге лодка прошла путь в 45 км (относительно берега) и, отчалив от пристани A, причалила к пристани B на расстоянии 5 км от A. В какую сторону текла река? Какова при этих условиях максимальная скорость ее течения?

Ответ: от A к B; 4,5 км/час.

2238*. (химический факультет, 1997, май, №4) Из сосуда, содержащего чистый спирт, отлили 1/3 часть и добавили такое же количество воды. Потом отлили 1/3 часть смеси и добавили такое же количество воды. Так проделали k раз (включая первое переливание). Каково наименьшее значение k, при котором процентное содержание спирта в сосуде после сделанных переливаний станет меньше 10%?

Ответ: k=6.

2239.(мех-мат, 1981, №3) В два различных сосуда налиты растворы соли, причем в 1-й сосуд налито 5 кг, а во второй – 20 кг. при испарении воды процентное содержание соли в 1-м сосуде увеличилось в p раз, а во втором сосуде – в q раз. О числах p и q известно только, что $pq = 9$. Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов вместе?

Ответ: $18\frac{1}{3}$ кг.

2240.(экономический факультет (кибернетика), 1978, №4) Имеются три сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70% меди, второй – 10% меди и 90% марганца, третий – 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание меди может быть в этом новом сплаве?

Ответ: 40% (составлен из первого и третьего сплавов) и $43\frac{1}{3}\%$ (составлен из первого и второго сплавов).

2241*. (химический факультет, 1992, №4) Даны три сплава. Состав первого сплава: 55% хрома и 45% никеля. Состав второго сплава: 60% никеля, 25% хрома и 15% кобальта. Состав третьего сплава: 70% хрома и 30% кобальта. Из них нужно приготовить новый сплав, содержащий 20% кобальта. Какие значения может принимать процентное содержание никеля в этом новом сплаве?

Ответ: процентное содержание никеля в новом сплаве меняется от 15% (новый сплав составлен только из первого и третьего сплавов), до 40% (новый сплав составлен только из второго и третьего сплавов).

2242*. (ФНМ, 2000, май, №4) Имеется три сплава, в состав которых входят металлы A, B и C. Первый сплав содержит 20% металла A, 30% металла B, 50% металла C. Второй сплав содержит 50% металла A, 20% металла B, 30% металла C. Третий сплав содержит 30% металла A, 40% металла B, 30% металла C. Сколько кг каждого сплава нужно взять, чтобы получить 10 кг нового сплава, который содержал бы 25% металла A, а процентное содержание металла B было бы минимально возможным?

Ответ: $\frac{25}{3}$, $\frac{5}{3}$ и 0 кг.

2243.(фил., 1988, №5) Через некоторое время после начала работы первая бригада собрала на два автомобиля больше, чем вторая бригада. Затем вторая бригада увеличила производительность труда в 1,1 раза и, собрав на втором этапе работы целое число автомобилей n, догнала первую, работавшую всё время с постоянной производительностью. Найти наименьшее возможное целое число n.

Ответ: 23.

2244*. (эконом., 2002, июль, №4) Бригада рабочих выполняет задание за 42 дня. Если бы в бригаде было на 4 человека больше и каждый рабочий бригады работал бы на 1 час в день дольше, то это же задание было бы выполнено не более, чем за 30 дней. При увеличении бригады ещё на 6 человек и рабочего дня ещё на 1 час всё задание было бы закончено не ранее, чем через 21 день. Определите наименьшую при данных условиях численность бригады, а также продолжительность рабочего дня.

Ответ: 20 рабочих, 6 часов.

2245.(эконом., 1999, июль, №3) Первая и вторая бригады, работая вместе, могут выполнить задание не более, за 9 дней. Вторая и третья бригады, работаю вместе, могут выполнить то же задание не менее, чем за 18 дней. Первая и третья бригады, работаю вместе, могут выполнить то же задание ровно за 12 дней. Известно, что 3 бригада всегда работает с максимально возможной для неё производительностью труда. За сколько дней может выполнить задание одна вторая бригада?

Ответ: 24 дня.

2246.(эконом. (веч.), 1999, июль, №4) Первая и вторая бригады, работая вместе, могут выполнить задание не более, чем за 9 дней. Вторая и третья бригады, работая вместе, могут выполнить то же задание не менее, чем за 18 дней. Первая и третья бригады, работая вместе, могут выполнить то же задание за 12 дней. За какое минимальное количество дней может выполнить задание одна третья бригада?

Ответ: 72 дня.

2247.(эконом., 1992, №3) Фабрика получила заказ на изготовление 1005 деталей первого типа и 2010 деталей второго типа. Каждый из 192 рабочих фабрики затрачивает на изготовление 2 деталей первого типа время, за которое он может изготовить 1 деталь второго типа. Каким образом следует разделить рабочих фабрики на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно, и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

Ответ: 39 и 153 человека.

2248.(психолог., 2000, июль, №3) Два одинаковых поля требуется вспахать тремя тракторами. При работе в одиночку первый трактор вспашет одно поле втрое быстрее, чем второй, а третьему трактору на эту же работу потребуется времени на два часа больше, чем первому. Работая вместе, все три трактора могут вспахать одно поле за семь часов двенадцать минут. Найти наименьшее время, за которое можно вспахать оба поля при условии, что все трактора начинают работу одновременно, а для переезда с одного поля на другое любому трактору требуется сорок минут.

Ответ: 14 час 30 мин.

2249.(психолог., 1987, №3) Бригада маляров белила потолки в классе и в актовом зале школы, причём площадь потолка в актовом зале в три раза больше, чем площадь потолка в классе. В той части бригады, которая работала в актовом зале, было на 6 маляров больше, чем в той части, которая работала в классе. Когда побелка всего потолка в актовом зале закончилась, та часть бригады, которая была в классе, ещё работала. Какое наибольшее число маляров могло быть в бригаде, если все они начали работать одновременно и работали с одинаковой производительностью?

Ответ: 10.

2250.(хим., 2000, июль, №3) Две бригады рабочих мостили два участка дороги (первая бригада – первый участок, вторая – второй), причём объём работ на втором участке вдвое больше, чем на первом, а в первой бригаде на 10 рабочих меньше, чем во второй. Производительность труда всех рабочих одинакова. Бригады одновременно начали работу, и когда первая бригада закончила работу, вторая ещё работала. Какое наименьшее число рабочих могло быть в первой бригаде?

Ответ: 11.

2251.(ФГУ, 2006, №7) Химический комбинат получил заказ на изготовление этилового спирта, соляной кислоты и дистиллированной воды. Для готовой продукции потребовалась 21 железнодорожная цистерна. При перекачивании были использованы три специализированных насоса: сначала первый насос заполнил четыре цистерны этиловым спиртом, затем второй насос заполнил шестнадцать цистерн соляной кислотой и в завершение третий насос заполнил одну цистерну дистиллированной водой. Найдите минимально возможное время, затраченое на перекачивание всей продукции, если известно, что суммарная производительность всех трех насосов равна семи цистернам в сутки.

Ответ: 7 суток.

2252.(фил., 2003, июль, №4) В двух группах учится одинаковое количество студентов. Каждый студент изучает по крайней мере один язык: английский или французский. Известно, что 5 человек в первой и 5 человек во второй группе изучают оба языка. Количество изучающих французский в первой группе в 3 раза меньше, чем во второй. Количество изучающих английский во второй группе в 4 раза меньше, чем в первой. Каково минимально возможное количество студентов в одной группе?

Ответ: 28.

2253*. (фил., 2003, март, №5) Вовочка написал домашнее сочинение и допустил орфографические и пунктуационные ошибки. Затем его сестра проверила сочинение и исправила часть ошибок. В новом тексте количество пунктуационных ошибок оказалось в пределах от 15,5% до 18% от числа пунктуационных ошибок в старом тексте. Количество орфографических ошибок уменьшилось втрое и составило 25% от числа пунктуационных ошибок в первоначальном тексте.

а) Может ли в новом тексте содержаться ровно 6 ошибок?

б) Какое наименьшее число ошибок могло содержаться в первоначальном тексте?

Ответ: а) нет; б) 21.

2254.(геогр., 1979, июль, №4) В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии успеваемость, заключен в пределах от 2,9 % до 3,1 %. Определить минимально возможное число учеников в таком классе.

Ответ: 33.

2255*. (географ., 2003, №3) Непустое множество X состоит из конечного числа N натуральных чисел. Четных чисел в X меньше двух третей от N, а нечетных не больше 36% от N. Какое минимальное значение может принимать число N?

Ответ: 14.

2256.(эконом., 1997, июль, №4) Имеются три пакета акций. Общее суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с общим количеством акций в третьем пакете. Первый пакет в 4 раза дешевле второго, а суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета. Одна акция тз второго пакета дороже одной акции из первого пакета на величину, заключённую в пределах от 16 тыс. руб. до 20 тыс. руб., а цена одной акции из третьего пакета не меньше 42 тыс. руб. и не больше 60 тыс. руб. Определить, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете.

Ответ: 12,5% и 15%.

2257.(соц., 1999, июль, №4) Кандидат в депутаты за время избирательной кампании имеет право на одно бесплатное выступление в газете, а также на платные выступления по радио и телевидению. Выступление в газете увеличивает число сторонников кандидата на 1000 человек; каждое выступление по радио увеличивает число голосов на 40% и стоит 32 тысячи рублей; каждое выступление по телевидению — на 80% и стоит 47 тысяч рублей. Определить количество и последовательность выступлений в этих средствах массовой информации, при которых кандидат получит наибольшее возможное число голосов, если на всю кампанию можно израсходовать не более 112 тысяч рублей.

Ответ: сначала следует выступить в газете, а затем в любом порядке 2 раза по радио и 1 раз по телевидению.

2258.(геолог., 2002, май, №6) На полевых работах геологу нужно собрать образцы типов А и Б. Вес одного образца типа А равен 3 кг, а типа Б – 4 кг. По каждому из образцов типа А требуется провести 5 видов анализов, а по каждому из образцов типа Б – 7 видов. Известно, что вес всех собранных образцов не должен превышать 149 кг, а общее число всех проведённых анализов должно быть не менее, чем 249. Какое минимальное и максимальное суммарное количество образцов обоих типов можно собрать при указанных условиях?

Ответ: 36 и 49.

2259.(ВМК, 1987, №5) С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает 44 маленьких блока и имеет грузоподъёмность 10 тонн. Вес маленького блока – 0,2 тонны, большой блок весит 3,6 тонны и занимает место 14 маленьких. Найти минимальное число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

Ответ: 20 рейсов.

2260.(эконом. (менеджмент), 1998, №6) Множество F состоит из всех точек плоскости, координаты $(x;y)$ которых принимают целочисленные значения и удовлетворяют неравенству

$$\left(\frac{2x}{3y}\right)^{\log_{\left(\frac{2x}{3y}\right)}(|x|+|y|-14)} < 3.$$

Определить точки множества F, наименее удаленные от точки $M(2;-2)$.

Ответ: $(-6;-9), (-5;-10), (10;5)$.

2261.(ФГУ, 2004, июль, №7) На плоскости Oxy найдите наибольшее расстояние между такими двумя точками с координатами (x, y), что x и y являются целыми числами и удовлетворяют уравнению

$$4 \cdot \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{15}{xy}.$$

Ответ: $2\sqrt{65}$.

2262*. (эконом. (менеджмент), 1996, июль, №4) В контейнер упакованы изделия двух типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа и 600 тыс. руб. и 15 кг для второго типа. Общий вес изделий равен 321 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере изделий.

Ответ: 11000 тыс. руб. и 12600 тыс. руб.

2263.(ВШБ, 2008, №5)Дорогу длиной 83 метра и шириной 3 метра необходимо полностью покрыть бетонными плитами. Для покрытия могут быть использованы плиты различной длины: 11 метров, 6 метров и 4 метра. Все плиты имеют одинаковую ширину 1 метр и одинаковую толщину 30 см. Найти самый дешёвый вариант покрытия дороги (определить, какое количество каких плит необходимо использовать), если известно, что плита длиной 11 метров стоит 100 условных единиц, плита длиной 6 метров стоит 50 условных единиц и плита длиной 4 метра стоит 40 условных единиц. В условных единицах определить наименьшую стоимость полного покрытия дороги бетонными плитами.

Ответ: наименьшая стоимость равна 2100 условных единиц; она достигается при использовании 3 плит длиной 11 метров и 36 плит длиной 6 метров.

2264.(эконом. (менеджмент), 2004, июль, №5) Баржа грузоподъемности 96 тонн перевозит контейнеры типов А и Б при условии полной загрузки. Количество загруженных на баржу контейнеров типа Б не менее чем на 25% превосходит количество загруженных контейнеров типа А. Вес и стоимость одного контейнера типа А составляют 3 тонны и 5 тысяч рублей, контейнера типа Б – 4 тонны и 2 тысячи рублей соответственно. Определить наибольшую возможную суммарную стоимость всех контейнеров, перевозимых баржей при данных условиях.

Ответ: 90 тыс. руб.

2265.(эконом. (кибернетика), 1975, №4) Зоопарк ежедневно распределяет 111 кг мяса между лисами, леопардами и львами. Каждой лисе полагается 2 кг мяса, леопарду – 14 кг, льву – 21 кг. Известно, что у каждого льва бывает ежедневно 230 поситителей, у каждого леопарда – 160, у каждой лисы – 20. Сколько должно быть лис, леопардов и львов в зоопарке, чтобы ежедневное число посетителей у этих животных было максимальным?

Ответ: 3 лисы, 6 леопардов, 1 лев.

2266.(Севастополь, 1999, №7) Детский сад хочет приобрести наборы цветных карандашей трех видов на сумму 111 рублей, при этом должны быть куплены наборы всех трех видов и истрачена вся сумма. Набор из 2 карандашей стоит 2 рубля, набор из 16 карандашей – 14 рублей, набор из 23 карандашей – 21 рубль. Сколько наборов каждого вида следует купить, чтобы общее количество купленных карандашей было наибольшим при заданных условиях?

Ответ: 3 набора за 2 рубля, 6 наборов за 14 рублей, 1 набор за 21 рубль.

2267.(эконом., 1996, июль, №4) В контейнер упакованы комплектующие изделия трех типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа, 500 тыс. руб. и 16 кг для второго типа, 600 тыс. руб. и 15 кг для третьего типа. Общий вес комплектующих равен 326 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий.

Ответ: 10500 тыс. руб. и 12600 тыс. руб.

2268.(эконом. (кибернетика), 1968, №3) Завод должен переслать заказчику 1100 деталей. Детали для пересылки упаковываются в ящики. Имеются ящики трех типов. Один ящик первого типа вмещает 70 деталей, один ящик второго типа вмещает 40 деталей, один ящик третьего типа вмещает 25 деталей. Стоимость пересылки одного ящика первого типа 20 руб., стоимость пересылки одного ящика второго типа 10 руб., стоимость пересылки одного ящика третьего типа 7 руб. Какие ящики должен использовать завод, чтобы стоимость пересылки была наименьшей? Недогрузка ящиков не допускается.

Ответ: 25 ящиков второго типа и 4 ящика третьего типа.

2269.(эконом. киб., 1984, №5) Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 12 квартирного дома необходимо 70 деталей первого и 100 деталей второго вида. Для сборки 16 квартирного дома требуется 110 и 150 , а для дома на 21 квартиру нужно 150 и 200 деталей первого и второго вида соответственно. Всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

Ответ: 11 домов на 12 квартир и 1 дом на 16 квартир.

2270.(эконом., 2004, июль, №5) Баржа грузоподъемности 98 тонн перевозит контейнеры типов А и Б. Количество загруженных на баржу контейнеров типа Б не менее чем на 25% превосходит количество загруженных контейнеров типа А. Вес и стоимость одного контейнера типа А составляют 2 тонны и 5 тысяч рублей, контейнера типа Б – 5 тонн и 7 тысяч рублей соответственно. Определить наибольшую возможную суммарную стоимость всех контейнеров, перевозимых баржей при данных условиях.

Ответ: 160 тыс. руб.

2271.(мех-мат, 1967, №2) Требуется построить некоторое количество одинаковых жилых домов с общей жилой площадью 40 тыс. кв.м. Затраты на постройку одного дома, имеющего N кв.м. жилой площади, складываются из стоимости наземной части, пропорциональной $N\sqrt{N}$, и стоимости фундамента, пропорциональной $\sqrt{N}$. Строительство дома на 1600 кв. м. обходится в 184,8 тыс. руб., причем в этом случае стоимость наземной части составляет 32% стоимости фундамента. Определить, сколько нужно построить домов, чтобы сумма затрат была наименьшей, и найти эту сумму.

Ответ: 8 домов, сумма затрат равна $2800\sqrt{2}$ тыс. руб.

2272.(ФГУ, 2009, №4) Фабрика получила заказ на изготовление 9000 деталей типа P и 3000 деталей типа Q. Каждый из 190 рабочих фабрики затрачивает на изготовление 3 деталей типа P время, за которое он мог бы изготовить 2 детали типа Q. Каким образом следует разделить рабочих фабрики на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

Ответ: 126+64 или 127+63.

2273.(ФГУ, 2003, июль, №7) Для того, чтобы успеть на последний электропоезд, семье из четырех человек нужно перейти по пешеходному мосту быстрее, чем за 32 минуты. Одновременно по мосту могут идти не более двух человек, причем ввиду темного времени непременно с фонариком. Если мост проходят двое, то со скоростью того, кто идет медленнее. Успеют ли на последний поезд все члены семьи, если известно, что в одиночку Анна может перейти мост за 2 минуты, Василий – за 4 минуты, Игорек – за 10 минут, Марья Ивановна – за 16 минут, а фонарик только один.

Ответ: успеют.

2274.(ФГУ, 2002, июль, №7)Пять пиратов делят 10 слитков золота. Процедура дележа устроена так: сначала старший пират предлагает делёж по своему выбору. Если больше половины пиратов его отвергает, второй по старшинству пират предлагает новый делёж добычи среди оставшихся четырёх (старший пират никакого участия в дальнейшем дележе не принимает). Если новый делёж отвергается большинством голосов, то предлагавший его пират от дальнейшего участия в дележе отстраняется, и процедура повторяется для трёх пиратов. Как будут распределены слитки золота, если каждый пират из двух данных дележей предпочитает тот, в котором его доля золотых слитков больше?

Ответ: (8,0,1,0,1).

2275.(Олимпиада "Ломоносов-2008", №10)На числовой прямой отмечены 4 синие точки, соответствующие первым членам геометрической прогрессии с первым членом -2 и знаменателем -2, а также 4 зелёные точки, соответствующие первым членам некоторой арифметической прогрессии с первым членом -5. Какова при этом наименьшая возможная сумма длин 4 отрезков с разноцветными концами, включающими все 8 отмеченных точек? (Каждая из 8 точек является концом одного из отрезков.)

Ответ: 12.

Глава 11

Решения

11.1 Глава 1

Решение задачи 7. В числителе и знаменателе второй дроби периодически повторяются определённые группы цифр. Этот факт можно использовать для разложения на множители:

$$\begin{aligned} 21\ 21\ 21\ 21 &= 21\ 00\ 00\ 00 + 21\ 00\ 00 + 21\ 00 + 21 \\ &= 21 \cdot (1\ 00\ 00\ 00 + 1\ 00\ 00 + 1\ 00 + 1) = 21 \cdot 1010101. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} 99\ 99\ 99\ 99 &= 99\ 00\ 00\ 00 + 99\ 00\ 00 + 99\ 00 + 99 \\ &= 99 \cdot (1\ 00\ 00\ 00 + 1\ 00\ 00 + 1\ 00 + 1) = 99 \cdot 1010101. \end{aligned}$$

Поэтому вторая дробь равна $\frac{21}{99} = \frac{3 \cdot 7}{3 \cdot 33} = \frac{7}{33}$, т.е. совпадает с первой дробью.

Ответ: эти числа равны. □

Решение задачи 9. В соответствии с определением, принятым в школьном курсе математики, действительное число – это формальный символ $\pm A, a_1 a_2 a_3 \ldots$, где A – неотрицательное целое число, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ – цифры (при этом случай, когда начиная с некоторого места все a_n равны 9, исключается). По определению, из двух положительных действительных чисел большим считается, то, у которого первая несовпадающая цифра больше.

В нашем случае речь идет о сравнении чисел $2,004004\ldots$ и $2,005000\ldots$. Первая несовпадающая пара цифр – это 4 (в первом числе) и 5 (во втором числе). Применяя определение, мы получим, что первое число меньше.

Ответ: первое число меньше.□

Решение задачи 11. Первое число является бесконечной периодической дробью: $0,7\ 621\ 621\ \ldots$. Запишем его в виде простой дроби. Для этого представим первое число как сумму

$$\frac{7}{10} + \frac{621}{10\ 000} + \frac{621}{10\ 000\ 000} + \ldots$$

Последовательность
$$\frac{621}{10\ 000}, \frac{621}{10\ 000\ 000}, \dots$$
образует бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{1\ 000}$. Её сумма равна
$$S = \frac{\frac{621}{10\ 000}}{1 - \frac{1}{1\ 000}} = \frac{621}{9990}.$$

Признак делимости на 9 показывает, что числитель и знаменатель последней дроби делятся на 9. При этом $621 = 9 \cdot 69$, $9990 = 9 \cdot 1110$. Поэтому $S = \frac{69}{1110}$. Последнюю дробь можно сократить на 3 (в соответствии с признаком делимости на 3, числа 69 и 1110 делятся на 3), так что $S = \frac{23}{370}$.

Таким образом, число $0,7(621)$ равно
$$\frac{7}{10} + \frac{23}{370} = \frac{7 \cdot 37 + 23}{370} = \frac{282}{370}.$$

Сокращая на 2, получим $\frac{141}{185}$ – это в точности второе число.

Ответ: числа равны.□

Решение задачи 1. Первое число равно
$$\frac{0,2(1)}{4} + 0,(2) = \frac{0,2(1) + 4 \cdot 0,(2)}{4} = \frac{0,2111\dots + 0,8888\dots}{4}.$$

В соответствии с определением суммы двух действительных чисел, чтобы сложить две бесконечные десятичные дроби $x = 0,2111\dots$ и $y = 0,8888\dots$ в числителе, нужно

1. образовать их приближения по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^n}$: $x_n = 0,211\dots11$, $y_n = 0,888\dots88$ (каждая конечная десятичная дробь содержит по n цифр после запятой) и сложить их: $x_n + y_n = 1,09\dots99$;

2. образовать их приближения по избытку с точностью до $\frac{1}{10^n}$: $x'_n = 0,211\dots12$, $y'_n = 0,888\dots89$ (каждая конечная десятичная дробь содержит по n цифр после запятой) и сложить их: $x'_n + y'_n = 1,10\dots01$;

3. найти (единственное) число, которое больше (или равно) суммы любых приближённых значений с недостатком, но меньше (или равно) суммы любых приближённых значений с избытком – это число и будет искомой суммой двух данных действительных чисел. В нашем случае таким числом будет число $1,100\dots = 1,1$.

Этот же результат получится, если формально сложить бесконечные десятичные дроби $x = 0,2111\dots$ и $y = 0,8888\dots$. В результате мы получим число $1,0999\dots$, которое заканчивается бесконечной последовательностью цифр 9.

В соответствии с определением действительного числа как бесконечной десятичной дроби, число, оканчивающееся бесконечной последовательностью цифр 9, не используется, а заменяется конечной десятичной дробью, в которой бесконечная последовательностью цифр 9 отбрасывается, а цифра, стоящая перед ней, увеличивается на 1. Таким образом, вместо $1,0999\ldots$ следует писать $1,1$.

Итак, первое число из двух данных равно

$$\frac{1,1}{4} = \frac{11}{40} = 0,275.$$

Таким образом, числа $0,2(1) : 4 + 0,(2)$ и $0,275$ равны.

Отметим, что этот же вывод можно было бы получить и другим методом, превращая бесконечные периодические десятичные дроби $x = 0,2111\ldots$ и $y = 0,8888\ldots$ в простые.

Ответ: числа равны.□

Решение задачи 15. Для любого многочлена $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ сумма коэффициентов $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ равна $P(1)$. В нашем случае

$$P(1) = (1 - 3 + 3)^{34} \cdot (1 + 5 - 5)^{249} = 1.$$

Ответ: 1. □

Решение задачи 17. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - a$ равен $P(a)$. Поэтому остаток от деления многочлена $x^5 - 3x^3 + 6x^2 - 2$ на двучлен $x + 4$ равен

$$(-4)^5 - 3 \cdot (-4)^3 + 6 \cdot (-4)^2 - 2 = -1024 + 192 + 96 - 2 = -738.$$

Ответ: нет. □

Решение задачи 20. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, мы получим, что при всех значениях x верно равенство:

$$(5 + a - b)x^2 + (15 + 5a)x + (6a + 9b) = 0.$$

Это равносильно тому, что все коэффициенты при неизвестных равны 0:

$$\begin{cases} 5 + a - b = 0, \\ 15 + 5a = 0, \\ 6a + 9b = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a = -3, \\ b = 2. \end{cases}$$

Центральной частью нашего рассуждения было использование следующего “очевидного” утверждения:

многочлен вида $ax^2 + bx + c$ тождественно равен 0 тогда и только тогда, когда все его коэффициенты равны 0.

Его нужно уметь строго доказывать. Элементарное доказательство выглядит следующим образом. При $x = 0$ равенство $ax^2+bx+c = 0$ даст $c = 0$, после чего его можно свести к тождеству $ax^2 + bx = 0$. Сокращая на x, мы получим тождество $ax + b = 0$ при всех $x \neq 0$. Положить здесь x равным

0 уже нельзя. Поэтому мы подставим вместо x числа 1 и -1: $a + b = 0$, $-a + b = 0$. Складывая и вычитая эти равенства, мы получим равенство 0 коэффициентов a и b.

Ответ: $a = -3, b = 2.\square$

Решение задачи 24. По аналогии с решением задачи 20 можно было бы раскрыть скобки в правой части, привести подобные (т.е. записать многочлен в правой части в стандартном виде), а затем приравнять коэффициенты соответствующих одночленов в левой и правой частях. Это даст систему из 6 уравнений с 6 неизвестными a, b, c, A, B, C, которая несовместна. Однако этот способ довольно громоздкий и, кроме того, опирается на утверждение

многочлен в стандартном виде тождественно равен 0 тогда и только тогда, когда все его коэффициенты равны 0,

которое (при всей его "очевидности") довольно трудно доказать.

Поэтому мы применим другой метод. Допустим, что равенство

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ax + by + cz)(Ax + By + Cz) \tag{11.1}$$

верно при всех значениях переменных x, y, z. Если мы положим $y = z = 1$, то получим тождество

$$x^2 + 2 = (ax + b + c)(Ax + B + C), \tag{11.2}$$

которое выполнено при всех x.

Выражение в левой части является неполным квадратным трёхчленом $x^2 + 0 \cdot x + 2$. Его дискриминант равен $0^2 - 4 \cdot 2 = -8 < 0$, так что его нельзя разложить на линейные множители, в то время как (11.2) дает такое разложение. Полученное противоречие означает, что тождество (11.1) невозможно.

Ответ: нет. $\square$

Решение задачи 25. Заменим k на $n+1$. Тогда выражение под знаком радикала будет равно

$$n^2 + (n+1)^2 + n^2(n+1)^2 = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1.$$

Характерной особенностью многочлена $P(n) = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1$ является определённая симметрия коэффициентов – коэффициенты, равноудалённые от начала и конца многочлена равны. Такие многочлены называют возвратными. С помощью новой переменной $t = n^2 + 1$ их можно свести к многочлену вдвое меньшей степени. Чтобы выделить блок $n^2 + 1$, сгруппируем члены, равноотстоящие от концов многочлена:

$$\begin{aligned} P(n) &= (n^4 + 1) + (2n^3 + 2n) + 3n^2 = (n^4 + 1) + 2n(n^2 + 1) + 3n^2 \\ &= \left((n^2 + 1)^2 - 2n^2\right) + 2n(n^2 + 1) + 3n^2 \\ &= \left(n^2 + 1\right)^2 + 2n(n^2 + 1) + n^2 = t^2 + 2nt + n^2 \\ &= (t + n)^2 = (n^2 + n + 1)^2. \end{aligned}$$

Значит, искомое число равно

$$\begin{aligned} & n^2+n+1 = 2002^2+2002+1 = (2000+2)^2+2003 \\ = \ & 4\ 000\ 000 + 8\ 000 + 4 + 2003 = 4\ 010\ 007. \end{aligned}$$

Ответ: 4 010 007. □

Решение задачи 26. Перемножим множители n и $(n+3)$, $(n+1)$ и $(n+2)$. Тогда число $A = n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ примет вид:

$$A = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1.$$

Обращая внимание на повторяющийся блок n^2+3n, введём новую переменную $k = n^2+3n$. Это позволит записать число A в виде:

$$A = k(k+2)+1 = k^2+2k+1 = (k+1)^2.$$

Поскольку число $k+1 \equiv n^2+3n+1$, очевидно, является натуральным, можно утверждать, что A – полный квадрат.

Отметим, что простое раскрытие скобок даёт, что

$$A = n^4+6n^3+11n^2+6n+1,$$

т.е. A является возвратным многочленом относительно n. Применяя метод, описанный при решении задачи 25, мы получим, что $A = (n^2+3n+1)^2$. □

Решение задачи 28. Равенства $x+y=12$, $xy=6$ в силу обратной теоремы Виета влекут, что числа x и y являются корнями квадратного уравнения $t^2-12t+6=0$. Его дискриминант равен $D=120>0$, так что это уравнение имеет два корня: $t_1 = 6+\sqrt{30}$, $t_2 = 6-\sqrt{30}$. Соответственно, для x, y есть две возможности: $(x;y)=(t_1;t_2)$ и $(x;y)=(t_2;t_1)$. В принципе это позволяет вычислять значение выражения $A = \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}$, однако ясно, что выкладки будут настолько громоздкими, что их сложно провести на экзамене без ошибок. Поэтому мы применим другой метод.

Выражение $A = \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}$ симметрично относительно x и y. Поэтому его можно выразить через элементарные симметрические многочлены $a = x+y$, $b = xy$:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^3+y^3}{x^3y^3} = \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(xy)^3} \\ &= \frac{(x+y)((x+y)^2-3xy)}{(xy)^3} = \frac{a(a^2-3b)}{b^3}. \end{aligned}$$

Подставляя числовые значения $a=12$, $b=6$, получим

$$A = \frac{12\cdot(144-18)}{216} = 7.$$

Отметим, что приведённое решение совершенно не требует знания точных значений переменных x и y. **Ответ**: 7. □

Решение задачи 31. Прежде всего отметим, что выражение в левой части нашего уравнения при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, принимая в точках $x = 0$ и $x = 1$ значения 0 и 3 соответственно. Поэтому уравнение $x^{11} + x^7 + x^3 = 1$ имеет и притом единственный корень x_0, причём $0 < x_0 < 1$.

По смыслу задачи мы должны указать хотя бы одно число n, такое, что $x_0^n = x_0^4 + x_0^3 - 1 \Leftrightarrow x_0^n - x_0^4 - x_0^3 + 1 = 0$. Складывая это равенство с равенством $x_0^{11} + x_0^7 + x_0^3 - 1 = 0$ (которое выражает тот факт, что x_0 – корень уравнения $x^{11} + x^7 + x^3 = 1$), мы получим:

$$x_0^n + x_0^{11} + x_0^7 - x_0^4 = 0 \Leftrightarrow x_0^{n-4} + x_0^7 + x_0^3 - 1 = 0.$$

Сопоставляя последнее соотношение с истинным числовым равенством $x_0^{11} + x_0^7 + x_0^3 - 1 = 0$, мы получим, что равенство $x_0^{n-4} + x_0^7 + x_0^3 - 1 = 0$ заведомо выполнено, если $n - 4 = 11$, т.е. $n = 15$.

Ответ: в 15.□

Решение задачи 33. Разложим числители всех дробей на множители и сократим общие множители. После этого все действия легко выполняются:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(3a-4b)(3a+4b)}{3a+4b} - \frac{ab(a-3b)}{ab}\right)^2 \\ : & \left(6ab - \frac{(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)}{2a-b}\right) \\ = & (3a-4b-a+3b)^2 : (6ab - 4a^2 - 2ab - b^2) \\ = & (2a-b)^2 : (-4a^2+4ab-b^2) = -(2a-b)^2 : (2a-b)^2 = -1. \end{aligned}$$

Ответ: -1. □

По поводу этой и других подобных задач на упрощение следует иметь в виду следующее.

В современной алгебре принято рассматривать многочлены и алгебраические дроби с двух точек зрения.

В соответствии с первой из них многочлены и алгебраические дроби понимаются как формальные символы, над которыми определены некоторые операции. Например, многочлен $x^2 - x - 2$ – это просто набор его коэффициентов $(1; -1; -2)$, а дробь $\frac{x^2-x-2}{x+1}$ – это пара $(x^2 - x - 2; x + 1)$ (на самом деле аккуратное определение дроби требует понятия фактор-множества). При такой точке зрения равенство $\frac{x^2-x-2}{x+1} = x - 2$ верно без всяких условий; левая и правая части задают один и тот же элемент поля рациональных дробей над полем действительных чисел (хотя точный смысл этому равенству можно придать только с помощью понятия изоморфизма – опять не обойтись без сложных понятий высшей алгебры). Соответственно, в нашей задаче -1 – абсолютно правильный ответ.

В соответствии со второй точкой зрения, многочлен или другое выражение – это функция числового аргумента, заданная соответствующей формулой. В школьной математике обычно (а в случае выражений с радикалами, логарифмами и т.п. – всегда) подразумевается именно она.

Строго говоря, определение функции включает область определения в качестве составной части. Поэтому, например, $y = x^2$, где $0 < x < 1$, и $y = x^2$, где $-1 < x < 1$ – это совершенно разные функции. Однако, обычно в случае функций заданных формулами, область определения не указывают, подразумевая, что функция рассматривается на так называемой естественной области определения, т.е. на множестве тех значений переменной, при которых можно выполнить все предписанные формулой действия. Иначе говоря, естественная область определения – это область допустимых значений (область существования выражения – стандартной терминологии здесь нет). При таком взгляде, выражение $\frac{x^2-x-2}{x+1}$ – это функция $y = \frac{x^2-x-2}{x+1}$, $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$, а выражение $x - 2$ – это функция $y = x - 2$, $x \in (-\infty; +\infty)$. Поэтому выражения $\frac{x^2-x-2}{x+1}$ и $x - 2$ различны, т.к. различны их (неявно подразумеваемые) области определения. Однако, если второе выражение рассматривать только при $x \neq -1$, то эти выражения будут равны (т.к. они задают одну и ту же функцию):

$$\frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = x - 2, \ x \neq -1.$$

Для сложных выражений найти естественную область определения иногда гораздо сложнее, чем выполнить упрощения. Поэтому часто это не делают, а проводят формальное упрощение выражения, указывая в конце, что равенство рассматривается на пересечении естественных областей определения выражений (т.е. на их общей области определения). Обычно, впрочем, не делают и этого, подразумевая соответствующие оговорки неявно. Это обычное соглашение в школьной математике (см., например, Виленкин Н.Я. и др. Алгебра и математический анализ для 10 класса. Москва, Просвещение, 1995, стр.59, или Макарычев Ю.Н. и др. Алгебра: учебник для 9 кл. Москва, Просвещение, 1999, стр. 241).

На экзамене лучше делать хоть какие-нибудь пояснения на этот счет (в идеале нужно указать то множество, на котором установлено равенство выражений – это особенно важно при решении задач на построение графиков функций в разделе 10.2).

В нашей задаче, в частности, исходное выражение равно -1 на множестве $\{(a, b) | a, b, 3a + 4b, 2a - b \neq 0\}$.

Следует отметить, что все сказанное выше о важности области определения (ОДЗ) относится к упрощению изолированных выражений. При решении уравнений, систем, неравенств ключевыми являются понятия равносильных преобразований и следствий. Для этих задач понятие ОДЗ иногда полезно, но, как правило, не нужно (а иногда и вредно, т.к. может привести школьника к ошибочным выводам). Понятие области определения нужно использовать лишь тогда, когда этого требует логика равносильных преобразований (если задача решается равносильными преобразованиями, а не задачами-следствиями с последующей проверкой).

Таким образом, в данной задаче можно дать несколько абсолютно верных вариантов ответа:

-1 – неявно подразумевается, что утверждается равенство элементов поля рациональных дробей;

-1 на множестве $\{(a,b)|a,b,3a+4b,2a-b\neq 0\}$ – подразумевается совпадение двух функций с явно указанной общей областью определения;

-1 при условии $a,b,3a+4b,2a-b\neq 0$ – это просто менее формальный ("старомодный") вариант предыдущего ответа;

-1 – неявно подразумевается, что утверждается равенство функций, при этом в качестве общей области определения рассматривается пересечение их естественных областей определения.

Эта неоднозначность связана с неоднозначностью условия задачи. Ее можно исключить, если точнее и аккуратнее формулировать вопрос задачи. Но это может привести к тому, что условие станет настолько громоздким, что школьник не сможет его понять. Кроме того, как мы отмечали, точные формулировки требуют в ряде случаев понятий и результатов, выходящих за рамки школьной программы. Поэтому вполне допустимы вольные ("жаргонные") формулировки. Экзаменаторы прекрасно понимают это и не придираются по формальным поводам.

Более того, каждый год в ходе вступительных экзаменов то на одном, то на другом факультете появляются задачи не просто с неаккуратными, а с небрежными формулировками (соответственно, условия задач, которые публикуются, например, в Справочнике для поступающих в Московский университет иногда отличаются от тех, что предлагались абитуриентам). Часто необходимые уточнения вносятся в ходе устных объявлений во время экзамена. Если это выясняется после экзамена, то обычно экзаменаторы принимают любой разумный вариант ответа.

Решение задачи 42. Из равенства $xyz=1$ исключим переменную z: $z=\frac{1}{xy}$. Тогда выражение

$$A=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}$$

примет вид:

$$A=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+\frac{1}{x}}+\frac{1}{1+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y}}.$$

Выполняя действия над дробями, получим:

$$A=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{x+xy+1}+\frac{xy}{xy+1+x}=\frac{1+x+xy}{1+x+xy}=1.$$

Ответ: 1. $\square$

Решение задачи 43. Перепишем неравенство в виде

$$\frac{|2b|^2+(b+1)}{2}\geq\sqrt{|2b|^2\cdot(b+1)},$$

так что оно сводится к неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом для неотрицательных чисел $x=4b^2$ и $y=b+1$. $\square$

Решение задачи 54. *1 способ.* Раскрывая скобки в левой части мы преобразуем наше неравенство к виду

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\geq 6.$$

Применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух взаимно обратных чисел, можно утверждать, что

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2,\quad \frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2,\quad \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2.$$

Складывая эти неравенства почленно, мы получим желаемое неравенство.

2 способ. Перепишем неравенство, которое нужно доказать, в виде

$$\frac{a+b+c}{3}\geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

Выражение в левой части – это среднее арифметическое чисел a, b и c. Выражение в правой части называется средним гармоническим чисел a, b и c. Таким образом, наше неравенство утверждает, что среднее арифметическое больше среднего гармонического или равно ему.

Мы установим этот результат для произвольного набора положительных чисел. Прежде всего введём понятие среднего гармонического положительных чисел $x_1,\ldots,x_n$; это число

$$h(x_1,\ldots,x_n)=\frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}.$$

Иначе говоря, среднее гармоническое – это такое число, что обратное к нему является средним арифметическим чисел, обратных к исходным:

$$\frac{1}{h(x_1,\ldots,x_n)}=a\left(\frac{1}{x_1},\ldots,\frac{1}{x_n}\right),$$

где

$$a(x_1,\ldots,x_n)=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

среднее арифметическое чисел $x_1,\ldots,x_n$.

Обозначим среднее геометрическое положительных чисел $x_1,\ldots,x_n$ через $g(x_1,\ldots,x_n)$:

$$g(x_1,\ldots,x_n)=\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}.$$

Поскольку

$$g\left(\frac{1}{x_1},\ldots,\frac{1}{x_n}\right)=\frac{1}{g(x_1,\ldots,x_n)},$$

из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом для чисел $\frac{1}{x_1},\ldots,\frac{1}{x_n}$ следует, что

$$h(x_1,\ldots,x_n)\leq g(x_1,\ldots,x_n)$$

так что тем более верно неравенство

$$h(x_1, \ldots, x_n) \le a(x_1, \ldots, x_n).$$

□

Решение задачи 58. Напомним, что средним степенным порядка n неотрицательных чисел x_1 и x_2 называется число

$$S_n(x_1, x_2) = \sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n}{2}} = \left(\frac{x_1^n + x_2^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Другими словами, среднее степенное порядка n – это такое неотрицательное число, что его n-я степень является средним арифметическим n-х степеней исходных чисел.

Легко доказать, что среднее степенное порядка n лежит между числами x_1 и x_2 (совпадая с ними в случае, когда числа равны). Следует отметить, что величина $\sqrt[n]{\frac{x_1^n+x_2^n}{2}}$ определена для любых действительных x_1 и x_2 (не обязательно неотрицательных), но она может и не лежать между точками x_1 и x_2.

Среднее степенное порядка $n = 2$ называется средним квадратичным, среднее степенное порядка $n = 1$ – это среднее арифметическое. Более того, среднее гармоническое можно рассматривать как среднее степенное порядка $n = -1$, а среднее геометрическое – это "среднее степенное порядка $n = 0$" (хотя точный смысл этой фразе можно придать только с использованием более общих понятий и результатов).

Для средних степенных порядка n можно получить следующие неравенства

$$S_1(x_1, x_2) \le S_2(x_1, x_2) \le S_3(x_1, x_2) \le S_4(x_1, x_2) \le \ldots \tag{11.3}$$

Иначе говоря, $S_n(x_1, x_2) \le S_{n+1}(x_1, x_2)$. При этом знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$. Для $n = 1, 2, 3$ (именно эти случаи обычно встречаются на экзаменах) последнее неравенство легко доказать простым возведением в нужную степень.

Чтобы решить исходную задачу, рассмотрим неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$$

для $x_1 = |x|$, $x_2 = |y|$. Условие $x^2 + y^2 = 1$ означает, что среднее квадратичное чисел x_1 и x_2 равно $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Поэтому $|x| + |y| \le \sqrt{2}$. Поскольку $|x + y| \le |x| + |y|$, можно утверждать, что $|x + y| \le \sqrt{2}$ – это неравенство равносильно неравенству $-\sqrt{2} \le x + y \le \sqrt{2}$, которое нужно доказать.
□

Решение задачи 59. Обозначим число $\sqrt{x-1} + 1$ через x_1, а число $\sqrt[3]{x^2 - 1} - 1$ – через x_2. Число x_1, очевидно, положительно (более того, оно не меньше 1), в то время как о знаке числа x_2 нельзя сказать ничего определённого.

Теперь задача примет вид: *доказать, что неравенство* $x_1 + x_2 > 2$ *влечёт неравенство* $x_1^2 + x_2^2 > 2$.

Неравенство $x_1 + x_2 > 2$ равносильно неравенству $\frac{x_1+x_2}{2} > 1$, т.е. утверждает, что среднее арифметическое чисел x_1 и x_2 больше 1.

Неравенство $x_1^2+x_2^2 > 2$ равносильно неравенству $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} > 1$ и в случае $x_2 \geq 0$ утверждает, что среднее квадратичное чисел x_1 и x_2 больше 1. Таким образом, в случае $x_2 \geq 0$ утверждение задачи является простым следствием неравенства о среднем арифметическом и средним квадратичном.

Если же $x_2 < 0$, то неравенство $x_1 + x_2 > 2$ влечёт, что $x_1 > 2$, а тогда $x_1^2 + x_2^2 > x_1^2 > 4$. □

Решение задачи 69. Решение этой задачи базируется на неравенстве Коши-Буняковского:

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2},$$

где $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ – произвольные наборы из n чисел каждый.

Для $n = 2$ и $n = 3$ выражение $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ можно рассматривать как скалярное произведение векторов $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$, а выражения $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ и $\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}$ – как их длины. Поэтому $n = 2$ и $n = 3$ неравенство Коши-Буняковского является следствием геометрического определения скалярного произведения векторов как произведения их длин на косинус угла между ними.

Перепишем данные нам неравенства в виде $b_1 \leq 2\sqrt{a_1c_1}$, $b_2 \leq 2\sqrt{a_2c_2}$ и введём переменные $b_3 = 1$, $a_3 = 7$, $c_3 = 2$, так что верно неравенство $b_3 < 2\sqrt{a_3c_3}$. Складывая эти неравенства, мы получим:

$$b_1 + b_2 + b_3 < 2\left(\sqrt{a_1}\sqrt{c_1} + \sqrt{a_2}\sqrt{c_2} + \sqrt{a_3}\sqrt{c_3}\right).$$

и для завершения доказательства достаточно применить неравенство Коши-Буняковского к наборам

$$(x_1, x_2, x_3) = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}), \quad (y_1, y_2, y_3) = (\sqrt{c_1}, \sqrt{c_2}, \sqrt{c_3}).$$

□

Решение задачи 72. Разделим обе части неравенства, которое нужно доказать, на abc и введём новые переменные $A = \frac{1}{a}$, $B = \frac{1}{b}$, $C = \frac{1}{c}$:

$$A^2 + B^2 + C^2 \geq AB + AC + BC. \tag{11.4}$$

Неравенство (11.4), которое, очевидно, равносильно исходному, является неравенством Коши-Буняковского для наборов

$$(x_1, x_2, x_3) = (A, C, B), \quad (y_1, y_2, y_3) = (B, A, C).$$

□

Решение задачи 73. Неравенство, которое нужно доказать, является неравенством Коши-Буняковского для наборов

$$(x_1, x_2) = (\sqrt{c}, \sqrt{b-c}), \quad (y_1, y_2) = (\sqrt{a-c}, \sqrt{c}).$$

□

Решение задачи 74. Будем исходить из неравенства (11.4), доказанного при решении задачи 72. Прибавим к обеим его частям выражение $2AB + 2AC + 2BC$:

$$(A+B+C)^2 \geq 3(AB+AC+BC) \Leftrightarrow A+B+C \geq \sqrt{3(AB+AC+BC)}.$$

Если $AB + AC + BC \geq 12$, то правая часть последнего неравенства больше или равна $\sqrt{36} = 6$. Поэтому, тем более, и $A + B + C \geq 6$. □

Решение задачи 75. Выделим полные квадраты в выражениях под радикалами:

$$\sqrt{\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}} + \sqrt{\left(x+\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3z^2}{4}} \geq$$
$$\sqrt{\left(-\frac{y}{2}+\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}y}{2}+\frac{\sqrt{3}z}{2}\right)^2}$$

и рассмотрим точки $A = (x, 0)$, $B = \left(-\frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}y}{2}\right)$, $C = \left(-\frac{z}{2}, -\frac{\sqrt{3}z}{2}\right)$. Тогда неравенство, которое нужно доказать, можно записать в виде: $AB + AC \geq BC$.

Если точка A не лежит на прямой BC, то в силу неравенства треугольника $AB + AC > BC$.

Если точка A лежит на отрезке BC, то $AB + AC = BC$.

Если точка A лежит на прямой BC, но вне отрезка BC, то одно из расстояний AB или AC больше, чем BC, так что $AB + AC > BC$. □

Решение задачи 78. Неравенство Бернулли утверждает, что

$$\sqrt{1+t} \leq 1 + \frac{t}{2}, \text{ если } t \geq -1, \tag{11.5}$$

причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $t = 0$. Доказательство этого неравенства элементарно – нужно возвести обе части в квадрат.

Справедливо и общее неравенство Бернулли:

$$(1+t)^\alpha \leq 1 + \alpha t, \text{ если } 0 < \alpha < 1, t > -1,$$

$$(1+t)^\alpha \geq 1 + \alpha t, \text{ если } \alpha > 1 \text{ или } \alpha < 0,\ t > -1,$$

причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $t = 0$. Его доказательство требует более сложных рассуждений (впрочем, применение производных позволяет дать относительно простое доказательство).

Запишем неравенство Бернулли (11.5) для $t = 4a, 4b, 4c$ и сложим эти неравенства почленно:

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \le 3 + 2(a+b+c) = 5. \tag{11.6}$$

Знак равенства в неравенстве Бернулли достигается только при $t = 0$. Поскольку $a + b + c = 1$, числа $4a$, $4b$, $4c$ не могут быть одновременно равны 0. Поэтому можно гарантировать, что неравенство в (11.5) – строгое. □

Решение задачи 80. Условие $x^2 + y^2 + z^2 > 0$ означает, что хотя бы одна из переменных отлична от нуля. Допустим, например, что $z \ne 0$.

Рассмотрим неравенство, которое нужно доказать, как квадратное относительно x:

$$x^2 - 4(2y+z)x + 19y^2 + 12yz + 6z^2 > 0.$$

Оно будет выполнено при всех x (и при всех y и z), если $D < 0$ (при всех y и z). Подсчитаем дискриминант:

$$\frac{D}{4} = 4(2y+z)^2 - (19y^2 + 12yz + 6z^2) = -3y^2 + 4yz - 2z^2.$$

Этот дискриминант можно рассматривать как квадратный трёхчлен относительно y. Этот трёхчлен будет отрицателен при всех y, если его дискриминант отрицателен (при всех z). Подсчитаем этот дискриминант:

$$\frac{D}{4} = 4z^2 - 6z^2 = -2z^2 < 0$$

(поскольку $z \ne 0$). □

Решение задачи 94. Будем упрощать выражение по действиям.

$$\begin{aligned}
1.\quad & \frac{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}{\sqrt{2a}+\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2a}-\sqrt{b}} = \frac{(2a-2\sqrt{2ab}+b)-(2a+2\sqrt{2ab}+b)}{2a-b} \\
= \quad & \frac{4\sqrt{2ab}}{b-2a}, \\
2.\quad & \sqrt{\frac{b}{4a}} - \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \\
= \quad & \frac{b-2a}{2\sqrt{ab}}, \\
3.\quad & \frac{4\sqrt{2ab}}{b-2a} \cdot \frac{b-2a}{2\sqrt{ab}} = 2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Ответ: $2\sqrt{2}$.□

Решение задачи 104. Нетрудно проверить, что $4 + \sqrt{12} = 4 + 2\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})^2$. Поэтому $\sqrt{4+\sqrt{12}} = 1 + \sqrt{3}$. Аналогично, $\sqrt{4-\sqrt{12}} = \sqrt{3} - 1$.

Значит, искомое число равно

$$\begin{aligned}\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)\\ = \quad & \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)\Big)=\sqrt{6}.\end{aligned}$$

Стандартные рассуждения (см., например, решение задачи 1279) доказывают, что число $\sqrt{6}$ – иррациональное.

Ответ: нет; это число равно $\sqrt{6}$.□

Решение задачи 126.

$$31^{11}<32^{11}=\left(2^5\right)^{11}=2^{55},\quad 17^{14}>16^{14}=\left(2^4\right)^{14}=2^{56}>2^{55}.$$

Ответ: второе число больше. □

Решение задачи 137. Прежде всего с помощью формулы $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$ слагаемые 1 и 2 в показателях превратим в множители 7^1 и 2^2 соответственно, так что искомое число равно

$$A\equiv 28\cdot 7^{-\sqrt[5]{\log_7^3 2}}\cdot 2^{\sqrt[5]{\log_2^2 7}}.$$

Для дальнейших упрощений перейдём к одному основанию, например, 2, в степенях и логарифмах, т.е. заменим во втором множителе основание степени 7 выражением $2^{\log_2 7}$, а $\log_7 2$, стоящий в показателе, выражением $\frac{1}{\log_2 7}$. Кроме того, вместо радикалов будем использовать степени с дробными показателями:

$$\begin{aligned}A \quad &= \quad 28\cdot\left(2^{\log_2 7}\right)^{-\dfrac{1}{\log_2^{3/5}7}}\cdot 2^{\log_2^{2/5}7}=28\cdot 2^{-\dfrac{\log_2^1 7}{\log_2^{3/5}7}}\cdot 2^{\log_2^{2/5}7}\\ &= \quad 28\cdot 2^{-\log_2^{2/5}7}\cdot 2^{\log_2^{2/5}7}=28.\end{aligned}$$

Практически дословное повторение этих рассуждений позволяет доказать следующие логарифмические тождества:

$$\begin{aligned}a^{\log_a^x b} &= b^{\log_b^y a},\ \text{если } x+y=1,\ a,b>1 \text{ или } 0<a,b<1,\\ a^{\log_b c} &= c^{\log_b a},\ \text{если } a,b,c>0 \text{ и } b\neq 1,\end{aligned}$$

которые полезно иметь в виду при решении сложных задач с логарифмами (см., например, задачи 155, 544, 894 и 157, 158, 159, 545, 546, 895).

Ответ: 28. □

Решение задачи 139. Перейдём во всех логарифмах к одному основанию, например, 5, и обратим внимание на то, что $30=5\cdot 6$, $150=5^2\cdot 6$:

$$\begin{aligned}&\log_5 30\cdot\log_5 30-\log_5 150\cdot\log_5 6=(\log_5(5\cdot 6))^2-\log_5(25\cdot 6)\cdot\log_5 6\\ = \quad &(1+\log_5 6)^2-(2+\log_5 6)\cdot\log_5 6=1.\end{aligned}$$

Ответ: 1. □

Решение задачи 177. Применим к неравным положительным числам $a = \lg 7$ и $b = \lg 13$ неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом: $\sqrt{\lg 7 \cdot \lg 13} < \frac{\lg 7 + \lg 13}{2}$. Правую часть этого неравенства можно оценить сверху следующим образом:

$$\frac{\lg 7 + \lg 13}{2} = \frac{\lg(7 \cdot 13)}{2} = \frac{\lg 91}{2} < \frac{1}{2} \cdot \lg 100 = \lg \sqrt{100} = \lg 10 = 1.$$

Ответ: 1 больше.□

11.2 Глава 2

Решение задачи 184. Упростим числовые выражения, фигурирующие в уравнении:

1. $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = 2 - \sqrt{3}$.
2. $\cos\left(\operatorname{arctg}(2\sqrt{2})\right) \equiv \cos\alpha$, где $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Используя тождество $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, получим: $\cos^2\alpha = \frac{1}{9}$. В силу неравенства $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\cos\alpha > 0$. Значит, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.
3. $\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{3} - 1$.
4. $2^{\log_{\sqrt{2}} 3} = \left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^{\log_{\sqrt{2}} 3} = \left(\sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{2}} 9} = 9$.

Теперь уравнение можно переписать в виде $0 \cdot x = 0$, так что его решением является любое действительное число.

Ответ: R. □

Решение задачи 190. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно неизвестной x; неизвестную y будем считать параметром. Это, в частности, означает, что уравнение нужно переписать в виде

$$2x^2 - 2(5y + 1)x + (13y^2 + 4y + 1) = 0. \tag{11.7}$$

Для решения этого квадратного уравнения подсчитаем $\frac{D}{4}$:

$$\frac{D}{4} = (5y + 1)^2 - 2 \cdot (13y^2 + 4y + 1) = -(y - 1)^2. \tag{11.8}$$

Если уравнение (11.7) имеет решение, то дискриминант должен быть неотрицателен. В силу соотношения (11.8) это означает, что $y = 1$.

Иначе говоря, из уравнения (11.7) следует, что $y = 1$:

$$2x^2 - 2(5y + 1)x + (13y^2 + 4y + 1) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$y = 1$$

Чтобы это преобразование было равносильным, можно просто сохранить исходное уравнение:

$$2x^2 - 2(5y+1)x + (13y^2 + 4y + 1) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} y = 1 \\ 2x^2 - 2(5y+1)x + (13y^2 + 4y + 1) = 0 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} y = 1 \\ 2x^2 - 12x + 18 = 0 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Итак, наше уравнение с *двумя* неизвестными имеет *единственное* решение.

Ответ: $(3; 1)$. □

Решение задачи 193. После раскрытия скобок и приведения подобных мы получим стандартное квадратное уравнение:

$$3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab + ac + bc) = 0.$$

Для него

$$\frac{D}{4} = (a+b+c)^2 - 3(ab+ac+bc) = (a^2+b^2+c^2) - (ab+ac+bc).$$

Исходное уравнение имеет корни при любых значениях a, b и c тогда и только тогда, когда $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$ при любых значениях a, b и c. Это неравенство является неравенством Коши-Буняковского для наборов $(x_1, x_2, x_3) = (a, c, b)$, $(y_1, y_2, y_3) = (b, a, c)$.

□

Решение задачи 194. Самый распространённый метод решения уравнения высокой степени вида $P(x) = 0$ ($P(x)$ – многочлен) заключается в разложении многочлена $P(x)$ на два множителя меньшей степени и последующем расщеплении уравнения $P(x) = 0$ на два уравнения.

Разложение многочлена на множители обычно базируется на следующей **теореме Безу**:

если уравнение $P(x) = 0$, где $P(x)$ – многочлен, имеет корень x_0, то многочлен $P(x)$ можно разложить на множители, причём один из множителей – это $(x - x_0)$ (второй множитель обычно находят делением многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - x_0)$ “в столбик”).

Как правило, уравнения высоких степеней, встречающиеся на экзаменах, имеют только целые коэффициенты. В этом случае для поиска корней можно использовать следующую теорему:

если коэффициенты уравнения $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ являются целыми числами и целое число x_0 – корень этого уравнения, то x_0 является делителем свободного члена a_0. Если рациональное число $x_0 = \frac{p}{q}$, где целые числа p и q – взаимно простые (т.е. дробь $\frac{p}{q}$ – несократима), является корнем этого уравнения, то p – делитель свободного члена a_0, а q – делитель старшего коэффициента a_n.

После этих общих замечаний приступим к решению нашего уравнения.

Свободный член (число 5) делится только на $1, -1, 5, -5$, а старший коэффициент (число 1) – только на $1, -1$. Поэтому, если наше уравнение имеет рациональные корни, то искать их нужно только среди четырех чисел: $1, -1, 5, -5$. Отметим, что мы не утверждаем, что хотя бы одно из них является корнем. Сформулированная выше теорема гарантирует лишь, что никакое другое рациональное число корнем быть не может. Простая подстановка показывает, что $x_0 = 1$ – корень уравнения. Поэтому многочлен $P(x) = x^3 + 4x^2 - 5$ можно разложить на два множителя, причём один из них равен $(x - 1)$. Второй множитель можно найти делением многочлена $x^3 + 4x^2 - 5$ на двучлен $(x - 1)$ "в столбик". Но мы применим другой метод, который интересен тем, что дословное его повторение позволяет легко доказать теорему Безу:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^3 + 4x^2 - 5) - 0 = (x^3 + 4x^2 - 5) - (1^3 + 4 \cdot 1^2 - 5) \\ &= (x^3 - 1^3) + 4(x^2 - 1^2) = (x - 1)(x^2 + x + 1) \\ &+ 4(x - 1)(x + 1) = (x - 1)(x^2 + 5x + 5). \end{aligned}$$

Поэтому наше уравнение распадается на два:

$$\begin{array}{ccc} x - 1 = 0 & & x^2 + 5x + 5 = 0 \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ x = 1 & & x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}$$

Ответ: $\left\{1; \frac{-5+\sqrt{5}}{2}; \frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right\}$.$\square$

Решение задачи 197. Перепишем уравнение в виде:

$$\left(x^4 + 2x^2 + 1\right) - \left(4x^2 + 400x + 10\ 000\right) = 0$$

и применим очевидные тождества сокращённого умножения:

$$\left(x^2 + 1\right)^2 - (2x + 100)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 2x - 99\right)\left(x^2 + 2x + 101\right) = 0.$$

Теперь наше уравнение распадается на два квадратных уравнения: $x^2 - 2x - 99 = 0$ и $x^2 + 2x + 101 = 0$. Первое имеет два корня, $x_1 = -9$ $x_2 = 11$, а дискриминат второго отрицателен.

Ответ: $x_1 = -9; x_2 = 11$. $\square$

Решение задачи 199. Извлекая корни седьмой степени из обеих частей уравнения, получим: $6x - 15 = (x - 1)^2$. Раскроем скобки, перенесём все члены в одну часть и приведём подобные члены: $x^2 - 8x + 16 = 0$. Левая часть является полным квадратом: $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$, так что уравнение имеет один корень $x = 4$.

Ответ: $x = 4$. $\square$

Решение задачи 203. Введём новую неизвестную $t = x + \frac{1}{2}$. Для неё уравнение примет вид:

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)^4 + \left(t + \frac{1}{2}\right)^4 = 3.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов мы получим биквадратное уравнение

$$16t^4 + 24t^2 - 23 = 0.$$

С помощью новой неизвестной $u = t^2$ это уравнение сводится к квадратному уравнению $16u^2 + 24u - 23 = 0$, которое имеет два корня: $u_{1,2} = \frac{-3\pm 4\sqrt{2}}{4}$. Соответственно, для t имеем два уравнения:

$$t^2 = \frac{-3 - 4\sqrt{2}}{4},\ t^2 = \frac{-3 + 4\sqrt{2}}{4}.$$

Первое из них не имеет корней, а второе имеет два корня: $t_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}$. Поскольку $x = t - \frac{1}{2}$, исходное уравнение также имеет два корня: $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}$.

Ответ: $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}$. $\square$

Решение задачи 204. *1 способ.* Введем новую неизвестную

$$t = x^2 + 3x - 2. \tag{11.9}$$

Тогда исходное уравнение можно записать в виде

$$t^2 + 3t - 2 = x. \tag{11.10}$$

Система из уравнений (11.9) и (11.10), в сущности, равносильна исходному уравнению, т.к. оно получится, если в этой системе исключить t.

Чтобы решить систему из уравнений (11.9) и (11.10), мы сложим эти уравнения почленно (для равносильности этого преобразования нужно сохранить одно из уравнений, например, первое):

$$\begin{cases} t^2 + 4t - 2 = x^2 + 4x - 2 \\ t = x^2 + 3x - 2 \end{cases}$$

В первом уравнении перенесём все члены в левую часть и разложим её на множители методом группировки:

$$(t^2 - x^2) + (4t - 4x) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(t - x)(t + x) + 4(t - x) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(t - x)(t + x + 4) = 0$$

Поэтому первое уравнение распадётся на два:

$$t - x = 0 \qquad t + x + 4 = 0$$

Соответственно, вся система распадётся на две системы

$$\begin{cases} t = x \\ t = x^2 + 3x - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = -x - 4 \\ t = x^2 + 3x - 2 \end{cases}$$

Исключая t, мы получим уравнения

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \qquad x^2 + 4x + 2 = 0,$$

которые легко решаются.

2 способ. Раскроем скобки и приведём подобные члены:

$$x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 4x - 4 = 0.$$

Чтобы решить это уравнение, разложим левую часть на множители. Легко проверить, что это уравнение не имеет рациональных корней, так что применить теорему Безу не удастся. Поэтому применим метод неопределённых коэффициентов.

Вид уравнения подсказывает, что, видимо, левую часть уравнения можно разложить на два квадратичных множителя (в высшей алгебре доказывается теорема о том, что любой многочлен $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ можно разложить и притом единственным способом в произведение старшего коэффициента a_0, линейных множителей вида $x - x_0$ (их число равно числу корней уравнения $P(x) = 0$ с учётом их кратности) и квадратичных множителей $x^2 + px + q$ с отрицательными дискриминантами). При этом разумными представляются только следующие гипотезы:

1. $x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 4x - 4 = (x^2 + ax + 2)(x^2 + bx - 2)$;

2. $x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 4x - 4 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx - 4)$;

3. $x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 4x - 4 = (x^2 + ax + 4)(x^2 + bx - 1)$,

где a и b – *неопределённые коэффициенты.*

Проверим первую из них. Раскроем скобки в правой части, приведём подобные члены и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} a + b = 6, \\ ab = 8, \\ -2a + 2b = -4. \end{cases}$$

Решая эту систему, мы получим $a = 4$, $b = 2$. Поэтому наше уравнение расщепляется на те же два квадратных уравнения

$$x^2 + 4x + 2 = 0 \qquad x^2 + 2x - 2 = 0,$$

которые появились при первом способе решения нашей задачи.

Отметим, что вторая и третья гипотезы приводят к несовместным системам относительно неопределённых коэффициентов a и b. Поэтому, если бы мы начали с рассмотрения одной из них, то первая попытка разложения на множители не удалась. Ничего страшного в этом нет; нужно просто перейти к рассмотрению следующей гипотезы.

Ответ: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$, $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{2}$. □

Решение задачи 205. После раскрытия скобок мы получим: $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 0$. Коэффициенты при чётных степенях неизвестной, одинаково удалённые от начала и от конца уравнения, совпадают, а аналогичные коэффициенты при нечётных степенях – отличаются знаком. Поэтому уравнение можно решить с помощью новой неизвестной $t = x - \frac{1}{x}$. Поскольку $x = 0$ не является корнем уравнения, после деления на x^2 мы имеем:

$$x^2 - 4x + 2 + \tfrac{4}{x} + \tfrac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \tfrac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x - \tfrac{1}{x}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x - \tfrac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

□

Решение задачи 206. *1 способ.* Выделим полный квадрат во второй скобке:

$$8x \cdot (2x^2 - 1) \cdot \big(2(2x^2 - 1)^2 - 1\big) = 1.$$

Выражение вида $2x^2 - 1$ встречается в тригонометрии – так устроена правая часть известной формулы $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. Поэтому естественно попытаться заменить x на $\cos\alpha$. Конечно, сделать это можно только, если мы уверены, что $-1 \le x \le 1$. Обычно информацию такого рода извлекают из области допустимых значений неизвестной, но в нашем случае возможные значения x заполняют всю числовую прямую. В высшей алгебре имеются определённые неравенства для корней алгебраического уравнения (самые простые из них – в терминах его коэффициентов), но от них мало пользы, в частности, потому, что в соответствии с Программой по математике для поступающих в МГУ "объекты и факты, не изучаемые в общеобразовательной школе, ... могут использоваться поступающим ... при условии, что он способен их пояснять и доказывать".

Однако, хотя из уравнения не удаётся получить неравенство $-1 \le x \le 1$ (не удаётся простыми рассуждениями; ниже мы покажем, что на самом деле все корни нашего уравнения расположены на интервале $(-1; 1)$), условие задачи ("найти число корней на отрезке $[0; 1]$") позволяет обойти эту проблему.

Эти общие соображения приводят к следующему решению задачи.

Каждому значению x из отрезка $[0; 1]$ соответствует и притом только одно значение t из отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ такое, что $x = \cos t$ (отметим, что $t = \arccos x$).

Для новой переменной наша задача примет вид (после несложных тригонометрических преобразований):

сколько корней на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ *имеет уравнение*

$$8\cos t \cdot \cos 2t \cdot \cos 4t = 1?$$

Поскольку $t = 0$ не является корнем этого уравнения, а на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ $\sin t \neq 0$, задачу можно преобразовать к виду:

сколько корней на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ *имеет уравнение*

$$8\cos t \cdot \cos 2t \cdot \cos 4t \cdot \sin t = \sin t?$$

Последнее уравнение легко приводится к виду

$$\sin 8t = \sin t \Leftrightarrow 2\cos\frac{9t}{2}\sin\frac{7t}{2} = 0,$$

после чего расщепляется на два уравнения: $\cos\frac{9t}{2} = 0$ и $\sin\frac{7t}{2} = 0$. Решение первого из дается формулой

$$t = \frac{\pi(2n+1)}{9},\ n \in Z,$$

а второго – формулой

$$t = \frac{2\pi n}{7},\ n \in Z.$$

Из первой серии на промежуток $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ попадают только корни $\frac{\pi}{9}$, $\frac{\pi}{3}$, а из второй – только один корень $\frac{2\pi}{7}$.

Проведённые рассуждения практически не меняются, если мы будем находить корни исходного уравнения на отрезке $-1 \leq x \leq 1$. Поскольку $x = -1$ не является корнем, дело сведется к отбору корней двух последних тригонометрических уравнений, попадающих на интервал $0 < t < \pi$. Первая серия даст значения $t_1 = \frac{\pi}{9}$, $t_2 = \frac{\pi}{3}$, $t_3 = \frac{5\pi}{9}$, $t_4 = \frac{7\pi}{9}$, а вторая – значения $t_5 = \frac{2\pi}{7}$, $t_6 = \frac{4\pi}{7}$, $t_7 = \frac{6\pi}{7}$. Поскольку уравнение 7 степени не может иметь больше 7 корней, число корней исходного уравнения в точности равно 7 и все они лежат на интервале $-1 < x < 1$.

Изложенный выше метод применяется при решении и других алгебраических задач (уравнений, неравенств, систем и т.д.), в которых появляются выражения, по своей структуре похожие на формулы тригонометрии. Среди наиболее распространенных отметим выражения $\sqrt{1-x^2}$ $(|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha})$, $3x - 4x^3$ $(\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)$, $\frac{2x}{1-x^2}$ $\left(\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\right)$, $x^2 + y^2$ $(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1)$.

2 способ. Начнём решать наше уравнение стандартным способом – раскроем скобки, перенесём все члены в левую часть и приведём подобные:

$$128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x - 1 = 0.$$

Введём новую неизвестную $t = 2x$. Это позволит уменьшить коэффициенты многочлена в левой части:

$$t^7 - 6t^5 + 10t^3 - 4t - 1 = 0. \qquad (11.11)$$

Нас интересуют корни этого уравнения на отрезке $0 \leq t \leq 2$.

Чтобы понизить степень уравнения (11.11), применим стандартные приемы. Прежде всего, попробуем найти какой-нибудь рациональный корень. Стандартные рассуждения показывают, что на роль рационального корня могут претендовать лишь два числа: 1 и -1. Проверка показывает, что $t = 1$ – корень. Тогда левую часть уравнения (11.11) можно разложить на множители, причём один из них $t-1$. Второй множитель можно получить делением левой части уравнения (11.11) на двучлен $t-1$ в столбик; он равен $t^6 + t^5 - 5t^4 - 5t^3 + 5t^2 + 5t + 1$. Этот многочлен не имеет рациональных корней, но методом неопределённых коэффициентов его можно разложить на два множителя: $t^3 + t^2 - 2t - 1$ и $t^3 - 3t - 1$.

Итак, уравнение (11.11) распадается на три уравнения

$$t - 1 = 0,\ t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0,\ t^3 - 3t - 1 = 0.$$

Первое из них даёт найденный ранее рациональный корень $t = 1$. Второе и третье уравнение решим графически. Поскольку $t = 0$ не является корнем этих уравнений, их можно переписать в виде

$$t^2 + t = 2 + \frac{1}{t},\ t^2 = 3 + \frac{1}{t}.$$

При $t \in (0; 2]$ левые части этих уравнений монотонно возрастают от 0 до 6 и 4 соответственно, а правые части убывают от $+\infty$ до $\frac{5}{2}$ и $\frac{7}{2}$ соответственно. Поэтому каждое из этих уравнений имеет по одному корню на промежутке $(0; 2]$ (более тонкий анализ графиков позволяет установить, что каждое из этих уравнений имеет по одному корню на интервале $(-2; -1)$ и по одному корню на интервале $(-1; 0)$). Поскольку система, составленная из этих уравнений несовместна, эти корни различны. Кроме того, они не совпадают с корнем $t = 1$.

Ответ: 3 корня: $x_1 = \cos\frac{\pi}{9}$, $x_2 = \cos\frac{2\pi}{7}$, $x_3 = \frac{1}{2}$.□

Решение задачи 207. Если $x \le 0$, то все числа: x^{12}, $-x^9$, x^4, $-x$ – неотрицательны, так что левая часть уравнения не меньше, чем 1. Поэтому наше уравнение не имеет отрицательных (нестрого) корней.

Если $0 < x < 1$, то последовательность $a_1 = x^{12}$, $a_2 = x^9$, $a_3 = x^4$, $a_4 = x$, $a_5 = 1$ монотонно возрастает и потому её сумма $a_1 + (-a_2 + a_3) + (-a_4 + a_5) > 0$. Если $x > 1$, то эта последовательность монотонно убывает и потому её сумма $(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + a_5 > 0$. Если $x = 1$, то её сумма равна $1 > 0$.

Таким образом, наше уравнение не может иметь и положительных корней. **Ответ**: $\emptyset$.□

Решение задачи 217. Прежде всего отметим, что коэффициент $a \neq 0$, так как иначе графиком функции $y(x)$ была бы прямая и две прямые пересекались бы ровно в трех точках.

Далее, прямая, о которой идет речь в тексте задачи, не может быть вертикальной, $x = x_0$, так как тогда функция $y(x)$ в точке x_0 принимала бы три значения (а каждая функция по определению однозначна). Поэтому уравнение этой прямой имеет вид $y = Ax + B$. Она пересекает ось ординат в точке $(0; B)$. Поэтому задача сводится к доказательству того, что $B = 0$.

Условие задачи означает, что система

$$\begin{cases} y = ax^3 + bx + c \\ y = Ax + B \end{cases} \tag{11.12}$$

имеет ровно три различных решения $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$. В силу однозначности функции $y(x)$ числа x_1, x_2, x_3 различны, а среди чисел y_1, y_2, y_3 могут быть совпадающие.

Исключая в системе (11.12) неизвестную y, мы получим, что уравнение

$$ax^3 + (b - A)x + (c - B) = 0$$

имеет три различных корня x_1, x_2, x_3 (эти числа – это абсциссы точек $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, являющихся решениями системы (11.12)). Из теоремы Виета для уравнения третьей степени (ниже мы дадим ее точную формулировку и доказательство) следует, что

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Тогда в силу второго уравнения системы (11.12)

$$y_1 + y_2 + y_3 = A(x_1 + x_2 + x_3) + 3B = 3B.$$

Следовательно,

$$B = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = 0.$$

□ При решении задачи 217 мы использовали теорему Виета для уравнения третьей степени (кубического уравнения). Сейчас мы дадим ее точную формулировку (в рассматриваемой специфической ситуации) и простое доказательство, не использующее других результатов для многочленов.

Теорема Виета. Если кубическое уравнение

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \tag{11.13}$$

имеет три (различных) корня x_1, x_2, x_3, то для его коэффициентов верны равенства

$$\begin{aligned} &p = -(x_1 + x_2 + x_3), \\ &q = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\ &r = -x_1x_2x_3. \end{aligned} \tag{11.14}$$

Доказательство. Тот факт, что числа x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения (11.13) означает, что если их подставить в уравнение, то мы получим верные числовые равенства:

$$\begin{cases} x_1^3 + px_1^2 + qx_1 + r = 0 \\ x_2^3 + px_2^2 + qx_2 + r = 0 \\ x_3^3 + px_3^2 + qx_3 + r = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим эти равенства как систему трех уравнений относительно трех неизвестных p, q, r и решим ее методом исключения.

Из первого уравнения исключим r: $r = -(x_1^3 + px_1^2 + qx_1)$. Тогда второе и третье уравнения превратятся в следующую систему для p и q:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_2^3 - x_1^3) + p(x_2^2 - x_1^2) + q(x_2 - x_1) = 0 \\ (x_3^3 - x_1^3) + p(x_3^2 - x_1^2) + q(x_3 - x_1) = 0 \end{array} \right.$$

Поскольку разности $x_2 - x_1$, $x_3 - x_1$ отличны от нуля, эту систему можно привести к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + p(x_1 + x_2) + q = 0 \\ (x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2) + p(x_1 + x_3) + q = 0 \end{array} \right.$$

Из первого уравнения этой системы исключим q: $q = -(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + p(x_1 + x_2))$. Тогда второе уравнение превратится в уравнение с одной неизвестной p:

$$x_1x_3 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2^2 + p(x_3 - x_2) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(x_1 + x_2 + x_3)(x_3 - x_2) + p(x_3 - x_2) = 0$$

Поскольку $x_3 - x_2 \neq 0$, отсюда следует первое из равенств (11.14). Восстанавливая исключенные неизвестные q и r, мы получим второе и третье равенство.

Решение задачи 221. Выполним действия над дробями в левой части:

$$\frac{9x + 9}{(x + 1)(x + 3)} = 3.$$

и сократим дробь на $x+1$. Чтобы получить задачу, равносильную исходной, вообще говоря, необходимо сохранить условие $x + 1 \neq 0$. Поэтому, исходное уравнение равносильно системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{x+3} = 1, \\ x + 1 \neq 0, \end{array} \right.$$

которая, в свою очередь, равносильна системе

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 = x + 3, \\ x + 3 \neq 0, \\ x + 1 \neq 0. \end{array} \right.$$

Первое уравнение этой системы имеет единственный корень $x = 0$, который удовлетворяет условиям $x + 3 \neq 0$, $x + 1 \neq 0$.

Ответ: $x = 0$. □

Решение задачи 230. На множестве $0 \leq x \leq 1$ выражение $2x - 5$ отлично от 0, так что исходное уравнение равносильно уравнению $y = \frac{4x-7}{2x-5}$. Дробно-линейная функция $y = \frac{4x-7}{2x-5} = 2 + \frac{3}{2x-5}$ при изменении x на отрезке $[0; 1]$ монотонно убывает от $y(0) = \frac{7}{5}$ до $y(1) = 1$. По условию задачи, $y \in [0; 1]$. Это возможно тогда и только тогда, когда $x = 1$, $y = 1$.

Ответ: $(x; y) = (1; 1)$. □

Решение задачи 233. Чтобы избавиться от модуля, необходимо знать знак выражения под знаком модуля. Логически возможны два случая: $x \geq 0$ и $x < 0$. В первом случае наше уравнение примет вид $x = 4 - x$. Во втором случае оно превратится в уравнение $-x = 4 - x$.

Эти рассуждения означают, что исходное уравнение расщепляется на две системы

$$\begin{array}{cc} \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x = 4 - x \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ -x = 4 - x \end{array} \right. \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x = 2 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ 0 = 4 \end{array} \right. \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ x = 2 & \emptyset \end{array}$$

Объединяя множества решений этих систем, получим ответ.

Ответ: $\{2\}$. □

Решение задачи 247. Поскольку $x^2 = |x|^2$, уравнение можно переписать в виде: $|x|^2 + 2|x| - 3 = 0$. Наличие повторяющегося блока $|x|$ означает, что для решения задачи можно ввести новую неизвестную $t = |x|$. Новая неизвестная удовлетворяет обычному квадратному уравнению $t^2+2t-3 = 0$, которое имеет два корня $t_1 = 1$, $t_2 = -3$.

Значит, исходное уравнение распадается на два более простых уравнения:

$$\begin{array}{cc} |x| = 1 & |x| = -3 \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ x = \pm 1 & \emptyset \end{array}$$

Объединяя множества решений этих уравнений, получим ответ.

Ответ: $\{-1; 1\}$. □

Решение задачи 252. Дробь в правой части уравнения – неотрицательна (т.к. она равна модулю). Значит, ее знаменатель – положителен: $x - 2 > 0$. Это позволяет избавиться от модуля в левой части уравнения, что даёт

$$x - 2 = \frac{1}{x - 2}.$$

С другой стороны, зная, что $x-2 > 0$, можно выражение $x-2$ в левой части этого уравнения превратить в $|x-2|$, т.е. вернуться к исходному уравнению.

Эти рассуждения означают, что исходное уравнение равносильно системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2 > 0 \\ x - 2 = \frac{1}{x-2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2 > 0 \\ (x - 2)^2 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$$

Ответ: $x = 3$. □

Решение задачи 274. Если в левой части формально убрать все модули и привести подобные члены, то мы получим в точности выражение, стоящее в правой части.

Поэтому наше уравнение можно записать в виде

$$|a_1| + \cdots + |a_n| = a_1 + \cdots + a_n. \tag{11.15}$$

Известно, что $|a_k| \geq a_k$, $k = 1, \dots, n$. Складывая эти неравенства почленно, мы получим:

$$|a_1| + \dots + |a_n| \geq a_1 + \dots + a_n.$$

При этом, если хотя бы в одном из использованных неравенств $|a_k| \geq a_k$ стоял знак $>$, то

$$|a_1| + \dots + |a_n| > a_1 + \dots + a_n.$$

Поэтому равенство (11.15) равносильно системе

$$\begin{cases} |a_1| = a_1 \\ \dots \\ |a_n| = a_n. \end{cases}$$

Т.к. равенство $|a| = a$ равносильно тому, что выражение под знаком модуля неотрицательно, эта система сводится к системе

$$\begin{cases} a_1 \geq 0 \\ \dots \\ a_n \geq 0. \end{cases}$$

В нашем случае последняя система примет вид:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ \dots \\ x - 100 \geq 0 \\ x + 100 \geq 0 \end{cases}$$

что равносильно неравенству $x \geq 100$.

Ответ: $[100; +\infty)$. $\square$

Решение задачи 275. По определению, $\min(a, b)$ – наименьшее из чисел (или выражений) a и b; в случае их равенства в качестве $\min(a, b)$ можно взять любое из них.

Аналогично, $\max(a, b)$ – это наибольшее из чисел (или выражений) a и b; в случае их равенства в качестве $\max(a, b)$ можно взять любое из них.

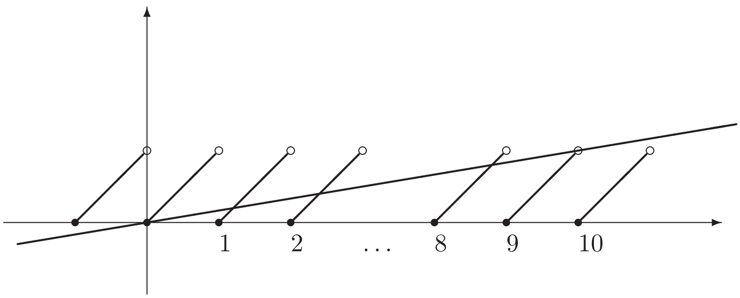
Эти определения можно записать следующим образом:

$$\min(a, b) = \begin{cases} a, \text{ если } a \leq b, \\ b, \text{ если } a \geq b; \end{cases} \qquad \max(a, b) = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq b, \\ b, \text{ если } a \leq b. \end{cases}$$

В этом виде они очень похожи на определение $|a|$. Более того, функции $\min(a, b)$ и $\max(a, b)$ тесно связаны с функцией $|a|$; нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} |a| &= \max(a, -a) & |a| &= -\min(a, -a), \\ \min(a, b) &= \frac{a + b - |a - b|}{2}, & \max(a, b) &= \frac{a + b + |a - b|}{2}, \\ \min(a, b) &= -\max(-a, -b), & \max(a, b) &= -\min(-a, -b). \end{aligned}$$

Рис. 11.1:



Поэтому любую задачу с функциями $\min(a, b)$ и $\max(a, b)$ можно решать, избавляясь (по аналогии с модулями) от этих функций.

В нашем случае это означает, что исходная задача распадается на четыре системы

$$\begin{cases} x \geq 2 - x \\ 3x \geq 1 + 2x \\ x = 1 + 2x \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 - x \\ 3x < 1 + 2x \\ x = 3x \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2 - x \\ 3x \geq 1 + 2x \\ 2 - x = 1 + 2x \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2 - x \\ 3x < 1 + 2x \\ 2 - x = 3x \end{cases}$$

Первая, вторая и третья системы имеют пустое множество решений, а множество решений четвёртой состоит из одной точки $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$. $\square$

Решение задачи 276. Поскольку $[x] + \{x\} = x$, уравнение можно переписать в виде $x = \{10x\}$. Введём новую неизвестную $t = 10x$. Для неё наше уравнение примет вид: $\frac{t}{10} = \{t\}$. Это уравнение проще исходного, т.к. дробная часть берётся от более простого выражения.

Будем решать его графически (см. рис.11.1).

График левой части – это прямая линия, проходящая через точки $(0; 0)$ и $(10; 1)$. График правой части – это периодическая функция с периодом $T = 1$, которая на промежутке $n \leq t < n + 1$ задаётся уравнением $y = t - n$.

Из рисунка ясно, что наше уравнение имеет девять корней $t_0, \ldots, t_8$. Корень t_n, $n = 0, 1, \ldots, 8$, образуется от пересечения прямой $y = \frac{t}{10}$ и прямой $y = t - n$. Поэтому $t_n = \frac{10n}{9}$. Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим ответ.

Формальный вариант этого решения заключается в следующем. Уравнение

$$\frac{t}{10} = \{t\} \tag{11.16}$$

равносильно бесконечной совокупности систем

$$\begin{cases} n \leq t < n + 1, \\ \frac{t}{10} = t - n, \ n \in Z. \end{cases}$$

Уравнение $\frac{t}{10} = t - n$ при всех $n \in Z$ имеет единственный корень $t_n = \frac{10n}{9}$. Это число будет корнем уравнения (11.16) тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$n \le \tfrac{10n}{9} < n+1$$
$$\Updownarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{l} n \ge 0, \\ n < 9 \\ \Updownarrow \\ n = 0, 1, \ldots, 8 \end{array} \right.$$

Ответ: $x_n = \frac{n}{9}$, $n = 0, 1, \ldots, 8$. □

Решение задачи 293. *Первый способ.* Чтобы избавиться от радикала, возведём обе части уравнения в квадрат:

$$2x - 1 = x^2 - 2x + 1.$$

Запишем это уравнение в виде, стандартном для квадратных уравнений:

$$x^2 - 4x + 2 = 0.$$

Его дискриминант равен $D = 16 - 8 = 8$. Поэтому последнее уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Однако утверждать, что эти числа будут и корнями исходного уравнения, нельзя. Дело в том, что первый шаг решения (возведение в квадрат), вообще говоря, не является равносильным преобразованием. Поэтому мы не можем гарантировать, что множество корней исходного уравнения совпадает с множеством $\{x_1; x_2\}$. Однако, можно гарантировать, что множество корней исходного уравнения является *подмножеством* множества $\{x_1; x_2\}$. Иначе говоря, если какое-то число является корнем исходного уравнения, то это либо x_1, либо x_2. Таким образом, проделанные преобразования (как и любые законные преобразования) не приводят к потере корней. Однако, не исключено появление "лишних" корней ("засорение" множества корней исходного уравнения). Особой беды в этом нет, т.к. с помощью простой проверки можно выяснить, какие из корней уравнения-следствия являются корнями и исходного уравнения, а какие являются "мусором", появившимся в ходе неравносильных преобразований.

Проверка.

1. При подстановке числа $2 + \sqrt{2}$ вместо неизвестной в исходное уравнение мы получим: $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$. Поскольку $3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$ и $1 + \sqrt{2} > 0$, это числовое равенство истинно, так что $x_1 = 2 + \sqrt{2}$ – корень исходного уравнения.

2. При подстановке числа $2 - \sqrt{2}$ вместо неизвестной в исходное уравнение мы получим: $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}$. Поскольку $3 - 2\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^2$ и

$1-\sqrt{2}<0$, $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$, это числовое равенство ложно, так что $x_2=2-\sqrt{2}$ не является корнем исходного уравнения.

Чтобы не делать проверку, уравнение нужно решать равносильными преобразованиями. Однако, надо иметь в виду, что равносильные преобразования, как правило, не отменяют проверку, а лишь заменяют ее на проверку более простых условий ("ослабленную" проверку). Это упрощение достигается усложнением логики решения. Кроме того, если допустить ошибку при анализе равносильности, то это может привести к отбору в ответ не тех решений, которые нужно, и никакой возможности "поймать" это обычно нет. Полная проверка при всей своей громоздкости имеет важное достоинство (особенно важное в условиях экзамена) – она позволяет вылавливать многие ошибки.

Конечно, равносильные преобразования – это более "культурный" метод решения и мы рекомендуем при решении экзаменационных задач пользоваться именно им. Однако в силу вышеизложенного нужно уметь работать и с альтернативным методом: получать следствия и в конце решения делать проверку.

Все сказанное по поводу равносильных преобразований относится только к уравнениям и системам уравнений, когда в конце появляется лишь небольшое число "подозрительных" решений, которые можно проверить прямой подстановкой в исходную задачу. В неравенствах все преобразования должны быть равносильными.

Исходное уравнение (как и многие другие несложные экзаменационные задачи) имеет вид

$$\sqrt{a}=b. \tag{11.17}$$

Возведение в квадрат даёт уравнение

$$a=b^2. \tag{11.18}$$

Равносильность законного преобразования (11.17) $\Rightarrow$ (11.18) означает, что, взяв за основу уравнение (11.18), мы можем законными преобразованиями получить уравнение (11.17). Очевидно, что для этого нужно извлечь из обеих частей уравнения (11.18) арифметический квадратный корень. Сделать это можно только, если обе части неотрицательны. Но правая часть (т.е b^2) неотрицательна как полный квадрат, а левая часть (т.е. a) неотрицательна, поскольку равна b^2. Поэтому уравнение (11.18) влечет равенство $\sqrt{a}=\sqrt{b^2}$. Величина $\sqrt{b^2}$ равна $|b|$. Чтобы получить уравнение (11.17), нужно заменить $|b|$ на b. Это можно сделать только в случае $b\geq 0$. Таким образом, система

$$\left\{\begin{array}{l} a=b^2, \\ b\geq 0 \end{array}\right.$$

влечет уравнение (11.17).

Добавление условия $b\geq 0$ требует повторного анализа прямого шага преобразования. Дело в том, что это условие мы брали "с потолка", лишь бы можно было сделать обратный переход от (11.18) к (11.17). Теперь нужно проверить, что оно на самом деле вытекает из (11.17): т.к. b равно арифметическому квадратному корню, можно утверждать, что $b \geq 0$.

Итак, справедлива теорема:

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = b^2, \\ b \geq 0. \end{array} \right. \tag{11.19}$$

Обратим особое внимание на тот факт, что добавочное условие $b \geq 0$ никак не связано с областью допустимых значений уравнения $\sqrt{a} = b$ (она выражается неравенством $a \geq 0$).

Преобразование (11.19) является стандартным при решении уравнений с радикалами по двум причинам:

1. многие уравнения имеют такой вид;

2. рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при доказательстве утверждения (11.19), позволяют проанализировать и более сложные ситуации (которые не сводятся к этой стандартной схеме).

Отметим, что преобразование (11.19) можно рассматривать и как формальную запись определения арифметического квадратного корня $\sqrt{a}$ как неотрицательного решения уравнения $x^2 = a$.

Стандартное равносильное преобразование (11.19) позволяет предложить для нашей задачи *второй способ решения*:

$$\sqrt{2x-1} = x - 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - 1 = (x-1)^2 \\ x - 1 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4x + 2 = 0 \\ x \geq 1 \end{array} \right.$$

Уравнение системы имеет два корня: $x_1 = 2 + \sqrt{2}$, $x_2 = 2 - \sqrt{2}$, первый из которых, очевидно, удовлетворяет условию $x \geq 1$, а второй – нет.

Еще раз подчеркнём, что второй способ решения задачи (равносильными преобразованиями) не убирает проверку полностью, а лишь заменяет *полную* проверку – *ослабленной* (проверкой условия $x \geq 1$).

Третий способ решения – один из самых удобных для решения задач с радикалами (особенно неравенств).

Введём новую неизвестную $t = \sqrt{2x-1}$. Поскольку мы ввели новую неизвестную, старую нужно выразить через новую:

$$x = \frac{2x - 1 + 1}{2} = \frac{\sqrt{2x-1} + 1}{2} = \frac{t^2 + 1}{2}.$$

Этот вывод обычно проводят формально, возводя в квадрат обе части равенства $t = \sqrt{2x-1}$.

Для новой неизвестной исходное уравнение примет вид:

$$t = \frac{t^2 + 1}{2} - 1 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \pm \sqrt{2}$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим, что исходное уравнение расщепляется на два уравнения:

$$\sqrt{2x-1} = 1+\sqrt{2} \qquad \sqrt{2x-1} = 1-\sqrt{2}$$

Поскольку число $1+\sqrt{2}$ – положительно, первое уравнение равносильно уравнению $2x-1=(1+\sqrt{2})^2$, откуда $x = 2+\sqrt{2}$.

Второе уравнение не имеет корней, т.к. число $1-\sqrt{2}$ – отрицательное.

Описанный метод работает всегда, когда под знаком радикала стоит линейное выражение.

Ответ: $x = 2+\sqrt{2}$. $\square$

Решение задачи 316. Возведение в квадрат даёт систему, равносильную исходному уравнению:

$$\begin{cases} 4x^4-4x^2+4x-1=0 \\ \frac{1}{2}-x^2 \geq 0 \end{cases}$$

Левая часть уравнения системы легко раскладывается на два квадратичных множителя:

$$4x^4-4x^2+4x-1 = \left(2x^2\right)^2-(2x-1)^2 = \left(2x^2-2x+1\right)\cdot\left(2x^2+2x-1\right),$$

так что это уравнение распадается на два: $2x^2-2x+1=0$ и $2x^2+2x-1=0$. Первое из них не имеет корней, а второе имеет два корня: $x = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. Условию $\frac{1}{2}-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ удовлетворяет только $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Второй способ решения. Рассмотрим выражение в правой части исходного уравнения как функцию $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}-x}$. Её естественная область определения – это множество $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$, а область значений – $[0;+\infty)$. Поскольку функция $y=f(x)$ – монотонно убывает, существует обратная функция $y=f^{-1}(x)$, которая взаимно однозначно отображает множество $[0;+\infty)$ на множество $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. Если уравнение $y=\sqrt{\frac{1}{2}-x}$ решить относительно x, а затем поменять x и y местами, мы получим формулу, которой можно задать функцию $y=f^{-1}(x)$:

$$y=\sqrt{\frac{1}{2}-x} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=\frac{1}{2}-x \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}-y^2 \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}-x^2 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

Таким образом, при $x\geq 0$ исходное уравнение имеет вид $f(x)=f^{-1}(x)$. Поскольку графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y=x$, они пересекаются тогда и только тогда, когда $f(x)=x$ (или $f^{-1}(x)=x$). Легче решить уравнение

$$f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}-x^2=x \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+2x-1=0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

При $x<0$ исходное уравнение, очевидно, не имеет корней, т.к. левая часть всегда не превосходит $\frac{1}{2}$, в то время как при $x<0$ правая часть больше, чем $\sqrt{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}$.

Ответ: $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.$\square$

Решение задачи 323. Перед возведением в квадрат перенесём член $\sqrt{1+x^2}$ из левой части в правую. Это даст более простую пару при использовании тождества $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ и, кроме того, позволит сократить выражение $1+x^2$:

$$\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}} = \sqrt{3}-\sqrt{1+x^2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} 1+x^2-x\sqrt{3} = 3-2\sqrt{3}\sqrt{1+x^2}+1+x^2, \\ \sqrt{3}-\sqrt{1+x^2} \geq 0 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} 2\sqrt{3}\sqrt{1+x^2} = 3+x\sqrt{3}, \\ \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{3} \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} 12+12x^2 = 9+6\sqrt{3}x+3x^2, \\ 3+x\sqrt{3} \geq 0, \\ 1+x^2 \leq 3 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} 3x^2-2\sqrt{3}x+1 = 0, \\ x \geq -\sqrt{3}, \\ x^2 \leq 2 \end{cases}$$

Квадратное уравнение $3x^2-2\sqrt{3}x+1=0$ имеет единственный корень $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, который удовлетворяет условиям $x \geq -\sqrt{3}$ и $x^2 \leq 2$.

Ответ: $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. $\square$

Решение задачи 336. Возведём обе части уравнения в квадрат:

$$x+2\sqrt{x^3+2x^2}+x^2+2x = (x+1)^3. \tag{11.20}$$

Чтобы это преобразование было равносильным, необходимо сохранить условия

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2+2x \geq 0. \end{cases} \tag{11.21}$$

(иначе говоря, исходное уравнение равносильно системе, составленной из уравнения (11.20) и неравенств (11.20)).

Уравнение (11.20) после раскрытия скобок и приведения подобных примет вид:

$$2\sqrt{x^3+2x^2} = x^3+2x^2+1.$$

Это уравнение проще всего решать с помощью новой неизвестной $t = \sqrt{x^3+2x^2}$:

$$2t = t^2+1 \Leftrightarrow t^2-2t+1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Поэтому уравнение (11.20) равносильно уравнению

$$\sqrt{x^3+2x^2} = 1,$$

которое, в свою очередь, равносильно уравнению

$$x^3 + 2x^2 - 1 = 0 \tag{11.22}$$

Чтобы решить уравнение (11.22), разложим его левую часть на множители. Для этого, прежде всего, попробуем угадать хотя бы один корень этого уравнения.

Если это уравнение имеет целые корни, то они обязаны быть делителями свободного члена, т.е. на роль целых корней могут претендовать только числа 1 и -1. Подстановкой убеждаемся, что $x = -1$ – корень.

В силу теоремы Безу левую часть уравнения (11.22) можно разложить на множители, причем одним из множителей будет $x+1$. Второй множитель можно получить, например, делением многочлена $x^3 + 2x^2 - 1$ на $x + 1$ в столбик, что даёт $x^2 + x - 1$.

Итак, уравнение (11.22) распадается на два уравнения:

$$\begin{array}{cc} x + 1 = 0 & x^2 + x - 1 = 0 \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ x = -1 & x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}$$

Условиям (11.21) удовлетворяет только $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. □

Решение задачи 362. *1 способ.* Поскольку под радикалами стоят линейные выражения, от одного радикала можно избавиться, обозначив его новой буквой. Пусть, например, $t = \sqrt[3]{x}$. Тогда $x = t^3$ и уравнение примет вид:

$$t + \sqrt[3]{\frac{t^3 - 1}{2}} = 1.$$

Изолируя радикал и возводя в куб, получим:

$$\begin{gathered} \frac{t^3-1}{2} = (1 - t)^3 \\ \Updownarrow \\ (t - 1)(t^2 + t + 1) + 2(t - 1)^3 = 0 \\ \Updownarrow \\ 3(t - 1)(t^2 - t + 1) = 0 \\ \Updownarrow \\ t = 1 \end{gathered}$$

(т.к. дискриминант квадратного трёхчлена $t^2 - t + 1$ отрицателен, вторая скобка не может быть равна 0).

Значит, исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt[3]{x} = 1,$$

которое имеет единственный корень $x = 1$.

2 способ. Чтобы избавиться от радикалов, возведём уравнение в куб, но перед этим перенесем член $\sqrt[3]{x}$ в правую часть (это немного упростит выкладки):

$$\sqrt[3]{\tfrac{x-1}{2}} = 1 - \sqrt[3]{x} \tag{11.23}$$

$$\Updownarrow$$

$$\tfrac{x-1}{2} = 1 - 3\sqrt[3]{x} + 3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - x$$

$$\Updownarrow$$

$$x - 1 = 2\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x} - 1\right) \tag{11.24}$$

Повторное возведение в куб последнего уравнения опять даст два радикала в выражении $\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)^3$. Обойти эту проблему можно, если мы вспомним исходное уравнение (11.23) и заменим $\sqrt[3]{x} - 1$ на $-\sqrt[3]{\tfrac{x-1}{2}}$:

$$x - 1 = -2\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}. \tag{11.25}$$

Переход от уравнения (11.24) к уравнению (11.25), вообще говоря, не является равносильным преобразованием и поэтому будет нужна проверка.

В уравнении (11.25) возведение в куб позволяет избавиться от радикалов:

$$(x-1)^3 = -4x(x-1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{ccc} x - 1 = 0 & \qquad\qquad & x^2 - 2x + 1 = -4x \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ x = 1 & & x^2 + 2x + 1 = 0 \\ & & \Updownarrow \\ & & x = -1 \end{array}$$

Проверка показывает, что $x = -1$ не является корнем исходного уравнения.

Приём, применённый при втором способе решения нашего уравнения, позволяет избавиться от радикалов в любом уравнении вида

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c}. \tag{11.26}$$

Начиная, как и раньше, с возведения в куб, мы получим:

$$a + 3\left(\sqrt[3]{a}\right)^2\sqrt[3]{b} + 3\sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{b}\right)^2 + b = c$$

$$\Updownarrow$$

$$3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right) = c - a - b \tag{11.27}$$

$$\Downarrow$$

$$3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c} = c - a - b \tag{11.28}$$

$$\Updownarrow$$

$$27abc = (c - a - b)^3$$

Как мы уже отмечали, после решения последнего уравнения необходимо проверить, являются ли его корни корнями исходного уравнения.

Выясним теперь, при каких условиях преобразование (11.27) $\Rightarrow$ (11.28) является равносильным, т.е. когда уравнение (11.28) влечёт уравнение (11.27).

Обозначим для сокращения записей $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{c}$ через A, B, C соответственно. Тогда уравнение (11.28) примет вид:

$$3ABC = C^3 - A^3 - B^3.$$

Его можно рассматривать как кубическое уравнение относительно C:

$$C^3 - 3AB \cdot C - (A^3 + B^3) = 0. \tag{11.29}$$

Нетрудно проверить, что $C_0 = A + B$ будет корнем этого уравнения. Поэтому многочлен $C^3 - 3AB \cdot C - (A^3 + B^3)$ можно разложить на множители, причём одним из множителей будет $C - C_0 \equiv C - (A + B)$. Второй множитель можно найти делением многочлена $C^3 - 3AB \cdot C - (A^3 + B^3)$ на двучлен $C - (A + B)$; он равен $C^2 + (A + B)C + (A^2 - AB + B^2)$.

Следовательно, уравнение (11.29) распадается на два уравнения:

$$C - (A + B) = 0 \qquad C^2 + (A + B)C + (A^2 - AB + B^2) = 0.$$

В терминах переменных a, b, c первое уравнение – это в точности уравнение (11.27).

Уравнение

$$C^2 + (A + B)C + (A^2 - AB + B^2) = 0 \tag{11.30}$$

является квадратным (относительно C). Его дискриминант равен

$$D = (A + B)^2 - 4(A^2 - AB + B^2) = -3(A - B)^2.$$

Если уравнение (11.30) имеет решение, то его дискриминант должен быть равен 0, т.е. $A = B$. Тогда $C = -\frac{A+B}{2} = -B$. Итак, уравнение (11.30) равносильно системе

$$\begin{cases} A = B, \\ C = -B. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b, \\ c = -b. \end{cases}$$

Для запоминания удобна следующая форма этой системы:

$$\begin{cases} a = -c, \\ b = -c. \end{cases}$$

Эту систему, в свою очередь, удобно разбить на две системы:

$$\begin{cases} a = -c, \\ b = -c, \\ \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -c, \\ b = -c, \\ \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \neq \sqrt[3]{c} \end{cases}$$

"Лишние" корни уравнения (11.28) и только они являются решениями второй из этих систем. С учетом равенств $a = -c$, $b = -c$ условие $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b} \neq \sqrt[3]{c}$ можно записать в виде $c \neq 0$.

Если система

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -c, \\ b = -c, \\ c \neq 0 \end{array} \right. \tag{11.31}$$

несовместна, то анализируемое преобразование – равносильно. В противном случае множество её решений – это все "лишние" корни уравнения (11.28).

Например, для уравнения

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}} = 1$$

система (11.31) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -1, \\ \frac{x-1}{2} = -1, \\ 1 \neq 0. \end{array} \right.$$

Она имеет единственное решение $x = -1$. Поэтому из найденных корней уравнения (11.25), $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$, корень $x_2 = -1$ является "лишним", а корень $x_1 = 1$ удовлетворяет исходному уравнению (11.23).

Ответ: $x = 1$. □

Решение задачи 368. *1 способ (графический).* Поскольку функции в левой и правой частях уравнения довольно простые, мы будем решать уравнение графически. График левой части – это стандартный график $y = \sqrt{x}$. Правую часть удобно преобразовать выделением полного квадрата к виду $y = -(x-4)^2 + 1$, так что её график – это стандартная парабола $y = x^2$, сдвинутая на 4 вправо, отражённая относительно оси Ox вниз и затем сдвинутая на 1 вверх.

Эти графики изображены на рис. 11.2. Из рисунка ясно, что графики не пересекаются (они расположены в непересекающихся областях координатной плоскости).

2 способ (метод оценок). Выделяя полный квадрат в правой части, перепишем уравнение в виде:

$$\sqrt{x} + (x-4)^2 = 1.$$

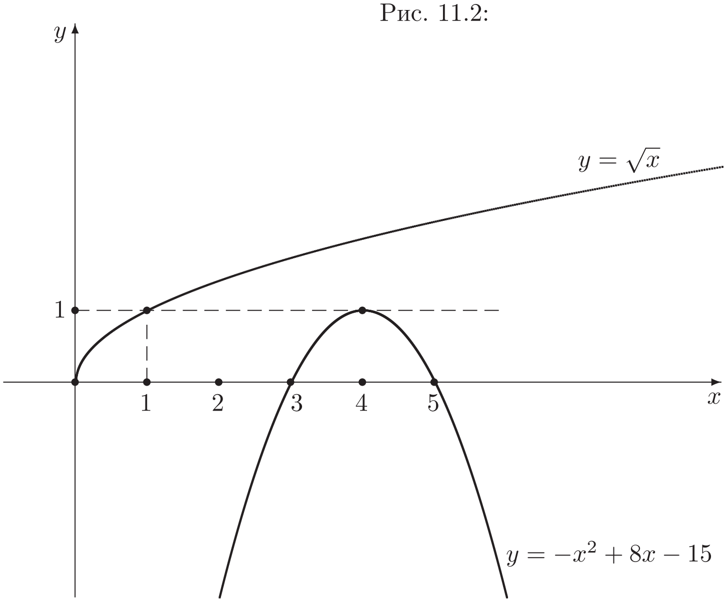
Оба слагаемых в левой части неотрицательны. Поэтому их сумма может быть равна 1 только в случае, когда они не превосходят 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} \leq 1, \\ (x-4)^2 \leq 1. \end{array} \right.$$

Эта система легко решается:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq x-4 \leq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 3 \leq x \leq 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \emptyset$$

Рис. 11.2:



□

Решение задачи 375. Введём в рассмотрение функцию $f(x) = 7x - 5|x-1|$. Тогда исходное уравнение можно записать в виде:

$$f(x) = f(\sqrt{2x+8}). \tag{11.32}$$

Функция $f(x)$ при $x \geq 1$ даётся формулой $f(x) = 2x+5$, а при $x \leq 1$ – формулой $f(x) = 12x - 5$. Поэтому при изменении независимой переменной x от $-\infty$ до 1 функция $f(x)$ возрастает от $-\infty$ до 7, а при изменении x от 1 до $+\infty$ $f(x)$ возрастает от 7 до $+\infty$. Поскольку $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 1$, отсюда следует, что $f(x)$ строго возрастает на всей числовой прямой (см. рис. 11.3, где приведен график $f(x)$).

Поэтому уравнение (11.32) равносильно уравнению $x = \sqrt{2x+8}$, которое легко решается, например, возведением в квадрат:

$$x = \sqrt{2x+8} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2x+8 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4; -2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

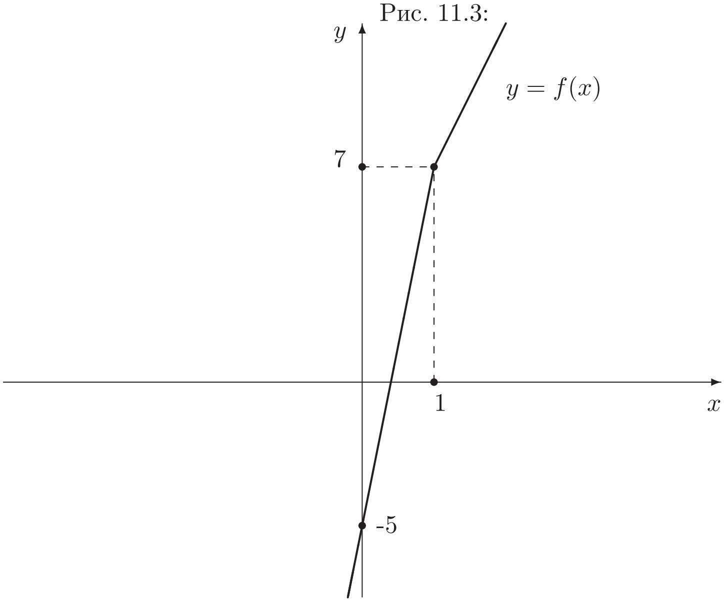
Ответ: $x = 4$.□

Решение задачи 380. Для сокращения записей при последующих преобразованиях введём новые переменные

$$a = \sqrt{x}, \quad b = \sqrt{2-x}.$$

Отметим, что $a, b > 0$.

Рис. 11.3:



Тогда исходное уравнение примет вид:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)(a+b)=8.$$

Раскрывая скобки, получим:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=6. \tag{11.33}$$

Обращая внимание на наличие взаимно обратных положительных чисел, применим неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом к каждой из трех скобок в левой части уравнения (11.33):

$$a+\frac{1}{a}\geq 2, \quad b+\frac{1}{b}\geq 2, \quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2.$$

Складывая эти неравенства почленно, мы получим, что

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 6, \tag{11.34}$$

причём, если хотя бы в одном из трех использованных неравенств о среднем арифметическом и среднем геометрическом стоял знак $>$, а не $\geq$, то и в неравенстве (11.34) будет стоять знак $>$. Поэтому равенство (11.33) равносильно тому, что в этих неравенствах стоит знак $=$, что, в свою очередь, равносильно тому, что

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ \frac{a}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{2 - x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Ответ: $x = 1$. $\square$

Решение задачи 386. Рассмотрим два трёхмерных вектора:

$$\overrightarrow{u} = (2; 3; 6), \ \ \overrightarrow{v} = (\sqrt{x+7}; \sqrt{37-2x}; \sqrt{3x+93}).$$

Тогда левую часть нашего уравнения можно рассматривать как скалярное произведение $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$. Длины этих векторов равны: $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$, $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{(x+7) + (37-2x) + (3x+93)} = \sqrt{2x+137}$.

Поэтому исходное уравнение можно переписать в виде:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|.$$

Поскольку оба вектора $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ – ненулевые, это означает, что угол между ними равен нулю, что, в свою очередь, равносильно существованию положительного числа k такого, что $\overrightarrow{v} = k \cdot \overrightarrow{u}$, или в координатной форме:

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} = 2k, \\ \sqrt{37-2x} = 3k, \\ \sqrt{3x+93} = 6k. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $(x; k) = (5; \sqrt{3})$.

Наше решение фактически содержит доказательство неравенства Коши-Буняковского для трёхмерных векторов. Его можно сократить, если сослаться на неравенство Коши-Буняковского, что позволяет сразу перейти к последней системе.

Ответ: $x = 5$.$\square$

Решение задачи 387. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{1 + \frac{16}{x^2}} = \sqrt{9 - 2x}$$

и обратим внимание на:

- члены x^2 (под первым радикалом) и $\frac{16}{x^2}$ (под вторым радикалом) – это наводит на мысль использовать неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом для оценки суммы $x^2 + \frac{16}{x^2}$;
- члены $-2x$ (под первым радикалом) и $-2x$ (под третьим радикалом) – они, видимо, должны взаимно уничтожиться.

Но чтобы реализовать эти соображения, выражения под первым и вторым радикалами нужно как-то объединить под одним радикалом. С этой целью воспользуемся следующим утверждением:

если числа a и b неотрицательны, то

$$a + b \geq \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{11.35}$$

причём знак равенства достигается тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел a и b равно нулю.

Действительно, если, например, $a = 0$, то неравенство (11.35) примет вид $b \geq \sqrt{b^2}$ или, что равносильно, $b \geq b$ (мы используем неотрицательность числа b, что даёт: $\sqrt{b^2} = |b| = b$). Таким образом, если хотя бы одно из неотрицательных чисел a и b равно нулю, то неравенство (11.35) истинно, причём его левая часть равна правой.

Если числа a и b положительны, то $\sqrt{a^2 + b^2}$ можно интерпретировать как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами a и b. Поскольку сумма катетов больше гипотенузы, неравенство (11.35) истинно, причём это неравенство – строгое.

Алгебраическое доказательство неравенства (11.35) элементарно: так как числа a и b неотрицательны, то

$$a + b \geq \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow (a + b)^2 \geq a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2ab \geq 0.$$

Поскольку последнее неравенство истинно, истинно и исходное. Кроме того,

$$a + b = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow (a + b)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2ab = 0,$$

так, что в исходном неравенстве знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $ab = 0$, т.е. когда хотя бы одно из чисел a и b равно нулю.

После этих вводных замечаний вернёмся к исходному уравнению и применим к его левой части неравенство треугольника (11.35) (в качестве a и b возьмём $\sqrt{x^2 - 2x}$ и $\sqrt{1 + 16x^{-2}}$ соответственно):

$$\text{Левая часть} \equiv \sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{1 + \frac{16}{x^2}} \geq \sqrt{x^2 - 2x + 1 + \frac{16}{x^2}}.$$

В силу неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$x^2 + \frac{16}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{16}{x^2}} = 8.$$

Поэтому

$$\text{Левая часть} \geq \sqrt{8 - 2x + 1} = \sqrt{9 - 2x} \equiv \text{Правая часть}.$$

Таким образом, справедливость равенства

$$\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{1 + \frac{16}{x^2}} = \sqrt{9 - 2x}$$

для некоторого x означает, что в двух использованных неравенствах достигается знак равенства, что, в свою очередь, равносильно тому, что одновременно выполнены два условия:

- хотя бы одно из чисел $x(x-2)$, $1+16x^{-2}$ равно нулю;
- числа x^2 и $16x^{-2}$ равныю

Первое равносильно тому, что $x = 0; 2$, а второе – тому, что $x = \pm 2$. Отсюда мы получаем ответ: $x = 2$.

Ответ: $x = 2$. □

Решение задачи 388. Перейдём к одному основанию 3:

$$\left(3^{-1}\right)^{x^2} \cdot 3^{2x+5} = \left(3^3\right)^{-1}.$$

Поскольку над показательными блоками производятся только "хорошие" действия (умножение и возведение в степень), которые можно выполнить с помощью свойств степеней, выполним эти действия:

$$3^{-x^2+2x+5} = 3^{-3}.$$

Т.к. основание – положительное число, не равное 1, это уравнение равносильно уравнению

$$-x^2 + 2x + 5 = -3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4; -2$$

Ответ: $\{-2; 4\}$. □

Решение задачи 408. В правой части над показательными блоками производится "плохое" действие – сложение, которое нельзя выполнить (в том смысле, что нет простого соотношения вида $a^x + a^y = a^{f(x,y)}$). Обычно такие показательные уравнения решаются с помощью метода новой неизвестной.

Перед тем как вводить новую неизвестную, уравнение нужно преобразовать так, чтобы неизвестная x входила только в составе одного и того же повторяющегося блока:

$$(5^x)^2 = 23 \cdot 5^x + 50.$$

Если обозначить 5^x через t, то уравнение примет вид:

$$t^2 - 23t - 50 = 0.$$

Оно имеет два корня: $t_1 = 25$ и $t_2 = -2$. Поэтому исходное уравнение распадается на два уравнения

$$\begin{array}{ccc} 5^x = 25 & \quad & 5^x = -2 \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ x = 2 & & \emptyset \end{array}$$

Объединяя множества решений этих уравнений, получим ответ задачи.

Ответ: $x = 2$. □

Решение задачи 472. Приведём логарифмы к одному основанию, скажем, 3:

$$1 + \frac{1}{2}\log_3(x+1)^2 = \log_3(3x+9).$$

Поскольку над логарифмами производятся “хорошие” действия (умножение на числовой коэффициент и сложение), выполним эти действия (при этом число 1 в левой части уравнения нужно превратить в $\log_3 3$):

$$\log_3 3 + \log_3 \sqrt{(x+1)^2} = \log_3(3x+9)$$
$$\Updownarrow$$
$$\log_3(3|x+1|) = \log_3(3x+9)$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} 3|x+1| = 3x+9 \\ 3x+9 > 0 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} |x+1| = x+3 \\ x+3 > 0 \end{cases}$$

Последняя система расщепляется на две

$$\begin{cases} x+1 = x+3 \\ x+3 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+1 = -(x+3) \\ x+3 > 0 \end{cases}$$
$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$
$$\emptyset \qquad\qquad\qquad x = -2$$

Ответ: $x = -2.\square$

Решение задачи 510. Введём новую неизвестную $t = \sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2|$ и перейдём в логарифмах к одному основанию 2:

$$\log_2(6+t) = 1 + 2\log_2|t|.$$

Поскольку над логарифмами производятся только “хорошие” действия (умножение на числовой коэффициент и сложение), выполним их (при этом число 1 превратим в $\log_2 2$):

$$\log_2(6+t) = \log_2(2t^2).$$

Все проделанные преобразования, очевидно, равносильны.

Последнее уравнение равносильно уравнению

$$6 + t = 2t^2 \tag{11.36}$$

(положительность обеих частей, которая необходима для обратного преобразования, следует из того, что $t = 0$ не является корнем этого уравнения).

Уравнение (11.36) имеет два корня $t_1 = 2$, $t_2 = -\frac{3}{2}$. Соответственно исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2| = 2 \qquad \sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2| = -\tfrac{3}{2}$$

Первое уравнение можно переписать в виде:

$$|\sqrt{x} - 2| = \sqrt{x} - 2,$$

что равносильно неравенству

$$\sqrt{x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 4.$$

Второе уравнение можно переписать в виде:

$$|\sqrt{x}-2| = \sqrt{x}+\frac{3}{2}.$$

Поскольку $\sqrt{x}+\frac{3}{2} \geq 0$, оно, в свою очередь, распадается на два уравнения:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{x}-2=\sqrt{x}+\frac{3}{2} & \qquad & \sqrt{x}-2=-\sqrt{x}-\frac{3}{2} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ -2=\frac{3}{2} & & \sqrt{x}=\frac{1}{4} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \emptyset & & x=\frac{1}{16} \end{array}$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{16}\right\} \cup [4;+\infty)$.□

Решение задачи 521. В левой части над логарифмом производится "плохое" действие – возведение в квадрат, которое нельзя выполнить (в том смысле, что нет простого соотношения вида $\log_a^2 x = \log_a f(x)$). Обычно такие логарифмические уравнения решаются с помощью метода новой неизвестной.

Перед тем как вводить новую неизвестную, уравнение нужно преобразовать так, чтобы неизвестная x входила только в составе одного и того же повторяющегося блока. Для этого перейдём в логарифмах к одному основанию 2 и превратим оба логарифма в $\log_2 x$:

$$(\log_2 x)^2 = 5\log_2 x - 4.$$

Если обозначить $\log_2 x$ через t, то уравнение примет вид:

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

Оно имеет два корня: $t_1 = 1$ и $t_2 = 4$. Поэтому исходное уравнение распадается на два уравнения

$$\begin{array}{ccc} \log_2 x = 1 & \qquad & \log_2 x = 4 \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ x=2 & & x=16 \end{array}$$

Объединяя множества решений этих уравнений, получим ответ задачи.

Ответ: $x_1 = 2;\ x_2 = 16$. □

Решение задачи 557. Прежде всего упростим исходное условие задачи:

$$\log_{\frac{x}{y}}\left(x^9\right) = \log_{\sqrt{y}}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Для этого перейдём во всех логарифмах к одному основанию, например, y (это можно сделать, т.к. условие задачи влечёт, что $y > 0$, $y \neq 1$):

$$\frac{9\log_y x}{\log_y x - 1} = 2\left(1 - \log_y x\right).$$

Обозначим для сокращения записей выражение $\log_y x$ через a. Тогда условие задачи превратится в простое алгебраическое уравнение относительно переменной a:

$$\frac{9a}{a-1} = 2(1-a) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9a = -2(a-1)^2, \\ a \neq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow 2a^2 + 5a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2; -\frac{1}{2}.$$

Итак, условие задачи означает, что переменная a равна -2 или $-\frac{1}{2}$.

Выражение $F = \log^2_{\frac{x}{y}} x + \log^2_{\frac{y}{x}} y$, которое нужно найти, также можно выразить через новую переменную a:

$$F = \left(\frac{\log_y x}{\log_y x - 1}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-\log_y x}\right)^2 = \left(\frac{a}{a-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-a}\right)^2 = \frac{a^2+1}{a^2-2a+1}.$$

Для $a = -2$ выражение F равно $\frac{4+1}{4+4+1} = \frac{5}{9}$.

Для $a = -\frac{1}{2}$ выражение F равно $\frac{\frac{1}{4}+1}{\frac{1}{4}+1+1} = \frac{5}{9}$.

Заключительную часть решения можно немного упростить, если вместо точных значений переменной a использовать равенство $2a^2 + 5a + 2 = 0$. Это равенство влечёт, что $a^2 + 1 = -\frac{5}{2}a$. Поэтому

$$F = \frac{1 - \frac{5}{2}a}{-\frac{5}{2}a - 2a} = \frac{5}{9}.$$

Отметим также, что соотношения $a = -2$, $a = -\frac{1}{2}$ могут быть превращены в простые соотношения между основными переменными x и y:

$$\begin{array}{ccc} a = -2 & \qquad & a = -\frac{1}{2} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \log_y x = -2 & & \log_y x = -\frac{1}{2} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ x = \frac{1}{y^2} & & y = \frac{1}{x^2} (x, y > 0; x, y \neq 1) \end{array}$$

Их можно использовать для упрощения выражения F или любой другой функции от x и y. Этот способ более громоздкий, чем первый, но он сработает и в случае, когда F нельзя свести к переменной a.

Ответ: $\frac{5}{9}$.□

Решение задачи 558. Пусть A – общее значение двух данных логарифмических выражений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_{x^5 y^2 z} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2 y}}{z}\right) = A, \\ \log_{x^2 y^5 z} \left(\frac{\sqrt{xy}}{z}\right) = A. \end{array} \right. \tag{11.37}$$

Поскольку выражения под знаками логарифмов должны быть положительны, $\frac{\sqrt{xy}}{z} > 0$. Отсюда следует, что $z > 0$, а x и y – одного знака. Положительность выражения $\frac{\sqrt[3]{x^2 y}}{z}$ исключает возможность $x, y < 0$.

Таким образом, существуют $\lg x$, $\lg y$, $\lg z$. Переходя в уравнениях системы (11.37) к одному основанию 10 и вводя новые переменные $a = \lg x$, $b = \lg y$, $c = \lg z$, мы получим систему

$$\begin{cases} \frac{\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b-c}{5a+2b+c} = A, \\ \frac{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-c}{2a+5b+c} = A. \end{cases}$$

Исключим переменную A:

$$\frac{\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b-c}{5a+2b+c} = \frac{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-c}{2a+5b+c},$$

и избавимся от дробей:

$$\begin{cases} 7a^2 - (3b+19c)a + (19bc - 4b^2) = 0, \\ 5a+2b+c, 2a+5b+c \neq 0. \end{cases}$$

Полученное уравнение является квадратным относительно переменной a. Его дискриминант равен

$$D = (3b+19c)^2 - 4\cdot 7 \cdot (19bc - 4b^2) = 121b^2 - 418bc + 361c^2 = (11b-19c)^2.$$

Поэтому это уравнение распадается на два уравнения:

$$a = \tfrac{3b+19c+(11b-19c)}{14} = b \qquad a = \tfrac{3b+19c+(11b-19c)}{14} = \tfrac{-4b+19c}{7}$$

Случай $a = b$ означает, что $\lg x = \lg y$, т.е. $x = y$ – эта возможность исключена по условию задачи.

В случае $a = \frac{-4b+19c}{7}$ выражения $5a+2b+c$ и $2a+5b+c$ будут равны $\frac{-6b+102c}{7}$ и $\frac{27b+45c}{7}$ соответственно. Они отличны от 0, например, при $b = 0$, $c = 1$, так что этот случай возможен.

Теперь для переменной A мы имеем:

$$A = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{-4b+19c}{7} + \frac{1}{3}b - c}{\frac{-6b+102c}{7}} = \frac{\frac{-b+17c}{21}}{\frac{6(-b+17c)}{7}} = \frac{1}{18}.$$

Ответ: $\frac{1}{18}$. □

Решение задачи 569. Так как $T = 4$ – период $f(x)$, то

$$\begin{aligned} f(x-8) &= f(x-2T) = f(x), \\ f(x+12) &= f(x+3T) = f(x). \end{aligned}$$

Поэтому уравнение

$$2f(x)\cdot f(x-8) + 5f(x+12) + 2 = 0$$

можно записать в виде:

$$2\left(f(x)\right)^2 + 5f(x) + 2 = 0.$$

Для его решения введём новую неизвестную $y = f(x)$. Получившееся квадратное уравнение
$$2y^2 + 5y + 2 = 0$$
имеет два корня: $y_1 = -2$, $y_2 = -\frac{1}{2}$. Соответственно, исходное уравнение распадается на два уравнения
$$f(x) = -2 \qquad f(x) = -\frac{1}{2}$$
Эти уравнения будем решать графически.

Прежде всего построим график функции $y = 1 - |x - 1|$. Он может быть получен из стандартного графика $y = |x|$ последовательным выполнением следующих преобразований:

1. сдвиг на 1 вправо;

2. осевая симметрия относительно оси x;

3. сдвиг на 1 вверх.

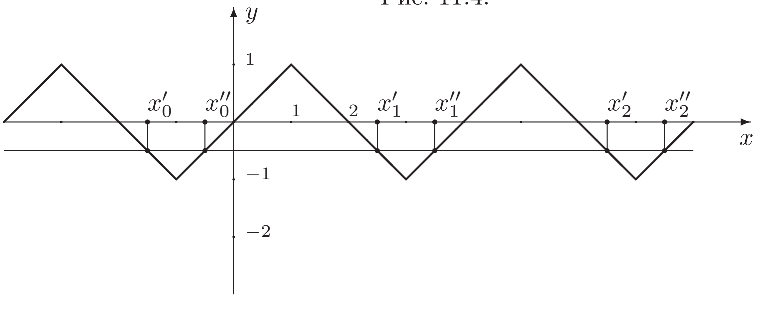
Часть этого графика, соответствующая $x \in [0; 2]$, т.е. ломаная линия с вершинами в точках $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 0)$, будет являться и частью графика основной функции $y = f(x)$ (см. рис.11.4).

Поскольку функция $f(x)$ нечётна, применяя центральную симметрию относительно начала координат, мы получим часть основного графика, соответствующую $x \in [-2; 0]$ – это будет ломаная линия с вершинами в точках $(-2; 0)$, $(-1; -1)$, $(0; 0)$.

В итоге мы нарисуем график $y = f(x)$ для $x \in [-2; 2]$ – это будет ломаная линия с вершинами в точках $(-2; 0)$, $(-1; -1)$, $(1; 1)$, $(2; 0)$.

Длина отрезка $[-2; 2]$ равна периоду функции $f(x)$. Поэтому сдвигая последнюю ломаную вдоль оси x на $\pm 4, \pm 8, \ldots$, мы получим график функции $y = f(x)$; он изображён на рис.11.4.

Рис. 11.4:



Поскольку график функции $y = f(x)$ не пересекается с горизонтальной прямой $y = -2$, уравнение $f(x) = -2$ не имеет корней.

Горизонтальная прямая $y = -\frac{1}{2}$ пересекает график функции $y = f(x)$ в бесконечном числе точек. Их проекции на ось x дают множество корней уравнения $f(x) = -\frac{1}{2}$. Важно отметить, что рис.11.4 уже даёт ответ исходной задачи *на геометрическом языке.* Однако, поскольку задача была сформулирована на языке алгебры, естественно было бы и ответ дать на этом языке, т.е. в виде формул.

Чтобы описать найденное множество корней на алгебраическом языке, перенумеруем корни как показано на рис.11.4 и отметим, что все корни стоят парами. Эти пары отстоят друг от друга на расстояние 4, так что (бесконечное в обе стороны) множество корней можно описать бесконечным числом формул

$$\begin{array}{rcl}
x_1' &=& x_0' + 4,\\
x_1'' &=& x_0'' + 4,\\
x_2' &=& x_0' + 8,\\
x_2'' &=& x_0'' + 8,\\
&\ldots&\\
x_{-1}' &=& x_0' - 4,\\
x_{-1}'' &=& x_0'' - 4,\\
x_{-2}' &=& x_0' - 8,\\
x_{-2}'' &=& x_0'' - 8,\\
&\ldots&
\end{array}$$

или двумя *условными* формулами:

$$\begin{array}{rcl}
x_n' &=& x_0' + 4n,\ n \in Z\\
x_m'' &=& x_0'' + 4m,\ m \in Z.
\end{array}$$

В этих формулах можно было бы употребить и одну дополнительную переменную для нумерации корней (скажем, n) вместо двух, n и m. Однако в ряде задач, например, при решении тригонометрических систем, это может привести к ошибкам и поэтому экзаменаторы обычно требуют, чтобы в подобных случаях использовались разные целочисленные параметры. Отметим, что в современном математическом языке вместо формул $x_n' = x_0' + 4n$, $n \in Z$ и $x_m'' = x_0'' + 4m$, $m \in Z$ следовало бы использовать формулы $x_0' + 4Z$ и $x_0'' + 4Z$ соответственно, так что все множество корней равно *множеству* $\{x_0'; x_0''\} + 4Z$ или, что то же самое, *множеству* $(x_0' + 4Z) \cup (x_0'' + 4Z)$.

Чтобы получить ответ в окончательном виде, осталось определить "центральные" корни x_0', x_0''. Для этого отметим, что они образовались от пересечения горизонтальной прямой и части графика $y = f(x)$, соответствующей $x \in [-2; 0]$. Если x лежит на этом отрезке, то $-x \in [0; 2]$ и поэтому

$$f(x) = -f(-x) = -(1 - |-x-1|) = |x+1| - 1.$$

Следовательно, для x_0', x_0'' имеем уравнение:

$$|x+1| - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow |x+1| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 1 = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\frac{3}{2}+4n$, $-\frac{1}{2}+4m$, где $n, m \in Z$.$\square$

Решение задачи 572. *1 способ.* Поскольку линейная функция имеет вид $f(x)=kx+b$, задачу можно переформулировать следующим образом:

существуют ли числа k и b такие, что при всех x верно равенство

$$2\cdot(k\cdot(x+2)+b)+(k\cdot(4-x)+b)=2x+5,$$

или, что то же самое, равенство

$$kx+8k+3b=2x+5?$$

Поскольку два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной, задача примет вид:

существуют ли числа k и b такие, что верны равенства

$$\begin{cases} k=2, \\ 8k+3b=5? \end{cases} \tag{11.38}$$

В этом виде задача просто сводится к вопросу о совместности системы (11.38). Легко видеть, что эта система имеет и притом единственное решение $k=2$, $b=-\frac{11}{3}$. Итак, существует и притом единственная линейная функция $f(x)=2x-\frac{11}{3}$, удовлетворяющая исходному функциональному уравнению.

Подобный метод применим для решения и других функциональных уравнений, когда нужно найти решение в классе функций, описываемых несколькими числовыми параметрами.

2 способ. Хотя задача решена, возникает естественный вопрос: существуют ли другие функции $f(x)$ (не обязательно линейные), удовлетворяющие исходному функциональному уравнению?

Для ответа на этот вопрос решим наше функциональное уравнение в общем виде.

Для этого прежде всего заменим x на $x-2$. Тогда уравнение примет вид:

$$2f(x)+f(6-x)=2x+1 \text{ при всех } x.$$

Заменим в этом равенстве x на $6-x$:

$$2f(6-x)+f(x)=-2x+13 \text{ при всех } x.$$

Исключая из этих равенств $f(6-x)$, получим:

$$f(x)=2x-\frac{11}{3}.$$

Простая проверка показывает, что эта функция действительно удовлетворяет исходному функциональному уравнению.

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, применяются при решении функциональных уравнений, когда нет никакой информации о виде неизвестной функции.

Ответ: да, $f(x) = 2x - \frac{11}{3}$. $\square$

Решение задачи 581. Решим исходное функциональное уравнение

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ при всех } x, y \in Q. \tag{11.39}$$

Прежде всего отметим, что функции вида $f(x) = kx$ (прямые пропорциональности) удовлетворяют этому уравнению. Докажем, что никаких других решений (в классе функций рационального аргумента) уравнение (11.39) не имеет.

Рассмотрим исходное функциональное уравнение (11.39) при $y = 0$:

$$f(x) = f(x) + f(0).$$

Отсюда следует, что $f(0) = 0$.

При $y = -x$ уравнение (11.39) примет вид:

$$f(0) = f(x) + f(-x),$$

откуда $f(-x) = -f(x)$.

Таким образом, всякое решение уравнения (11.39) является нечётной функцией.

Положим в (11.39) $y = x$. Это даст следующее соотношение:

$$f(2x) = 2f(x) \text{ при всех } x \in Q.$$

Используя это равенство, из (11.39) при $y = 2x$ получим:

$$f(3x) = f(x) + f(2x) = f(x) + 2f(x) = 3f(x) \text{ при всех } x \in Q.$$

Аналогично, при $y = 3x$ из (11.39) имеем:

$$f(4x) = f(x) + f(3x) = f(x) + 3f(x) = 4f(x) \text{ при всех } x \in Q.$$

Повторяя эту процедуру мы получим, что для любого натурального n верно равенство (при $n = 1$ оно является тождеством):

$$f(nx) = nf(x), \text{ при всех } x \in Q. \tag{11.40}$$

Строго это можно доказать методом математической индукции. Справедливость равенства (11.40) при $n = 1$ (основание индукции) уже установлена. Допустим, что (11.40) доказано для некоторого натурального k; докажем его справедливость для значения $n = k + 1$:

$$f((k+1)x) = f(kx + x) = f(kx) + f(x) = kf(x) + f(x) = (k+1)f(x).$$

Из нечётности функции $f(x)$, которую мы установили в самом начале нашего решения, следует, что равенство (11.40) верно при всех целых n (а не только натуральных).

В принципе уже в этом месте мы можем решить исходную задачу в том виде, как она была поставлена на экзамене. Поскольку $10 = (-35) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)$, из (11.40) при $n = -35$, $x = -\frac{2}{7}$ имеем:

$$f(10) = -35 f\left(-\frac{2}{7}\right),$$

так что

$$f\left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{1}{35} f(10) = -\frac{1}{35} \cdot (-\pi) = \frac{\pi}{35}.$$

Но мы двинемся дальше и докажем, что на самом деле верно соотношение

$$f(rx) = rf(x), \text{ при всех } x \in Q, \tag{11.41}$$

где r – произвольное рациональное число.

Положим в (11.40) $x = \frac{t}{n}$, n – натуральное:

$$f(t) = nf\left(\frac{t}{n}\right),$$

откуда $f\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{1}{n} f(t)$, так что (11.41) справедливо для $r = \frac{1}{n}$. Если в этом равенстве положить $t = mx$, m – целое, то используя (11.40) мы получим:

$$f\left(\frac{m}{n} x\right) = \frac{1}{n} f(mx) = \frac{1}{n} m f(x) = \frac{m}{n} f(x),$$

т.е. (11.41) справедливо для любого рационального r.

В частности, при $x = 1$ (11.41) даст:

$$f(r) = rf(1).$$

Если обозначить $f(1)$ через k, а вместо переменной r использовать переменную x, то это соотношение можно записать в виде:

$$f(x) = kx. \tag{11.42}$$

Таким образом, если функция $f(x)$ является решением уравнения (11.39), то она даётся формулой (11.42).

Отметим, что если рассматривать исходное функциональное уравнение (11.39) при всех *действительных* x и y, то установить справедливость равенства (11.42) при всех *действительных* x нельзя. Для этого нужно дополнительно предположить непрерывность функции $f(x)$; только тогда кроме прямых пропорциональностей не будет других функций действительного аргумента, удовлетворяющих уравнению (11.39) при всех x и y. Без этого предположения существуют и другие решения, но они устроены настолько сложно, что привести их в книге для школьников не представляется возможным.

Теперь вернёмся к исходной задаче (в том виде, как она была поставлена на экзамене). Так как

$$f(10) = k \cdot 10,$$

мы можем определить коэффициент пропорциональности k: $k = -\frac{\pi}{10}$. Поэтому $f(x) = -\frac{\pi}{10} \cdot x$ для рациональных x и, в частности,

$$f\left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{\pi}{10} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{\pi}{35}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{35}$ ($f(x) = -\frac{\pi}{10}x$ для рациональных x). □

Решение задачи 585. Исходное функциональное уравнение является неоднородным (“лишним” является член $80xy$ в правой части). В соответствии с общей идеологией решения уравнений превратим его в однородное. Для этого найдем частное решение уравнения. Имея в виду сходство нашего уравнения с тождеством сокращенного умножения $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, нетрудно догадаться, что $f_0(x) = 40x^2$ является решением.

Теперь введём новую неизвестную функцию $g(x) = f(x) - f_0(x)$. Для неё исходное функциональное уравнение примет вид:

$$g(x+y) = g(x) + g(y) \text{ при всех } x, y \in R.$$

В частности, это уравнение выполнено при всех рациональных x, y. Как было установлено при решении задачи 581, $g(x) = kx$ $(x \in Q)$. Поэтому можно утверждать, что при рациональных x $f(x) = 40x^2 + kx$. Условие $f\left(\frac{1}{4}\right) = 2$ позволяет определить коэффициент k; он равен -2, так что $f(x) = 40x^2 - 2x$ $(x \in Q)$. В частности,

$$f\left(\frac{4}{5}\right) = 40 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{5} = 24.$$

Ответ: $f\left(\frac{4}{5}\right) = 24$; при рациональных x верно равенство $f(x) = 40x^2 + kx$, где $k = -2$. □

Решение задачи 586. Докажем, что $f(x)$ является инъекцией, т.е. равенство $f(x_1) = f(x_2)$ влечёт, что $x_1 = x_2$. Действительно, если $f(x_1) = f(x_2)$, то

$$x_1 = f(f(x_1)) - f(x_1) = f(f(x_2)) - f(x_2) = x_2.$$

Если x_1, x_2 – корни уравнения $f(f(x)) = 0$, то $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$, а тогда из доказанной инъективности функции $f(x)$ следует, что $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 = x_2$. Таким образом, уравнение $f(f(x)) = 0$ не может иметь больше одного корня.

Теперь подставим в исходное функциональное уравнение вместо x число 0: $f(0) = f(f(0))$. В силу доказанной инъективности функции $f(x)$ отсюда следует, что $0 = f(0)$, а тогда $f(f(0)) = f(0) = 0$, т.е. число 0 является корнем уравнения $f(f(x)) = 0$.

Ответ: $x = 0$. □

Решение задачи 588. *1 шаг.* Докажем, что $f(x)$ является инъекцией. Предположим, что $f(x_1) = f(x_2)$. Применяя к обеим частям f, мы получим, что $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$. В силу исходного функционального уравнения это равносильно равенству $-x_1^{2011} = -x_2^{2011}$, что, в свою очередь, равносильно тому, что $x_1 = x_2$.

2 шаг. Подставим в исходное функциональное уравнение вместо x выражение $f(x)$: $f(f(f(x))) = -\left(f(x)\right)^{2011}$. Применяя к внутреннему выражению в левой части исходное функциональное уравнение, мы получим: $f\left(-x^{2011}\right) = -\left(f(x)\right)^{2011}$.

В этом равенстве заменим x на 0:

$$f(0) = -\left(f(0)\right)^{2011} \Leftrightarrow f(0) \cdot \left(1 + \left(f(0)\right)^{2010}\right) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

Поскольку f – инъекция, мы можем гарантировать, что $f(1)$ и $f(-1)$ отличны от 0.

Теперь в том же равенстве заменим x на 1 и -1:

$$\begin{cases} f(-1) = -\left(f(1)\right)^{2011} \\ f(1) = -\left(f(-1)\right)^{2011} \end{cases}$$

С учётом того, что $f(1), f(-1) \neq 0$, легко показать, что эта система относительно неизвестных $f(1), f(-1)$ имеет два решения: $f(1) = 1, f(-1) = -1$ и $f(1) = -1, f(-1) = 1$.

3 шаг. Допустим, что $f(1) = 1, f(-1) = -1$. Заменяя в исходном функциональном уравнении x на 1, мы получим: $f(f(1)) = -1 \Leftrightarrow f(1) = -1$, что противоречит допущению $f(1) = 1$.

Допустим, что $f(1) = -1, f(-1) = 1$. Заменяя опять в исходном функциональном уравнении x на 1, мы получим: $f(f(1)) = -1 \Leftrightarrow f(-1) = -1$, что противоречит допущению $f(-1) = 1$.

Ответ: таких функций нет. □

11.3 Глава 3

Решение задачи 590. Прежде всего, запишем неравенство в стандартном виде: $4x^2 - 8x + 1 > 0$. Чтобы его решить, нарисуем график функции $y = 4x^2 - 8x + 1$.

Ясно, что график является параболой (поскольку функция квадратичная), ветви которой направлены вверх (поскольку старший коэффициент положителен).

Чтобы уточнить положение графика, найдём точки его пересечения с осью x-в. Для этого решим уравнение $4x^2 - 8x + 1 = 0$:

$$\frac{D}{4} = 4^2 - 4 = 12 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Итак, график функции $y = 4x^2 - 8x + 1$ пересекает ось абсцисс в двух точках:

$$x_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Рисунок 11.5 даёт примерный вид этого графика (т.к. положение оси ординат, вершины параболы и другие детали не играют никакой роли при решении квадратичных неравенств, мы не изображаем их на рисунке).

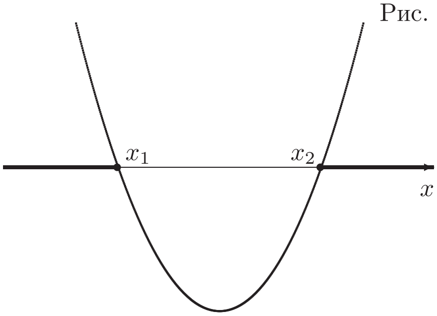


Рис. 11.5:

Из этого рисунка ясно, что множество решений исходного неравенства является объединением двух промежутков: $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty; 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$. □

Решение задачи 593. Неравенства высших степеней (и дробно-рациональные неравенства) обычно решают методом интервалов (за исключением биквадратных и других неравенств, где явно выделяется повторяющийся блок – их решают методом новой неизвестной).

Метод интервалов базируется на

1. правиле знаков для умножения и деления ($+\cdot+=+$, $-\cdot+=-$ и т.д.);

2. следующем факте о распределении знаков линейного выражения вида $x-a$, где a – некоторое число: *справа от "своей" точки a выражение $x-a$ имеет знак $+$, а при переходе переменной x справа налево через точку a меняет знак на $-$.*

Решение задачи методом интервалов предполагает выполнение цепочки точно описанных шагов:

1. Перенести все члены в левую часть, чтобы справа был 0 и можно было вместо "выражение больше 0" говорить "выражение имеет знак +", а вместо "выражение меньше 0" говорить "выражение имеет знак –". В нашем случае первый шаг приводит к неравенству

$$x^5 - x < 0.$$

2. Разложить левую часть на стандартные линейные множители, т.е. множители вида $x-a$ (перед этим обычно нужно привести подобные члены и выполнить действия над дробями). В нашем случае для того, чтобы разложить многочлен x^5-x на множители нужно вынести x за скобку: $x^5-x=x(x^4-1)$, а затем к многочлену x^4-1 два раза применить тождество сокращенного умножения $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$:

$$x^5 - x = x(x^2-1)(x^2+1) = x(x-1)(x+1)(x^2+1).$$

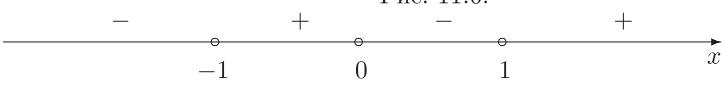
Многочлен второй степени x^2+1 нельзя разложить на линейные множители, но это и не важно, так как это выражение положительно при всех x

и на знак левой части нашего неравенства не влияет. Поэтому его можно не учитывать (иными словами, мы делим обе части нашего неравенства на x^2+1). После выполнения этих операций наше неравенство примет вид:

$$x(x-1)(x+1) < 0.$$

3. На числовой оси для каждого множителя $x-a$ отметить "свою" точку a (в которой он обращается в 0). Этими точками числовая ось разобьется на несколько интервалов – отсюда и название "метод интервалов". В нашем случае этих интервалов будет четыре (см. рис. 11.6).

Рис. 11.6:



4. Нарисовать распределение знаков левой части неравенства, используя следующие рассуждения.

Если x находится на самом правом интервале, то он расположен справа от всех отмеченных точек. Поэтому все линейные множители в левой части неравенства имеют знак $+$ (т.е. положительны), а, значит, и вся левая часть имеет знак $+$.

При движении x по нарисованной числовой оси справа налево никакого изменения знака не будет, пока x не перейдёт через очередную отмеченную точку (мы установили ранее, что выражение $x-a$ меняет знак только при переходе через точку a).

В нашем случае первой встретится точка 1. После перехода через точку 1 множитель $x-1$ изменит знак, а остальные множители – нет. Поэтому вся левая часть изменит знак (с $+$ на $-$).

Следующей встретится точка 0. После перехода через эту точку множитель x изменит знак, а остальные множители – нет. Поэтому вся левая часть изменит знак (с $-$ на $+$).

Последней встретится точка -1. После перехода через эту точку множитель $x+1$ изменит знак, а остальные множители – нет. Поэтому вся левая часть изменит знак (с $+$ на $-$).

Найденное распределение знаков выражения $x(x-1)(x+1)$ отмечено на рис. 11.6. Тот факт, что знаки чередуются, является типичным. Чередование может быть нарушено только, если какой-то множитель встретится чётное число раз (двойная перемена знаков оставляет знак неизменным).

5. Теперь нужно вспомнить, какое именно неравенство нужно решить (>0 или <0) и выписать ответ. В случае нестрогих неравенств в ответ нужно включить те граничные точки, в которых левая часть обращается в 0 (для целых неравенств – все граничные точки, для дробных – нужно включить точки, относящиеся к числителю, и исключить точки, относящиеся к знаменателю).

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(0;1)$.

□

Решение задачи 595. Чтобы решить данное неравенство методом интервалов, нужно перенести все члены в левую часть:

$$x^4 + x^3 - 18x^2 + x + 1 > 0$$

и разложить левую часть, т.е. выражение

$$f(x) = x^4 + x^3 - 18x^2 + x + 1$$

на линейные множители вида $x - a$.

Применить для этого теорему Безу не удаётся, т.к. уравнение $f(x) = 0$ не имеет рациональных корней. Поэтому применим метод неопределённых коэффициентов.

Вид многочлена $f(x)$ подсказывает, что, видимо, его можно разложить на два квадратичных множителя. При этом разумными представляются только следующие гипотезы:

1. $x^4 + x^3 - 18x^2 + x + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$;
2. $x^4 + x^3 - 18x^2 + x + 1 = (x^2 + ax - 1)(x^2 + bx - 1)$,

где a и b – *неопределённые коэффициенты.*

Проверим первую из них. Раскроем скобки в правой части, приведём подобные члены и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ ab + 2 = -18, \\ a + b = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, мы получим $a = 5$, $b = -4$ или $a = -4$, $b = 5$. Оба варианта дают одно и то же разложение многочлена $f(x)$ на квадратичные множители (различается только порядок сомножителей): Поэтому

$$x^4 + x^3 - 18x^2 + x + 1 = (x^2 + 5x + 1)(x^2 - 4x + 1).$$

Квадратные трёхчлены в правой части имеют положительные дискриминанты и поэтому могут быть разложены на линейные множители:

$$x^2 + 5x + 1 = (x - x_1)(x - x_2), \quad x^2 - 4x + 1 = (x - x_3)(x - x_4),$$

где

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2}, \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}, \quad x_3 = 2 - \sqrt{3}, \quad x_4 = 2 + \sqrt{3}.$$

Это приводит исходное неравенство к виду:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) > 0.$$

Поскольку $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, метод интервалов немедленно дает ответ.

Многочлен $f(x) = x^4 + x^3 - 18x^2 + x + 1$ можно разложить на множители и другим методом. Для этого отметим его характерную особенность: равенство коэффициентов, равноудаленных от начала и конца многочлена (напомним, что такие многочлены называют *возвратными*). Поэтому с помощью новой переменной $t = x^2 + 1$ его можно свести к многочлену вдвое меньшей степени (т.е. квадратному), который уже можно пробовать разложить на множители:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^4+1) + (x^3+x) - 18x^2 = (x^4+1) + x(x^2+1) - 18x^2 \\ &= \big((x^2+1)^2 - 2x^2\big) + x(x^2+1) - 18x^2 \\ &= (x^2+1)^2 + x(x^2+1) - 20x^2 = t^2 + xt - 20x^2. \end{aligned}$$

Выражение $t^2 + xt - 20x^2$ можно рассматривать как квадратный трёхчлен относительно переменной t (при этом x является параметром). Его дискриминант равен $D = x^2 - 4 \cdot (-20x^2) = 81x^2$, так что нули трёхчлена есть

$$t_1 = \frac{-x+9x}{2} = 4x, \quad t_2 = \frac{-x-9x}{2} = -5x.$$

Поэтому

$$t^2 + xt - 20x^2 = (t-4x)(t+5x) = (x^2-4x+1)(x^2+5x+1).$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{-5+\sqrt{21}}{2}; 2-\sqrt{3}\right) \cup \left(2+\sqrt{3}; +\infty\right)$. $\square$

Решение задачи 598. Перепишем неравенство в виде

$$(x^2)^2 - 5x^2 + 4 < 0$$

и, обращая внимание на повторяющийся блок x^2, введём новую неизвестную $y = x^2$. Для неё исходное неравенство примет вид:

$$y^2 - 5y + 4 < 0.$$

Решение этого квадратичного неравенства даётся формулой:

$$1 < y < 4.$$

Поэтому исходное неравенство равносильно двойному неравенству

$$1 < x^2 < 4,$$

или, что то же самое, системе из двух квадратичных неравенств:

$$\begin{cases} x^2 > 1, \\ x^2 < 4 \end{cases}$$

Решение первого неравенства системы состоит из двух интервалов: $x < -1$ и $x > 1$. Множество решений второго неравенства – интервал $-2 < x < 2$. Пересекая эти множества, мы получим ответ задачи.

Ответ: $(-2;-1)\cup(1;2)$. $\square$

Решение задачи 603. Разложим числитель дроби в левой части неравенства на линейные множители:

$$\frac{(x+4)(x-2)}{x+4}\le 1.$$

Сократим общий множитель $x+4$; чтобы это преобразование было равносильным, необходимо сохранить условие $x+4\ne 0$:

$$\begin{cases} x-2\le 1\\ x+4\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3\\ x\ne -4\end{cases}$$

Ответ: $(-\infty;3]\setminus\{-4\}$. $\square$

Решение задачи 607. Поскольку выражение x^2+2 (знаменатель дроби в левой части неравенства) всегда положительно, данное неравенство равносильно квадратичному неравенству

$$3x\ge x^2+2 \Leftrightarrow x^2-3x+2\le 0\Leftrightarrow 1\le x\le 2$$

Ответ: $[1;2]$.$\square$

Решение задачи 622. Упростим дробь в левой части неравенства:

$$\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\le 2\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+1}\le 2\\ x\ne 0\end{cases}$$

(условие $x\ne 0$ вытекает из исходного неравенства и необходимо для обратимости сделанного преобразования).

Первое неравенство этой системы решим методом интервалов:

$$\frac{x}{x+1}-2\le 0\Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1}\ge 0\Leftrightarrow x\le -2 \text{ или } x>-1$$

Учитывая условие $x\ne 0$, получим ответ.

Ответ: $(-\infty;-2]\cup(-1;0)\cup(0;+\infty)$.$\square$

Решение задачи 631. Введём новую неизвестную $t=x^2-5x+7$. Для неё неравенство примет вид:

$$\frac{1}{t}\le -t+2.$$

Это неравенство решим методом интервалов:

$$\frac{1}{t}+t-2\le 0\Leftrightarrow \frac{t^2-2t+1}{t}\le 0\Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t}\le 0\Leftrightarrow t<0 \text{ или } t=1$$

Вспоминая, что скрывалось на буквой t, получим совокупность из неравенства и уравнения

$$x^2-5x+7<0 \qquad x^2-5x+7=1$$

Неравенство имеет пустое множество решений ($D = 25 - 28 = -3 < 0$), а уравнение имеет два корня $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Ответ: $\{2; 3\}$. □

Решение задачи 655. Из условия задачи следует, что $\frac{x}{12-x} \geq 0$, т.е. $0 \leq x < 12$.

При $x \in [0; 12)$ выражение $x - 12$ (которое стоит под знаком модуля) отрицательно, а знаменатель дроби в правой части исходного неравенства положителен. Поэтому наше неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 0 \leq x < 12, \\ (12 - x)^2 \leq x. \end{cases}$$

Второе неравенство этой системы сводится к неравенству $x^2 - 25x + 144 \leq 0$, множество решений которого – отрезок $[9; 16]$. Учитывая первое неравенство системы, мы получаем ответ задачи.

Ответ: $[9; 12)$.□

Решение задачи 660. *Неравенства* с модулями часто можно привести к одному из двух стандартных видов: $|a| \leq b$, $|a| \geq b$ (или аналогичным строгим неравенствам $|a| < b$, $|a| > b$). В этих неравенствах от модуля можно избавиться не анализируя знак выражения a (или b). Именно, справедливы следующие утверждения:

- неравенство $|a| \leq b$ равносильно двойному неравенству $-b \leq a \leq b$ (или, что то же самое, системе из двух обычных неравенств $a \leq b$ и $a \geq -b$);

- неравенство $|a| \geq b$ равносильно совокупности из двух неравенств $a \geq b$, $a \leq -b$.

Аналогичные утверждения справедливы и для строгих неравенств.

Применяя первое преобразование, можно заменить исходное неравенство с модулем двойным неравенством

$$-x \leq x - 1 \leq x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 1 \\ -1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x \geq \frac{1}{2}$. □

Решение задачи 675. Чтобы избавиться от модулей, возведём неравенство в квадрат

$$(2x^2 - 7x - 1)^2 \geq (2x^2 - 9x + 5)^2. \tag{11.43}$$

Поскольку обе части неравенства неотрицательны, это преобразование законно. Более того, оно равносильно.

После раскрытия скобок и приведения подобных мы получим неравенство третьей степени:

$$x^3 - 7x^2 + 13x - 3 \geq 0.$$

Чтобы его решить, разложим левую часть на множители с помощью теоремы Безу (см. решение задачи 194):

$$(x-3)(x^2-4x+1) \ge 0. \tag{11.44}$$

Дальнейшее разложение квадратного трёхчлена x^2-4x+1 приводит неравенство к стандартному виду, пригодному для применения метода интервалов:

$$(x-3)(x-x_1)(x-x_2) \ge 0,$$

где $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Поскольку $x_2 < 3 < x_1$, множество решений неравенства состоит из двух промежутков: $[2-\sqrt{3}; 3]$, $[2+\sqrt{3}; +\infty)$. Число $2-\sqrt{3}$ лежит на интервале $(0; 1)$. Поэтому $x = 1$ будет наименьшим целым решением неравенства.

Неравенство (11.43) можно было бы решить немного проще. Именно, его внешний вид показывает, что это неравенство высокой степени, и поэтому для его решения нужно будет применять метод интервалов, что в свою очередь, сведётся к разложению на множители. Если перенести (не раскрывая скобки) все члены в левую часть, то можно будет применить тождество сокращенного умножения $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, что сразу даст соотношение (11.44).

Ответ: $x = 1$. □

Решение задачи 676. Умножая обе части неравенства

$$\left|2-\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2}\right| \ge \left|2-\frac{9}{x}+\frac{5}{x^2}\right| \tag{11.45}$$

на x^2, мы получим неравенство

$$|2x^2-7x-1| \ge |2x^2-9x+5|, \tag{11.46}$$

которое предлагалось в задаче 675.

Поскольку $x = 0$ не является решением неравенства (11.46), неравенства (11.45) и (11.46) – равносильны. Таким образом, наша задача сводится к задаче 675.

Ответ: $x = 1$. □

Решение задачи 677. Введём новые переменные $a = 1-x^2$, $b = x^2 - 3x+2$. Тогда $a+b = -3x+3 = -3(x-1)$, так что исходное неравенство примет вид:

$$||a|-|b|| \ge |a+b| \Leftrightarrow (|a|-|b|)^2 \ge (a+b)^2 \Leftrightarrow ab \le -|ab|.$$

Поэтому $ab \le 0$. Обратно, если $ab \le 0$, то $|ab| = -ab$, так что неравенство $ab \le -|ab|$ выполнено (в виде равенства). Таким образом, исходное неравенство равносильно неравенству

$$ab \le 0 \Leftrightarrow (1-x^2)(x^2-3x+2) \le 0,$$

которое мгновенно решается методом интервалов.

Ответ: $(-\infty;-1]\cup\{1\}\cup[2;\infty)$. $\square$

Решение задачи 682. Как мы отмечали, любую задачу с функциями $\min(a,b)$ и $\max(a,b)$ можно решать, избавляясь (по аналогии с модулями) от этих функций по случаям. Например, неравенство $\min(a,b)>c$ равносильно совокупности из двух систем

$$\begin{cases} a\ge b \\ b>c \end{cases} \qquad \begin{cases} a<b \\ a>c \end{cases}$$

Однако, как и для модулей, *неравенства* с функциями $\min(a,b)$ и $\max(a,b)$ можно решать гораздо проще, не анализируя, какое из выражений a и b больше, а какое – меньше. Именно, неравенство $\min(a,b)>c$ равносильно системе

$$\begin{cases} a>c, \\ b>c. \end{cases}$$

В нашем случае это означает, что исходная задача сводится к системе

$$\begin{cases} 1-x^2>\frac{1}{2}, \\ \frac{1-x}{2}>\frac{1}{2}, \end{cases}$$

которая легко решается.

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<0$. $\square$

Решение задачи 687. Поскольку для любых чисел x, y верно тождество:

$$\max(x,y)=\frac{x+y+|x-y|}{2}, \tag{11.47}$$

а $\max(2x,2y)=2\max(x,y)$, формулу, которая задает функцию $f(a,b,c)$ можно привести к виду:

$$f(a,b,c)=(\max(2a,2b)+2c)+|\max(2a,2b)-2c|\,.$$

Применяя соотношение (11.47) ещё раз (для $x=\max(2a,2b)$, $y=2c$), мы получим:

$$f(a,b,c)=\max(2\max(2a,2b),4c)=\max(\max(4a,4b),4c)=\max(4a,4b,4c).$$

Поскольку наибольшее из нескольких чисел не зависит от порядка, в котором записаны эти числа, уравнение

$$f(x,y,z)+|f(z,y,x)|=0$$

примет вид:

$$|\max(4x,4y,4z)|=-\max(4x,4y,4z)\Leftrightarrow\max(4x,4y,4z)\le 0\Leftrightarrow x,y,z\le 0.$$

Ответ: $x,y,z\le 0$. $\square$

Решение задачи 697. Перейдём к одному основанию 7 и выполним действия над показательными выражениями:

$$\left(7^{1/3}\right)^{35x}>7^{-1}\cdot 7^{|4x^2-12x-1|}\Leftrightarrow(7)^{\frac{35x}{3}}>7^{-1+|4x^2-12x-1|}$$

Поскольку основание больше 1, последнее неравенство равносильно неравенству

$$\frac{35x}{3} > -1 + |4x^2 - 12x - 1| \Leftrightarrow |12x^2 - 36x - 3| < 35x + 3.$$

Раскрывая модуль, мы получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} 12x^2 - 36x - 3 < 35x + 3 \\ 12x^2 - 36x - 3 > -35x - 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 12x^2 - 71x - 6 < 0 \\ 12x^2 - x > 0 \end{array} \right.$$

Множество решений первого неравенства – интервал $-\frac{1}{12} < x < 6$. Множество решений второго неравенства – объединение двух промежутков: $x < 0$, $x > \frac{1}{12}$. Пересекая эти множества, мы получим ответ.

Ответ: $-\frac{1}{12} < x < 0$, $\frac{1}{12} < x < 6$.□

Решение задачи 707. *1 способ (метод расщепления).* Дробь $\frac{a}{b}$ меньше или равна 0 тогда и только тогда, когда числитель больше или равен 0, а знаменатель меньше 0, или когда числитель меньше или равен 0, а знаменатель больше 0. Поэтому исходное неравенство распадается на две системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3^x - 2 \geq 0, \\ x^2 - 6x + 5 < 0, \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} 3^x - 2 \leq 0, \\ x^2 - 6x + 5 > 0. \end{array} \right.$$

Множество решений первого неравенства первой системы – луч $[\log_3 2; +\infty)$, множество решений второго неравенства первой системы – интервал $(1; 5)$. Поскольку $\log_3 2 < 1$, пересечение этих множеств – это интервал $(1; 5)$.

Аналогично, множество решений второй системы – луч $(-\infty; \log_3 2]$. Объединяя множества решений первой и второй систем, мы получаем ответ задачи.

2 способ (метод интервалов). Этот способ базируется на следующем простом утверждении

если основание $a > 1$, то выражение $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ положительно, равно 0 или отрицательно тогда и только тогда, когда выражение $f(x) - g(x)$ положительно, равно 0 или отрицательно.

Иначе говоря,

если основание $a > 1$, то знаки выражений $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ и $f(x) - g(x)$ совпадают.

Поскольку для решения исходного неравенства важны знаки числителя и знаменателя, а не их точные значения, множество его решений не изменится, если числитель $3^x - 2 \equiv 3^x - 3^{\log_3 2}$ заменить на $x - \log_3 2$. Иначе говоря, можно решать неравенство

$$\frac{x - \log_3 2}{x^2 - 6x + 5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x - \log_3 2}{(x-1)(x-5)} \leq 0.$$

Последнее неравенство является дробно-рациональным и легко решается стандартным методом интервалов.

Ответ: $x \leq \log_3 2$; $1 < x < 5$. □

Решение задачи 743. Поскольку над показательными блоками производятся “плохие” действия (сложение), которые нельзя выполнить, неравенство, видимо, нужно будет решать с помощью метода новой неизвестной. Имея это в виду, преобразуем неравенство так, чтобы выделить повторяющиеся блоки. Как обычно, начнём с перехода к одному основанию:

$$3^{x^2+4x+4}+\frac{1}{27}\leq 3^{x^2-3}+3^{4x+4}\Leftrightarrow 3^{x^2}\cdot 3^{4x+4}+\frac{1}{27}\leq\frac{1}{27}\cdot 3^{x^2}+3^{4x+4}$$

Введём новые переменные $a=3^{x^2}$, $b=3^{4x+4}$. Для них получим неравенство:

$$ab+\frac{1}{27}\leq\frac{1}{27}a+b,$$

структура которого проще, чем у исходного неравенства. Вид этого неравенства подсказывает, что следует перенести все члены в одну часть и разложить её на множители методом группировки:

$$ab+\frac{1}{27}-\frac{1}{27}a-b\leq 0\Leftrightarrow b(a-1)-\frac{1}{27}(a-1)\leq 0\Leftrightarrow\left(b-\frac{1}{27}\right)(a-1)\leq 0$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, получим:

$$\left(3^{4x+4}-\frac{1}{27}\right)\cdot\left(3^{x^2}-1\right)\leq 0. \qquad (11.48)$$

Это неравенство можно решать методом расщепления, но гораздо проще использовать метод, описанный в решении задачи 707. Так как $\frac{1}{27}=3^{-3}$, $1=3^0$, неравенство (11.48) равносильно неравенству

$$(4x+4-(-3))\cdot(x^2-0)\leq 0\Leftrightarrow\left(x+\frac{7}{4}\right)\cdot x^2\leq 0,$$

которое легко решается стандартным методом интервалов.

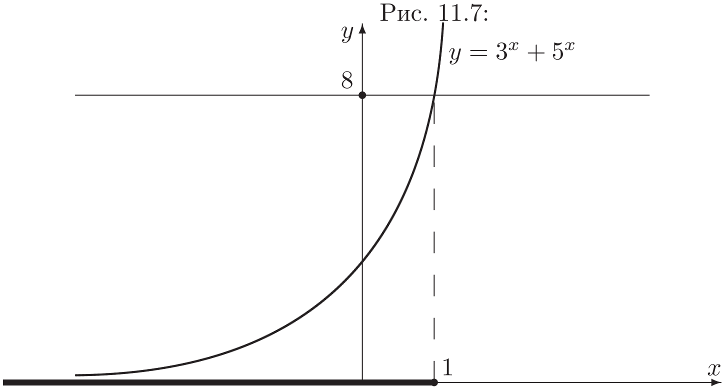
Ответ: $x\leq-\frac{7}{4}$; $x=0$. □

Решение задачи 752. Функция $y=3^x+5^x$ является суммой двух возрастающих функций $y=3^x$ и $y=5^x$. Поэтому при изменении переменной x от $-\infty$ до $+\infty$ функция $y=3^x+5^x$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$. Уровень 8 она пересекает в единственной точке с абсциссой $x=1$ и находится ниже этого уровня при $x<1$ (см. рис. 11.7) .

Ответ: $x\leq 1$. □

Решение задачи 755. Перейдём в логарифмах к одному основанию 2

Рис. 11.7:



и выполним действия над логарифмами:

$$\frac{1}{5}\log_2(x^2+3x+2)^5+\log_2(x^2-3x+2)<2$$
$$\Updownarrow$$
$$\log_2(x^2+3x+2)+\log_2(x^2-3x+2)<\log_2 4$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases}\log_2\big((x^2+3x+2)\cdot(x^2-3x+2)\big)<\log_2 4\\ x^2+3x+2>0\end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases}(x^2+3x+2)\cdot(x^2-3x+2)<4\\ x^2+3x+2>0\\ x^2-3x+2>0\end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases}x^4-5x^2<0\\ x^2+3x+2>0\\ x^2-3x+2>0\end{cases}$$

Каждое неравенство в последней системе легко решается методом интервалов.

Ответ: $(-\sqrt{5};-2)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(2;\sqrt{5})$.□

Решение задачи 793. *1 способ (метод расщепления).* Превратим число 2 в правой части неравенства в логарифм по основанию x:

$$\log_x(x+2)\leq\log_x x^2.$$

Чтобы избавиться от логарифмов, нужно знать, основание больше или меньше 1. Поэтому мы рассмотрим два случая, $x>1$ и $0<x<1$. В первом случае можно просто “закрыть” логарифмы в обеих частях, а во втором – дополнительно нужно изменить знак неравенства на противоположный. Это означает, что исходное неравенство распадается на две системы (обратим внимание на то, что в нашем примере в каждой системе первое неравенство гарантирует положительность обеих частей второго неравенства, так что это преобразование равносильно):

$$\begin{cases} x > 1, \\ x + 2 \le x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x + 2 \ge x^2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ x^2 - x - 2 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2 - x - 2 \le 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ x \le -1,\ x \ge 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < x < 1, \\ -1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x \ge 2 \qquad\qquad\qquad 0 < x < 1.$$

Для произвольного неравенства $\log_a f \le \log_a g$ аналогичные рассуждения приводят к совокупности систем:

$$\begin{cases} a > 1, \\ f \le g, \\ f > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f \ge g, \\ g > 0 \end{cases}$$

2 способ (метод интервалов). Этот способ базируется на следующем простом утверждении

если основание $a > 1$, то выражение $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ положительно, равно 0 или отрицательно тогда и только тогда, когда выражение $f(x) - g(x)$ положительно, равно 0 или отрицательно, и $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ (так что логарифмы $\log_a f(x)$, $\log_a g(x)$ существуют).

Иначе говоря,

если основание $a > 1$, то на множестве $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ знаки выражений $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ и $f(x) - g(x)$ совпадают.

Чтобы применить это утверждение, перейдём в логарифмах к одному основанию, скажем, 10:

$$\frac{\lg(x+2)}{\lg x} \le 2 \Leftrightarrow \frac{\lg(x+2) - 2\lg x}{\lg x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{\lg(x+2) - \lg x^2}{\lg x - \lg 1} \le 0.$$

Поскольку для решения последнего неравенства важны знаки числителя и знаменателя, а не их точные значения, множество его решений не изменится, если числитель заменить на $(x+2) - x^2$, а знаменатель – на $x - 1$, и, кроме того, учесть условия существования логарифмов: $x + 2 > 0$, $x > 0$. Иначе говоря, можно решать систему неравенств

$$\begin{cases} x + 2 > 0, \\ x > 0, \\ \frac{x+2-x^2}{x-1} \le 0. \end{cases}$$

Неравенство $\frac{x+2-x^2}{x-1} \le 0$ легко решается методом интервалов:

$$\frac{x^2 - x - 2}{x - 1} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{x-1} \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x < 1 \text{ или } x \ge 2.$$

Пересекая множество его решений с множеством решений системы неравенств $x > 0$, $x + 2 > 0$, мы получаем ответ задачи.

Ответ: $(0; 1) \cup [2; +\infty)$. $\square$

Решение задачи 859. Перейдём в логарифмах к одному основанию 2 и разобьём все логарифмы до $\log_2 x$:

$$6\frac{\log_2 x}{\log_2(2x)} + 2\frac{\log_2(2x)}{\log_2(4\sqrt{x})} \geq 1 \Leftrightarrow 6\frac{\log_2 x}{1+\log_2 x} + 2\frac{1+\log_2 x}{2+\frac{1}{2}\log_2 x} \geq 1.$$

Для новой неизвестной $t = \log_2 x$ это неравенство примет вид:

$$\frac{6t}{1+t} + \frac{4(1+t)}{4+t} \geq 1.$$

Применяя метод интервалов, получим:

$$t < -4 \text{ или } -3 \leq t < -1 \text{ или } t \geq 0.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, получим совокупность из трёх неравенств

$$\begin{array}{ccc} \log_2 x < -4 & -3 \leq \log_2 x < -1 & \log_2 x \geq 0 \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\ 0 < x < \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \leq x < \frac{1}{2} & x \geq 1 \end{array}$$

Ответ: $0 < x < \frac{1}{16}$, $\frac{1}{8} \leq x < \frac{1}{2}$, $x \geq 1$.$\square$

Решение задачи 896. Отметим разнородность частей неравенства (в левой стоит логарифмическое выражение, а в правой – линейное). Подобные неравенства обычно решаются графически или методом оценок. Поскольку функции в левой и правой частях довольно простые, мы будем использовать графический метод. При этом, чтобы ещё больше упростить задачу построения графиков, введём новую неизвестную $t = 2 - 3x$. Поскольку $x = \frac{2-t}{3}$, для новой неизвестной неравенство примет вид

$$\log_2 t > \frac{11-4t}{3}. \tag{11.49}$$

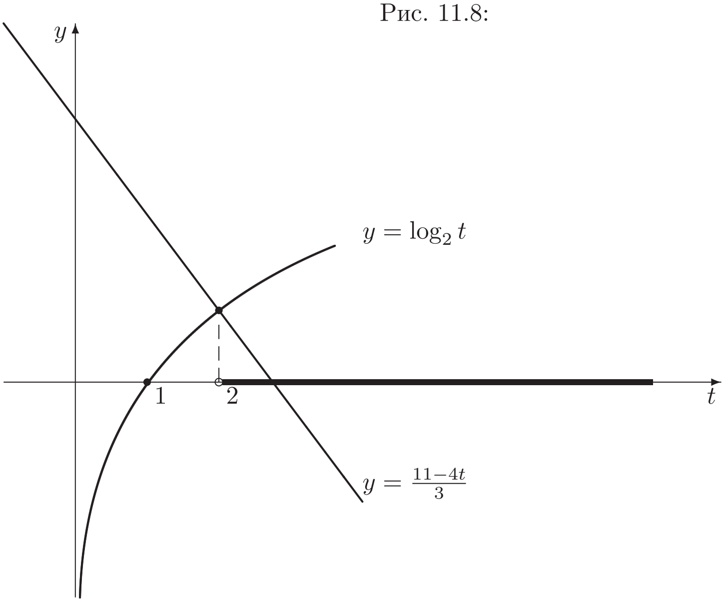
Графики обеих частей этого неравенства изображены на рис. 11.8. Поскольку функция $y = \log_2 t$ – возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, а функция $y = \frac{11-4t}{3}$ – убывает от $+\infty$ до $-\infty$, их графики пересекаются только в одной точке. Нетрудно сообразить, что абсцисса точки пересечения равна 2. Из рисунка ясно, что решение неравенства (11.48) имеет вид: $t > 2$. Возвращаясь к основной неизвестной x, получим: $2 - 3x > 2$, откуда $x < 0$.

Ответ: $x < 0$.$\square$

Решение задачи 899. Поскольку $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$ в задаче четыре раза повторяется один и тот же блок $\log_2 x$. Имея это в виду, введём новую неизвестную $t = \log_2 x$. Для неё неравенство примет вид:

$$5^{\frac{1}{t}} \cdot t + 5^t \cdot \frac{1}{t} \leq 10. \tag{11.50}$$

Рис. 11.8:



Теперь обратим внимание на наличие взаимно обратных чисел t и $\frac{1}{t}$. Это наводит на мысль оценить левую часть неравенства (11.50) с помощью неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Но сделать это можно только, если соответствующие числа – положительны. Поэтому рассмотрим два случая.

1 случай: $t > 0$. Применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, мы получим следующую оценку левой части неравенства (11.50) :

$$5^{\frac{1}{t}} \cdot t + 5^t \cdot \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{5^{\frac{1}{t}} \cdot t \cdot 5^t \cdot \frac{1}{t}} = 2\sqrt{5^{t+\frac{1}{t}}} = 2 \cdot 5^{\frac{t+\frac{1}{t}}{2}} \geq 2 \cdot 5^1 = 10.$$

При этом, если хотя бы в одном из двух использованных неравенств о среднем арифметическом и среднем геометрическом стоял знак $>$, а не $\geq$, то левая часть неравенства (11.50) будет строго больше 10. Поэтому в случае $t > 0$ неравенство (11.50) может выполняться тогда и только тогда, когда в двух использованных неравенствах о среднем арифметическом и среднем геометрическом стоит знак $=$, что, в свою очередь, равносильно тому, что

$$\begin{cases} 5^{\frac{1}{t}} \cdot t = 5^t \cdot \frac{1}{t} \\ t = \frac{1}{t} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

(можно решить второе уравнение с учетом условия $t > 0$ и проверить, что найденное значение $t = 1$ удовлетворяет первому уравнению).

2 случай: $t < 0$. В этом случае левая часть неравенства (11.50) отрицательна, так что это неравенство заведомо выполнено при всех $t < 0$.

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим, что исходное неравенство распадается на уравнение $\log_2 x = 1$ и неравенство $\log_2 x < 0$, которые решаются без труда:

$$\begin{array}{cc} \log_2 x = 1 & \log_2 x < 0 \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ x = 2 & 0 < x < 1 \end{array}$$

Ответ: $x = 2$, $0 < x < 1$. $\square$

Решение задачи 910. Данное неравенство

$$\sqrt{8 + 2x - x^2} \leq 2x + 1 \tag{11.51}$$

имеет вид

$$\sqrt{a} \leq b \tag{11.52}$$

К этому типу относятся и многие другие экзаменационные задачи. Поэтому сейчас мы опишем общую схему их решения.

Обе части неравенства (11.52) неотрицательны: левая часть неотрицательна как арифметический квадратный корень, а правая часть неотрицательна, т.к. она больше или равна левой части, которая неотрицательна. Поэтому неравенство (11.52) можно возвести в квадрат, что позволит избавиться от радикала:

$$a \leq b^2. \tag{11.53}$$

Займёмся теперь равносильностью этого преобразования.

Для того, чтобы из неравенства (11.53) получить неравенство (11.52), необходимо извлечь из обеих частей неравенства (11.53) арифметический квадратный корень. Сделать это можно только, если обе части неотрицательны. Правая часть (т.е b^2) неотрицательна как полный квадрат, в то время как левая часть (т.е. a) меньше, чем b^2 и поэтому может быть отрицательной. Поэтому добавим к неравенству (11.53) условие

$$a \geq 0. \tag{11.54}$$

Система неравенств (11.53)-(11.54) влечёт, что

$$\sqrt{a} \leq \sqrt{b^2} \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq |b|.$$

Чтобы из последнего неравенства получить исходное неравенство (11.52), нужно заменить $|b|$ на b. Это можно сделать только в случае

$$b \geq 0. \tag{11.55}$$

Таким образом, система неравенств (11.53)-(11.55) влечёт неравенство (11.52).

Добавление условий $a \geq 0$ и $b \geq 0$ требует повторного анализа прямого шага преобразования. Дело в том, что эти условие мы брали "с потолка", лишь бы можно было сделать обратный переход от (11.53) к (11.52). Теперь нужно проверить, что они на самом деле вытекают из (11.52):

1. условие $a \geq 0$ следует из того факта, что a стоит под знаком арифметического квадратного корня;

2. условие $b \geq 0$, как мы уже отмечали, является следствием неравенств $b \geq \sqrt{a}$, $\sqrt{a} \geq 0$.

Итак, справедлива теорема:

$$\sqrt{a} \leq b \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \leq b^2, \\ a \geq 0, \\ b \geq 0. \end{array} \right. \tag{11.56}$$

Строгое неравенство $\sqrt{a} < b$ равносильно аналогичной системе с заменой нестрогого неравенства $a \leq b^2$ на строгое неравенство $a < b^2$.

Применяя стандартное равносильное преобразование (11.56) к исходному неравенству (11.51), мы получим:

$$\sqrt{8+2x-x^2} \leq 2x+1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 8+2x-x^2 \leq (2x+1)^2, \\ 8+2x-x^2 \geq 0, \\ 2x+1 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x^2+2x-7 \geq 0, \\ x^2-2x-8 \leq 0, \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Множество решений первого неравенства последней системы состоит из двух промежутков: $x \leq -\frac{7}{5}$, $x \geq 1$; множество решений второго неравенства – отрезок $-2 \leq x \leq 4$; множество решений третьего неравенства – луч $x \geq -\frac{1}{2}$. Пересекая эти множества, мы получим ответ.

Ответ: $[1; 4]$. □

Решение задачи 914. Данное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{x^2-2x} > x-1, \tag{11.57}$$

которое имеет вид

$$\sqrt{a} > b \tag{11.58}$$

К этому типу относятся и многие другие экзаменационные задачи. Поэтому сейчас мы опишем общую схему их решения.

Прежде всего отметим, что неравенство (11.58) принципиально отличается от неравенства (11.52) тем, что нельзя гарантировать неотрицательность правой части. Соответственно, его нельзя сразу возводить в квадрат.

Для того, чтобы избавиться от радикала, мы рассмотрим два логически возможных случая: $b \geq 0$ и $b < 0$.

В первом случае обе части неравенства (11.58) неотрицательны и поэтому его можно почленно возвести в квадрат:

$$a > b^2. \tag{11.59}$$

Для того, чтобы из неравенства (11.59) получить неравенство (11.58), необходимо извлечь из обеих частей неравенства (11.59) (арифметический) квадратный корень. В данном случае это можно сделать, т.к. обе части неотрицательны. Правая часть (т.е b^2) неотрицательна как полный квадрат, в то время как левая часть (т.е. a) больше, чем b^2 и поэтому тем более неотрицательна. После извлечения корня мы получим неравенство $\sqrt{a} > |b|$. Условие $b \geq 0$ (которое обеспечивало законность возведения в квадрат при прямом шаге) на обратном шаге позволяет заменить $|b|$ на b и вернуться к исходному неравенству (11.58).

Во втором случае, когда $b < 0$, возводить неравенство (11.58) в квадрат нельзя, но в этом и нет необходимости, т.к. оно верно всегда, *если только* левая часть существует, т.е. $a \geq 0$.

Итак, справедлива теорема:

$$\begin{gathered} \sqrt{a} > b \\ \Updownarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} b \geq 0 \\ a > b^2 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} b < 0 \\ a \geq 0 \end{array} \right. \end{gathered} \tag{11.60}$$

Нестрогое неравенство $\sqrt{a} \geq b$ равносильно аналогичной совокупности двух систем с заменой строгого неравенства $a > b^2$ в первой системе на нестрогое неравенство $a \geq b^2$.

Преобразования (11.56) и (11.60) являются стандартными при решении неравенств с радикалами по двум причинам:

1. многие неравенства имеют такой вид;

2. рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при доказательстве утверждений (11.56) и (11.60), позволяют проанализировать и более сложные ситуации (которые не сводятся к этим стандартным схемам).

Применяя стандартное равносильное преобразование (11.60) к исходному неравенству (11.57), мы получим совокупность из двух систем:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 2x > (x-1)^2 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x - 1 < 0 \\ x^2 - 2x \geq 0 \end{array} \right.$$

Первая из них не имеет решений, а множество решений второй – луч $x \leq 0$.

Ответ: $x \leq 0$.□

Решение задачи 957. Поскольку неизвестная x входит в неравенство только в составе повторяющегося блока $\sqrt{2-x}$, введём новую неизвестную $t = \sqrt{2-x}$. Для неё неравенство примет вид:

$$3 \cdot 4^t + 3 < 10 \cdot 2^t.$$

В этом показательном неравенстве над показательным блоком в левой части производится “плохое” действие – сложение. Поэтому его нужно решать с помощью новой неизвестной $u = 2^t$ (можно было бы сразу ввести новую неизвестную $u = 2^{\sqrt{2-x}}$ в исходном неравенстве), что приведёт к квадратичному неравенству

$$3u^2 - 10u + 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < u < 3.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, получим двойное неравенство

$$\frac{1}{3} < 2^{\sqrt{2-x}} < 3 \Leftrightarrow -\log_2 3 < \sqrt{2-x} < \log_2 3$$

Поскольку число $-\log_2 3$ – отрицательно, последнее двойное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{2-x} < \log_2 3$. Решая его стандартным приёмом (см. решение задачи 910), мы получим ответ.

Ответ: $\left(2-\log_2^2 3; 2\right]$. $\square$

Решение задачи 966. Под знаком радикала в левой части стоит линейное выражение. Поэтому от радикала можно избавиться, обозначив его новой буквой: $t = \sqrt{x-1}$. При этом основная неизвестная x может быть выражена через новую: $x = x-1+1 = (\sqrt{x-1})^2+1 = t^2+1$ (как мы уже отмечали, обычно это делают более формально, возводя в квадрат равенство $t = \sqrt{x-1}$). Для новой неизвестной неравенство примет вид:

$$t^2+t-2<0 \Leftrightarrow -2<t<1.$$

Возвращаясь к основной неизвестной, получим:

$$-2<\sqrt{x-1}<1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}<1 \Leftrightarrow 0 \le x-1 < 1 \Leftrightarrow 1 \le x < 2.$$

Отметим, что это неравенство можно решить и с помощью стандартного равносильного преобразования (11.56):

$$\sqrt{x-1} < 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+10>0 \\ x \ge 1 \\ x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x < 2.$$

Ответ: $[1; 2)$. $\square$

Решение задачи 967. Введём новую неизвестную $t = \sqrt{x+4}$. Это позволит сразу же избавиться от радикала:

$$t^2-t-2<0 \Leftrightarrow -1<t<2$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, получим:

$$-1<\sqrt{x+4}<2 \Leftrightarrow \sqrt{x+4}<2 \Leftrightarrow 0 \le x+4 < 4 \Leftrightarrow -4 \le x < 0$$

Отметим, что наше неравенство можно решать и возведением в квадрат, применяя стандартное преобразование (11.60).

Ответ: $[-4; 0)$. $\square$

Решение задачи 976. Поскольку под внутренним радикалом стоит линейное выражение, от него можно избавиться, обозначив его новой буквой. Так как $\sqrt{48x-144} = 4\sqrt{3x-9}$, в качестве новой переменной возьмем $t = \sqrt{3x-9}$. Тогда $x = \frac{t^2+9}{3}$ и исходное неравенство примет вид:

$$\frac{11\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{t^2-6t+9} > t^2-9 \Leftrightarrow \frac{11\sqrt{3}}{\sqrt{2}}|t-3| > (t-3)(t+3).$$

Имея в виду сокращение на общий множитель $(t-3)$, раскроем модуль в левой части неравенства рассмотрев три случая, $t-3>0$, $t-3<0$, $t-3=0$:

$$\begin{array}{ccc}
\left\{\begin{array}{l} t-3>0, \\ \frac{11\sqrt{3}}{\sqrt{2}}>t+3 \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} t-3<0, \\ -\frac{11\sqrt{3}}{\sqrt{2}}<t+3 \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} t-3=0, \\ 0>0 \end{array}\right. \\
\Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\
3<t<\frac{11\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-3 & -3-\frac{11\sqrt{3}}{\sqrt{2}}<t<3 & \emptyset
\end{array}$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим совокупность из двух двойных неравенств:

$$3<\sqrt{3x-9}<\frac{11\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-3 \qquad -3-\frac{11\sqrt{3}}{\sqrt{2}}<\sqrt{3x-9}<3$$

Множество решений первого из них – промежуток $6<x<\frac{133-22\sqrt{6}}{2}$, а второго – промежуток $3\leq x<6$.

Ответ: $3\leq x<6$, $6<x<\frac{133-22\sqrt{6}}{2}$. $\square$

Решение задачи 1001. Поскольку выражение $2x-3$ стоит под знаком арифметического корня, можно гарантировать, что оно неотрицательно. Это позволяет избавиться от модуля в знаменателе:

$$\frac{x^3-27+9x(3-x)}{2x-3}\leq\sqrt{2x-3}. \tag{11.61}$$

Так как в этом уравнении остался $\sqrt{2x-3}$, из (11.61) следует, что $2x-3\geq 0$ и поэтому $2x-3=|3-2x|$. Поэтому полученное уравнение равносильно исходному.

Далее, обращая внимание на присутствие выражения $x^3-27=x^3-3^3$ в числителе дроби в левой части (11.61), разложим этот числитель на множители:

$$\frac{(x-3)^3}{2x-3}\leq\sqrt{2x-3}.$$

Как мы отмечали, из этого уравнения следует, что $2x-3\geq 0$; более того, поскольку $2x-3$ стоит в знаменателе, можно гарантировать, что $2x-3>0$. Поэтому мы можем избавиться от знаменателя. Для равносильности этого преобразования необходимо сохранить условие $2x-3>0$:

$$\left\{\begin{array}{l} (x-3)^3\leq\left(\sqrt{2x-3}\right)^3 \\ 2x-3>0 \end{array}\right.$$

Первое неравенство этой системы извлечением кубических корней из обеих частей приводится к виду: $x-3\leq\sqrt{2x-3}$. Решая его стандартным способом, мы получим: $\frac{3}{2}\leq x\leq 6$. Учитывая второе неравенство системы, получаем ответ.

Ответ: $\left(\frac{3}{2};6\right]$.$\square$

Решение задачи 1006.

1 способ. Введём новую неизвестную $y=\sqrt{2(3-x)}$. Тогда $x=3-\frac{y^2}{2}$, так что исходное неравенство примет вид: $y^4-12y^2-8y+12\leq 0$. Многочлен в левой части не имеет рациональных корней, однако метод неопределённых коэффициентов позволяет разложить его на два на квадратичных множителя: $t^2 + 2t - 2$ и $t^2 - 2t - 6$. Раскладывая квадратичные множители на линейные, мы можем применить метод интервалов, что даст: $-1 - \sqrt{3} \le y \le 1 - \sqrt{7}$, $-1 + \sqrt{3} \le y \le 1 + \sqrt{7}$. Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим два двойных неравенства: $-1 - \sqrt{3} \le \sqrt{2(3 - x)} \le 1 - \sqrt{7}$, $-1 + \sqrt{3} \le \sqrt{2(3 - x)} \le 1 + \sqrt{7}$. Поскольку числа $-1 - \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{7}$ – отрицательны, первое из них не имеет решений. Второе легко решается почленным возведением в квадрат.

Главная сложность этого решения связана с методом неопределённых коэффициентов. Обойти её можно, если сопоставить соотношение $x = 3 - \frac{y^2}{2}$ и левую часть исходного неравенства, т.е. $\frac{x^2}{2} - 3$, – функции, задаваемые этими формулами, отличаются лишь знаками. Это обстоятельство открывает возможность более формального решения.

2 способ. Пусть, как и в первом способе решения, $y = \sqrt{2(3 - x)}$. Рассмотрим систему

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \sqrt{2(3 - x)} \\ \frac{x^2}{2} - 3 \le y \end{array} \right. \qquad (11.62)$$

Эта система равносильна исходному неравенству в том смысле, что её решение методом исключения непосредственно сводится к решению исходного неравенства. Поэтому каждому решению x исходного неравенства соответствует решение этой системы вида $(x; \sqrt{2(3 - x)})$, причём это соответствие между множеством решений исходного неравенства и множеством решений системы (11.62) является взаимно однозначным.

Возведём первое уравнение системы (11.62) в квадрат и выразим из него x через y:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 - \frac{y^2}{2} \\ y \ge 0 \\ \frac{x^2}{2} - 3 \le y \end{array} \right.$$

Вычтем из обеих частей третьего неравенства этой системы первое уравнение системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 - \frac{y^2}{2} \\ y \ge 0 \\ \frac{x^2}{2} - x \le y + \frac{y^2}{2} \end{array} \right. \qquad (11.63)$$

Это преобразование, очевидно, равносильно. Третье неравенство системы (11.63) можно привести к виду

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - x - y \le 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) - 2(x + y) \le 0 \Leftrightarrow (x - y - 2)(x + y) \le 0.$$

Поскольку $y \ge 0$, оно равносильно двойному неравенству $-y \le x \le y + 2$.

Это позволяет переписать систему (11.63) в виде:

$$\begin{cases} x = 3 - \frac{y^2}{2} \\ y \geq 0 \\ x \leq y + 2 \\ x \geq -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - \frac{y^2}{2} \\ y \geq 0 \\ 3 - \frac{y^2}{2} \leq y + 2 \\ 3 - \frac{y^2}{2} \geq -y \end{cases}$$

Система из трех последних неравенств является содержит только одну неизвестную y и ее легко решить:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + 2y - 2 \geq 0 \\ y^2 - 2y - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 + \sqrt{3} \leq y \leq 1 + \sqrt{7}$$

Теперь основная система примет вид:

$$\begin{cases} x = 3 - \frac{y^2}{2} \\ -1 + \sqrt{3} \leq y \leq 1 + \sqrt{7} \end{cases}$$

На отрезке $-1 + \sqrt{3} \leq y \leq 1 + \sqrt{7}$ функция $x(y) = 3 - \frac{y^2}{2}$ монотонно убывает от значения $x(-1+\sqrt{3}) = 1+\sqrt{3}$ до значения $x(1+\sqrt{7}) = -1-\sqrt{7}$. Поскольку соответствие между x и y взаимно однозначное, в последней системе неравенство $-1 + \sqrt{3} \leq y \leq 1 + \sqrt{7}$ можно заменить неравенством $-1 - \sqrt{7} \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$. Итак, теперь основная система примет вид:

$$\begin{cases} x = 3 - \frac{y^2}{2} \\ -1 - \sqrt{7} \leq x \leq 1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Вспоминая отмеченную в начале решения связь между исходным неравенством и системой (11.62), мы получаем ответ задачи.

Ответ: $-1 - \sqrt{7} \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$. □

Решение задачи 1008. График функции $f(x) = \sqrt{4 - x} - 2$ (левая часть неравенства) может быть получен из стандартного графика $y = \sqrt{x}$ последовательным применением: осевой симметрии относительно оси ординат; сдвига на 4 вправо; сдвига на 2 вниз.

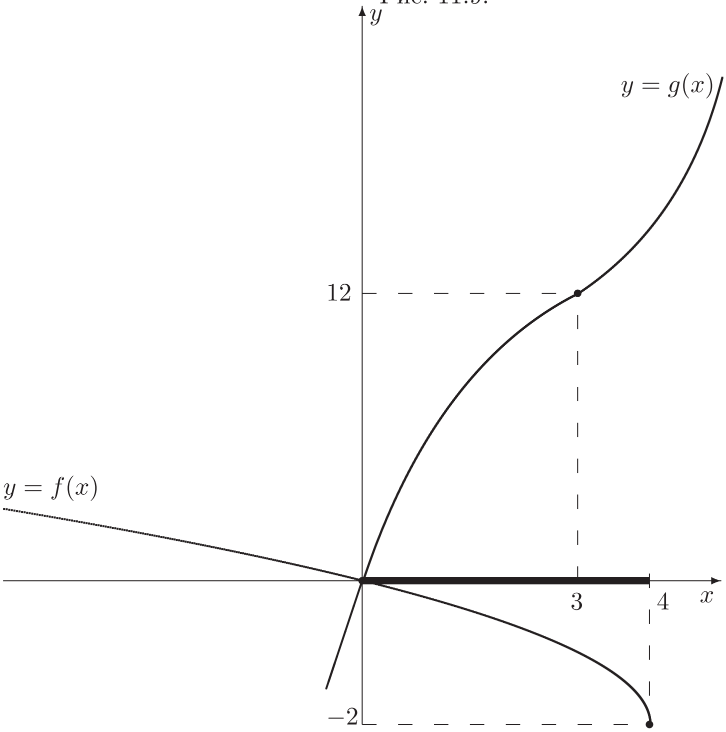
График функции $g(x) = x|x-3|+4x$ может быть построен стандартным раскрытием модуля: при $x \geq 3$ функция $g(x)$ совпадает с квадратичной функцией $y = x^2+x$, а при $x < 3$ – с квадратичной функцией $y = -x^2+7x$. Абсциссы вершин парабол $y = x^2 + x$ и $y = -x^2 + 7x$ равны $-\frac{1}{2} \notin [3; +\infty)$ и $\frac{7}{2} \notin (-\infty; 3]$ соответственно, так что график функции $g(x)$ “склеивается” из двух монотонно возрастающих кусков.

Оба графика изображены на рис.11.9. Из этого рисунка ясно, что решение неравенства – отрезок $[0; 4]$.

Ответ: $0 \leq x \leq 4$. □

Решение задачи 1012. Прежде всего найдём область определения неравенства. В нашем случае эта область является множеством решений

Рис. 11.9:



системы из двух линейных неравенств: $-x-2>2$ и $x+4>0$, т.е. интервалом $-4<x<-2$. Теперь избавимся от дробей: на множестве $-4<x<-2$ исходное неравенство равносильно более простому неравенству

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{-x-2} \leq \sqrt{(x+4)(-x-2)}+1.$$

Теперь отметим,что

$$\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{-x-2}\right)^2 = 2-2\sqrt{(x+4)(-x-2)}.$$

Поэтому, если ввести новую неизвестную $f=\sqrt{x+4}-\sqrt{-x-2}$, то наше неравенство примет вид:

$$f \leq \frac{2-f^2}{2}+1 \Leftrightarrow f^2+2f-4 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{5}-1 \leq f \leq \sqrt{5}-1.$$

Соответственно, исходное неравенство равносильно двойному неравенству:

$$-\sqrt{5}-1 \leq \sqrt{x+4}-\sqrt{-x-2} \leq \sqrt{5}-1. \tag{11.64}$$

Функция $f(x)=\sqrt{x+4}-\sqrt{-x-2}$, которая определена и непрерывна на отрезке $[-4;-2]$, является монотонно возрастающей (от $f(-4)=-\sqrt{2}$ до

$f(-2) = \sqrt{2}$) как сумма монотонно возрастающих функций $y = \sqrt{x+4}$ и $y = -\sqrt{-x-2}$. Поэтому для решения неравенства (11.64) мы применим графический метод.

Ясно, что $-\sqrt{5}-1 < -\sqrt{2}$. С другой стороны, $\sqrt{5}-1 \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Поэтому множество решений двойного неравенства (11.64) (на множестве $-4 < x < -2$) имеет вид: $-4 < x \le x_0$, где x_0 – корень уравнения

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{-x-2} = \sqrt{5} - 1.$$

Решая это уравнение стандартным возведением в квадрат, мы получим: $x_0 = -3 + 2\sqrt{\sqrt{5}-2}$.

Ответ: $-4 < x \le 2\sqrt{\sqrt{5}-2} - 3$. □

Решение задачи 1015. Запишем левую часть неравенства в виде

$$\sqrt{\frac{12}{x^2}} \cdot \sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} \cdot \sqrt{1}$$

и рассмотрим её как скалярное произведение векторов

$$\left(\sqrt{\frac{12}{x^2}}, \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}}\right), \ \left(\sqrt{x^2-1}, \sqrt{1}\right).$$

Длины этих векторов равны $\sqrt{\frac{12}{x^2} + x^2 - \frac{12}{x^2}} = |x|$ и $\sqrt{x^2-1+1} = |x|$ соответственно. Поэтому в силу неравенства Коши-Буняковского исходное неравенство верно при всех x, при которых оно определено. Иначе говоря, множество решений исходного неравенства совпадает с его областью определения, т.е. с множеством решений системы из двух неравенств: $12 - \frac{12}{x^2} \ge 0$ и $x^2 - \frac{12}{x^2} \ge 0$, откуда немедленно следует ответ.

Ответ: $x \ge \sqrt[4]{12}$ или $x \le -\sqrt[4]{12}$.□

Решение задачи 1019. Перепишем неравенство в виде

$$\left|2 - \sqrt{x+3}\right| + |x+1| \le \left(2 - \sqrt{x+3}\right) + (x+1)$$

и введём новые переменные

$$a_1 = 2 - \sqrt{x+3}, \ a_2 = x+1,$$

что даст:

$$|a_1| + |a_2| \le a_1 + a_2.$$

Дословно повторяя рассуждения, использовавшиеся при решении задачи 274, мы получим, что это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} a_1 \ge 0 \\ a_2 \ge 0 \end{cases}$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, имеем:

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} \le 2 \\ x+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x+3 \le 4 \\ x \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$$

Ответ: $[-1;1]$. $\square$

Решение задачи 1020. Поскольку $8+2\sqrt{7}=(1+\sqrt{7})^2$, а $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$, наше неравенство равносильно неравенству

$$(3-x)(x+1)(x+2) > (x+1)\sqrt{x+1}\sqrt{2-x}\log_3 4.$$

Общий множитель $x+1$ хотелось бы сократить. Это можно сделать, если мы докажем, что для значений x, являющихся решениями неравенства, он положителен.

Прежде всего, из задачи следует, что $x+1 \geq 0$ (т.к. это выражение стоит под знаком радикала). Кроме того, простая проверка показывает, что $x=-1$ не является решением.

Значит, наше неравенство равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l} (3-x)(x+2) > \sqrt{x+1}\sqrt{2-x}\log_3 4 \\ x+1>0 \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} (3-x)(x+2) > \sqrt{(x+1)(2-x)}\log_3 4 \\ x+1>0 \end{array}\right.$$

Чтобы решить первое неравенство, применим метод оценок.

Правая часть этого неравенства определена при $-1 \leq x \leq 2$. Ее поведение (возрастание/убывание) повторяет поведение квадратного трёхчлена $(x+1)(2-x)$. Этот трёхчлен достигает наибольшего значения, равного $\frac{9}{4}$, в точке $x=\frac{1}{2}$. Соответственно, правая часть не превосходит $\log_3 8$.

С другой стороны, наименьшее значение левой части на отрезке $-1 \leq x \leq 2$ равно 4 (она сначала возрастает от 4 до $\frac{25}{4}$, а затем убывает от $\frac{25}{4}$ до 4).

Поскольку $\log_3 8 < 4$, неравенство верно всюду, где определено. Иначе говоря, его множество решений – это отрезок $-1 \leq x \leq 2$.

Учитывая условие $x > -1$, получаем ответ задачи.

Ответ: $(-1;2]$. $\square$

Решение задачи 1023. Перепишем неравенство в виде

$$\frac{3\cdot 2^{-|3x-12|}}{\sqrt{9x^2-45x}+9} \leq \frac{3\cdot 2^{-|x+2|}}{\sqrt{x^2+13x-14}+9}$$

и выделим полные квадраты в квадратных трёхчленах под радикалами:

$$\frac{3\cdot 2^{-|3x-12|}}{\sqrt{\left(3x-\frac{15}{2}\right)^2-\frac{225}{4}}+9} \leq \frac{3\cdot 2^{-|x+2|}}{\sqrt{\left(x+\frac{13}{2}\right)^2-\frac{225}{4}}+9}.$$

Рассмотрим теперь выражения под знаками модулей. Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} 3x-12 &= \left(3x-\frac{15}{2}\right)-\frac{9}{2}, \\ x+2 &= \left(x+\frac{13}{2}\right)-\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Это позволяет переписать исходное неравенство в виде:

$$\frac{3\cdot 2^{-\left|\left(3x-\frac{15}{2}\right)-\frac{9}{2}\right|}}{\sqrt{\left(3x-\frac{15}{2}\right)^2-\frac{225}{4}}+9} \le \frac{3\cdot 2^{-\left|\left(x+\frac{13}{2}\right)-\frac{9}{2}\right|}}{\sqrt{\left(x+\frac{13}{2}\right)^2-\frac{225}{4}}+9} \Leftrightarrow f\left(3x-\frac{15}{2}\right) \le f\left(x+\frac{13}{2}\right),$$

где

$$f(t)=\frac{3\cdot 2^{-\left|t-\frac{9}{2}\right|}}{\sqrt{t^2-\frac{225}{4}}+9}.$$

Функция $f(t)$ определена тогда и только тогда, когда $t^2-\frac{225}{4}\ge 0$. Таким образом, её область определения является объединением двух промежутков: $t\le -\frac{15}{2}$ и $t\ge \frac{15}{2}$.

На множестве $t\le -\frac{15}{2}$ выражение $t-\frac{9}{2}<0$ и потому

$$f(t)=\frac{3\cdot 2^{t-\frac{9}{2}}}{\sqrt{t^2-\frac{225}{4}}+9}.$$

Числитель дроби в правой части этого равенства является возрастающей функцией от t, а знаменатель при $t\le -\frac{15}{2}$ – убывающей. Поэтому на множестве $t\le -\frac{15}{2}$ функция $f(t)$ возрастает.

На множестве $t\ge \frac{15}{2}$ выражение $t-\frac{9}{2}>0$ и потому

$$f(t)=\frac{3\cdot 2^{-t+\frac{9}{2}}}{\sqrt{t^2-\frac{225}{4}}+9}.$$

Числитель дроби в правой части этого равенства является убывающей функцией от t, а знаменатель при $t\ge \frac{15}{2}$ – возрастающей. Поэтому на множестве $t\ge \frac{15}{2}$ функция $f(t)$ убывает.

Теперь займёмся исходным неравенством.

Область допустимых значений неизвестной задаётся системой

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-5x\ge 0\\ x^2+13x-14\ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\le 0 \text{ или } x\ge 5\\ x\le -14 \text{ или } x\ge 1\end{array}\right. \Leftrightarrow x\le -14 \text{ или } x\ge 5.$$

Если $x\le -14$, то числа $t_1=3x-\frac{15}{2}$ и $t_2=x+\frac{13}{2}$ лежат на промежутке $t\le -\frac{15}{2}$, где $f(t)$ возрастает. Поэтому неравенство

$$f\left(3x-\frac{15}{2}\right)\le f\left(x+\frac{13}{2}\right)$$

равносильно неравенству

$$3x-\frac{15}{2}\le x+\frac{13}{2} \Leftrightarrow x\le 7.$$

Учитывая условие $x\le -14$, мы получим, что все $x\le -14$ являются решениями исходного неравенства.

Если $x \geq 5$, то числа $t_1 = 3x - \frac{15}{2}$ и $t_2 = x + \frac{13}{2}$ лежат на промежутке $t \geq \frac{15}{2}$, где $f(t)$ убывает. Поэтому неравенство

$$f\left(3x - \frac{15}{2}\right) \leq f\left(x + \frac{13}{2}\right)$$

равносильно неравенству

$$3x - \frac{15}{2} \geq x + \frac{13}{2} \Leftrightarrow x \geq 7.$$

Учитывая условие $x \geq 5$, мы получим вторую часть множества решений исходного неравенства: $x \geq 7$.

Пересекая множество решений неравенства (оно является объединением промежутков $(-\infty; -14]$ и $[7; +\infty)$ с отрезком $[-2020; 2018]$, мы получим 2 промежутка: $[-2020; -14]$ и $[7; 2018]$. Их длины равны 2006 и 2011 соответственно.

□

11.4 Глава 4

Решение задачи 1024. Из первого уравнения системы выразим неизвестную x через y: $x = 6-2y$. Это соотношение позволяет немедленно вычислить значение неизвестной x как только будет определено значение неизвестной y. Иначе говоря, проблема сводится к тому, чтобы найти y. В этом смысле неизвестная x исключена из задачи.

Для того, чтобы найти y, воспользуемся вторым уравнением системы. При этом всюду, где стоит неизвестная x, поставим выражение $6-2y$. Тогда это уравнение превратится в уравнение относительно одной неизвестной y:

$$3(6-2y)^2 - (6-2y)y + 4y^2 = 48. \tag{11.65}$$

Так как в этом уравнении неизвестная x больше не встречается, можно сказать, что мы исключили её в буквальном смысле этого слова.

Итак, метод исключения неизвестных превращает систему двух уравнений с двумя неизвестными в одно уравнение с одной неизвестной, т.е. сводит дело к более простой и хорошо изученной теме. Иначе говоря, *если исключение возможно*, задачи на решение систем являются вариантом задач на решение уравнений.

С более общей точки зрения, каждый шаг метода исключения неизвестных уменьшает на единицу число неизвестных и число уравнений. Поэтому его последовательное применение позволяет решать системы из любого числа уравнений с любым числом неизвестных.

После раскрытия скобок и приведения подобных уравнение (11.65) примет вид:

$$3y^2 - 13y + 10 = 0.$$

Это квадратное уравнение легко решить; оно имеет два корня: 1 и $\frac{10}{3}$.

Теперь восстановим исключённую неизвестную x:

1. если $y = 1$, то $x = 6 - 2 \cdot 1 = 4$;

2. если $y = \frac{10}{3}$, то $x = 6 - 2 \cdot \frac{10}{3} = -\frac{2}{3}$.

Таким образом, наша система имеет два решения $(4; 1)$ и $\left(-\frac{2}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

Ответ: $\left\{(4; 1); \left(-\frac{2}{3}; \frac{10}{3}\right)\right\}$. □

Решение задачи 1025. Из первого уравнения системы исключим неизвестную y: $y = x + 5$.

Теперь второе и третье уравнения системы превратятся в систему из двух уравнений с двумя неизвестными x и z:

$$\left\{\begin{array}{l} zx = (z-4)(x+5) + 30, \\ 2zx = (2z-4)(x+5). \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x - 5z = 10, \\ 2x - 5z = -10. \end{array}\right.$$

Исключая из первого уравнения последней системы неизвестную z: $z = \frac{4x-10}{5}$, мы получим одно уравнение с одной неизвестной x: $2x = 20$, откуда $x = 10$.

Теперь последовательно восстановим исключенные неизвестные z и y: $z = \frac{4 \cdot 20 - 10}{5} = 6$, $y = 10 + 5 = 15$.

Ответ: $\{(10; 15; 6)\}$.□

Решение задачи 1035. Из второго уравнения исключим неизвестную y: $y = 8x - 1$. Теперь первое уравнение можно переписать в виде:

$$\log_2(x(8x-1)) \cdot \log_{4x}(8x-1) = 2. \tag{11.66}$$

Чтобы решить это логарифмическое уравнение, прежде всего перейдём во втором логарифме к основанию 2:

$$\log_2(x(8x-1)) \cdot \frac{\log_2(8x-1)}{\log_2(4x)} = 2.$$

Поскольку над логарифмами производятся "плохие" действия (умножение и деление) выделим повторяющиеся блоки:

$$(\log_2 x + \log_2(8x-1)) \cdot \frac{\log_2(8x-1)}{2 + \log_2 x} = 2.$$

Чтобы решить это уравнение введём две новые переменные $a = \log_2 x$ и $b = \log_2(8x-1)$. Тогда уравнение примет вид:

$$(a+b) \cdot \frac{b}{2+a} = 2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b^2 + ab - (2a+4) = 0, \\ a \neq -2. \end{array}\right.$$

Уравнение последней системы можно рассматривать как квадратное уравнение относительно b. Для него дискриминант равен $D = a^2 + 8a + 16 = (a+4)^2$. Поэтому это уравнение распадается на два: $b = \frac{-a+(a+4)}{2} = 2$ и $b = \frac{-a-(a+4)}{2} = -a - 2$.

Вспоминая, что скрывалось за переменными a и b, мы получим, что уравнение (11.66) распадается на две системы:

$$\left\{\begin{array}{l}\log_2(8x-1)=2,\\ \log_2 x\neq -2\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\log_2(8x-1)=-\log_2 x-2,\\ \log_2 x\neq -2.\end{array}\right. \tag{11.67}$$

Первая система из совокупности (11.67) решается легко. Из первого уравнения мы немедленно имеем $8x-1=4$, так что $x=\frac{5}{8}$ – это первый корень уравнения (11.66) (условие $\log_2 x\neq -2$, очевидно, выполнено).

Займёмся теперь второй системой из совокупности (11.67). Прежде всего решим уравнение этой системы:

$$\log_2(8x-1)+\log_2 x=-2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\log_2(8x^2-x)=\log_2\frac{1}{4}\\ x>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}8x^2-x=\frac{1}{4}\\ x>0\end{array}\right.$$

Квадратное уравнение $8x^2-x=\frac{1}{4}$ имеет два корня: $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=-\frac{1}{8}$. В силу условия $x>0$ решением последней системы будет только $x=\frac{1}{4}$. Однако $\log_2\frac{1}{4}=-2$, так что вторая система из совокупности (11.67) не имеет решений.

Итак, уравнение (11.66) имеет единственный корень $x=\frac{5}{8}$.

Теперь можно восстановить исключённую в начале решения неизвестную y: $y=8\cdot\frac{5}{8}-1=4$.

Ответ: $\left\{\left(\frac{5}{8};4\right)\right\}$. $\square$

Решение задачи 1043. Сложим уравнения системы:

$$x^2+y^2+z^2=\frac{3}{2}xyz,$$

и вычтем из этого равенства уравнения исходной системы. В итоге мы получим следующую систему, равносильную исходной:

$$\left\{\begin{array}{l}x^2=\frac{1}{2}xyz,\\ y^2=\frac{1}{2}xyz,\\ z^2=\frac{1}{2}xyz.\end{array}\right. \tag{11.68}$$

Теперь перемножим эти уравнения:

$$(xyz)^2=\frac{1}{8}(xyz)^3.$$

Отсюда следует, что произведение xyz равно 0 или 8. Следовательно,система (11.68) распадается на две системы:

$$\left\{\begin{array}{l}x^2=0,\\ y^2=0,\\ z^2=0,\\ xyz=0\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}x^2=4,\\ y^2=4,\\ z^2=4,\\ xyz=8\end{array}\right.$$

Первая система, очевидно, имеет единственное решение $(x;y;z)=(0;0;0)$.

Первые три уравнения второй системы для каждой неизвестной дают два значения: 2 и -2, что даёт 8 решений вида $(\pm2; \pm2; \pm2)$. Последнему уравнению, $xyz = 8$, удовлетворяют только те из этих троек, в которых стоит чётное число знаков "$-$".

Ответ: $\{(0; 0; 0), (2; 2; 2), (2; -2; -2), (-2; 2; -2), (-2; -2; 2)\}$. □

Решение задачи 1044. Преобразуем исходную систему следующим образом. Сложим второе и третье уравнения и вычтем из их суммы первое уравнение – это будет первое уравнение новой системы. Вторым уравнением новой системы будет разность второго и третьего уравнений. Третье уравнение оставим без изменений. В результате мы получим следующую систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} 2z^2 = 4z, \\ x^2 - y^2 = 3x - 3y, \\ y^2 + z^2 = 2y + z - x. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы распадается на два уравнения: $z = 0$ и $z = 2$. Второе уравнение также распадается на два уравнения: $x - y = 0$ и $x + y = 3$. Соответственно, вся система распадается на четыре системы (мы сразу заменяем в третьем уравнении z на его числовое значение из первого уравнения):

$$\begin{cases} z = 0, \\ x - y = 0, \\ y^2 = 2y - x \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0, \\ x + y = 3, \\ y^2 = 2y - x \end{cases} \quad \begin{cases} z = 2, \\ x - y = 0, \\ y^2 + 2 = 2y - x \end{cases} \quad \begin{cases} z = 2, \\ x + y = 3, \\ y^2 + 2 = 2y - x \end{cases}$$

Первая система имеет два решения: $(0; 0; 0)$, $(1; 1; 0)$, а три последних – несовместны.

Ответ: $(0; 0; 0)$, $(1; 1; 0)$. □

Решение задачи 1052. Обратим внимание на то, что в левых частях уравнений стоят однородные многочлены второй степени. Чтобы получить однородное уравнение нужно сделать так, чтобы в правой части стоял 0. Для этого умножим второе уравнение на 3 и вычтем из первого уравнения:

$$y^2 - xy - 6x^2 = 0.$$

Чтобы получить систему, равносильную исходной, достаточно к этому уравнению добавить любое уравнение исходной системы. Итак, исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} y^2 - xy - 6x^2 = 0, \\ 2x^2 + xy = 5. \end{cases}$$

Первое уравнение этой новой системы можно рассматривать как квадратное относительно одной неизвестной y. Его дискриминант равен $25x^2$, так что это уравнение распадается на два: $y = 3x$ и $y = -2x$. Соответственно, исходная система распадается на две системы:

$$\begin{cases} y = 3x, \\ 2x^2 + xy = 5. \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2x, \\ 2x^2 + xy = 5. \end{cases} \tag{11.69}$$

Первые уравнения в каждой системе исключают неизвестную y. После этого:

первая система совокупности (11.69) сводится к уравнению $x^2 = 1$, откуда $x = \pm 1$, так что эта система имеет два решения $(1;3)$ и $(-1;-3)$;

вторая система совокупности (11.69) сводится к уравнению $0 = 5$ и поэтому не имеет решений.

Итак, исходная система имеет два решения $(1;3)$ и $(-1;-3)$.

Ответ: $\{(1;3), (-1;-3)\}$. $\square$

Решение задачи 1055. Второе уравнение системы содержит два члена третьей степени и два члена первой степени. Первое уравнение позволяет любой член нулевой степени, т.е. число, превратить в сумму членов второй степени, а тем самым и любой член первой степени – в член третьей степени. Имея в виду эти соображения, превратим второе уравнение в однородное уравнение третьей степени. Для этого запишем его в виде

$$4y^3 + 7x^3 - 2 \cdot (4y + x) = 0$$

и, используя первое уравнение, заменим число -2 на выражение $2x^2 - y^2$. После раскрытия скобок и приведения подобных мы получим уравнение

$$9x^3 + 8x^2y - xy^2 = 0.$$

Чтобы получить систему равносильную исходной, необходимо сохранить первое уравнение:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 - y^2 + 2 = 0, \\ 9x^3 + 8x^2y - xy^2 = 0. \end{array} \right. \tag{11.70}$$

Если предположить, что $y = 0$, то второе уравнение влечёт, что и $x = 0$, а тогда первое уравнение примет вид $2 = 0$. Таким образом, из системы следует, что $y \neq 0$ и потому обе части второго уравнения можно разделить на y^3. В итоге мы получим кубическое уравнение относительно новой неизвестной $t = \frac{x}{y}$:

$$9t^3 + 8t^2 - t = 0.$$

Это уравнение имеет три корня: $t = 0$, $t = -1$, $t = \frac{1}{9}$. Возвращаясь к основным неизвестным x и y, мы получим, что второе уравнение системы (11.70) распадается на три уравнения:

$$x = 0, \ y = -x, \ y = 9x.$$

Первое уравнение системы (11.70) в первом случае примет вид: $y^2 = 2$, откуда $y = \pm\sqrt{2}$, во втором случае – вид: $x^2 + 2 = 0$ (это уравнение не имеет корней), в третьем случае – вид: $79x^2 = 2$, откуда $x = \pm\sqrt{\frac{2}{79}}$.

Ответ: $\left\{(0, \sqrt{2}), (0, -\sqrt{2}), \left(\sqrt{\frac{2}{79}}, 9\sqrt{\frac{2}{79}}\right), \left(-\sqrt{\frac{2}{79}}, -9\sqrt{\frac{2}{79}}\right)\right\}$. $\square$

Решение задачи 1057. Рассмотрим первое уравнение как квадратное относительно неизвестной y; неизвестную x будем считать параметром. Это, в частности, означает, что уравнение нужно переписать в виде

$$y^2 + (2x - 3)y + (2 - 4x) = 0. \tag{11.71}$$

Дискриминант этого уравнения равен $D=(2x-3)^2-4\cdot(2-4x)=(2x+1)^2$. Поэтому уравнение (11.71) имеет корни $y_1=\frac{-2x+3+(2x+1)}{2}=2$ и $y_2=\frac{-2x+3-(2x+1)}{2}=-2x+1$. Иначе говоря, первое уравнение системы расщепляется на два уравнения:

$$y=2 \qquad\qquad y=-2x+1$$

В принципе теперь можно исключать неизвестную y, но мы упростим и второе уравнение.

Опять рассмотрим второе уравнение как квадратное относительно неизвестной y; неизвестную x будем считать параметром:

$$3y^2+(x-14)y+(16-2x)=0. \tag{11.72}$$

Дискриминант этого уравнения равен $D=(x-14)^2-4\cdot3\cdot(16-2x)=(x-2)^2$. Поэтому уравнение (11.72) имеет корни $y_1=\frac{-x+14+(x-2)}{6}=2$ и $y_2=\frac{-x+14-(x-2)}{6}=\frac{-x+8}{3}$. Иначе говоря, второе уравнение системы расщепляется на два уравнения:

$$y=2 \qquad\qquad y=\frac{-x+8}{3}$$

Соответственно исходная система распадется на четыре системы:

$$\begin{cases} y=2\\ y=2\end{cases} \qquad \begin{cases} y=2\\ y=\frac{-x+8}{3}\end{cases} \qquad \begin{cases} y=-2x+1\\ y=2\end{cases} \qquad \begin{cases} y=-2x+1\\ y=\frac{-x+8}{3}\end{cases}$$

Первая система не содержит неизвестную x. Поэтому она имеет бесконечно много решений, которые могут быть записаны в виде: $(x;2)$, где x – произвольное действительное число.

Вторая система имеет единственное решение $(2;2)$. Третья система имеет единственное решение $(-0,5;2)$. Оба этих решения входят в множество решений первой системы.

Четвертая система имеет единственное решение $(-1;3)$.

Ответ: $\{(-1;3),(x;2),\ \text{где } x\in R\}$. □

Решение задачи 1083. Упростим первое уравнение. Для этого прежде всего перейдём в логарифмах к одному основанию, скажем, x:

$$\log_x y+\frac{1}{\log_x y}=\frac{5}{2}.$$

Теперь введём новую неизвестную $t=\log_x y$. Для неё уравнение примет вид:

$$t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0\Leftrightarrow t_1=2,\quad t_2=\frac{1}{2}.$$

Отметим, что из уравнения $2t^2-5t+2=0$ следует, что $t\neq0$, так что явно указывать это условие после избавления от знаменателя нет необходимости (формально это нужно делать).

Вспоминая, что скрывалось за переменной t, мы получим, что первое уравнение исходной системы распадается на два уравнения:

$$\begin{array}{cc} \log_x y = 2 & \log_x y = \frac{1}{2} \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ \left\{\begin{array}{l} y = x^2, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} x = y^2, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{array}\right. \end{array}$$

Соответственно исходная система распадается на две системы:

$$\left\{\begin{array}{l} y = x^2, \\ 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = y^2, \\ 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{array}\right.$$

Эти системы уже можно решать методом исключения (первое уравнение первой системы исключает y, первое уравнение второй системы исключает x), что легко приводит к ответу.

Ответ: $\left\{\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{81}\right)\right\}$. $\square$

Решение задачи 1090. Упростим первое уравнение. С этой целью перепишем его в виде

$$\log_2 y + 3^y = \log_2 x + 3^x.$$

Если ввести функцию $f(t) = \log_2 t + 3^t$, то это уравнение примет вид

$$f(y) = f(x). \tag{11.73}$$

Функция $f(t)$ определена на промежутке $(0; +\infty)$ и возрастает на всей области определения (как сумма двух возрастающих функций: $g(t) = \log_2 t$ и $h(t) = 3^t$). Поэтому равенство (11.73) равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l} y = x, \\ x > 0. \end{array}\right.$$

Соответственно исходная система равносильна системе

$$\left\{\begin{array}{l} y = x, \\ 2^{1-x} + 8^{-2x} = 65^x \cdot 4^{-3y}, \\ x > 0 \end{array}\right.$$

После исключения неизвестной y второе уравнение примет вид:

$$2 \cdot 32^x + 1 = 65^x.$$

Его нужно решать графически. Непосредственно сопоставлять графики левой и правой частей нельзя, т.к. соответствующие функции возрастают. Но если разделить это уравнение почленно на 32^x, мы получим уравнение

$$2 + \left(\frac{1}{32}\right)^x = \left(\frac{65}{32}\right)^x, \tag{11.74}$$

левая часть которого убывает от $+\infty$ до 2, а правая часть возрастает от 0 до $+\infty$. Поэтому можно гарантировать, что уравнение (11.74) имеет единственный корень x_0. Нетрудно сообразить, что $x_0 = 1$. Поскольку условие $x > 0$ выполнено, исходная система имеет единственное решение $(1; 1)$.

Ответ: $\{(1; 1)\}$. □

Решение задачи 1099. Выполним действия над дробями в первом уравнении и избавимся от логарифма во втором:

$$\begin{cases} \frac{p+q}{pq} + 1 = 0, \\ pq = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p + q = -10, \\ pq = 10 \end{cases} \tag{11.75}$$

Последняя система влечёт, что числа p и q являются корнями квадратного уравнения $x^2+10x+10 = 0$. Его дискриминант равен $D = 60 > 0$, так что это уравнение имеет два корня: $x_1 = -5+\sqrt{15}$, $x_2 = -5-\sqrt{15}$. Соответственно, исходная система имеет два решения: $(p; q) = (x_1; x_2)$ и $(p; q) = (x_2; x_1)$. В принципе это позволяет вычислять значение выражения

$$A = \frac{q}{p} \cdot \sqrt[6]{\frac{p^{12}}{q^{18}}} - \frac{q}{p^2},$$

однако ясно, что выкладки будут настолько громоздкими, что их вряд ли можно провести на экзамене без ошибок и до конца.

Поэтому мы упростим выражение A. Прежде всего извлечём корень шестой степени:

$$A = \frac{q}{p} \cdot \frac{p^2}{|q|^3} - \frac{q}{p^2}.$$

Обратим внимание на то, что равенство $\sqrt[6]{q^{18}} = q^3$ верно только для $q \geq 0$. В общем случае нужно пользоваться равенством $\sqrt[6]{q^{18}} = |q|^3$. Поэтому для дальнейших преобразований необходимо определить знак q.

Из полученных выше явных значениях p и q следует, что $q < 0$. Этот вывод можно получить и непосредственно из системы (11.75): равенство $pq = 10$ влечет, что числа p и q либо оба положительны, либо оба отрицательны; равенство $p + q = -10$ оставляет только вторую возможность.

Итак, $|q| = -q$ и поэтому

$$A = -\frac{q}{p} \cdot \frac{p^2}{q^3} - \frac{q}{p^2} = -\frac{p^3 + q^3}{p^2q^2}.$$

Дальнейшее решение не отличается от решения задачи 28. Поскольку полученное выражение для A симметрично относительно p и q, его можно превратить в функцию элементарных симметрических многочленов $a = p + q$, $b = pq$:

$$A = -\frac{(p+q)(p^2 - pq + q^2)}{(pq)^2} = -\frac{(p+q)\left((p+q)^2 - 3pq\right)}{(pq)^2} = -\frac{a(a^2 - 3b)}{b^2}.$$

Система (11.75) фактически даёт значения переменных a и b, что немедленно влечёт ответ задачи.

Отметим, что приведённое решение совершенно не требует знания точных значений переменных p и q (хотя замечание о том, что исходная система действительно имеет хотя бы одно решение, полезно).

Ответ: 7. □

Решение задачи 1100. *1 способ.* Перегруппируем члены в первом уравнении и вынесем xy за скобку во втором:

$$\begin{cases} -(y-x)+xy=1, \\ xy(y-x)=30. \end{cases}$$

Теперь можно ввести две новые неизвестные $a=y-x$ и $b=xy$. Эти неизвестные удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{cases} -a+b=1, \\ ab=30. \end{cases}$$

Эта система легко решается методом исключения; она имеет два решения:

$$\begin{cases} a=5, \\ b=6. \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-6, \\ b=-5. \end{cases}$$

Соответственно исходная система распадается на две системы:

$$\begin{cases} y-x=5, \\ xy=6. \end{cases} \qquad \begin{cases} y-x=-6, \\ xy=-5. \end{cases}$$

Эти системы также без труда решаются методом исключения. Первая система имеет два решения $(1;6)$ и $(-6;-1)$; вторая система имеет два решения $(1;-5)$ и $(5;-1)$.

2 способ. Перенесём в первом уравнении все члены в левую часть и разложим её на множители методом группировки:

$$x+xy-y-1=0 \Leftrightarrow x(y+1)-(y+1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(y+1)=0.$$

Поэтому первое уравнение системы распадается на два уравнения: $x-1=0$ и $y+1=0$. Соответственно, вся система распадется на две системы:

$$\begin{array}{cc}
\begin{cases} x=1, \\ xy^2-x^2y=30 \end{cases} & \begin{cases} y=-1, \\ xy^2-x^2y=30 \end{cases} \\
\Updownarrow & \Updownarrow \\
\begin{cases} x=1, \\ y^2-y-30=0 \end{cases} & \begin{cases} y=-1, \\ x^2+x-30=0 \end{cases} \\
\Updownarrow & \Updownarrow \\
\begin{cases} x=1, \\ y=6 \text{ или } -5 \end{cases} & \begin{cases} y=-1, \\ x=5 \text{ или } -6 \end{cases}
\end{array}$$

Ответ: $\{(1;6),(-6;-1),(1;-5),(5;-1)\}$. □

Решение задачи 1110. Поскольку под знаками радикалов стоят линейные выражения от основных неизвестных, от радикалов можно избавиться, обозначив их новыми буквами:

$$\begin{cases} a = \sqrt[3]{x+1}, \\ b = \sqrt[3]{y-2}. \end{cases}$$

При этом основные неизвестные x и y могут быть выражены через новые:

$$\begin{cases} x = a^3 - 1, \\ y = b^3 + 2. \end{cases}$$

Теперь исходная система примет вид:

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ a^3 + b^3 - 19 = 0. \end{cases}$$

Эту систему легко решить методом исключения; она имеет два решения:

$$\begin{cases} a = 3, \\ b = -2. \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -2, \\ b = 3. \end{cases}$$

Следовательно, исходная система распадается на две системы:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} = 3, \\ \sqrt[3]{y-2} = -2. \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} = -2, \\ \sqrt[3]{y-2} = 3. \end{cases}$$

Первая система единственное решение $(26; -6)$; вторая система имеет единственное решение $(-9; 29)$.

Ответ: $\{(26; -6), (-9; 29)\}$. □

Решение задачи 1137. Раскрывая модули стандартным способом, мы получим, что первое уравнение системы распадается на две системы:

$$\begin{array}{cc} \begin{cases} x - y \geq 0, \\ x - y + 2x = 6 \end{cases} & \begin{cases} x - y < 0, \\ -x + y + 2x = 6 \end{cases} \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ \begin{cases} y \leq x, \\ y = 3x - 6 \end{cases} & \begin{cases} y > x, \\ y = -x + 6 \end{cases} \end{array}$$

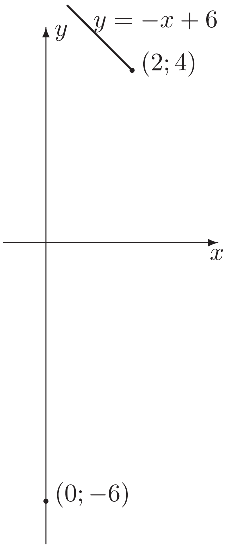
Аналогично и второе уравнение системы распадается на две системы:

$$\begin{array}{cc} \begin{cases} 2x - y \geq 0, \\ 2x - y + 3x = 6 \end{cases} & \begin{cases} 2x - y < 0, \\ -2x + y + 3x = 6 \end{cases} \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ \begin{cases} y \leq 2x, \\ y = 5x - 6 \end{cases} & \begin{cases} y > 2x, \\ y = -x + 6 \end{cases} \end{array}$$

Соответственно, вся исходная система распадётся на четыре системы:

$$\begin{cases} y = 3x - 6, \\ y = 5x - 6, \\ y \leq x, \\ y \leq 2x \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x - 6, \\ y = -x + 6, \\ y \leq x, \\ y > 2x \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x + 6, \\ y = 5x - 6, \\ y > x, \\ y \leq 2x \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x + 6, \\ y = -x + 6, \\ y > x, \\ y > 2x \end{cases}$$

Рис. 11.10:



Первая из этих систем имеет единственное решение $(0;-6)$, вторая система несовместна, третья система имеет единственное решение $(2;4)$, четвертая система имеет бесконечно много решений, описываемых формулой: $(x;y) = (x;-x+6)$, $x < 2$.

Поэтому множество решений исходной системы представляет собой объединение одноэлементного множества $\{(0;-6)\}$ и луча $(x;y) = (x;-x+6)$, $x \leq 2$, с вершиной в точке $(2;4)$. Это множество изображено на рис.11.10.

Исходную систему можно было бы решать геометрически с самого начала. Для этого нужно изобразить множества решений первого и второго неравенств исходной системы и найти их пересечение.

На координатной плоскости множество решений первой из двух систем, на которые распадается первое неравенство исходной системы, представляет собой часть прямой $y = 3x - 6$, расположенную ниже прямой $y = x$, а множество решений второй системы – часть прямой $y = -x + 6$, расположенную выше прямой $y = x$. Их объединение даёт угол с вершиной в точке $(3;3)$, изображённый в левой части рис.11.11. Этот угол и представляет собой множество решений первого неравенства исходной системы.

Множество решений второго неравенства исходной системы представляет собой угол, изображённый в правой части рис.11.11.

Пересечение двух этих углов даёт фигуру, изображённую на рис.11.10.

Ответ: $\{(0;-6);(x;6-x),\ \text{где } x \leq 2\}$. □

Решение задачи 1139. Первое уравнение системы равносильно равенству $y = \sqrt[3]{1-x^3}$. Поэтому множество его решений совпадает с графиком функции $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$. Эта функция монотонно убывает и проходит че-

Рис. 11.11:

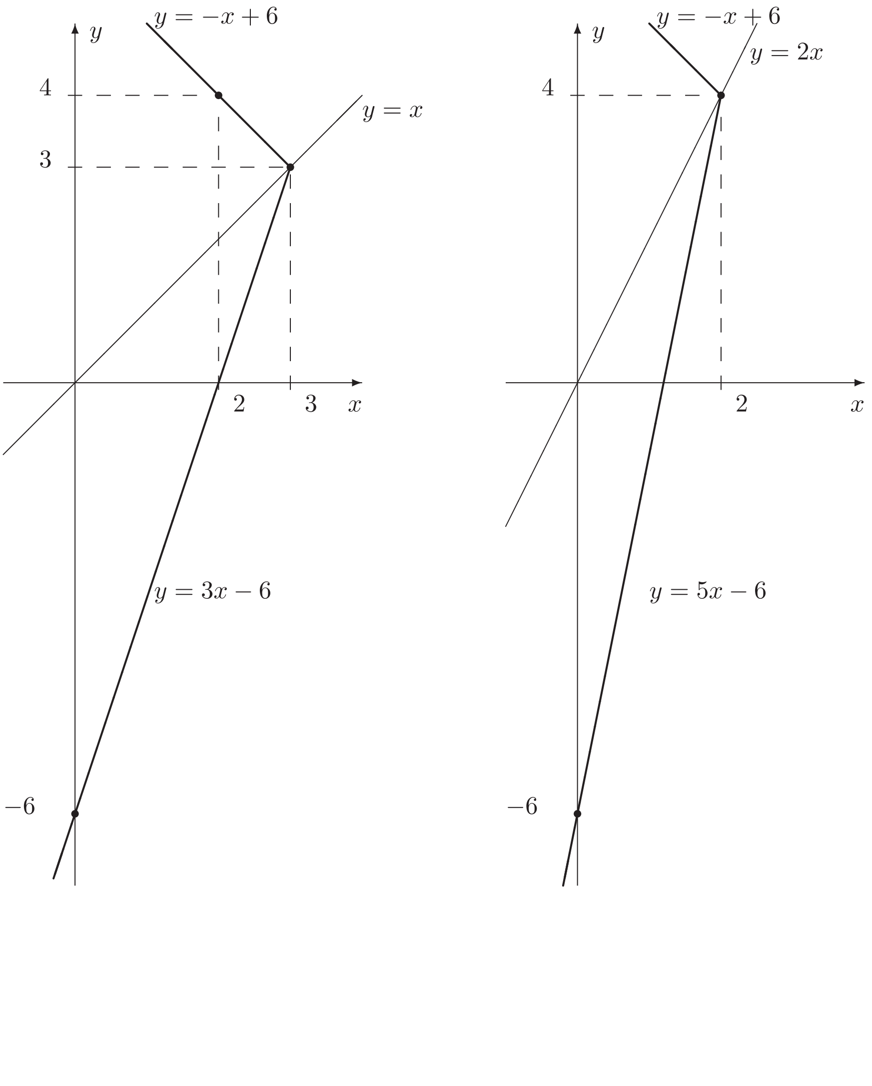
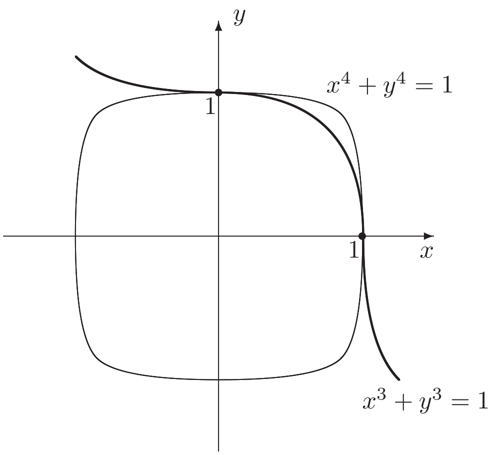


Рис. 11.12:



рез точки $(0;1)$ и $(1;0)$. Её график изображён на рис.11.12 жирной линией.

Часть графика, соответствующая $x \in [0;1]$, похожа на дугу единичной окружности, деформированную в направлении биссектрисы первого координатного угла.

Второе уравнение системы распадается на два уравнения: $y = \sqrt[4]{1-x^4}$ и $y = -\sqrt[4]{1-x^4}$. Поэтому множество его решений состоит из графика функции $g(x) = \sqrt[4]{1-x^4}$ и симметричного ему относительно оси Ox графика функции $g_1(x) = -\sqrt[4]{1-x^4}$. Функция $g(x)$ определена на отрезке $-1 \le x \le 1$, является чётной, монотонно убывает на отрезке $0 \le x \le 1$ и проходит через точки $(0;1)$ и $(1;0)$. Фигура, задаваемая вторым уравнением, также изображена на рис.11.12 (тонкой линией). Она похожа на окружность, деформированную в направлении биссектрис координатных углов, причем эта деформация "больше", чем в случае графика $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$. Действительно, при $x \in (0;1)$ верны неравенства: $0 < x^4 < x^3 < 1$, т.е. $0 < 1-x^3 < 1-x^4 < 1$. В силу монотонности функции $\sqrt[4]{t}$ отсюда следует, что $(1-x^3)^{\frac{1}{4}} < (1-x^4)^{\frac{1}{4}}$. Кроме того, поскольку $1-x^3 \in (0;1)$, а $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ верно неравенство $(1-x^3)^{\frac{1}{3}} < (1-x^3)^{\frac{1}{4}}$. Следовательно, при $x \in (0;1)$ верно неравенство:

$$\sqrt[3]{1-x^3} < \sqrt[4]{1-x^4}.$$

Из рисунка 11.12 ясно, что решение исходной системы состоит из двух точек: $(0;1)$ и $(1;0)$.

Ответ: $\{(0;1),(1;0)\}$.$\square$

Решение задачи 1140. Если в левой части первого уравнения системы формально убрать все модули и привести подобные члены, то мы получим в точности выражение, стоящее в правой части. Поэтому это уравнение можно записать в виде

$$|a_1| + |a_2| = a_1 + a_2,$$

где

$$a_1 = y + \frac{1}{x},\ a_2 = \frac{13}{6} + x - y.$$

Дословно повторяя рассуждения, использовавшиеся при решении задачи 274, мы получим, что первое уравнение исходной системы равносильно системе из двух неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 \geq 0 \\ a_2 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y \geq -\frac{1}{x}, \\ y \leq x + \frac{13}{6}. \end{array}\right.$$

На координатной плоскости множество решений первого неравенства представляет собой область над ветвями гиперболы $y = -\frac{1}{x}$, а множество решений второго неравенства – полуплоскость, расположенную ниже прямой $y = x + \frac{13}{6}$. Чтобы точно охарактеризовать взаимное расположение гиперболы $y = -\frac{1}{x}$ и прямой $y = x + \frac{13}{6}$, нужно найти их точки пересечения. Для этого следует решить уравнение

$$-\frac{1}{x} = x + \frac{13}{6}.$$

Оно равносильно квадратному уравнению $6x^2 + 13x + 6 = 0$, которое имеет два корня: $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$. Значит, гипербола и прямая пересекаются в двух точках A и B с абсциссами $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$. Соответствующие значения ординат точек пересечения равны $y_1 = \frac{2}{3}$, $y_2 = \frac{3}{2}$.

С учётом дополнительного условия задачи ($x < 0$, $y > 0$), мы получим область ABC (с внутренностью), изображённую на рис.11.13.

Множество решений второго уравнения системы – это окружность с центром в начале координат и радиусом $\frac{\sqrt{97}}{6}$. Для завершения решения задачи нужно найти пересечение этой окружности и области ABC.

Чтобы точно охарактеризовать взаимное расположение этих двух фигур, определим положение точек A и B относительно окружности. Для этого следует подсчитать величины $x_1^2 + y_1^2$, $x_2^2 + y_2^2$ и сравнить их с $\frac{97}{36}$:

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{4}{9} = \frac{97}{36}, \\ x_2^2 + y_2^2 &= \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{9}{4} = \frac{97}{36}. \end{aligned}$$

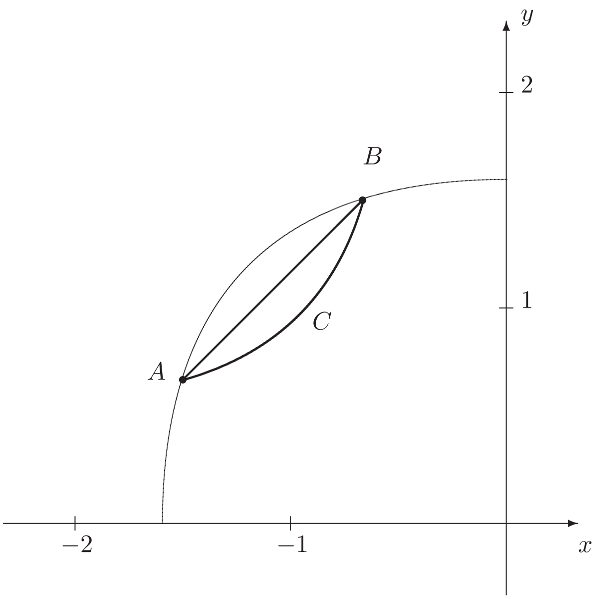
Таким образом, точки A и B лежат на окружности. Следовательно, они (и только они) и являются решениями исходной системы.

Ответ: $\left\{\left(-\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)\right\}$. □

Решение задачи 1141. Выделим полные квадраты в выражениях под радикалами в первом уравнении:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-11)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = 2\sqrt{37}.$$

Рис. 11.13:



Выражение $\sqrt{(x-1)^2+(y-11)^2}$ можно рассматривать как расстояние между точками $M=(x;y)$ и $A=(1;11)$, а выражение $\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$ – как расстояние между точками $M=(x;y)$ и $B=(-1;-1)$ Кроме того, расстояние между точками A и B равно $\rho(A,B)=\sqrt{(1+1)^2+(11+1)^2}=\sqrt{148}=2\sqrt{37}$. Поэтому первое уравнение системы можно записать в виде

$$\rho(M,A)+\rho(M,B)=\rho(A,B).$$

Множество его решений – это отрезок AB на координатной плоскости $(x;y)$. Чтобы задать этот отрезок аналитически, найдём уравнение прямой, проходящей через точки A и B.

Ясно, что эта прямая не параллельна оси Oy. Поэтому её уравнение имеет вид $y=kx+b$. Поскольку точки A и B лежат на этой прямой, их координаты удовлетворяют уравнению прямой:

$$\begin{cases} 11=k+b, \\ -1=-k+b. \end{cases}$$

Эта система легко решается:

$$\begin{cases} b=5, \\ k=6, \end{cases}$$

так что уравнение прямой AB есть $y = 6x + 5$.

Отрезок AB характеризуется дополнительным условием $-1 \le x \le 1$. Таким образом, первое уравнение исходной системы равносильно системе

$$\begin{cases} y = 6x + 5, \\ -1 \le x \le 1. \end{cases}$$

Соответственно, вся исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} y = 6x + 5, \\ \log_{(x+1)} 4 + \log_y 4 = 0, \\ -1 \le x \le 1, \end{cases}$$

которая легко решается методом исключения.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$. $\square$

Решение задачи 1144. Рассмотрим первое уравнение как квадратное относительно неизвестной x; неизвестную y будем считать параметром. Это, в частности, означает, что уравнение нужно переписать в виде

$$10x^2 - 2(y + 19)x + (5y^2 - 6y + 41) = 0. \qquad (11.76)$$

Для решения этого квадратного уравнения подсчитаем $\frac{D}{4}$:

$$\frac{D}{4} = (y + 19)^2 - 10 \cdot (5y^2 - 6y + 41) = -49(y - 1)^2. \qquad (11.77)$$

Если уравнение (11.76) имеет решение, то дискриминант должен быть неотрицателен. В силу соотношения (11.77) это означает, что на самом деле дискриминант равен 0, т.е. $y = 1$. Тогда уравнение (11.76) имеет единственный корень $x = \frac{y+19}{10} = 2$.

Итак, первое уравнение с *двумя* неизвестными имеет *единственное* решение $(x; y) = (2; 1)$.

Оно будет решением исходной системы тогда и только тогда, когда удовлетворяет второму уравнению системы. Убедиться в этом можно простой подстановкой.

Ответ: $\{(2; 1)\}$.$\square$

Решение задачи 1149. Если сложить все три уравнения системы, то получившееся уравнение-следствие можно записать в виде

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 0.$$

Это равенство равносильно тому, что $x = -2$, $y = 1$, $z = -2$.

Таким образом, если исходная система имеет решение, то это может быть только тройка $x = -2$, $y = 1$, $z = -2$. Однако проверка показывает, что этот набор неизвестных не удовлетворяет первому и второму уравнениям.

Ответ: $\emptyset$. $\square$

Решение задачи 1156. *1 способ.* Прежде всего отметим, что все неизвестные неотрицательны. При этом, если одна из них равна 0, то и остальные равны 0. Поэтому возможны только два случая.

1 случай. $(x;y;z)=(0;0;0)$. Очевидно, что это решение системы.

2 случай. $x>0$, $y>0$, $z>0$. Разделим правые части уравнений исходной системы соответственно на z, x и y:

$$\begin{cases} x=\frac{2z}{z+\frac{1}{z}}, \\ y=\frac{2x}{x+\frac{1}{x}}, \\ z=\frac{2y}{y+\frac{1}{y}}. \end{cases}$$

Знаменатели дробей в правых частях этих уравнений больше или равны 2. Значит, можно гарантировать, что

$$\begin{cases} x\leq z, \\ y\leq x, \\ z\leq y. \end{cases}$$

Эти неравенства равносильны тому, что все неизвестные равны между собой; пусть t – их общее значение. Для неизвестной t исходная система превратится в уравнение

$$t=\frac{2t^2}{1+t^2},$$

которое имеет единственный положительный корень $t=1$.

2 способ. Если ввести функцию $f(t)=\frac{2t^2}{1+t^2}$, то исходную систему можно записать в виде

$$\begin{cases} x=f(z), \\ y=f(x), \\ z=f(y). \end{cases} \tag{11.78}$$

Функция $f(t)$ определена при всех t и при $t\geq 0$ монотонно возрастает (как суперпозиция возрастающей при $t\geq 0$ функции $g=t^2$ и возрастающей при $g\geq 0$ функции $\frac{2g}{1+g}$).

Пусть (x,y,z) – решение системы. Как мы уже отмечали, $x,y,z\geq 0$.

Предположим, что $x<y$. Поскольку $x=f(z)$, $y=f(x)$, отсюда следует, что $z<x$. Далее, поскольку $z=f(y)$, $x=f(z)$, отсюда следует, что $y<z$. Итак, предположив, что $x<y$, мы получили, что $y<z<x<y$, чего быть не может.

Аналогично, предположение, что $x>y$ влечёт, что $y>z>x>y$, что также невозможно.

И наконец, предположив, что $x=y$, мы получим, что числа x, y, z равны между собой. Если их общее значение обозначить через t, то для неизвестной t исходная система сведётся к одному уравнению:

$$t=\frac{2t^2}{1+t^2},$$

которое имеет два корня: $t=0$ и $t=1$. Этим корням соответствует два решения исходной системы: $(0;0;0)$ и $(1;1;1)$.

Ответ: $\{(0;0;0),(1;1;1)\}$. □

Решение задачи 1160. Прологарифмируем уравнения исходной системы по основанию 2:

$$\begin{cases} y = x + \log_2\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), \\ z = y + \log_2\left(y + \sqrt{1+y^2}\right), \\ x = z + \log_2\left(z + \sqrt{1+z^2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x), \\ z = f(y), \\ x = f(z), \end{cases}$$

где функция $f(t)$ определяется формулой $f(t) = t + \log_2\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)$.

Система уравнений такого рода уже встречалась нам при решении задачи 1156 (система (11.78)). Ключевую роль при её решении играла монотонность функции $f(t)$. Попробуем доказать, что в нашей задаче $f(t)$ также монотонно возрастает.

Так как $\sqrt{1+t^2} > \sqrt{t^2} = |t| \geq -t$, функция $f(t)$ определена при всех t.

Кроме того,

$$\begin{aligned} f(-t) &= -t + \log_2\left(-t + \sqrt{1+t^2}\right) = -t + \log_2 \frac{\left(-t + \sqrt{1+t^2}\right)\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)}{t + \sqrt{1+t^2}} \\ &= -t + \log_2 \frac{1}{t + \sqrt{1+t^2}} = -t - \log_2\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) = -f(t), \end{aligned}$$

т.е. функция $f(t)$ – нечётная.

При $t \geq 0$ эта функция монотонно возрастает как сумма и суперпозиция возрастающих функций. В силу нечётности, она возрастает и при $t \leq 0$, а тогда можно утверждать, что $f(t)$ возрастает на всей числовой оси.

Как было установлено при решении задачи 1156, монотонность $f(t)$ влечёт, что числа x, y, z равны между собой. Если их общее значение обозначить через t, то для неизвестной t исходная система сведётся к одному уравнению:

$$t = t + \log_2\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) \Leftrightarrow \sqrt{1+t^2} = 1 - t,$$

которое имеет единственный корень $t = 0$. Соответственно, исходная система имеет единственное решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Ответ: $(0; 0; 0)$.□

Решение задачи 1164. Допустим, что уравнение

$$(x + y\sqrt{2})^2 + (u + v\sqrt{2})^2 = 7 + 5\sqrt{2}?$$

имеет решение, где x, y, u, v – рациональные числа.

Раскрывая скобки в левой части, перепишем уравнение в виде:

$$x^2 + 2xy\sqrt{2} + 2y^2 + u^2 + 2uv\sqrt{2} + 2v^2 = 7 + 5\sqrt{2}. \tag{11.79}$$

Из иррациональности числа $\sqrt{2}$ следует, что равенство $a + b\sqrt{2} = 0$, где a и b – рациональные, равносильно равенствам $a = 0$, $b = 0$. В нашей задаче это означает, что уравнение (11.79) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + u^2 + 2v^2 = 7, \\ 2xy + 2uv = 5. \end{cases} \tag{11.80}$$

Итак, задача решения исходного уравнения свелась к решению системы (11.80). Начиная с этого места, рациональность чисел x, y, u, v уже не будет играть никакой роли.

Используя неравенство о среднем арифметическом для неотрицательных чисел x^2 и $2y^2$, u^2 и $2v^2$, оценим выражение в левой части первого равенства системы (11.80):

$$(x^2+2y^2)+(u^2+2v^2) \geq \sqrt{2}\,(|2xy|+|2uv|) \geq \sqrt{2}(2xy+2uv).$$

В силу системы (11.80) первое число в этой цепочке равно 7, а последнее равно $5\sqrt{2}$. Таким образом, если система (11.80) имеет решение, то верно неравенство $7 \geq 5\sqrt{2}$. Но это неравенство равносильно (после возведения в квадрат) неравенству $49 \geq 50$, т.е. ложно. Полученное противоречие означает, что система (11.80) несовместна. Поскольку на множестве рациональных чисел эта система и исходное уравнение равносильны, ответ на вопрос задачи отрицательный.

Ответ: нет. □

Решение задачи 1165. Выражения $(x+y\sqrt{2})^3$ и $(u+v\sqrt{2})^3$ после раскрытия скобок и приведения подобных могут быть записаны в виде $x'+y'\sqrt{2}$, где $x'=x^3+6xy^2$, $y'=3x^2y+2y^3$, $u'=u^3+6uv^2$, $v'=3u^2v+2v^3$. Для чисел x', y', u', v' исходное уравнение примет вид:

$$(x'+y'\sqrt{2})^2+(u'+v'\sqrt{2})^2=7+5\sqrt{2}.$$

Если числа x, y, u, v – рациональные, то и числа x', y', u', v' – рациональные. Таким образом, если наше уравнение имеет решение в рациональных числах, то и уравнение задачи 1164 имеет решение в рациональных числах, что, как мы установили, неверно.

Ответ: нет. □

11.5 Глава 5

Решение задачи 1166. Чтобы избавиться от модулей, будем использовать следующий факт: неравенство $|a| \leq b$ равносильно двойному неравенству $-b \leq a \leq b$, или, что то же самое, системе из двух неравенств $a \leq b$ и $a \geq -b$.

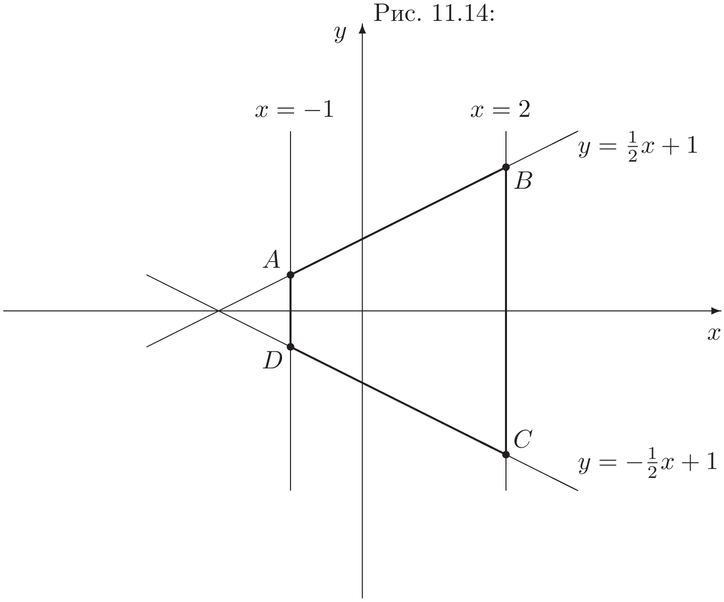
Изолируя модули в исходном неравенстве, имеем:

$$\left|y-\frac{1}{2}x^2\right| \leq 2+x-\left|y+\frac{1}{2}x^2\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y-\frac{1}{2}x^2 \leq 2+x-\left|y+\frac{1}{2}x^2\right| \\ y-\frac{1}{2}x^2 \geq -2-x+\left|y+\frac{1}{2}x^2\right| \end{array}\right.$$

Изолируя оставшиеся модули и повторяя это преобразование ещё раз, мы получим:

$$\left\{\begin{array}{l} y+\frac{1}{2}x^2 \leq -y+\frac{1}{2}x^2+x+2 \\ y+\frac{1}{2}x^2 \geq y-\frac{1}{2}x^2-x-2 \\ y+\frac{1}{2}x^2 \leq y-\frac{1}{2}x^2+x+2 \\ y+\frac{1}{2}x^2 \geq -y+\frac{1}{2}x^2-x-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y \leq \frac{1}{2}x+1 \\ x^2+x+2 \geq 0 \\ x^2-x-2 \leq 0 \\ y \geq -\frac{1}{2}x-1 \end{array}\right.$$

Рис. 11.14:



Первое неравенство последней системы задаёт полуплоскость под графиком прямой линии $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Второе неравенство выполнено при всех x и y (т.к. $D < 0$) и поэтому его можно не учитывать.

Третье неравенство, рассматриваемое как неравенство относительно одной неизвестной, задаёт отрезок $-1 \leq x \leq 2$. Однако, наша задача должна рассматриваться как задача с двумя переменными. Поскольку переменная y отсутствует, она может принимать произвольное значение. Поэтому на самом деле третье неравенство задаёт полосу, ограниченную двумя вертикальными прямыми $x = -1$ и $x = 2$.

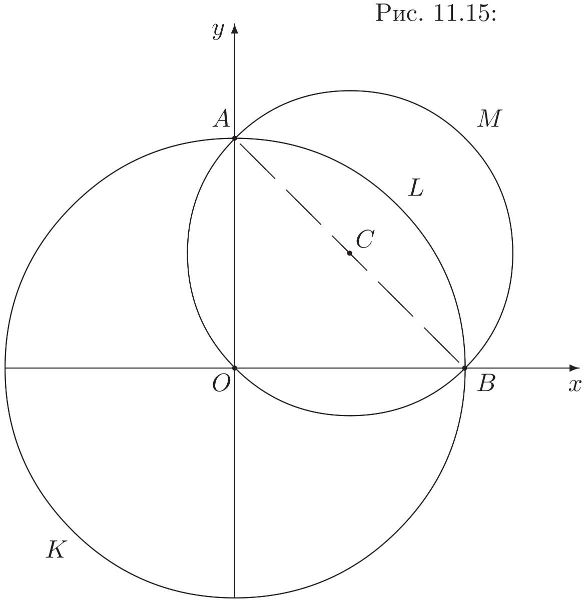
Четвертое неравенство задаёт полуплоскость над графиком прямой линии $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

Пересечение трёх указанных областей изображено на рисунке 11.14 – это трапеция $ABCD$, где $A = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$, $B = (2; 2)$, $C = (2; -2)$, $D = \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$. Её основания AD и BC равны 1 и 4 соответственно, высота равна 3. Поэтому площадь трапеции равна $\frac{1+4}{2} \cdot 3 = \frac{15}{2}$.

Ответ: $S = \frac{15}{2}$. $\square$

Решение задачи 1194. Исходное неравенство распадается на две си-

Рис. 11.15:



стемы

$$\begin{cases} x^2+y^2-x-y \geq 0 \\ x^2+y^2-1 \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2-x-y \leq 0 \\ x^2+y^2-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \\ x^2+y^2 \leq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \\ x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$$

В первой системе первое неравенство задаёт внешность круга (вместе с границей) с центром в точке $C\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ и радиусом $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Второе неравенство задаёт круг с центром в начале координат $O(0;0)$ и радиусом $R=1$. Их пересечение – это область $ALBM$, изображённая на рис. 11.15.

Аналогично, вторая система задаёт область $AOBK$.

Чтобы найти площади этих областей, найдём площади фигур $ACBO$ и $ALBC$.

Фигура $ACBO$ – это половина меньшего круга, так что $S_{ACBO}=\frac{\pi}{4}$.

Фигура $ALBC$ – это сегмент большего круга, соответствующий центральному углу $AOB=\frac{\pi}{2}$. Поэтому $S_{ALBC}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

Область $ALBM$ получается из половины меньшего круга выбрасыванием фигуры $ALBC$. Поэтому $S_{ALBM}=\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

Область $AOBK$ получается из большего круга выбрасыванием фигур $ACBO$ и $ALBC$. Поэтому $S_{AOBK}=\pi-\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}$.

Ответ: $S=\frac{\pi}{2}+1$. □

Решение задачи 1198. Выделим полные квадраты в левой части первого неравенства:

$$\left(\sqrt{2}(x+y)\right)^2 + (3y)^2 \leq 1,$$

и введём новые неизвестные $a = \sqrt{2}(x+y)$, $b = 3y$.

Поскольку a и b являются линейными функциями от x и y, мы легко можем найти обратное преобразование: $x = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{3}$, $y = \frac{b}{3}$.

Для новых неизвестных исходная система примет вид:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \leq 1, \\ b \geq 3 - 2\sqrt{2}a. \end{cases}$$

На координатной плоскости (a, b) первое неравенство этой системы задаёт круг радиуса 1 с центром в начале координат, в второе – полуплоскость над прямой $b = 3 - 2\sqrt{2}a$.

Соответствующая система из уравнений:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1, \\ b = 3 - 2\sqrt{2}a, \end{cases}$$

имеет единственное решение: $a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $b = \frac{1}{3}$. Это означает, что окружность $a^2 + b^2 = 1$ и прямая $b = 3 - 2\sqrt{2}a$ касаются в точке $a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $b = \frac{1}{3}$.

Эта точка является единственным элементом пересечения указанных выше круга и полуплоскости. Соответственно, исходная система имеет единственное решение $x = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$, $y = \frac{b}{3} = \frac{1}{9}$.

Ответ: $\left(\frac{5}{9}; \frac{1}{9}\right)$.□

Решение задачи 1201. Раскрывая модуль, получим, что исходное уравнение расщепляется на две системы:

$$\begin{cases} y \geq x \\ y = \frac{x}{x-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} y \leq x \\ 2y(2-x) = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение первой системы задаёт стандартную гиперболу, сдвинутую на 1 вверх и 1 вправо. В силу неравенства $y \geq x$ мы должны взять только часть этой гиперболы, лежащую выше прямой $y = x$.

Второе уравнение второй системы, в свою очередь, распадается на два уравнения: $y = 0$ и $x = 2$. Первое из них задаёт прямую линию, совпадающую с осью абсцисс, а второе – вертикальную прямую, проходящую через точку $x = 2$ на оси абсцисс. В силу неравенства $y \leq x$ мы должны взять только части этих прямых, лежащие ниже прямой $y = x$.

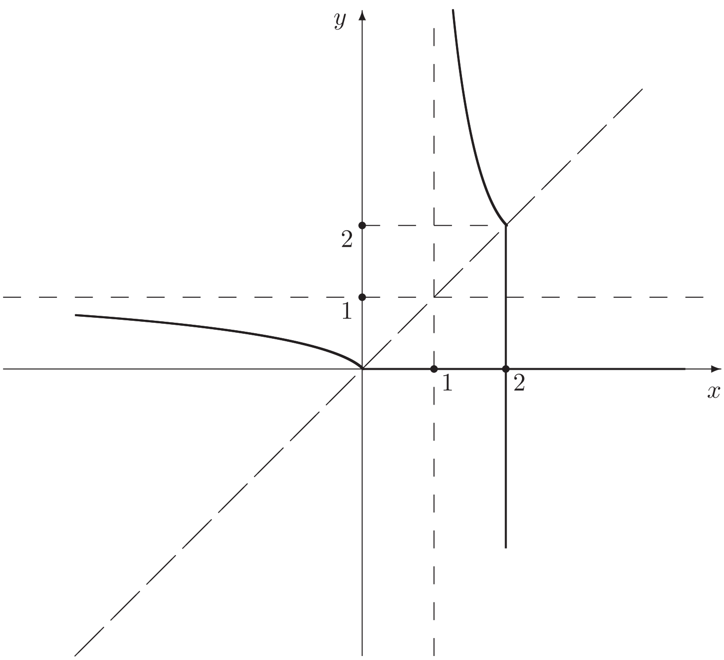
Итоговая фигура изображена на рис. 11.16.

□

Решение задачи 1220. Имея в виду, что первое неравенство является показательным, превратим в показательное и второе неравенство. Используя монотонность функции $f(t) = 4^t$, мы получим:

$$4^{x+3y} \geq 4^{2-\log_4 3} \Leftrightarrow 4^{x+3y} \geq \frac{16}{3} \Leftrightarrow 4^{x+y-1} \cdot 3 \cdot 4^{2y-1} \geq 1.$$

Рис. 11.16:



Теперь введём новые переменные $a = 4^{x+y-1}$ и $b = 3 \cdot 4^{2y-1}$; они, очевидно, принимают только положительные значения. Для них исходная система примет вид:

$$\begin{cases} a + b \leq 2, \\ ab \geq 1 \end{cases} \tag{11.81}$$

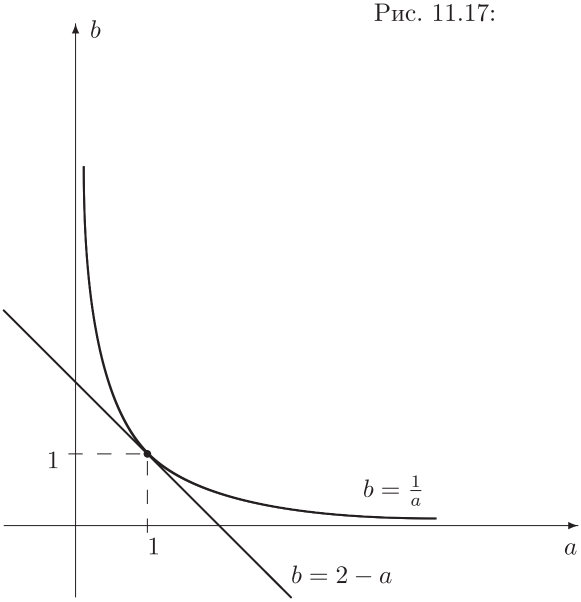
Первое неравенство системы на координатной плоскости $(a; b)$ задаёт полуплоскость под прямой $b = 2 - a$ (см. рис. 11.17), а второе неравенство (с учетом ограничений $a, b > 0$) – область в первом квадранте над гиперболой $b = \frac{1}{a}$.

Найдём точки пересечения линий $b = 2 - a$ и $b = \frac{1}{a}$:

$$2 - a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow 2a - a^2 = 1 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1.$$

Таким образом, эти линии пересекаются в единственной точке с абсциссой $a = 1$; из соотношения $b = 2 - a$ (или $b = \frac{1}{a}$) можно найти и ординату точки пересечения: $b = 1$. Соответственно, система (11.81) имеет единственное

Рис. 11.17:



решение: $a = 1$, $b = 1$. Возвращаясь к основным неизвестным, мы получим:

$$\begin{cases} 4^{x+y-1} = 1, \\ 3 \cdot 4^{2y-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ 2y - 1 = -\log_4 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\log_4 3}{2}, \\ y = \frac{1-\log_4 3}{2} \end{cases}$$

Систему (11.81) можно решить и более формальными рассуждениями (методом оценок). Переписывая эту систему в виде

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} \leq 1, \\ \sqrt{ab} \geq 1, \end{cases}$$

мы получим, что среднее арифметическое положительных чисел a и b меньше или равно их среднего геометрического. Поэтому эти числа равны между собой и равны 1.

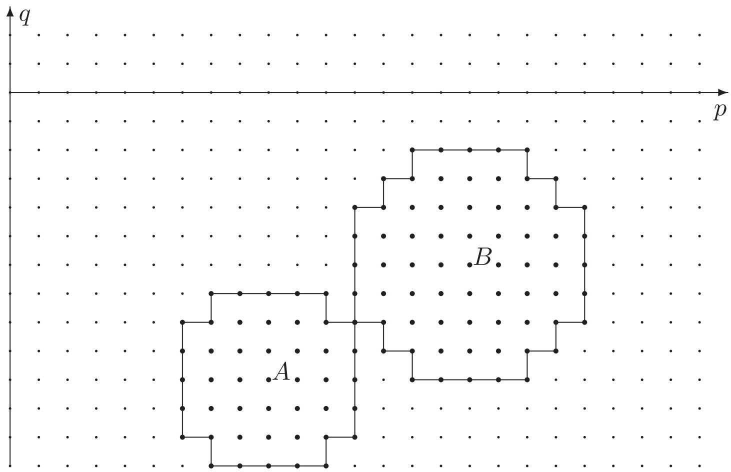
Ответ: $\left(\frac{1+\log_4 3}{2}; \frac{1-\log_4 3}{2}\right)$.□

Решение задачи 1239. Выделяя полные квадраты, перепишем исходную систему в виде:

$$\begin{cases} (p-9)^2 + (q+10)^2 < 15, \\ (p-16)^2 + (q+6)^2 < 21. \end{cases}$$

Если рассматривать p и q как непрерывные переменные, то первое неравенство системы задаёт внутренность круга (без границы) с центром в точке $A(9; -10)$ и радиусом $\sqrt{15}$. Второе неравенство задаёт внутренность круга с центром в точке $B(16; -6)$ и радиусом $\sqrt{21}$.

Рис. 11.18:



Если же p и q принимают только целые значения, то эти неравенства задают "созвездия" из точек двумерной целочисленной решетки, попадающих внутрь этих кругов. Чтобы наглядно представить вид этих множеств, удобно соединить граничные точки горизонтальными и вертикальными прямыми как это сделано на рис. 11.18.

Из этого рисунка ясно, что система имеет единственное решение $p = 12; q = -8$.

Ответ: $p = 12; q = -8$. □

11.6 Глава 6

Решение задачи 1245. Так как $72 = 8 \cdot 9$, натуральное число n делится на 72 тогда и только тогда, когда оно делится на 8 и на 9. В свою очередь,

1. натуральное число n делится делится на 8 тогда и только тогда, когда число, образованное тремя последними цифрами числа n, делится на 8. В нашем случае это означает, что число $\overline{31Y}$ должно делиться на 8, т.е. быть кратным 8. Выпишем фрагмент ряда чисел, кратных 8:

$$\ldots, 304, 312, 320, 328, 336, \ldots$$

Только одно из этих чисел имеет вид $\overline{31Y}$ – это число 312, так что $Y = 2$.

2. натуральное число n делится делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9. В нашем случае это означает, что число $18+X$ должно делиться на 9. Это равносильно тому, что X должно делиться на 9, а поскольку X – цифра, то $X = 0$ или $X = 9$.

Ответ: 705312, 795312. □

Решение задачи 1249. Пусть E_n – число, записанное n цифрами 1. Его можно переписать следующим образом:

$$E_n = \frac{1}{9} \cdot \underbrace{9\ldots9}_{n\ \text{цифр}} = \frac{1}{9} \cdot \left(1\underbrace{0\ldots0}_{n\ \text{цифр}} - 1\right) = \frac{1}{9} \cdot (10^n - 1)\,.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A &\equiv E_{2m} = \frac{1}{9} \cdot \left(10^{2m} - 1\right), \\ B &\equiv E_{m+1} = \frac{1}{9} \cdot \left(10^{m+1} - 1\right), \\ C &\equiv \underbrace{6\ldots6}_{m\ \text{цифр}} = 6 \cdot \underbrace{1\ldots1}_{m\ \text{цифр}} = 6E_m = \frac{6}{9} \cdot (10^m - 1)\,. \end{aligned}$$

Эти равенства позволяют записать число $X = A + B + C + 8$ как $\left(\frac{10^m+8}{3}\right)^2$. Число $10^m + 8$ в десятичной системе счисления записывается с помощью одной цифры 1, $m - 1$ цифр 0 и одной цифры 8. Поэтому сумма цифр этого числа равна 9, так что (в соответствии с признаком делимости на 3) это число делится на 3, т.е. число $\frac{10^m+8}{3}$ – целое; отметим, что это число записывается $m - 1$ цифрами 3 и одной цифрой 6 (в конце). □

Решение задачи 1250. Используя обозначения и результаты решения задачи 1249, мы можем записать данное число как

$$\begin{aligned} E_{2n} - 2 \cdot E_n &= \frac{1}{9} \cdot \left(10^{2n} - 1\right) - \frac{2}{9} \cdot (10^n - 1) = \frac{1}{9} \cdot (10^n - 1)^2 \\ &= \left(\frac{10^n - 1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot \underbrace{9\ldots9}_{n\ \text{раз}}\right)^2 = \left(\underbrace{3\ldots3}_{n\ \text{раз}}\right)^2. \end{aligned}$$

□

Решение задачи 1252. Запись n-го члена последовательности, a_n, в десятичной системе счисления содержит n цифр 4, затем $n - 1$ цифр 8 и в конце – одну цифру 9. Используя обозначения и результаты решения задачи 1249, мы можем записать это число следующим образом:

$$\begin{aligned} a_n &= 4 \cdot 10^n \cdot E_n + 8 \cdot 10 \cdot E_{n-1} + 9 \\ &= \frac{1}{9}\left(4 \cdot 10^n \cdot (10^n - 1) + 80 \cdot (10^{n-1} - 1) + 81\right) \\ &= \frac{1}{9}\left(4 \cdot 10^{2n} - 4 \cdot 10^n + 8 \cdot 10^n - 80 + 81\right) \\ &= \frac{1}{9}\left(4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1\right) = \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}\right)^2. \end{aligned}$$

Десятичная запись числа $2 \cdot 10^n + 1$ содержит одну цифру 1 и одну цифру 2 (остальные цифры – нули), так что это число делится на 3, т.е. число $\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}$ – целое. □

Решение задачи 1253. Запись n-го члена последовательности, a_n, в десятичной системе счисления содержит $n-1$ цифр 1, затем n цифр 2 и в конце – одну цифру 5. Используя обозначения и результаты решения задачи 1250, мы можем записать это число следующим образом:

$$\begin{aligned} a_n &= 10^{n+1} \cdot E_{n-1} + 2 \cdot 10 \cdot E_n + 5 \\ &= \frac{1}{9}\big(10^{n+1} \cdot (10^{n-1} - 1) + 20 \cdot (10^n - 1) + 45\big) \\ &= \frac{1}{9}\big(10^{2n} - 10 \cdot 10^n + 20 \cdot 10^n - 20 + 45\big) \\ &= \frac{1}{9}\big(10^{2n} + 10 \cdot 10^n + 25\big) = \left(\frac{10^n + 5}{3}\right)^2. \end{aligned}$$

Десятичная запись числа $10^n + 5$ содержит одну цифру 1 и одну цифру 5 (остальные цифры – нули), так что это число делится на 3, т.е. число $\frac{\cdot 10^n + 5}{3}$ – целое. □

Решение задачи 1254. Допустим, что число

$$E_n \equiv \underbrace{1 \dots 1}_{n \text{ цифр}} = N^2$$

для некоторого натурального N. Поскольку при любом n число E_n нечётное, число N также является нечётным, т.е. для некоторого целого $k \geq 0$ верно равенство $N = 2k + 1$.

Поэтому равенство $E_n = N^2$ можно записать в виде

$$E_n = 4k^2 + 4k + 1 \Leftrightarrow E_n - 1 = 4k(k+1). \tag{11.82}$$

Значит, число $E_n - 1$ делится на 4. С другой стороны, десятичная запись этого числа состоит из $n-1$ цифр 1 и цифры 0 (которая стоит в конце). Поэтому при $n \geq 2$ оно содержит по меньшей мере 2 цифры, причём число, образованное двумя последними цифрами – это 10. Число 10 не делится на 4, так что и число $E_n - 1$ не делится на 4. Поэтому при $n \geq 2$ число E_n не может быть полным квадратом.

При $n = 1$ число $E_n = 1$ и, конечно, является полным квадратом.

Ответ: $n = 1$. □

Решение задачи 1255. Число E_{3n}, составленное из $3n$ цифр 1, можно записать в виде:

$$\begin{aligned} E_{3n} &= \underbrace{1 \dots 1}_{n}\underbrace{1 \dots 1}_{n}\underbrace{1 \dots 1}_{n} \\ &= \underbrace{1 \dots 1}_{n}\underbrace{0 \dots 0}_{2n} + \underbrace{1 \dots 1}_{n}\underbrace{0 \dots 0}_{n} + \underbrace{1 \dots 1}_{n} \\ &= 10^{2n} \cdot E_n + 10^n \cdot E_n + E_n = \big(10^{2n} + 10^n + 1\big) \cdot E_n. \end{aligned}$$

Десятичная запись числа $10^{2n}+10^n+1$ содержит три цифры 1, а остальные цифры – 0. Поэтому сумма цифр этого числа равна 3, так что оно делится на 3, но не делится на 9, т.е.

$$E_{3n} = 3x_n E_n,$$

где число x_n не делится на 3.

Теперь для данного числа E_{243} мы имеем:

$$\begin{aligned} E_{243} &= E_{3\cdot 81} = 3x_{81}E_{81} = 3x_{81}E_{3\cdot 27} \\ &= 3x_{81}\cdot 3x_{27}E_{27} = 3^2x_{81}x_{27}E_{3\cdot 9} \\ &= 3^2x_{81}x_{27}\cdot 3x_9E_9 = 3^3x_{81}x_{27}x_9E_{3\cdot 3} \\ &= 3^3x_{81}x_{27}x_9\cdot 3x_3E_3 = 3^5x_{81}x_{27}x_9x_3x_1E_1. \end{aligned}$$

Число $E_1 = 1$, а числа x_{81}, x_{27}, x_9, x_3, x_1 не делятся на 3. Поэтому в разложении числа E_{243} на простые множители число 3 входит в пятой степени. Это влечёт, что E_{243} делится на $3^5 = 243$. □

Решение задачи 1256. Число 55, очевидно, делится на 11.

В силу признака делимости на 11 число 100 001 также делится на 11 (делением в столбик легко установить, что частное равно 9 091). Поэтому и число $100\,007\cdot 100\,013\cdot 100\,001$ делится на 11.

Следовательно, исходное число, как сумма двух чисел, делящихся на 11, также делится на 11.

Ответ: нет, т.к. данное число делится на 11. □

Решение задачи 1258. Рассмотрим выражение $4q-3p$. Его можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} 4q-3p &= 4\cdot\overline{bca} - 3\cdot\overline{abc} = 4(100b+10c+a) - 3(100a+10b+c) \\ &= 370b+37c-296a = 37(10b+c-8a). \end{aligned}$$

Поскольку числа 4 и 3 не делятся на 37, это равенство влечёт, что, если одно из чисел p или q делится на 37, то и другое делится.

Аналогично,

$$\begin{aligned} 4p-3r &= 4\cdot\overline{abc} - 3\cdot\overline{cab} = 4(100a+10b+c) - 3(100c+10a+b) \\ &= 370a+37b-296c = 37(10a+b-8c). \end{aligned}$$

Поэтому, если одно из чисел p или r делится на 37, то и другое делится.

Ответ: эти числа обязательно делятся на 37. □

Решение задачи 1259. Обозначим число $4^n+15n-1$ через x_n и применим для доказательства его делимости на 9 метод математической индукции:

основание индукции: число x_1 равно $4+15-1=18$ – оно делится на 9;

шаг индукции: допустим, что число x_n делится на 9 и докажем, что тогда и число x_{n+1} делится на 9. С этой целью преобразуем выражение

$x_{n+1} = 4^{n+1}+15(n+1)-1$ так, чтобы появилось выражение $x_n = 4^n+15n-1$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4 \cdot 4^n + 15n + 14 \\ &= 4 \cdot (4^n + 15n - 1 - 15n + 1) + 15n + 14 \\ &= 4x_n - 9 \cdot (5n - 2). \end{aligned}$$

Так как число $9 \cdot (5n-2)$ делится на 9 при любом n, предположение, что x_n делится на 9 влечет, что число x_{n+1} также делится на 9. □

Решение задачи 1260. Пусть $p < n$ – какой-либо делитель числа n, отличный от n. Тогда $p \le n-1$ и поэтому p находится среди чисел $1, 2 \ldots, n-1$. Отсюда следует, что $(n-1)!$ делится на p.

Далее, по условию $(n-1)!+1$ делится на n. Поскольку n делится на p, тогда $(n-1)!+1$ делится и на p.

Мы установили, что на p делятся числа $(n-1)!$ и $(n-1)!+1$. Следовательно на p делится и их разность, т.е. число 1, а тогда $p = 1$. Это и означает, что p – простое число. □

Решение задачи 1262. Для доказательства делимости числа $A_k = 5^{5k+1}+4^{5k+2}+3^{5k}$, $k \in Z_+$, на 11 будем использовать метод математической индукции:

основание индукции: если $k = 0$, то $A_0 = 5^1 + 4^2 + 3^0 = 22$ – делится на 11.

шаг индукции: допустим, что A_k делится на 11. Чтобы доказать, что тогда и A_{k+1} делится на 11, выразим $A_{k+1} = 5^{5k+6} + 4^{5k+7} + 3^{5k+5}$ через A_k. Сделать это можно разными способами. Например, из равенства $A_k = 5^{5k+1}+4^{5k+2}+3^{5k}$ можно исключить 5^{5k+1} по формуле $5^{5k+1} = A_k - 4^{5k+2} - 3^{5k}$. Поэтому

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= 5^5 \cdot \left(A_k - 4^{5k+2} - 3^{5k}\right) + 4^{5k+7} + 3^{5k+5} \\ &= 5^5 A_k - 4^{5k+2}\left(5^5 - 4^5\right) - 3^{5k}\left(5^5 - 3^5\right) \\ &= 5^5 A_k - 4^{5k+2} \cdot 11 \cdot 191 - 3^{5k} \cdot 11 \cdot 262. \end{aligned}$$

Поскольку каждое слагаемое делится на 11, то и их сумма делится на 11. □

Решение задачи 1263. Если $n = 1; 2; 3$, то число $2^n - 1$ будет равно $1; 3; 7$ соответственно. На 7 делится только число 7, соответствующее $n = 3$.

Пусть теперь $n > 3$. Представим число $2^n - 1$ как сумму n членов геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем 2:

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}.$$

Начнём разбивать слагаемые на группы по 3 члена в каждой. Если $n = 3k$, то всего будет k групп:

$$S_{3k} = \left(1 + 2 + 2^2\right) + \left(2^3 + 2^4 + 2^5\right) + \cdots + \left(2^{3k-3} + 2^{3k-2} + 2^{3k-1}\right).$$

В каждой группе можно вынести за скобку множитель, равный первому из трёх слагаемых в этой группе. При этом в скобках останется одна и та же сумма $1 + 2 + 2^2 = 7$:

$$S_{3k} = 7 + 2^3 \cdot 7 + 2^6 \cdot 7 + \cdots + 2^{3k-3} \cdot 7 = 7 \cdot \left(1 + 2^3 + 2^6 + \cdots + 2^{3k-3}\right).$$

Поэтому S_{3k} делится на 7.

Если n не делится на 3, т.е. $n = 3k+1$ или $n = 3k+2$, то при разбиении суммы S_n на группы по 3 члена в каждой, последняя группа будет состоять из одного члена 2^{3k} (если $n = 3k+1$) или двух членов $2^{3k} + 2^{3k+1} = 2^{3k} \cdot 3$ (если $n = 3k+2$). Полные группы (в которых по 3 слагаемых) образуют сумму S_{3k}:

$$S_{3k+1} = S_{3k} + 2^{3k}, \quad S_{3k+2} = S_{3k} + 2^{3k} \cdot 3.$$

Поскольку S_{3k} делится на 7, а числа 2^{3k} и $2^{3k} \cdot 3$ – нет, то и числа S_{3k+1}, S_{3k+2} не делятся на 7.

Введённое в ходе решения этой задачи число

$$S_n = 2^n - 1 = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$$

связано с введённым при решении задачи 1249 числом E_n, записанным n цифрами 1:

$$E_n = \underbrace{1\ldots1}_{n \text{ цифр}} = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1}.$$

Оба числа являются значениями одного и того же многочлена

$$p_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1},$$

но в разных точках: $x = 2$ для числа S_n, $x = 10$ для числа E_n. При использовании двоичной системы счисления число S_n будет записано последовательностью из n цифр 1, т.е. будет просто совпадать с E_n по внешней форме.

Использовавшийся при решении как нашей задачи, так и задачи 1249 приём с разбиением "длинной" суммы на повторяющиеся группы, можно применить и к многочлену $p_n(x)$. Это даст несколько простых формул, которые позволят просто решать различные задачи на целые числа.

Самая простая формула связывает $p_{n+m}(x)$ с $p_n(x)$ и $p_m(x)$:

$$\begin{aligned} p_{n+m}(x) &= \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}\right) + \left(x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots + x^{n+m-1}\right) \\ &= \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}\right) + x^n \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1}\right) \\ &= p_n(x) + x^n \cdot p_m(x). \end{aligned} \tag{11.83}$$

Далее,

$$\begin{aligned} p_{kn}(x) &= \left(1 + x + \cdots + x^{n-1}\right) + \left(x^n + x^{n+1} + \cdots + x^{2n-1}\right) \\ &+ \cdots + \left(x^{(k-1)n} + x^{(k-1)n+1} + \cdots + x^{kn-1}\right) \\ &= \left(1 + x + \cdots + x^{n-1}\right) + x^n \left(1 + x + \cdots + x^{n-1}\right) \\ &+ \cdots + x^{(k-1)n} \left(1 + x + \cdots + x^{n-1}\right) \\ &= p_n(x) + x^n \cdot p_n(x) + \cdots + x^{(k-1)n} \cdot p_n(x) \\ &= p_n(x) \cdot \left(1 + x^n + \cdots + x^{(k-1)n}\right) = p_n(x) \cdot p_k\left(x^n\right). \end{aligned} \tag{11.84}$$

Применяя к многочлену $p_{kn+m}(x)$ сначала формулу (11.83), а затем формулу (11.84), мы получим более общую формулу:

$$p_{kn+m}(x) = p_{kn}(x) + x^{kn} \cdot p_m(x) = p_n(x) \cdot p_k\left(x^n\right) + x^{kn} \cdot p_m(x). \qquad (11.85)$$

Если определить $p_0(x)$ как 0 (сумма, содержащая 0 слагаемых равна 0 – это обычное соглашение в математике) и учесть, что $p_1(x) \equiv 1$, то формула (11.85) в качестве частных случаев будет давать формулы (11.83) (случай $k = 1$) и (11.84) (случай $m = 0$).

В качестве примера применения этих формул докажем, что число $S_N = 2^N - 1$ делится на число $S_n = 2^n - 1$ тогда и только тогда, когда N делится на n, т.е. $N = kn$.

Если $N = kn + m$, где $0 \le m \le n - 1$ – остаток от деления N на n, то равенство (11.85) даёт:

$$\begin{aligned} S_N &= p_N(2) = p_n(2) \cdot p_k\left(2^n\right) + 2^{kn} \cdot p_m(2) \\ &= S_n \cdot A + 2^{kn} \cdot S_m, \end{aligned} \qquad (11.86)$$

где $A = p_k\left(2^n\right)$ – целое число. Поэтому S_N делится на S_n тогда и только тогда, когда $2^{kn} \cdot S_m$ делится на S_n. Поскольку S_n – нечётное число, это означает делимость числа S_m на число S_n. Но $m < n$. Поэтому $S_m < S_n$, так что S_m может делиться на S_n тогда и только тогда, когда $S_m = 0$, т.е. $m = 0$. Это означает делимость N на n без остатка.

Ответ: число $2^n - 1$ делится на 7 тогда и только тогда, когда n делится на 3. □

Решение задачи 1266. Исходное уравнение можно переписать в виде:

$$(xy)^y = \left(\frac{x}{y}\right)^x.$$

Отсюда следует, что $x = ny$ для некоторого натурального n. Это позволяет переписать уравнение как

$$(ny^2)^y = n^{ny} \Leftrightarrow ny^2 = n^n \Leftrightarrow y^2 = n^{n-1} \Leftrightarrow y = n^{\frac{n-1}{2}}.$$

Соответственно, $x = n \cdot n^{\frac{n-1}{2}} = n^{\frac{n+1}{2}}$.

Ясно, что если число n нечётно, то числа $x = n^{\frac{n+1}{2}}$ и $y = n^{\frac{n-1}{2}}$ будут целыми. Если же n чётно, то x и y будут целым тогда и только тогда, когда n является полным квадратом.

Итак, общее решение исходного уравнения имеет вид: $(x, y) = \left(n^{\frac{n+1}{2}}, n^{\frac{n-1}{2}}\right)$, где $n = 1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 17, \ldots$.

Число $x = n^{\frac{n+1}{2}}$ возрастает по мере роста n, причём $x = 125$ при $n = 5$, $x = 2401$ при $n = 7$. Итак, наименьшее значение x, превосходящее 2000, равно 2401, а соответствующее значение $y = 7^3 = 343$. Поэтому $x - y = 2058$. □

Решение задачи 1267. Предположим, что некоторое натуральное число N не является простым, и выясним, какими могут быть его простые делители.

Пусть p – наименьший простой делитель числа N. Тогда $N = p \cdot a$. Число a не обязано быть простым, но в любом случае оно больше или равно p. Действительно, если бы $a < p$, то разложив a в произведение простых множителей, мы бы нашли простой делитель числа N, который был бы меньше, чем p.

Неравенство $p \leq a$ влечёт, что $p^2 \leq p \cdot a$, т.е. неравенство $p^2 \leq N$. Таким образом, если число N – составное, то оно имеет простой делитель, не превосходящий $\sqrt{N}$. Иначе говоря, если N не делится ни на одно простое число, меньшее или равное $\sqrt{N}$, то N – простое.

В нашем случае $\sqrt{N} = \sqrt{1991} \in (44; 45)$. Поэтому нужно проверить простые числа, не превосходящие 44, т.е. числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41. Последовательное деление числа 1991 на эти числа дает, что 1991 не делится на 2, 3, 5, 7, но делится на 11: $1991 = 11 \cdot 181$.

Чтобы разложить на простые множители число 181, нужно проверить простые числа, не превосходящие $\sqrt{181} \in (13; 14)$. С учётом того, что 1991 не делится на 2, 3, 5, 7, проверить нужно только числа 11 и 13. Вычисления показывают, что 181 не делится ни на одно из них. Следовательно, 181 – простое число.

Ответ: $1991 = 11 \cdot 181$. □

Решение задачи 1268. Для подсчёта количества делителей натурального числа N обычно используется следующий приём.

Разложим число N на простые множители:

$$N = p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k},$$

где все показатели $n_1, \dots, n_k$ – натуральные числа (т.е. простые множители $p_1, \dots, p_k$ действительно присутствуют в разложении.

Тогда делителями числа N будут все числа d вида

$$d = p_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k},$$

где показатели $m_1, \dots, m_k$ – неотрицательные целые числа (если $m_i = 0$, то простой множитель p_i отсутствует в разложении числа d) и только они.

В силу единственности разложения натурального числа на простые множители, соответствие между делителями числа N и упорядоченными наборами $(m_1, \dots, m_k)$ из k неотрицательных целых чисел $m_1 \in [0; n_1], \dots, m_k \in [0; n_k]$ взаимно однозначное. Таким образом, можно подсчитывать количество таких наборов.

Этот подсчёт базируется на следующей простой теореме: *из n чисел (или любых других предметов) $x_1, \dots, x_n$ и m чисел (или любых других предметов) $y_1, \dots, y_m$ можно образовать ровно nm упорядоченных пар вида $(x_i; y_j)$.*

Для её доказательства расположим все пары $(x_i; y_j)$ в прямоугольную таблицу (она называется матрицей)

$$\begin{matrix} (x_1; y_1) & (x_1; y_2) & \dots & (x_1; y_m) \\ (x_2; y_1) & (x_2; y_2) & \dots & (x_2; y_m) \\ & & \dots & \\ (x_n; y_1) & (x_n; y_2) & \dots & (x_n; y_m) \end{matrix}$$

В этой таблице ровно n строк (по числу предметов из списка $x_1, \ldots, x_n$) и m столбцов (по числу предметов из списка $y_1, \ldots, y_m$). Поэтому в каждой строке находится ровно m пар $(x_i; y_j)$, а поскольку имеется ровно n строк, общее число пар равно mn.

Предположим теперь, что кроме наборов $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_m$, имеется ещё один набор из k предметов $z_1, \ldots, z_k$ и мы образуем из них упорядоченные тройки вида $(x_i; y_j; z_l)$. Каждую такую тройку можно рассматривать как пару $(u_p; z_l)$, где u_p – это пара $(x_i; y_j)$. Число предметов вида $(x_i; y_j)$ равно nm. Поэтому число троек $(x_i; y_j; z_l)$ равно $(nm) \cdot k = nmk$.

Подобным же образом можно установить, что общее число упорядоченных наборов $(x_i; y_j; \ldots; z_l)$ произвольной длины равно произведению числа предметов, которые могут стоять на первом месте, на число предметов, которые могут стоять на втором месте, и т.д., на число предметов, которые могут стоять на последнем месте.

Поэтому общее количество упорядоченных наборов $(m_1, \ldots, m_k)$ из k неотрицательных целых чисел $m_1 \in [0; n_1], \ldots, m_k \in [0; n_k]$ (т.е. количество делителей числа $N = p_1^{n_1} \cdot \ldots p_k^{n_k}$) равно $(n_1 + 1) \cdot \cdots \cdot (n_k + 1)$.

Чтобы применить изложенные выше общие соображения, разложим число 210 на простые множители: $210 = 7 \cdot 30 = 7 \cdot 5 \cdot 6 = 7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3$. Следовательно, разложение числа 210^{37} на простые множители имеет вид: $210^{37} = 2^{37} \cdot 3^{37} \cdot 5^{37} \cdot 7^{37}$, так что общее число делителей числа 210^{37} равно 38^4.

Ответ: 38^4. □

Решение задачи 1274. Рассмотрим выражение в левой части как квадратный трёхчлен относительно x (неизвестную y будем считать параметром). Тогда $D = 25y^2 - 24y^2 = y^2$, $x_{1,2} = \frac{-5y \pm y}{6} = -y; -\frac{2y}{3}$. Поэтому левую часть нашего уравнения можно разложить на линейные множители:

$$(x + y)(3x + 2y) = 7. \tag{11.87}$$

Поскольку числа x, y – целые, множители $x+y$, $3x+2y$ также целые, т.е. равенство (11.87) даёт разложение простого числа 7 на два целых множителя. Это можно сделать только четырьмя следующими способами:

$$7 = 1 \cdot 7 = 7 \cdot 1 = (-1) \cdot (-7) = (-7) \cdot (-1).$$

Соответственно, уравнение (11.88) расщепляется на 4 системы:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 7 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -1 \\ 3x + 2y = -7 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -7 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$$

Каждая из этих систем имеет единственное решение, причём значения неизвестных являются целыми числами.

Ответ: $\{(5; -4), (-13; 20), (-5; 4), (13; -20)\}$. □

Решение задачи 1276. Разложим число 2025 на простые множители и перепишем исходное уравнение в виде:

$$(x + 2y)(x - 2y) = 3^4 \cdot 5^2.$$

В силу единственности разложения целого числа на простые множители, это равенство равносильно совокупности систем вида

$$\begin{cases} x + 2y = a, \\ x - 2y = b, \end{cases}$$

где $a = \pm 3^n \cdot 5^m$, $b = \pm 3^{4-n} \cdot 5^{2-m}$ для некоторых $n = 0, 1, 2, 3, 4$ и $m = 0, 1, 2$, причём знаки в правых частях выбираются одинаковыми (либо два знака "$+$", либо два знака "$-$"). Число n можно выбрать 5 способами. Число m можно выбрать 3 способами. Поэтому имеется ровно 15 пар $(n; m)$ таких, что $n = 0, 1, 2, 3, 4$ и $m = 0, 1, 2$. Поскольку между парами $(a; b)$ и парами $(n; m)$ имеется взаимно однозначное соответствие, число положительных пар $(a; b)$ равно 15. С учётом знаков мы получим 30 пар. Соответственно число систем равно 30.

Каждая из этих систем имеет единственное решение в *действительных* числах:

$$\begin{cases} x = \frac{a+b}{2}, \\ y = \frac{a-b}{4}. \end{cases}$$

Соответствие между парами $(a; b)$ и этими парами $(x; y)$ – взаимно однозначное. Следовательно, имеется ровно 30 различных пар $(x; y)$. Пара $(x; y)$ будет удовлетворять условию задачи тогда и только тогда, когда число $(a+b)$ – чётное, а число $(a - b)$ делится на 4.

Для всех возможных пар $(a; b)$ числа a и b – нёчетные. Поэтому числа $(a + b)$ и $(a - b)$ – чётные, т.е. $x = \frac{a+b}{2}$ обязательно будет числом целым, в то время как целочисленность $y = \frac{a-b}{4}$ на этом этапе гарантировать ещё нельзя.

Для завершения решения достаточно выяснить, при каких $a = 3^n \cdot 5^m$, $b = 3^{4-n} \cdot 5^{2-m}$, где $n = 0, 1, 2, 3, 4$ и $m = 0, 1, 2$, число $a - b$ будет делиться на 4 (для пары $(a'; b') = (-a; -b)$ ответ будет таким же, как и для пары $(a; b)$). Для этого отметим, что

$$a = (4 - 1)^n \cdot (4 + 1)^m = (4u + (-1)^n) \cdot (4v + 1) = 4w + (-1)^n$$

для некоторого целого w. Поскольку b имеет такой же вид, что и a, для некоторого целого q верно равенство $b = 4q + (-1)^{4-n}$. Тогда $a - b = 4(w - q)$ и потому делится на 4.

Таким образом, все 30 пар $(x; y) = \left(\frac{a+b}{2}; \frac{a-b}{4}\right)$ будут целочисленными.

Ответ: 30 пар. □

Решение задачи 1279. Допустим противное, что $\sqrt[3]{2}$ – число рациональное. Тогда существуют натуральные m, n такие, что $\sqrt[3]{2} = \frac{m}{n}$. Избавляясь от радикала и дроби, получим

$$m^3 = 2n^3. \tag{11.88}$$

Разложим числа m и n на простые множители (мы явно указываем только простой множитель 2): $m = 2^a \cdot \ldots$, $n = 2^b \cdot \ldots$, где a, b – неотрицательные целые числа (отсутствие простого множителя 2 в разложении означает, что соответствующий показатель степени равен 0).

Тогда равенство (11.88) примет вид:

$$2^{3a} \cdot \dots = 2^{3b+1} \cdot \dots$$

В силу единственности разложения натурального числа на простые множители отсюда следует равенство

$$3a = 3b + 1 \Leftrightarrow 3(a - b) = 1,$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает наше утверждение. □

Решение задачи 1284. В соответствии с определением корня, число $x_0 = 1 + \sqrt{3}$ является корнем уравнения

$$3x^3 + mx^2 + nx + 12 = 0$$

тогда и только тогда, когда при подстановке на место неизвестной получится верное числовое равенство:

$$3(1 + \sqrt{3})^3 + m(1 + \sqrt{3})^2 + n(1 + \sqrt{3}) + 12 = 0. \qquad (11.89)$$

Степени иррационального двучлена $1+\sqrt{3}$ являются иррациональными двучленами вида $a + b\sqrt{3}$, где a и b – натуральные числа:

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{3})^2 &= 1 + 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3},\\ (1 + \sqrt{3})^3 &= 1 + 3\sqrt{3} + 3(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 = 10 + 6\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Поэтому равенство (11.89) можно переписать в виде:

$$3(10 + 6\sqrt{3}) + m(4 + 2\sqrt{3}) + n(1 + \sqrt{3}) + 12 = 0,$$

что равносильно равенству

$$(42 + 4m + n) + (18 + 2m + n)\sqrt{3} = 0. \qquad (11.90)$$

Дальнейшее решение задачи будет базироваться на общем утверждении, которое полезно и при решении других задач.

Утверждение 1. *Если $a+bx = c+dx$, где a, b, c, d – рациональные числа, а x – число иррациональное, то*

$$\begin{cases} a = c,\\ b = d.\end{cases}$$

Действительно, равенство $a + bx = c + dx$ равносильно равенству $(b - d)x = c - a$. Если $b - d \neq 0$, то $x = \frac{c-a}{b-d}$ и потому число x является рациональным, что противоречит исходному предположению. Значит, $b - d = 0$, а тогда из равенства $(b - d)x = c - a$ следует, что $c - a = 0$.

Отметим, что это утверждение (при $x = \sqrt{2}$) мы использовали при решении задачи 1164.

Используя Утверждение 1, можно гарантировать, что равенство (11.90) равносильно системе

$$\begin{cases} 42 + 4m + n = 0, \\ 18 + 2m + n = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $m = -12$, $n = 6$ (которое, кроме того, является целочисленным).

Ответ: $m = -12; n = 6$. $\square$

Решение задачи 1285. Решение задачи будет базироваться на общем утверждении, которое полезно и при решении других задач.

Утверждение 1. *Если натуральное число N не является полным квадратом (так что $\sqrt{N}$ – число иррациональное), то при любом натуральном n числа $(1+\sqrt{N})^n$ и $(1-\sqrt{N})^n$ можно представить в виде $A_n + \sqrt{N}B_n$ и $A_n - \sqrt{N}B_n$ соответственно, где A_n и B_n – натуральные числа.*

Для доказательства этого утверждения рассмотрим выражение $(1+x)^n$. Очевидно, что после перемножения n двучленов $1 + x$ (что означает раскрытие скобок и приведение подобных) мы получим многочлен степени n с натуральными коэффициентами:

$$(1 + x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n. \tag{11.91}$$

Ясно, что $a_0 = 1$, $a_n = 1$. Остальные коэффициенты также могут быть выписаны в явном виде (формула бинома Ньютона):

$$a_k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

но точный вид коэффициентов a_k не играет никакой роли в дальнейших рассуждениях.

Тождество (11.91) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} (1 + x)^n &= (a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots) + x(a_1 + a_3x^2 + a_5x^4 + \ldots) \\ &\equiv A_n(x) + x \cdot B_n(x). \end{aligned}$$

Поскольку в многочлены $A_n(x)$ и $B_n(x)$ входят только чётные степени переменной x, при $x = \pm\sqrt{N}$ мы получим:

$$\begin{aligned} (1 \pm \sqrt{N})^n &= (a_0 + a_2N + a_4N^2 + \ldots) \pm \sqrt{N}(a_1 + a_3N + a_5N^2 + \ldots) \\ &\equiv A_n \pm \sqrt{N} \cdot B_n. \end{aligned}$$

Отметим, что в силу Утверждения 1 из решения задачи 1284 коэффициенты A_n и B_n определены однозначно.

Для небольших значений n и конкретных N коэффициенты A_n и B_n легко выписать:

1. равенство $(1 + \sqrt{N})^1 = 1 + \sqrt{N}$ влечёт, что $A_1 = 1;\ B_1 = 1;$

2. равенство $(1+\sqrt{N})^2 = (1+N)+2\sqrt{N}$ влечёт, что $A_2 = 1+N;\ B_2 = 2;$
3. равенство $(1+\sqrt{N})^3 = (1+3N)+(3+N)\sqrt{N}$ влечёт, что $A_3 = 1+3N;\ B_3 = 3+N$.

Для подсчёта коэффициентов A_n и B_n для больших значений n удобно пользоваться рекуррентной формулой, которая может быть получена следующим образом.

Рассмотрим выражение $(1+\sqrt{N})^{n+1}$. Оно равно

$$(1+\sqrt{N})^n\cdot(1+\sqrt{N}) = (A_n+B_n\sqrt{N})\cdot(1+\sqrt{N}) = (A_n+NB_n)+(A_n+B_n)\sqrt{N}.$$

Поэтому

$$A_{n+1} = A_n + NB_n,\ B_{n+1} = A_n + B_n.$$

Для фигурирующего в нашей задаче числа $N = 13$ мы имеем:

$$\begin{array}{ll} A_1 = 1, & B_1 = 1; \\ A_2 = 14, & B_2 = 2; \\ A_3 = 40, & B_3 = 16; \\ A_{n+1} = A_n + 13B_n, & B_{n+1} = A_n + B_n. \end{array} \tag{11.92}$$

После этих предварительных теоретических рассмотрений займёмся непосредственно нашей задачей.

Прежде всего отметим, что исходное уравнение

$$xa^{z+1} = ya^{z-1} - a, \text{ где } a = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}, \tag{11.93}$$

фактически является системой из двух уравнений; первое из них получается при выборе в выражении $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$ знака “+”, а второе – при выборе знака “−”.

Далее, уравнение (11.93) является линейным относительно x и y. Будем поэтому рассматривать z как параметр и решать это уравнение при фиксированном значении z.

Чтобы лучше понять суть метода решения, начнём с частных случаев $z = 1$ и $z = 2$. Кроме того, как мы увидим позже, эти случаи – особые.

При $z = 1$ уравнение (11.93) примет вид:

$$x\left(\tfrac{-1\pm\sqrt{13}}{6}\right)^2 = y - \tfrac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$$
$$\Updownarrow$$
$$x\tfrac{7\mp\sqrt{13}}{18} = y + \tfrac{1\mp\sqrt{13}}{6}$$
$$\Updownarrow$$
$$\tfrac{7x}{18} \mp \tfrac{x}{18}\sqrt{13} = \left(y+\tfrac{1}{6}\right) \mp \tfrac{1}{6}\sqrt{13}$$

Используя Утверждение 1 из решения задачи 1284 можно гарантировать, что это равенство равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{7x}{18} = y + \frac{1}{6}, \\ \frac{x}{18} = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 1 \end{cases}$$

Итак, для $z = 1$ уравнение (11.93) имеет и притом единственное решение в натуральных числах: $x = 3$, $y = 1$ (на самом деле можно утверждать, что найденное решение – единственное решение в рациональных числах). Это, в частности, дает ответ на первый вопрос задачи: в качестве требуемой тройки натуральных чисел x, y, z можно взять $z = 1$, $x = 3$, $y = 1$.

При $z = 2$ уравнение (11.93) примет вид:

$$xa^3 = ya - a \Leftrightarrow xa^2 = y - 1.$$

Поскольку число a^2 иррационально, а числа x и $y-1$ являются рациональными, это равенство равносильно системе

$$\begin{cases} x = 0, \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

Итак, для $z = 2$ уравнение (11.93) имеет и притом единственное решение в рациональных числах: $x = 0$, $y = 1$. Поскольку полученное значение x не является натуральным числом, для $z = 2$ уравнение (11.93) не имеет решений в натуральных числах.

Пусть теперь $z \geq 3$. Для упрощения дальнейших преобразований разделим равенство (11.93) на a^{z-1} и обозначим $z - 2$ через n:

$$xa^2 = y - \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Поскольку для $a = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$ выражение $\frac{1}{a}$ равно

$$\frac{6}{-1 \pm \sqrt{13}} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2},$$

наше уравнение примет вид:

$$x\frac{(-1 \pm \sqrt{13})^2}{36} = y - \frac{(1 \pm \sqrt{13})^n}{2^n}.$$

С помощью Утверждения 1 степени иррациональных двучленов можно представить в виде иррациональных двучленов:

$$x\frac{7 \mp \sqrt{13}}{18} = y - \frac{A_n \pm \sqrt{13}B_n}{2^n}.$$

Как и в случаях $z = 1$, $z = 2$, применение Утверждения 1 из решения задачи 1284 даёт систему

$$\begin{cases} \frac{7x}{18} = y - \frac{A_n}{2^n}, \\ \frac{x}{18} = \frac{B_n}{2^n} \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$\begin{cases} x = \frac{18B_n}{2^n}, \\ y = \frac{A_n+7B_n}{2^n}. \end{cases} \tag{11.94}$$

Поскольку числа A_n и B_n – натуральные, как x, так и y являются положительными рациональными числами.

Покажем, что на самом деле числа $x_n = \frac{18B_n}{2^n}$ и $y_n = \frac{A_n+7B_n}{2^n}$ являются целыми. Для конкретных значений n этот вывод легко получить из явных формул (11.92) для A_n и B_n:

$$\begin{aligned} x_1 &= 9, & y_1 &= 4, \\ x_2 &= 9, & y_2 &= 7, \\ x_3 &= 36, & y_3 &= 19. \end{aligned}$$

В общем случае для доказательства целочисленности x_n и y_n воспользуемся рекуррентными формулами (11.92) для A_n, B_n, которые дают рекуррентные формулы для x_n, y_n:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{18B_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{18A_n + 18B_n}{2^{n+1}} = \frac{9A_n + 9B_n}{2^n} \\ &= \frac{9(A_n + 7B_n) - 3 \cdot 18B_n}{2^n} = 9y_n - 3x_n, \\ y_{n+1} &= \frac{A_{n+1} + 7B_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{A_n + 13B_n + 7A_n + 7B_n}{2^{n+1}} \\ &= \frac{4A_n + 10B_n}{2^n} = \frac{4(A_n + 7B_n) - 18B_n}{2^n} = 4y_n - x_n. \end{aligned}$$

Поскольку числа x_1 и y_1 – целые, эти соотношения влекут, что все числа x_n и y_n – целые.

Итак, при каждом $z \geq 3$ исходное уравнение имеет и притом единственное решение в натуральных числах.

Ответ: $x = 3, y = 1, z = 1$. Нет. □

Решение задачи 1286. Найдем коэффициенты накопления $k = 1 + i$, соответствующие каждой процентной ставке i: $k_1 = \frac{21}{20}$ для $i_1 = 5\%$, $k_2 = \frac{28}{25}$ для $i_2 = 12\%$, $k_3 = \frac{10}{9}$ для $i_3 = 11\frac{1}{9}\%$, $k_4 = \frac{9}{8}$ для $i_4 = 12,5\%$, $k = \frac{49}{24}$ для $i = 104\frac{1}{6}\%$.

Пусть a, b, c, d – число месяцев, в течение которых применялась процентная ставка i_1, i_2, i_3, i_4 соответственно. Тогда справедливо равенство:

$$k_1^a \cdot k_2^b \cdot k_3^c \cdot k_4^d = k.$$

Подставляя числовые значения коэффициентов накопления, получим:

$$2^{3+c+2b} \cdot 3^{a+2d+1} \cdot 5^c \cdot 7^{a+b} = 2^{2a+3d} \cdot 3^{2c} \cdot 5^{a+2b} \cdot 7^2.$$

В силу единственности разложения на простые множители это равносильно системе:

$$\begin{cases} 3 + c + 2b = 2a + 3d \\ a + 2d + 1 = 2c \\ c = a + 2b \\ a + b = 2 \end{cases}$$

которая легко решается методом исключения: $a = 1$, $b = 1$, $c = 3$, $d = 2$.

Ответ: $7 = 1 + 1 + 3 + 2$ месяцев. □

Решение задачи 1291. Примем момент 11^{15} в качестве нулевого и будем измерять время в минутах. Тогда катер первого маршрута появляется на пристани в моменты $\ldots, -30, 0, 30, 60, \ldots$. Иначе говоря, последовательные моменты времени, когда катер первого маршрута приходит на пристань, являются целыми числами, кратными числу 30. Аналогично, последовательные моменты времени, когда катер второго маршрута приходит на пристань, являются целыми числами, кратными числу 36, а последовательные моменты времени, когда катер третьего маршрута приходит на пристань, являются целыми числами, кратными числу 45.

Если в какой-то момент t катера всех трех маршрутов встретились на пристани, то этот момент кратен числам 30, 36, 45, т.е. является их общим кратным. Известно, что общие кратные и только они кратны наименьшему общему кратному:

$$t = \text{НОК}(30, 36, 45) \cdot n,\ n \in Z.$$

Чтобы найти $K = \text{НОК}(30, 36, 45)$, разложим числа $30, 36, 45$ на простые множители. Тогда K будет равно произведению всех простых множителей, которые входят в разложения этих чисел, с наибольшим показателем:

$$K = \text{НОК}(2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0, 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^1) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 180.$$

Итак, катера всех трех маршрутов встречаются на пристани в моменты времени, кратные числу 180, т.е. каждые три часа.

Поскольку одна из таких встреч произошла в 11^{15}, предыдущие встречи были в 8^{15}, 5^{15} и т.д., а последующие – в 14^{15}, 17^{15}, 20^{15} и т.д. В промежуток от 7^{40} до 17^{35} попадает 4 таких события.

Ответ: 4. □

Решение задачи 1294. Пусть $N = 516$ – общее число проданных автомобилей. Для натуральных чисел N и p обозначим через N_p количество чисел, кратных p и не превосходящих N. Число N_p однозначно определяется условиями $N_p \cdot p \leq N$, $(N_p + 1) \cdot p > N$, которые можно записать в виде: $N_p \leq \frac{N}{p}$, $N_p + 1 > \frac{N}{p}$. В силу определения целой части числа, это означает, что $N_p = \left[\frac{N}{p}\right]$.

Поэтому из чисел от 1 до 516 ровно $N_7 = \left[73\frac{5}{7}\right] = 73$ чисел делится на 7, ровно $N_{11} = \left[46\frac{10}{11}\right] = 46$ чисел делится на 11 и ровно $N_{77} = \left[6\frac{54}{77}\right] = 6$ чисел делится одновременно на 7 и 11 (поскольку числа 7 и 11 взаимно простые, это равносильно делимости на 77).

Скидка 20% (или 4000 в абсолютных цифрах) применяется ко всем автомобилям, порядковые номера которых при продаже кратны 11, т.е. к 46 проданным автомобилям. Скидка 10% (или 2000 в абсолютных цифрах) применяется ко всем автомобилям, порядковые номера которых при продаже кратны 7, но не кратны 11 (если номер кратен 7 и 11, то применяется скидка 20%). Чтобы найти их количество, нужно из общего количества автомобилей с номерами, кратными 7, вычесть количество автомобилей с номерами, кратными 7 и 11: $73 - 6 = 67$.

Итак, общая скидка равна $4\,000 \cdot 46 + 2\,000 \cdot 67 = 318\,000$. Соответственно, выручка автосалона от продажи автомобилей равна $20\,000 \cdot 516 - 318\,000 = 10\,002\,000$.

Ответ: 10 002 000. □

Решение задачи 1298. Поскольку Н.О.Д.$(n, m) \cdot$ Н.О.К.$(n, m) = n \cdot m$, условие задачи можно переписать в виде:

$$(\text{Н.О.Д.}(n, m))^2 - (n + m) \cdot \text{Н.О.Д.}(n, m) + nm = 0.$$

Это равенство можно рассматривать как квадратное уравнение относительно $x =$ Н.О.Д.(n, m): $x^2 - (n + m)x + nm = 0$. Легко установить, что оно имеет два корня: $x_1 = n$, $x_2 = m$.

Таким образом, условие задачи означает, что Н.О.Д.$(n, m) = n$ или Н.О.Д.$(n, m) = m$. В первом случае число n является делителем числа m, а во втором число m является делителем числа n. □

Решение задачи 1301. Двучлен $n^4 + 64$ можно разложить на два квадратичных множителя:

$$\begin{aligned} n^4 + 64 &= n^4 + 16n^2 + 64 - 16n^2 = (n^2 + 8)^2 - (4n)^2 \\ &= (n^2 + 4n + 8)(n^2 - 4n + 8). \end{aligned}$$

Если n – натуральное, то числа $n^2 + 4n + 8$ и $n^2 - 4n + 8$ также натуральные. Первое из них явно больше 8. Второе можно представить как $(n-2)^2 + 4$, так что оно не меньше 4. Итак, мы разложили число $n^4 + 64$ на два множителя, не равных 1. Значит, оно не является простым.

Ответ: нет. □

Решение задачи 1309. Если равенство

$$(x - a)(x - 10) + 1 = (x + b)(x + c) \tag{11.95}$$

верно при всех x, то, в частности, оно верно и при $x = 10$:

$$1 = (10 + b)(10 + c).$$

Поскольку числа b и c – целые, возможны лишь два варианта: $10 + b = 1$, $10 + c = 1$ или $10 + b = -1$, $10 + c = -1$, т.е. $b = -9$, $c = -9$ или $b = -11$, $c = -11$.

В первом случае равенство (11.95) примет вид

$$x^2 - (a + 10) + 10a + 1 = x^2 - 18x + 81 \text{ при всех } x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, мы получим систему

$$\begin{cases} a + 10 = 18, \\ 10a + 1 = 81, \end{cases}$$

которая имеет единственное (целочисленное) решение $a = 8$.

В случае $b = -11$, $c = -11$ равенство (11.95) примет вид

$$x^2 - (a+10) + 10a + 1 = x^2 - 22x + 121 \text{ при всех } x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, мы получим систему

$$\begin{cases} a + 10 = 22, \\ 10a + 1 = 121, \end{cases}$$

которая имеет единственное (целочисленное) решение $a = 12$.

Ответ: $a = 12$ или $a = 8$. □

Решение задачи 1312. Дробь можно сократить на наибольший общий делитель числителя и знаменателя (если он больше 1) и его делители, отличные от 1. Поэтому фактически задача сводится к нахождению $d = \text{НОД}(5l + 6, 8l + 7)$. Для её решения будем использовать классический алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел. Этот алгоритм базируется на следующем простом факте: для любых целых чисел x и y верно равенство

$$\text{НОД}(x, y) = \text{НОД}(y, x) = \text{НОД}(y, x - y).$$

Будем последовательно применять его к рассматриваемым числам (начиная с чисел $x = 8l + 7$ и $y = 5l + 6$), до тех пор, пока в одном из них не исчезнет переменная l:

$$\begin{aligned} d &\equiv \text{НОД}(8l+7, 5l+6) = \text{НОД}(5l+6, 3l+1) \\ &= \text{НОД}(3l+1, 2l+5) = \text{НОД}(2l+5, l-4) \\ &= \text{НОД}(l-4, l+9) = \text{НОД}(l-4, 13). \end{aligned}$$

Поскольку 13 – простое число, $\text{НОД}(l - 4, 13)$ может быть равен только 1 или 13, т.е. нашу дробь можно сократить (если она сократима) только на 13 (и -13).

Более того, можно указать все случаи, когда это сокращение действительно возможно. Для этого воспользуемся следующим фактом: если x – целое число, а y – натуральное, то $\text{НОД}(x, y) = y$ тогда и только тогда, когда x делится на y, т.е. $x = ky$ для некоторого $k \in Z$. В нашем случае это означает, что $\text{НОД}(l - 4, 13) = 13$ тогда и только тогда, когда $l = 4 + 13k$ для некоторого $k \in Z$.

Ответ: ± 13. □

Решение задачи 1324. Пусть N – численность роты, n – количество рядов в первоначальном прямоугольном строе. По условию задачи, $N = 24n$.

После перестроения число рядов стало $n - 2$, а число солдат в каждом ряду – $n - 2 + 26 = n + 24$. Поэтому в параде участвовало $(n - 2)(n + 24)$ солдат. По условию задачи, это число меньше, чем N: $(n - 2)(n + 24) < N$.

Последнее условие задачи означает, что N – полный квадрат.

Исключая неизвестную N, мы получим следующую систему:

$$\begin{cases} (n-2)(n+24) < 24n, \\ 24n \text{ – полный квадрат} \end{cases}$$

Неравенство системы приводится к виду

$$n^2 - 2n - 48 < 0 \Leftrightarrow -6 < n < 8,$$

так что ему удовлетворяет только 7 натуральных чисел $1, \ldots, 7$. По смыслу задачи величина $n-2$ – положительна. Поэтому остается только 5 возможностей: $n = 3, 4, 5, 6, 7$.

Из этих значений n нужно выбрать те, при которых число $N = 24n$ будет полным квадратом. Поскольку $24 = 2^3 \cdot 3^1$, это условие равносильно тому, что в разложении n на простые множители присутствуют числа 2 и 3 в нечётных степенях и, возможно, ещё какие-то простые множители в чётных степенях. Из списка $n = 3, 4, 5, 6, 7$ этому условию удовлетворяет только число $6 = 2^1 \cdot 3^1$.

Итак, $n = 6$ и поэтому $N = 24 \cdot 6 = 144$.

Ответ: 144 человека. □

Решение задачи 1325. Пусть a – число этажей в подъезде, b – число квартир на этаже. Поэтому число квартир в подъезде равно ab. Условие задачи неявно содержит следующие ограничения на возможные значения величин a и b:

$$a \geq 8, \quad b \geq 2. \tag{11.96}$$

Номер квартиры на 1 больше числа квартир, расположенных перед рассматриваемой. Перед k-й квартирой на n-м этаже m-го подъезда находится $(m-1)ab$ квартир в подъездах $1, \ldots, m-1$, $(n-1)b$ квартир на этажах $1, \ldots, n-1$ того же подъезда, где находится рассматриваемая квартира, $(k-1)$ квартир на том же этаже, где находится рассматриваемая квартира.

Поэтому номер этой квартиры равен $N(k; n; m) = (m-1)ab + (n-1)b + k$.

По условию задачи $N(1; 8; 3) = 106$. Используя приведённую формулу для $N(k; n; m)$, мы получим следующее уравнение для a и b:

$$2ab + 7b + 1 = 106 \Leftrightarrow (2a+7) \cdot b = 105.$$

Левая часть последнего уравнения даёт разложение числа 105 на два множителя. Поскольку $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, всего имеется 8 вариантов сделать это: $1 \cdot 105$, $3 \cdot 35$, $5 \cdot 21$, $7 \cdot 15$, $15 \cdot 7$, $21 \cdot 5$, $35 \cdot 3$, $105 \cdot 1$. Однако, в силу ограничений (11.96), первый множитель больше или равен 23, а второй больше или равен 2. Этим условиям удовлетворяет только разложение $105 = 35 \cdot 3$, так что

$$\begin{cases} 2a + 7 = 35, \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14, \\ b = 3 \end{cases}$$

Поэтому номер k-й квартиры на n-м этаже m-го подъезда равен

$$N(k; n; m) = 42(m-1) + 3(n-1) + k = 42m + 3n + k - 45.$$

В частности, номер второй квартиры на третьем этаже шестого подъезда равен $N(2;3;6) = 218$.

Ответ: 218.$\square$

Решение задачи 1333. Исключим z из второго уравнения системы: $z = y + 7$. Тогда первое уравнение примет вид:

$$11x = 7(y + 1). \tag{11.97}$$

Левая часть равенства (11.97) делится на 11. Следовательно, правая часть также делится на 11. Поскольку числа 7 и 11 не имеют общих делителей, это означает, что $y + 1$ делится на 11, т.е. существует такое целое k, что $y+1 = 11k$. Аналогичные рассуждения показывают, что x делится на 7, т.е. существует такое целое l, что $x = 7l$. Исключая с помощью равенств $x = 7l$ и $y + 1 = 11k$ неизвестные x и y, для новых неизвестных k и l мы получим уравнение

$$k = l.$$

Его общее решение в целых числах имеет вид: $(k, l) = (n, n)$, где n – произвольное целое число. Соответственно, общее решение в целых числах уравнения (11.97) имеет вид: $(x, y) = (7n, 11n - 1)$, где n – произвольное целое число. Чтобы x и y были натуральными, должны быть одновременно выполнены условия $7n > 0$, $11n - 1 > 0$ – это равносильно тому, что n – натуральное число. Если y – натуральное число, то $z = y + 7$ автоматически будет натуральным.

Итак, общее решение системы из двух первых уравнений в натуральных числах имеет вид: $(x, y, z) = (7n, 11n - 1, 11n + 6)$, где n – произвольное натуральное число.

Дополнительное условие, что $x \leq 20$ означает, что параметр $n \leq 2$. Итак, для n есть всего два возможных значения: 1 и 2. Им соответствует два набора неизвестных (x, y, z): $(7; 10; 17)$ и $(14; 21; 28)$.

Ответ: $(7; 10; 17)$, $(14; 21; 28)$. $\square$

Решение задачи 1337. Рассмотрим уравнение

$$x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0$$

как квадратное уравнение относительно одной неизвестной x:

$$x^2 + 2x(y - 5z) + 5y^2 + 34z^2 - 22yz = 0.$$

Тогда

$$\frac{D}{4} = (y - 5z)^2 - (5y^2 + 34z^2 - 22yz) = -(2y - 3z)^2.$$

Если это уравнение имеет решение, то дискриминант должен быть неотрицательным, что возможно только в случае $2y - 3z = 0$. Тогда дискриминант равен 0 и уравнение имеет единственное решение $x = 5z - y$.

Итак, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2y - 3z = 0, \\ x = 5z - y. \end{cases}$$

Общее решение первого уравнения в целых числах даётся формулами $y = 3n$, $z = 2n$, где $n \in Z$. Из второго уравнения теперь можно найти x (причем x автоматически будет целым числом): $x = 7n$.

Таким образом, исходное уравнение имеет бесконечно много целочисленных решений, которые могут быть описаны формулой $(x; y; z) = (7n; 3n; 2n)$, $n \in Z$.

Ответ: $(x; y; z) = (7n; 3n; 2n)$, $n \in Z$. □

Решение задачи 1339. Пусть N – число абитуриентов, n – число аудиторий, использовавшихся для проведения экзамена, m – число аудиторий, которые пришлось бы использовать при проведении экзамена в другом корпусе. Условие задачи означает, что эти переменные являются решением системы

$$\begin{cases} N = 3n^2, \\ N = 2m^3. \end{cases}$$

Исключая N, мы получим уравнение

$$3n^2 = 2m^3. \tag{11.98}$$

Левая часть равенства (11.98) делится на 3. Поэтому и правая часть делится на 3, что возможно только, если m делится на 3, т.е. для некоторого натурального m_1 верно равенство $m = 3m_1$. Аналогичные аргументы показывают, что для некоторого натурального n_1 верно равенство $n = 2m_1$.

Для новых неизвестных m_1 и n_1 уравнение (11.98) примет вид:

$$2n_1^2 = 9m_1^3. \tag{11.99}$$

Правая часть равенства (11.99) делится на 9. Поэтому и левая часть делится на 9, что равносильно делимости n_1 на 3 (а не на 9!). Действительно, чтобы в разложении $2n_1^2$ на простые множители стояло по меньшей мере два множителя 3, необходимо, чтобы в разложении n_1 на простые множители стоял по меньшей мере один множитель 3. Следовательно, для некоторого натурального n_2 верно равенство $n_1 = 3n_2$. Аналогичные аргументы показывают, что для некоторого натурального m_2 верно равенство $m_1 = 2m_2$.

Для новых неизвестных m_2 и n_2 уравнение (11.99) примет вид:

$$n_2^2 = 4m_2^3. \tag{11.100}$$

Правая часть равенства (11.100) делится на 4. Поэтому и левая часть делится на 4, что равносильно делимости n_2 на 2 т.е. для некоторого натурального n_3 верно равенство $n_2 = 2n_3$. Если мы введём для симметрии обозначений новую неизвестную $m_3 = m_2$, то для новых неизвестных m_3 и n_3 уравнение (11.100) примет вид:

$$n_3^2 = m_3^3. \tag{11.101}$$

Для решения задачи в том виде, как она была сформулирована на экзамене, нет необходимости решать уравнение (11.101) в общем виде (хотя позже мы это сделаем). Дело в том, что нас интересует минимально возможное значение величины N. Поскольку $N = 3n^2$, $N = 2m^3$, необходимо найти минимальное решение уравнения (11.98), т.е. наименьшую пару $(m; n)$ из всех, удовлетворяющих этому уравнению.

Поскольку $n = 2n_1 = 6n_2 = 12n_3$, $m = 3m_1 = 6m_2 = 6m_3$, минимальному решению уравнения (11.98) в натуральных числах соответствует минимальное решение уравнения (11.101) в натуральных числах. С другой стороны, очевидно, что $m_3 = 1$, $n_3 = 1$ – решение уравнения (11.101). Поскольку 1 – наименьшее натуральное число, искомые значения m и n равны 6 и 12 соответственно, а тогда $N = 432$.

Теперь, имея в виду применения к решению других задач, мы решим уравнение (11.101) в общем виде.

Разложим n_3 и m_3 на простые множители:

$$n_3 = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}, \quad m_3 = p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k}.$$

Некоторые из показателей степеней простых чисел $p_1, \dots, p_k$ могут быть 0. Это означает, что соответствующий простой множитель не входит в разложение.

Подставляя эти разложения в уравнение (11.101), мы получим:

$$p_1^{2a_1} \dots p_k^{2a_k} = p_1^{3b_1} \dots p_k^{3b_k}.$$

В силу основной теоремы арифметики, это равенство возможно тогда и только тогда, когда в левой и правой части одинаковые простые множители входят в одинаковых степенях:

$$\begin{cases} 2a_1 = 3b_1, \\ \dots \\ 2a_k = 3b_k. \end{cases}$$

Каждое уравнение этой системы можно решить (в неотрицательных целых числах):

$$\begin{gathered} a_1 = 3n_1, \quad b_1 = 2n_1, \quad n_1 \in Z_+, \\ \dots \\ a_k = 3n_k, \quad b_k = 2n_k, \quad n_k \in Z_+. \end{gathered}$$

Для чисел n_3 и m_3 эти соотношения дают:

$$\begin{aligned} n_3 &= p_1^{3n_1} \dots p_k^{3n_k} = A^3, \\ m_3 &= p_1^{2n_1} \dots p_k^{2n_k} = A^2, \end{aligned}$$

где $A = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$ – натуральное число.

Наоборот, если $n_3 = A^3$, $m_3 = A^2$, где A – некоторое натуральное число, то $n_3^2 = A^6$, $m_3^3 = A^6$, т.е. $n_3 = A^3$ и $m_3 = A^2$ будут решением уравнения (11.101).

Таким образом, соотношения $n_3 = A^3$, $m_3 = A^2$, где A – некоторое натуральное число, дают общее решение уравнения (11.101) в натуральных числах.

Соответственно, $n = 12A^3$, $m = 6A^2$, $N = 432A^6$, где A – некоторое натуральное число. В задаче требуется найти минимально возможное значение N. Оно соответствует минимальному значению параметра A, т.е. $A = 1$.

Дословное повторение рассуждений, проведенных при втором способе решения нашей задачи, позволяет сразу решить исходное уравнение (11.98).

Разложим n и m на простые множители (из возможных простых множителей мы явно указываем только 2 и 3):

$$n = 2^x \cdot 3^y \cdot p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}, \quad m = 2^u \cdot 3^v \cdot p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k}.$$

Некоторые из показателей степеней простых чисел 2, 3, $p_1, \dots, p_k$ могут быть 0. Это означает, что соответствующий простой множитель не входит в разложение.

Подставляя эти разложения в уравнение (11.98), мы получим:

$$2^{2x} \cdot 3^{2y+1} \cdot p_1^{2a_1} \dots p_k^{2a_k} = 2^{3u+1} \cdot 3^{3v} \cdot p_1^{3b_1} \dots p_k^{3b_k}.$$

В силу основной теоремы арифметики, это равенство возможно тогда и только тогда, когда в левой и правой части одинаковые простые множители входят в одинаковых степенях:

$$\begin{cases} 2x = 3u + 1, \\ 2y + 1 = 3v, \\ 2a_1 = 3b_1, \\ \dots \\ 2a_k = 3b_k. \end{cases}$$

Каждое уравнение этой системы можно решить (в неотрицательных целых числах).

Перепишем первое уравнение в виде: $2(x - 2) = 3(u - 1)$. Его общее решение есть: $x - 2 = 3n$, $u - 1 = 2n$, где $n \in Z_+$.

Второе уравнение равносильно уравнению $2(y - 1) = 3(v - 1)$, так что его общее решение есть: $y - 1 = 3m$, $v - 1 = 2m$, где $m \in Z_+$.

Для остальных уравнений имеем:

$$\begin{gathered} a_1 = 3n_1, \quad b_1 = 2n_1 \quad n_1 \in Z_+ \\ \dots \\ a_k = 3n_k, \quad b_k = 2n_k \quad n_k \in Z_+ \end{gathered}$$

Для чисел n и m эти соотношения дают:

$$\begin{aligned} n &= 2^{2+3n} \cdot 3^{1+3m} \cdot p_1^{3n_1} \dots p_k^{3n_k} = 12A^3, \\ m &= 2^{1+2n} \cdot 3^{1+2m} \cdot p_1^{2n_1} \dots p_k^{2n_k} = 6A^2, \end{aligned}$$

где $A = 2^n \cdot 3^m \cdot p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$ – натуральное число.

Наоборот, если $n = 12A^3$, $m = 6A^2$, где A – некоторое натуральное число, то $3n^2 = 2m^3$, т.е. n и m будут решением уравнения (11.98).

Таким образом, соотношения $n = 12A^3$, $m = 6A^2$, где A – некоторое натуральное число, дают общее решение уравнения (11.98) в натуральных числах.

Ответ: 432. □

Решение задачи 1342. Пусть $\overline{ab}$ – искомое двузначное число. Условие задачи означает, что верно равенство

$$\overline{ab}^2 = (a+b)^3.$$

Поскольку общее решение уравнения $n^2 = m^3$ в натуральных числах имеет вид (см. решение задачи 1339):

$$\begin{cases} n = A^3, \\ m = A^2, \end{cases}$$

где A – произвольное натуральное число, можно утверждать, что для некоторого натурального A верны равенства:

$$\begin{cases} \overline{ab} = A^3, \\ a+b = A^2. \end{cases} \tag{11.102}$$

Куб натурального числа A будет двузначным числом только для $A = 3$ и $A = 4$. В первом случае $\overline{ab} = 27$, так что $a + b = 9 = A^2$, т.е. условие задачи выполнено. Во втором случае $\overline{ab} = 64$, так что $a + b = 10 \neq A^2$, т.е условие задачи не выполнено.

Ответ: 27. □

Решение задачи 1346. Тот факт, что остаток от деления числа n на 6 равен 4, означает, что существует неотрицательное целое k такое, что $n = 6k + 4$. Аналогично, существует неотрицательное целое l такое, что $n = 15l+7$. Исключая из этих равенств число n, для k и l получим уравнение

$$2k - 5l = 1. \tag{11.103}$$

Чтобы решить это уравнение, прежде всего найдём какое-нибудь частное (т.е. конкретное) решение в целых (не обязательно неотрицательных) числах. Обычно это делают перебором нескольких вариантов. В нашем случае в качестве такого частного решения можно взять, например, $k = -2$, $l = -1$, так что верно равенство:

$$2 \cdot (-2) - 5 \cdot (-1) = 1. \tag{11.104}$$

Вычитая из уравнения (11.103) равенство (11.104), получим:

$$2(k+2) = 5(l+1).$$

Общее решение этого уравнения в целых числах имеет вид: $k + 2 = 5a$, $l + 1 = 2a$, где a – произвольное целое число. Чтобы числа k и l были неотрицательными, параметр a должен быть натуральным числом.

Теперь для числа n имеем:

$$n = 6k + 4 = 6(5a - 2) + 4 = 30a - 8 = 30(a - 1) + 22.$$

Поскольку целое число $a - 1$ неотрицательно, это равенство означает, что остаток от деления n на 30 равен 22.

Ответ: 22. □

Решение задачи 1353. Пусть n и m соответственно – количество стаканов чая и кофе, проданных в центре города. Тогда количество стаканов чая и кофе, проданных на вокзале, будет равно $20-n$ и $20-m$ соответственно. По смыслу задачи переменные n и m – неотрицательные целые числа, не превосходящие 20: $n, m = 0, 1, \ldots, 20$.

Общая выручка в центре равна $7n + 10m$ рублей, а на вокзале – $4(20 - n) + 9(20 - m)$ рублей. По условию эти величины равны:

$$7n + 10m = 4(20 - n) + 9(20 - m) \Leftrightarrow 11n + 19m = 260.$$

Уравнение $11n + 19m = 260$ решим обычным приёмом:

1. найдём частное решение; им будет, например, $n_0 = 15$, $m_0 = 5$.

2. вычитая из равенства $11n + 19m = 260$ равенство $11 \cdot 15 + 19 \cdot 5 = 260$, мы получим однородное уравнение: $11(n - 15) = 19(5 - m)$.

3. общее решение этого однородного уравнения в целых числах имеет вид: $n - 15 = 19k$, $5 - m = 11k$, где $k \in Z$. Соответственно, общее решение исходного уравнения в целых числах имеет вид: $n = 15+19k$, $m = 5 - 11k$, где $k \in Z$.

Поскольку $n, m \geq 0$, параметр k может быть равен только 0. Поэтому исходное уравнение имеет единственное решение в неотрицательных целых числах: $n = 15$, $m = 5$. Это решение, кроме того, удовлетворяет условию $n, m \leq 20$.

Ответ: 5 стаканов. □

Решение задачи 1354. Пусть правильная сдача равна n рублей и m копеек, т.е. $100n+m$ копеек. Реально кассирша выплатила сумму m рублей и n копеек, т.е. $100m + n$ копеек. После покупки пипеток у Тёмы останется $100m+n-140$ копеек. По условию эта сумма в три раза больше, чем $100n+m$. Это даёт следующее уравнение для неизвестных n и m:

$$100m + n - 140 = 3 \cdot (100n + m) \Leftrightarrow 97m - 299n = 140. \tag{11.105}$$

Поскольку число копеек не может быть больше, чем 99, справедливо двойное неравенство: $1 \leq n, m \leq 99$. Оно, в частности, влечёт, что сдача не превышает первоначальную сумму в 100 рублей, которая была у Темы.

Хотя уравнение (11.105) является стандартным уравнением в целых числах вида $ax + by = c$, найти его частное решение (чтобы свести дело к однородному уравнению) простым подбором нельзя. На этом примере мы продемонстрируем общий метод поиска частного решения (алгоритм Евклида), который автоматически приводит к успеху.

Рассмотрим коэффициенты при неизвестных ($a = 97$ и $b = 299$) и разделим больший коэффициент на меньший. В результате мы получим неполное частное 3 и остаток 8. Иначе говоря, справедливо равенство: $299 = 3 \cdot 97 + 8$ или, что то же самое, $8 = 299 - 3 \cdot 97$.

Теперь заменим больший коэффициент (т.е. 299) на остаток (т.е. 8) и проделаем с парой 97, 8 ту же процедуру: разделим 97 на 8. В результате мы получим неполное частное 12 и остаток 1. Иначе говоря, справедливо равенство: $97 = 12 \cdot 8 + 1$ или, что то же самое, $1 = 97 - 12 \cdot 8$. Заменим в этом равенстве число 8 выражением $299 - 3 \cdot 97$, найденным в предыдущем абзаце:

$$1 = 97 - 12 \cdot (299 - 3 \cdot 97) = 37 \cdot 97 - 12 \cdot 299.$$

Итак, мы представили число 1 (это наибольший общий делитель чисел 97 и 299) в виде линейной комбинации чисел 97 и 299. Умножая последнее равенство на 140, мы получим искомое частное решение уравнения (11.105): $m_0 = 37 \cdot 140 = 5180$, $n_0 = 12 \cdot 140 = 1680$.

Это частное решение обычным образом приводит к следующему общему решению уравнения (11.105) в целых числах:

$$\begin{cases} m = 5180 + 299k, \\ n = 1680 + 97k, \ \ k \in Z. \end{cases}$$

Условия $1 \leq n, m \leq 99$ однозначно определяют значение параметра k: $k = -17$, что приводит к следующим значениям основных неизвестных n и m: $n = 31$, $m = 97$.

Поэтому стоимость всех покупок Тёмы (в рублях) равна $100 - 31{,}97 + 1{,}40 = 69{,}43$.

Проблему с поиском частного решения можно обойти с помощью следующего способа решения уравнения (11.105) (этот метод работает для любого уравнения вида $ax + by = c$ и, в сущности, является вариантом алгоритма Евклида).

Выразим неизвестную с меньшим коэффициентом (в нашем случае это m) через другую неизвестную:

$$m = \frac{299n + 140}{97}$$

и выделим целую часть из дробей $\frac{299}{97}$, $\frac{140}{97}$:

$$m = 3n + 1 + \frac{8n + 43}{97}.$$

Введём новую неизвестную m_1 (вместо m) по формуле $m_1 = m - 3n - 1$. Для неё последнее равенство примет вид:

$$97m_1 = 8n + 43.$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и исходное. Применим к нему процедуру, описанную в предыдущем абзаце: выразим неизвестную с меньшим коэффициентом (в нашем случае это n) через другую неизвестную:

$$n = \frac{97m_1 - 43}{8}$$

и выделим целую часть из дробей $\frac{97}{8}$, $\frac{43}{8}$:

$$n = 12m_1 - 5 + \frac{m_1 - 3}{8}.$$

Введём новую неизвестную n_1 (вместо n) по формуле $n_1 = n - 12m_1 + 5$. Для неё последнее равенство примет вид:

$$8n_1 = m_1 - 3.$$

Поскольку коэффициент при m_1 равен 1, общее решение этого уравнения в целых числах есть:

$$\begin{cases} n_1 = l, \\ m_1 = 8l + 3, \ \ l \in Z. \end{cases}$$

Возвращаясь к основным неизвестным n и m, мы получим общее решение в целых числах уравнения (11.105):

$$\begin{cases} n = n_1 + 12m_1 - 5 = 97l + 31, \\ m = m_1 + 3n + 1 = 299l + 97, \ \ l \in Z. \end{cases}$$

При $l = k + 17$ мы получим общее решение уравнения (11.105), найденное ранее.

Ответ: 69 руб. 43 коп. □

Решение задачи 1356. Выразим из данного уравнения y через x:

$$y = -\frac{14x + 71}{3x + 17}.$$

При этом следует отметить, что величина $3x + 17 \neq 0$ (так как x –целое число).

Выделим из дроби в правой части этого равенства правильную алгебраическую дробь (у которой степень числителя меньше степени знаменателя):

$$y = -\frac{14}{3} + \frac{25}{3(3x + 17)}$$

и умножим почленно на 3 (чтобы превратить число $\frac{14}{3}$ в целое):

$$3y = -14 + \frac{25}{3x + 17}.$$

Поскольку числа $3y$ и 14 – целые, $3x+17$ должно быть делителем числа 25: $3x + 17 = \pm 1; \pm 5; \pm 25$ – всего шесть возможностей. Отсюда для x получаем три возможных значения: $-4, -6, -14$ (в остальных трёх случаях x не является целым). Соответствующие значения y равны $-3, -13, -5$. Поскольку все они являются целыми числами, исходное уравнение имеет три решения в целых числах.

Ответ: $(-4; -3), (-6; -13), (-14; -5)$. □

Решение задачи 1360. Поскольку дроби $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ положительны, уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{70} \tag{11.106}$$

влечёт, что оба числа x и y больше 70.

Уравнение (11.106) равносильно уравнению

$$y = \frac{70x}{x - 70}.$$

Выделяя целую часть из неправильной дроби $\frac{70x}{x-70}$, мы получим:

$$y = 70 + \frac{70^2}{x - 70} \Leftrightarrow (x - 70)(y - 70) = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x - 70 = 2^n \cdot 5^m \cdot 7^k, \\ y - 70 = 2^{2-n} \cdot 5^{2-m} \cdot 7^{2-k}, \end{cases}$$

где $n, m, k \in \{0; 1; 2\}$. Каждая из этих систем имеет единственное решение в классе натуральных чисел x, y. При этом между решениями и тройками (n, m, k) существует взаимно однозначное соответствие. Значит, общее число решений исходного уравнения (11.106) равно $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Из этих решений для одного решения $x = y$; это решение соответствует набору $(n, m, k) = (1, 1, 1)$, так что $x = y = 140$. В силу симметрии уравнения, из 26 оставшихся решений в половине случаев $x < y$, а в другой половине случаев $y < x$. Поэтому общее число решений, для которых $x \leq y$ равно $13 + 1 = 14$.

Ответ: 14.□

Решение задачи 1367. Поскольку уравнение симметрично относительно x и y, введём новые неизвестные $a = x + y$ и $b = xy$. Для них исходное уравнение примет вид:

$$(a^2 - 2b)(a - 3) = 2b.$$

Поскольку b входит в это уравнение в первой степени, приведем его к виду $b = f(a)$:

$$a^3 - 2ab - 3a^2 + 4b = 0 \Leftrightarrow 2b(a - 2) = a^3 - 3a^2.$$

Если $a = 2$, то это уравнение даст $0 = -4$. Поэтому $a \neq 2$ и можно делить на $2(a - 2)$:

$$b = \frac{a^3 - 3a^2}{2(a - 2)} = \frac{a(a - 1)}{2} - 1 - \frac{2}{a - 2}.$$

Если $x, y \in Z$, то a, b также являются целыми числами. Дробь $\frac{a(a-1)}{2}$ – всегда число целое (из двух последовательных целых чисел $a-1$ и a одно является чётным). Поэтому и дробь $\frac{2}{a-2}$ является целым числом, т.е. $a-2$ может быть только ± 1, ± 2. Для a это дает четыре возможности: $3; 1; 4; 0$. Соответствующие значения неизвестной b равны: $0; 1; 4; 0$.

Возвращаясь к основным неизвестным x и y, мы получим 4 системы:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=1 \\ xy=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=4 \\ xy=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=0 \\ xy=0 \end{cases}$$

Первая система имеет два решения: $(x; y) = (3; 0)$ и $(x; y) = (0; 3)$. Вторая система не имеет решений. Третья система имеет одно решение: $(x; y) = (2; 2)$. Четвертая система также имеет одно решение: $(x; y) = (0; 0)$. Поскольку найденные решения содержат только целые числа x и y, все они включаются в ответ.

Ответ: $(0; 0), (2; 2), (0; 3), (3; 0)$. $\square$

Решение задачи 1373. Пусть p – произвольное натуральное число. Рассмотрим структуру числа p при делении на 6: $p = 6q + r$, где $q \geq 0$ – неполное частное, а $r = 0, 1, \ldots, 5$ – остаток. Тогда $p^2 = 36q^2 + 12pr + r^2$. Поскольку два первых члена делятся на 12, остаток от деления на 12 числа p^2 такой же, как и остаток от деления на 12 числа r^2.

Поскольку $p = 6q + r$ – простое число, большее 3, из 6 логически возможных вариантов для остатка ($r = 0, 1, \ldots, 5$), реально возможны лишь 2: $r = 1$ и $r = 5$. Соответственно, r^2 может быть только 1 или 25. В каждом случае остаток от деления на 12 равен 1. $\square$

Решение задачи 1380. Разложим число 2880 на простые множители: $2880 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$. Поэтому число $A = p^4 - 50p^2 + 49$ делится на 2880 тогда и только тогда, когда оно делится на 2^6, 3^2 и 5.

Теперь разложим многочлен $p^4 - 50p^2 + 49$ на линейные множители:

$$p^4 - 50p^2 + 49 = (p^2 - 1)(p^2 - 49) = (p-1)(p+1)(p-7)(p+7).$$

Чтобы доказать делимость числа A на 2^6, рассмотрим структуру числа p с точки зрения делимости на 4: $p = 4q + r$, где q – неполное частное, а $r = 1; 3$ – остаток. Если $p = 4q + 1$, то

$$A = 4q(4q+2)(4q-6)(4q+8) = 64q(2q+1)(2q-3)(q+2).$$

Если $p = 4q + 3$, то

$$A = (4q+4)(4q+2)(4q-4)(4q+10) = 64(q+1)(2q+1)(q-1)(2q+5).$$

В каждом случае A кратно $64 = 2^6$.

Чтобы доказать делимость числа A на 3^2, рассмотрим структуру числа p с точки зрения делимости на 3: $p = 3q + r$, где q – неполное частное, а $r = 1; 2$ – остаток (поскольку $p > 3$, остаток не может быть 0). Если $p = 3q + 1$, то

$$A = 3q(3q+2)(3q-6)(3q+8) = 9q(3q+2)(q-2)(3q+8).$$

Если $p = 3q + 2$, то

$$A = (3q+3)(3q+1)(3q-5)(3q+9) = 9(q+1)(3q+1)(3q-5)(q+3).$$

В каждом случае A кратно $9 = 3^2$.

Чтобы доказать делимость числа A на 5, рассмотрим структуру числа p с точки зрения делимости на 5: $p = 5q + r$, где q – неполное частное, а $r = 1; 2; 3; 4$ – остаток (поскольку $p > 3$, остаток не может быть 0). Тогда

$$A = (5q + r - 1)(5q + r + 1)(5q + r - 7)(5q + r + 7),$$

так что A делится на 5 тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел $r - 1, r + 1, r - 7, r + 7$ делится на 5. Для $r = 1; 2; 3; 4$ последовательность чисел $r - 1, r + 1, r - 7, r + 7$ превратится в последовательность $0, 2, -6, 8$; $1, 3, -5, 9$; $2, 4, -4, 10$; $3, 5, -3, 11$ соответственно. В каждом случае одно из чисел делится на 5. □

Решение задачи 1387. Рассмотрим структуру числа p с точки зрения делимости на 3.

Логически возможны три случая:

1. $p = 3q$, где $q \geq 1$.

2. $p = 3q + 1$, где $q \geq 0$.

3. $p = 3q + 2$, где $q \geq 0$.

Поскольку p – простое число, в первом случае $q = 1$ (единственное простое число, кратное 3, – это 3). Тогда числа $p + 10$ и $p + 14$ равны 13 и 17 соответственно, т.е. являются простыми. Поэтому $p = 3$ удовлетворяет условию задачи.

Во втором случае ряд чисел $p, p + 10, p + 14$ превратится в ряд $3q + 1, 3q + 11, 3q + 15$. Относительно чисел $3q + 1$, $3q + 11$ нельзя сказать ничего определённого (они могут быть как простыми, например, при $q = 2$, так и составными, например, при $q = 3$), а $3q + 15 = 3(q + 5)$, причём $q + 5 \geq 5$, так что это число – составное. Итак, из чисел p вида $3q + 1$ ни одно не удовлетворяет условию задачи.

В третьем случае ряд чисел $p, p + 10, p + 14$ превратится в ряд $3q + 2, 3q + 12, 3q + 16$. Относительно чисел $3q + 2$, $3q + 16$ нельзя сказать ничего определённого (они могут быть как простыми, например, при $q = 1$, так и составными, например, при $q = 2$), а $3q + 12 = 3(q + 4)$, причём $q + 4 \geq 4$, так что это число – составное. Итак, из чисел p вида $3q + 2$ ни одно не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $p = 3$. □

Решение задачи 1394. Квадрат целого числа n даёт при делении на 4 в остатке 0 или 1. Действительно, если число n – чётное, т.е. $n = 2k$, то $n^2 = 4k^2$, так что остаток от деления на 4 равен 0. Если число n – нечётное, т.е. $n = 2k + 1$, то $n^2 = 4(k^2 + k) + 1$, так что остаток от деления на 4 равен 1.

Поэтому сумма квадратов двух любых натуральных чисел при делении на 4 может давать в остатке только 0, 1 или 2. Следовательно, любое натуральное число вида $n = 4k + 3$ (таких чисел бесконечно много) нельзя представить в виде суммы квадратов двух других натуральных чисел. □

Решение задачи 1395. Как мы отметили при решении задачи 1394, квадрат целого числа даёт при делении на 4 в остатке 0 или 1: $n^2 = 4k + r$, $m^2 = 4l + s$, где r, s равны 0 или 1. Поэтому $n^2 - m^2 = 4(k - l) + (r - s)$. Разность $r - s$ может принимать только значения 0, 1, −1. Это означает, что разность квадратов двух любых натуральных чисел при делении на 4 может давать в остатке только 0, 1 или 3. С другой стороны, число 1954 при делении на 4 даёт остаток 2. Следовательно, исходное уравнение не имеет решений в целых числах.

Ответ: нет. □

Решение задачи 1397. Равенство $x^2 - 7y^2 = 5$ равносильно тому, что $x^2 = 7y^2 + 5$, и, в частности, влечёт, что остаток от деления числа x^2 на 7 равен 5.

Найдём, какие остатки при делении на 7 может давать полный квадрат натурального числа x. Для этого разделим x на 7: $x = 7q + r$, где $r = 0, 1, \dots, 6$. Значит,

$$x^2 = 49q^2 + 14qr + r^2 = 7 \cdot (7q^2 + 2qr) + r^2.$$

Отсюда не следует, что остаток от деления числа x^2 на 7 равен r^2, так как нельзя гарантировать, что $r^2 \le 6$.

Однако поскольку число r может принимать только значения из списка $0, 1, \dots, 6$, все возможные значения величины r^2 есть:

$$0, 1, 4, 9 = 7 \cdot 1 + 2, 16 = 7 \cdot 2 + 2, 25 = 7 \cdot 3 + 4, 36 = 7 \cdot 5 + 1.$$

Следовательно, при делении на 7 полный квадрат натурального числа может давать только остатки $0, 1, 2, 4$; логически возможные (в соответствии с определением деления с остатком) значения 3, 5, 6 – исключены. Таким образом, равенство $x^2 = 7y^2 + 5$ невозможно (как и более общее равенство $x^2 = 7z + 5$).

Ответ: $\emptyset$. □

Решение задачи 1399. Выделяя полный квадрат в левой части мы получим: $(x+2)^2 = 6y^2+5$. Отсюда следует, что остаток от деления полного квадрата $(x + 2)^2$ на 6 равен 5.

Найдём, какие остатки при делении на 6 может давать полный квадрат натурального числа N. Для этого разделим N на 6: $N = 6q + r$, где $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Значит,

$$N^2 = 36q^2 + 12qr + r^2 = 6 \cdot (6q^2 + 2qr) + r^2.$$

Поскольку число r может принимать только значения из списка $0, 1, 2, 3, 4, 5$, все возможные значения величины r^2 есть:

$$0, 1, 4, 9 = 6 \cdot 1 + 3, 16 = 6 \cdot 2 + 4, 25 = 6 \cdot 4 + 1.$$

Следовательно, при делении на 6 полный квадрат натурального числа может давать только остатки $0, 1, 3, 4$; логически возможные (в соответствии с определением деления с остатком) значения 2 и 5 – исключены. Таким образом, равенство $(x+2)^2 = 6y^2+5$ невозможно (как и более общее равенство $N^2 = 6z + 5$).

□

Решение задачи 1413. Наше утверждение состоит из двух утверждений:

1. если числа $S_m = 2^m - 1$ и $S_n = 2^n - 1$ – взаимно простые, то и числа m и n – взаимно простые;

2. если числа m и n – взаимно простые, то и числа $S_m = 2^m - 1$ и $S_n = 2^n - 1$ – взаимно простые.

Первое утверждение фактически доказано в ходе решения задачи 1263. Если допустить, что числа m и n имеют общий делитель $d > 1$, то числа S_m и S_n будут делиться на S_d, причём $S_d > 1$ (так как $d > 1$).

Доказательство второго утверждения базируется на следующем общем факте, который вытекает из алгоритма Евклида для подсчёта наибольшего общего делителя двух натуральных чисел: если натуральные числа m и n – взаимно простые, то для некоторых целых x и y верно равенство $mx+ny = 1$.

Поскольку числа m и n – натуральные, одно из чисел x, y положительно, а второе – неположительно. Не нарушая общности можно считать, что $y > 0$, а $x = -k \leq 0$, т.е. $ny = mk + 1$.

Применяя формулу (11.86), полученную в ходе решения задачи 1263, мы имеем:

$$S_{ny} = S_n \cdot A', \quad S_{ny} = S_{mk+1} = S_m \cdot A'' + 2^{km},$$

где A' и A'' – некоторые целые числа. Отсюда следует, что $S_n \cdot A' = S_m \cdot A'' + 2^{km}$.

Допустим теперь, что числа S_m и S_n имеют общий делитель $D > 1$. Тогда и число 2^{km} делится на D, т.е. D является степенью 2. С другой стороны, поскольку числа S_m и S_n – нечётные, то и D – нечётное число. Следовательно, $D = 2^0 = 1$, т.е. числа S_m и S_n взаимно простые. □

Решение задачи 1417. Избавимся от дробей в левой части уравнения, умножив обе части на xyz:

$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 3xyz. \tag{11.107}$$

Отсюда, в частности, следует, что $xyz \geq 0$. Поскольку в силу исходного уравнения $x, y, z \neq 0$, можно утверждать, что xyz – натуральное число.

Применим к левой части равенства (11.107) неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом для трёх неотрицательных чисел:

$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 \geq 3\sqrt[3]{x^4y^4z^4}.$$

Сопоставляя это неравенство с равенством (11.107), мы получим неравенство:

$$3xyz \geq 3\sqrt[3]{x^4y^4z^4} \Leftrightarrow xyz \leq 1.$$

Поскольку $xyz \in N$, последнее неравенство влечёт, что $xyz = 1$. Это равенство может быть выполнено только в четырех случаях: $(x; y; z) = (1; 1; 1)$, $(-1; -1; 1)$, $(1; -1; -1)$ или $(-1; 1; -1)$. Проверка показывает, что все четыре тройки являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $(1; 1; 1)$, $(-1; -1; 1)$, $(1; -1; -1)$, $(-1; 1; -1)$.□

Решение задачи 1418. Прежде всего избавимся от радикала:

$$\begin{cases} x^3 - 5x - 3 \leq (6 - x)^2, \\ x^3 - 5x - 3 \geq 0, \\ 6 - x \geq 0. \end{cases} \tag{11.108}$$

Первое неравенство системы приводится к виду:

$$x^3 - x^2 + 7x - 39 \leq 0.$$

Поскольку левая часть обращается в 0 при $x = 3$, её можно разложить на множители, причём один из множителей равен $x - 3$:

$$(x - 3)(x^2 + 2x + 13) \leq 0.$$

Дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 + 2x + 13$ отрицателен. Поэтому этот трёхчлен положителен при всех x, так что первое неравенство системы (11.108) сводится к неравенству $x \leq 3$.

Третье неравенство системы (11.108) равносильно неравенству $x \leq 6$ и поэтому вытекает из первого неравенства.

Левая часть второго неравенства системы (11.108) не обращается в 0 в рациональных точках, так что на множестве действительных чисел его нельзя решить стандартными преобразованиями. Однако на множестве целых чисел это неравенство можно решить с помощью следующего соображения. Если x – целое число, то и $N = x^3 - 5x - 3$ – целое. Для целых чисел неравенства $N \geq 0$ и $N > -1$ равносильны. Поэтому на множестве целых чисел второе неравенство системы (11.108) равносильно неравенству

$$x^3 - 5x - 3 > -1 \Leftrightarrow x^3 - 5x - 2 > 0.$$

Левая часть последнего неравенства обращается в 0 при $x = -2$. Поэтому её можно разложить на множители, причём один из множителей равен $x + 2$. Второй множитель легко найти делением в столбик; он равен: $x^2 - 2x - 1 = \left(x - (1 - \sqrt{2})\right)\left(x - (1 + \sqrt{2})\right)$. Стандартный метод интервалов позволяет сразу выписать решение неравенства $x^3 - 5x - 2 > 0$ в действительных числах: $-2 < x < 1 - \sqrt{2}$ или $x > 1 + \sqrt{2}$. На эти промежутки попадают следующие целые числа: $-1; 3; 4; 5; \ldots$ – это и будет множество решений второго неравенства системы (11.108) в целых числах.

Учитывая множество решений первого и третьего неравенств системы (11.108), мы получаем ответ.

Ответ: $\{-1; 3\}$. $\square$

Решение задачи 1419. Поскольку выражения $\sqrt{x - \frac{1}{5}}$ и $\sqrt{y - \frac{1}{5}}$ определены, верны неравенства $x - \frac{1}{5} \geq 0$, $y - \frac{1}{5} \geq 0$. Поэтому неизвестные x и y на самом деле являются натуральными числами: $x, y = 1, 2, \ldots$.

Это позволяет оценить $\sqrt{y - \frac{1}{5}}$ снизу числом $\sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Следовательно,

$$\sqrt{x - \frac{1}{5}} = \sqrt{5} - \sqrt{y - \frac{1}{5}} \leq \sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}},$$

откуда

$$x - \frac{1}{5} \leq \frac{9}{5} \Leftrightarrow x \leq 2.$$

Таким образом, для x имеется только две возможности: $x = 1$, $x = 2$.

Аналогично, y также может быть только 1 или 2.

Итак, если исходное уравнение имеет решение $(x; y)$, то это может быть $(1; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 1)$, $(2; 2)$. С другой стороны, проверка показывает, что уравнению удовлетворяют лишь пары $(2; 1)$ и $(1; 2)$.

Ответ: $(2; 1)$, $(1; 2)$. $\square$

Решение задачи 1427. В левой части нашего равенства стоит многочлен второй степени, а в правой – третьей. Поэтому для достаточно больших значений неизвестных правая часть будет больше левой. Оставшееся конечное число возможных значений неизвестных проанализировать гораздо проще.

Эти общие соображения можно превратить в аккуратное решение, например, следующим образом.

Перепишем уравнение в виде

$$xy\left(\frac{5}{3}z - 3\right) + yz\left(\frac{5}{3}x - 3\right) + xz\left(\frac{5}{3}y - 3\right) + 3 = 0.$$

Если $x, y, z \geq 2$, то выражения в скобках в левой части этого равенства – положительны, а тогда и вся левая часть положительна.

Значит, хотя бы одна из неизвестных равна 1. Допустим, для определённости, что $x = 1$. Тогда исходное уравнение примет вид:

$$3y + 3z = 2yz + 3.$$

Его можно решить с использованием теории делимости. Прежде всего, выразим z через y:

$$z = 3\frac{y-1}{2y-3} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2y-3}.$$

Умножим это равенство на 2, чтобы избавиться от дроби $\frac{3}{2}$:

$$2z = 3 + \frac{3}{2y-3}.$$

Отсюда следует, что $2y - 3$ является делителем числа 3, т.е. $2y - 3 = \pm 1; \pm 3$. Это даёт для y значения 2, 1, 3 и 0. Соответствующие значения z равны

3, 0, 2, 1. Поскольку нас интересует решение в натуральных числах, остаётся только две пары: $(y, z) = (2, 3)$ и $(y, z) = (3, 2)$, что даёт два решения исходного уравнения: $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ и $(x, y, z) = (1, 3, 2)$.

Поскольку неизвестные входят в исходное уравнение симметрично, случаю $y = 1$ соответствует два решения $(2, 1, 3)$ и $(3, 1, 2)$, а случаю $z = 1$ – два решения $(2, 3, 1)$ и $(3, 2, 1)$.

Ответ: $(1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (3; 1; 2), (2; 3; 1), (3; 2; 1)$.□

Решение задачи 1428. Перепишем исходное равенство в виде:

$$x - 2 = \frac{4}{13} - \frac{1}{y + \frac{1}{z}}.$$

Дроби $a = \frac{4}{13}$ и $b = \dfrac{1}{y + \dfrac{1}{z}}$ меньше 1 (знаменатель второй дроби больше 1). Кроме того, они положительны. Поэтому $a - b \in (-1; 1)$. Но $a - b = x - 2$ – число целое. Следовательно, $x - 2 = 0$, так что исходное уравнение примет вид:

$$y + \frac{1}{z} = 3 + \frac{1}{4} \Leftrightarrow y - 3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{z}.$$

Дроби $a' = \frac{1}{4}$ и $b' = \frac{1}{z}$ меньше или равны 1 (знаменатель второй дроби больше или равен 1). Кроме того, они положительны. Поэтому $a' - b' \in (-1; 1)$. Но $a' - b' = y - 3$ – число целое. Следовательно, $y - 3 = 0$, так что исходное уравнение примет вид:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow z = 4.$$

Ответ: $(2; 3; 4)$. □

Решение задачи 1435. Рассмотрим исходное уравнение как квадратное относительно x:

$$x^2 - 2xy + (2y^2 + 2y) = 0. \qquad (11.109)$$

Если оно имеет решение, то дискриминант должен быть неотрицателен:

$$y^2 - (2y^2 + 2y) \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + 2y \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 0.$$

На отрезок $-2 \leq y \leq 0$ попадает только три целых числа: -2, -1, 0.

Если $y = -2$, то уравнение (11.109) примет вид $x^2 + 4x + 4 = 0$. Оно имеет единственный корень $x = -2$, который является целым числом.

Если $y = -1$, то уравнение (11.109) примет вид $x^2 + 2x = 0$. Оно имеет два корня $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, которые являются целыми числами.

Если $y = 0$, то уравнение (11.109) примет вид $x^2 = 0$. Оно имеет единственный корень $x = 0$, который является целым числом.

Ответ: $\{(0; 0), (-2; -2), (0; -1), (-2; -1)\}$. □

Решение задачи 1436. Разделим обе части исходного уравнения на xy:

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Поскольку числа x и y – натуральные, обе дроби в правой части этого равенства не превосходят 1. Соответственно, неизвестная z не превосходит 2, т.е. равна 1 или 2.

Если $z = 1$, то исходное уравнение примет вид:

$$xy = x + y \Leftrightarrow y = 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Поэтому $x - 1 = 1$, т.е. $x = 2$. Тогда $y = 2$.

Если $z = 2$, то исходное уравнение примет вид:

$$2xy = x + y \Leftrightarrow 2y = 1 + \frac{1}{2x-1}.$$

Поэтому $2x - 1 = 1$, т.е. $x = 1$. Тогда $y = 1$.

Ответ: $(1; 1; 2), (2; 2; 1)$. □

Решение задачи 1444. Пусть Ваня нашел b белых грибов, p подосиновиков, r прочих (среди которых был один червивый подберезовик). По условию $b+p+r = 35$. Поэтому домой Петя принёс $p+r-1 = 34-b$ грибов.

По условию задачи

$$\frac{b}{35} = \frac{p}{34-b} \Leftrightarrow b^2 - 34b + 35p = 0.$$

Поскольку квадратное уравнение $b^2 - 34b + 35p = 0$ имеет решение, его дискриминант неотрицателен:

$$289 - 35p \geq 0 \Leftrightarrow p \leq 8\frac{8}{35} \Leftrightarrow p = 1, \ldots, 8.$$

Кроме того, $b = 17 \pm \sqrt{289 - 35p}$. Поскольку b – целое число, число $\sqrt{289 - 35p}$ также должно быть целым, т.е. $289 - 35p$ является полным квадратом.

Простая проверка показывает, что из возможных значений $p = 1, \ldots, 8$ этому условию удовлетворяет только $p = 8$.

Ответ: 8. □

11.7 Глава 7

Решение задачи 1445. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ – данная арифметическая прогрессия. Как и всякая арифметическая прогрессия, она полностью определяется первым членом a_1 и разностью d – эти величины обычно являются основными неизвестными в любой задаче на арифметические прогрессии.

Чтобы найти эти две неизвестные, нужно иметь (в идеале) систему из двух уравнений. Записав коротко условие задачи:

$$\begin{cases} a_3 + a_7 = 3 \cdot a_2 \\ a_1 \cdot a_4 = 40 \\ d > 0 \end{cases}$$

мы получим “заготовку” для этой системы. Чтобы превратить эту „‘заготовку” в обычную систему, распишем все величины a_k по формуле общего члена:

$$\begin{cases} (a_1+2d)+(a_1+6d)=3\cdot(a_1+d) \\ a_1\cdot(a_1+3d)=40 \\ d>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=5d \\ a_1\cdot(a_1+3d)=40 \\ d>0 \end{cases}$$

Решая систему методом исключения, мы получим: $d=1$, $a_1=5$. Теперь можно подсчитать любую величину, связанную с прогрессией. В частности, $S_{12}=\frac{2a_1+11d}{2}\cdot 12=126$.

Ответ: $S_{12}=126$. □

Решение задачи 1468. Пусть a_n – количество телевизоров, проданных в n-й рабочий день месяца, N – количество дней, за которые был выполнен месячный план. По условию,

1. последовательность $a_1,\dots,a_N$ является арифметической прогрессией с первым членом $a_1=105$ и разностью $d=10$;

2. сумма $a_1+\dots+a_N$ равна 4000.

Применяя формулу для суммы N первых членов арифметической прогрессии, мы имеем:

$$\frac{2\cdot 105+(N-1)\cdot 10}{2}\cdot N=4000 \Leftrightarrow N^2+20N-800=0.$$

Это квадратное уравнение имеет два корня: $N=-40$ и $N=20$. Первый из них не подходит по смыслу задачи.

В день выполнения месячного плана, т.е. в 20-й рабочий день месяца, было продано $a_20=a_1+19d=295$ телевизоров.

В последующие 6 дней продавали по $295-13=282$ телевизоров. Таким образом, за эти 6 дней было продано $6\cdot 282=1\ 692$ телевизоров – именно на эту величину (в абсолютных цифрах) был перевыполнен месячный план. Соответственно, относительное перевыполнение плана равно $\frac{1\ 692}{4\ 000}=0,423=43,2\%$.

Ответ: $42,3\%$. □

Решение задачи 1472. Равенства $a_3=-13$, $a_7=3$ дают систему двух уравнений относительно первого члена прогрессии, a_1, и разности прогрессии, d:

$$\begin{cases} a_1+2d=-13 \\ a_1+6d=3 \end{cases}$$

Она легко решается: $a_1=-21$, $d=4$.

Теперь мы можем найти зависимость суммы n первых членов прогрессии от n:

$$S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n=2n^2-23n.$$

Задача заключается в определении минимума этой функции натурального аргумента.

Рассмотрим соответствующую функцию непрерывного аргумента x: $f(x) = 2x^2 - 23x$. Ее графиком является парабола с вершиной в точке с координатами $x_0 = \frac{23}{4}$, $y_0 = \frac{529}{8}$. Если бы x_0 было целым числом, то задача была бы решена. В данном случае нужны дополнительные рассуждения.

При $x \le \frac{23}{4}$ функция $f(x)$ монотонно убывает. Поэтому для из значений $f(1), \ldots, f(5)$ наименьшим будет $f(5) = -65$.

При $x \ge \frac{23}{4}$ функция $f(x)$ монотонно возрастает. Поэтому для из значений $f(6), f(7), \ldots$ наименьшим будет $f(6) = -66$.

Меньшее из значений $f(5) = -65$ и $f(6) = -66$, т.е. $f(6) = -66$, и будет искомым минимумом.

Отметим, что в данном случае точка $n = 6$, в которой достигается минимум $f(n)$, является ближайшим целым числом к точке $x_0 = \frac{23}{4}$. Этот результат является следствием симметрии параболы и для более сложных функций вовсе не обязан быть справедливым.

Можно решить задачу и более элементарными рассуждениями. Поскольку $d = 4 > 0$, члены прогрессии монотонно возрастают и потому с некоторого места станут положительными: $a_1 = -21$, $a_2 = -17$, $a_3 = -13$, $a_4 = -9$, $a_5 = -5$, $a_6 = -1$, $a_7 = 3$. С другой стороны, поскольку $S_n = S_{n-1} + a_n$, $S_n < S_{n-1}$, если $a_n < 0$, и $S_n > S_{n-1}$, если $a_n > 0$. Этот результат означает, что $S_1 > S_2 > S_3 > S_4 > S_5 > S_6 < S_7 < S_8 < \ldots$, т.е. S_6 будет наименьшим членом последовательности сумм S_n.

Ответ: $n = 6$; $S_6 = -66$. □

Решение задачи 1478. Условие $a_{13} = 0$ означает, что $a_1 = -12d$. Поэтому равенство $5^{a_1} \cdot 5^{a_2} \cdot \cdots \cdot 5^{a_{24}} = \frac{5^{a_1}+5^{a_2}+\cdots+5^{a_{24}}}{24}$ примет вид:

$$24 \cdot 5^{-12d} = 5^{-12d} + 5^{-11d} + \cdots + 5^{-d} + 1 + 5^{d} + \cdots + 5^{11d}.$$

После умножения обеих частей на 5^{12d} мы получим:

$$23 = 5^{d} + \cdots + 5^{11d} + 5^{12d} + 5^{13d} + \cdots + 5^{23d}.$$

Функция в правой части при изменении аргумента d от $-\infty$ до $+\infty$ монотонно возрастает от $0+$ до $+\infty$, принимая при $d = 0$ значение 23. Значит, $d = 0$, а потому $a_1 = 12d = 0$.

Ответ: $a_1 = 0$.□

Решение задачи 1479. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ – данная арифметическая прогрессия. Как обычно, первый член a_1 и разность d будем рассматривать в качестве основных неизвестных.

Запишем условие задачи в виде системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1^5 + \cdots + a_7^5 = 0 \\ a_1^4 + \cdots + a_7^4 = 51 \\ d < 0 \end{array} \right.$$

Используя формулу общего члена арифметической прогрессии, получим систему относительно a_1 и d:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1^5 + \cdots + (a_1 + 6d)^5 = 0 \\ a_1^4 + \cdots + (a_1 + 6d)^4 = 51 \\ d < 0 \end{array} \right. \qquad (11.110)$$

Первое уравнение этой системы является однородным уравнением пятой степени. Чтобы его упростить, разделим обе части на d^5 (это можно делать, т.к. по условию задачи $d \neq 0$) и введём новую неизвестную $x = \frac{a_1}{d}$:

$$x^5 + (x+1)^5 + \cdots + (x+6)^5 = 0. \qquad (11.111)$$

Левая часть этого уравнения при изменении переменной x от $-\infty$ до $+\infty$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ (каждая из функций $y = x^5, y = (x+1)^5, \ldots, y = (x+6)^5$ – возрастающая). Поэтому уравнение (11.111) имеет и притом единственный корень x_0. Чтобы его найти, нужно обладать определённой математической интуицией: $x_0 = -3$ (формально достаточно сказать: "непосредственной проверкой убеждаемся, что $x_0 = -3$ – корень").

Возвращаясь к основным переменным a_1 и d, имеем: $a_1 = -3d$. Теперь второе уравнение системы (11.110) примет вид:

$$196d^4 = 51.$$

Поскольку по условию $d < 0$, это уравнение даёт $d = -\sqrt[4]{\frac{51}{196}}$, так что $a_7 = -3 \cdot \sqrt[4]{\frac{51}{196}}$.

Ответ: $a_7 = -3 \cdot \sqrt[4]{\frac{51}{196}}$. □

Решение задачи 1480. Пусть a_n – данная прогрессия, d – её разность. По условию

$$\begin{cases} S_{14} = 77, \\ a_1 = k, \\ a_{11} = m, \end{cases}$$

где k и m – натуральные числа. Применяя формулу для суммы n первых членов арифметической прогрессии и формулу общего члена прогрессии, мы приведём эту систему к виду:

$$\begin{cases} 2k + 13d = 11, \\ k + 10d = m. \end{cases}$$

Неизвестные k и m – натуральные числа, а d – действительное число. Чтобы свести дело только к натуральным числам, исключим переменную d:

$$7k + 13m = 110.$$

Так как k – натуральное число, верно неравенство: $k \geq 1$. Тогда $13m \leq 103$, т.е. $m \leq 7$.

Для завершения решения достаточно проверить "подозрительные" значения m, т.е. подсчитать для $m = 1, \ldots, 7$ соответствующие значения $k = \frac{110-13m}{7}$ и отобрать те значения m, для которых k будет целым числом. В итоге мы получим только одну возможность: $m = 2$, $k = 12$.

Теперь можно найти исключённую неизвестную d:

$$d = \frac{11 - 2k}{13} = -1,$$

и подсчитать искомую величину a_{18}:

$$a_{18} = a_1 + 17d = 12 - 17 = -5.$$

Ответ: $a_{18} = -5$. □

Решение задачи 1481. Первое условие задачи означает, что

$$|(a_1 + a_2 + \cdots + a_6) - (a_7 + a_8 + \cdots + a_{12})| < 450$$

Выражение под знаком модуля в левой части равно $36d$. Поэтому это условие дает следующие границы для разности прогрессии:

$$-12,5 < d < 12,5.$$

Поскольку прогрессия целочисленная, её разность также является целым числом. Поэтому d может быть только одним из чисел $-12, -11, \ldots, 11, 12$.

Второе условие задачи можно записать следующим образом:

$$a_1 + \cdots + a_5 > a_{n_1} + \cdots + a_{n_k} + 5, \tag{11.112}$$

для любого множества индексов $M = \{n_1, \ldots, n_k\}$, отличного от множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Поскольку все числа a_i – целые, неравенство (11.112) равносильно неравенству

$$a_{n_1} + \cdots + a_{n_k} \leq a_1 + \cdots + a_5 - 6, \tag{11.113}$$

Соотношение (11.113) задаёт бесконечную систему неравенств относительно двух неизвестных, a_1 и d (конкретное неравенство получается при конкретном выборе множества индексов $M = \{n_1, \ldots, n_k\}$).

Решить эту систему формальными преобразованиями вряд ли можно. Поэтому постараемся разобраться в смысле условия (11.113).

Прежде всего отметим, что любое множество индексов $M = \{n_1, \ldots, n_k\}$, отличное от множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, можно получить из последнего применением одной или нескольких из следующих операций:

1. выбрасывание числа a_n с номером $n = 1, 2, \ldots, 5$;

2. добавление числа a_n с номером $n = 6, 7 \ldots$

Условие (11.113) влечёт, что если из набора $a_1, \ldots, a_5$ убрать одно число a_n, то сумма $a_1 + \cdots + a_5$ уменьшится как минимум на 6. Поэтому все числа $a_1, \ldots, a_5$ больше или равны 6. Формально этот вывод следует из (11.113) при $\{n_1, \ldots, n_k\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{n\}$:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - a_n \leq a_1 + \cdots + a_5 - 6 \Leftrightarrow a_n \geq 6.$$

С другой стороны, если к набору $a_1, \ldots, a_5$ добавить одно число a_n из списка $a_6, a_7, \ldots$, то сумма $a_1 + \cdots + a_5$ также уменьшится как минимум на 6. Поэтому все числа $a_6, a_7, \ldots$ меньше или равны -6. Формально этот вывод следует из (11.113) при $\{n_1, \ldots, n_k\} = \{1,2,3,4,5\} \cup \{n\}$:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_n \le a_1 + \cdots + a_5 - 6 \Leftrightarrow a_n \le -6.$$

Итак, из второго условия задачи следует, что

$$a_1, \ldots, a_5 \ge 6;\ \ a_6, a_7, \cdots \le -6. \tag{11.114}$$

Если эти неравенства выполнены, и множество индексов $M = \{n_1, \ldots, n_k\}$, отличается от множества $\{1,2,3,4,5\}$ на k элементов, то верно неравенство

$$a_{n_1} + \cdots + a_{n_k} \le a_1 + \cdots + a_5 - 6k,$$

и, значит, тем более неравенство (11.113). Итак, на самом деле (11.114) равносильно (11.113).

Поскольку разность прогрессии, в частности, равна $a_6 - a_5$, из неравенств $a_6 \le -6$, $-a_5 \le -6$ следует, что $d \le -12$, причем $d = -12$ тогда и только тогда, когда $a_6 = -6$, $-a_5 = -6$. С учетом полученных ранее возможных значений для разности прогрессии остается только один вариант: $d = -12$. Тогда, $a_6 = -6$, $a_5 = 6$. Оба эти равенства дают одно и тоже значение первого члена прогрессии: $a_1 = 54$.

Теперь нужно проверить, что для $a_1 = 54$, $d = -12$ неравенство (11.114) выполнено. Действительно, в этом случае прогрессия имеет вид:

$$a_1 = 54, a_2 = 42, a_3 = 30, a_4 = 18, a_5 = 6, a_6 = -6, a_7 = -18, \ldots$$

Ответ: $a_1 = 54$. □

Решение задачи 1483. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ – данная арифметическая прогрессия, d – её разность.

Первая часть условия задачи означает, что

$$\begin{cases} a_1 < 0, \\ a_{100} \ge 74, \\ a_{200} < 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 < 0, \\ a_1 + 99d \ge 74, \\ a_1 + 199d < 200 \end{cases}$$

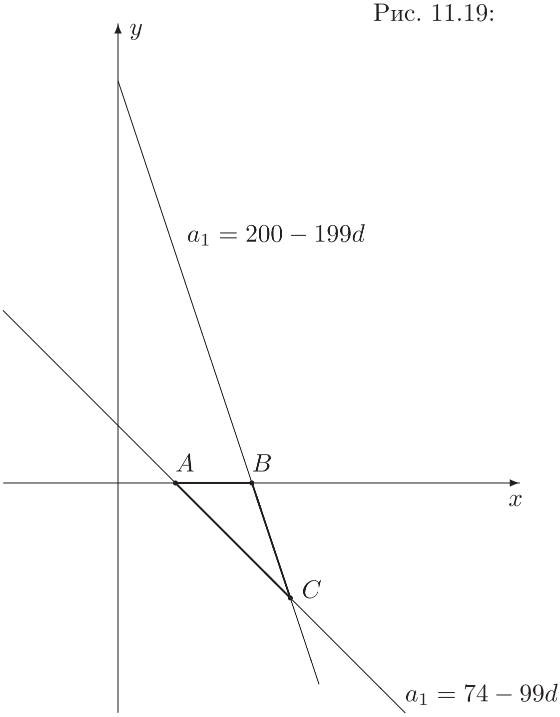
Эту систему неравенств, как обычно, можно решить графически (см. рис. 11.19). На координатной плоскости $(d; a_1)$ эта система неравенств задаёт внутренность треугольника ABC с вершинами $A\left(\frac{74}{99}; 0\right)$, $B\left(\frac{200}{199}; 0\right)$, $C\left(\frac{126}{100}; -\frac{5074}{100}\right)$; стороны AB и BC не входят в множество решений, а сторона AC – входит (без вершин A и C).

Для решения задачи будет важно лишь то, что для точек $(d; a_1)$ из этого треугольника верно неравенство

$$\frac{74}{99} < d < \frac{126}{100}. \tag{11.115}$$

Отсюда, в частности, следует, что $d > 0$, т.е. прогрессия возрастает.

Рис. 11.19:



Чтобы записать на языке математики вторую часть условия задачи, обозначим через N количество членов прогрессии на интервале $(0,5;5)$, так что количество членов прогрессии на на отрезке $[20;24,5]$ равно $N+2$.

Поскольку $a_1 < 0$, а прогрессия возрастает, несколько первых членов прогрессии лежат левее точки $0,5$: $a_1 < \cdots < a_n \leq 0,5$, а первый член прогрессии, попадающий на интервал $(0,5;5)$ имеет номер $n+1$, больший 1. Поскольку прогрессия возрастает, этот факт означает выполнение двух неравенств: $a_n \leq 0,5$, $a_{n+1} > 0,5$.

В силу возрастания прогрессии, тот факт, что количество членов прогрессии на интервале $(0,5;5)$ равно N, означает, что a_{n+N} ещё лежит на этом интервале, т.е. $a_{n+N} < 5$, а a_{n+N+1} – уже нет, т.е. $a_{n+N+1} \geq 5$.

Итак, для некоторых натуральных n и N верны неравенства

$$\left\{\begin{array}{l} a_n \leq 0,5 \\ a_{n+1} > 0,5, \\ a_{n+N} < 5, \\ a_{n+N+1} \geq 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 + (n-1)d \leq 0,5 \\ a_1 + nd > 0,5, \\ a_1 + (n+N-1)d < 5, \\ a_1 + (n+N)d \geq 5 \end{array}\right. \tag{11.116}$$

Решить эту систему в сколь нибудь простых терминах нельзя. Однако можно получить одно полезное следствие. Для этого умножим первое неравенство на -1 и сложим с четвёртым:

$$(N+1)d \geq 4,5. \tag{11.117}$$

Аналогично, последнее условие задачи означает, что для некоторого натурального m (и ранее введённого N) верны неравенства

$$\left\{\begin{array}{l} a_m < 20 \\ a_{m+1} \geq 20, \\ a_{m+N+2} \leq 24,5, \\ a_{m+N+3} > 24,5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 + (m-1)d < 20 \\ a_1 + md \geq 20, \\ a_1 + (m+N+1)d \leq 24,5, \\ a_1 + (m+N+2)d > 24,5 \end{array}\right. \tag{11.118}$$

Как и систему (11.116), решить эту систему в сколь нибудь простых терминах нельзя. Однако можно получить полезное следствие. Для этого умножим второе неравенство на -1 и сложим с третьим:

$$(N+1)d \leq 4,5. \tag{11.119}$$

Неравенства (11.117) и (11.119) влекут, что

$$(N+1)d = 4,5. \tag{11.120}$$

Это равенство, в свою очередь, позволяет переписать системы (11.116) и (11.118) в более простой форме:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 + (n-1)d \leq 0,5 \\ a_1 + nd > 0,5, \\ a_1 + (n-2)d < 0,5, \\ a_1 + (n-1)d \geq 0,5 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} a_1 + (m-1)d < 20 \\ a_1 + md \geq 20, \\ a_1 + md \leq 20, \\ a_1 + (m+1)d > 20 \end{array}\right.$$

откуда

$$a_1 + (n-1)d = 0,5, \tag{11.121}$$

$$a_1 + md = 20. \tag{11.122}$$

Простая подстановка показывает, что равенства (11.120), (11.121), (11.122) (при учете условия $d > 0$) влекут выполнение всех неравенств из основных систем (11.116) и (11.118). Иначе говоря, наша задача свелась к решению системы из трех уравнений с двумя действительными неизвестными, a_1 и d, и тремя целочисленными, n, m и N.

Исключая действительные неизвестные, a_1 и d, мы получим уравнение

$$3(m-n+1) = 13(N+1).$$

Общее решение этого стандартного однородного уравнения с целочисленными неизвестными имеет вид:

$$m-n+1 = 13k, \quad N+1 = 3k,$$

где $k \in Z$. Однако, т.к. $N+1$ – натуральное число, то и k – натуральное.

Это решение позволяет переписать уравнение (11.120) в виде:

$$d = \frac{3}{2k}.$$

Теперь вспомним ограничение (11.115), вытекающее из первой части исходной задачи:

$$\frac{74}{99} < \frac{3}{2k} < \frac{126}{100} \Leftrightarrow \frac{300}{252} < k < \frac{297}{148}.$$

На этот промежуток попадает только одно натуральное число: $k = 2$. Соответственно, $d = \frac{3}{4}$, $N = \frac{4{,}5}{d} - 1 = 5$.

Чтобы найти a_1, вернемся к первому условию задачи, которое теперь примет вид:

$$\begin{cases} a_1 < 0, \\ a_1 \geq 74 - 99 \cdot \frac{3}{4} \equiv -\frac{1}{4}, \\ a_1 < 200 - 199 \cdot \frac{3}{4} \equiv \frac{203}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq a_1 < 0.$$

Исключая a_1 с помощью (11.121), мы получим:

$$-\frac{1}{4} \leq 0,5 - (n-1) \cdot \frac{3}{4} < 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3} < n \leq 2.$$

Следовательно, $n = 2$ (соответственно $m = n - 1 + 13k = 27$), а тогда $a_1 = 0,5 - (n-1)d = -\frac{1}{4}$.

Ответ: $a_1 = -\frac{1}{4}$, $d = \frac{3}{4}$. $\square$

Решение задачи 1484. Пусть $a_1, a_2 \ldots, a_n$ – данная прогрессия. Основное условие задачи (“квадрат ее первого члена в сумме с остальными членами не превосходит 160”) можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered} a_1^2 + a_2 + \cdots + a_n \leq 160 \\ \Updownarrow \\ a_1^2 - a_1 + \tfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} n \leq 160 \\ \Updownarrow \\ a_1^2 + (n-1)a_1 + (n^2 - n - 160) \leq 0 \end{gathered}$$

Фраза “какое наибольшее число членов может содержать прогрессия” означает: при каком наибольшем натуральном n квадратичное неравенство относительно неизвестной a_1

$$a_1^2 + (n-1)a_1 + (n^2 - n - 160) \leq 0$$

имеет хотя бы одно решение?

График левой части этого неравенства – парабола. Она опустится ниже оси абсцисс (нестрого) тогда и только тогда, когда соответствующее квадратное уравнение имеет хотя бы один корень, т.е. его дискриминант неотрицателен:

$$(n-1)^2 - 4(n^2 - n - 160) \geq 0 \Leftrightarrow 3n^2 - 2n - 641 \leq 0.$$

Решение последнего неравенства – отрезок

$$\left[\frac{1-\sqrt{1924}}{3}; \frac{1+\sqrt{1924}}{3}\right]. \tag{11.123}$$

Поскольку $43 < \sqrt{1924} < 44$, справедливы оценки:

$$-14\frac{1}{3} < \frac{1-\sqrt{1924}}{3} < -14, \quad 14\frac{2}{3} < \frac{1-\sqrt{1924}}{3} < 15.$$

Поэтому наибольшее натуральное n, попадающее в отрезок (11.123) – это 14.

Ответ: 14. □

Решение задачи 1485. Задача равносильна доказательству того, что уравнение

$$2y(y+1) = x(x+1) + z(z+1) \tag{11.124}$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах таких, что $x < y < z$.

Выражение $u(u+1)$ с помощью операции выделения полного квадрата можно привести к виду $\left(u+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. Поэтому уравнение (11.124) равносильно уравнению $2(2y+1)^2 = (2x+1)^2 + (2z+1)^2$. Таким образом, задача равносильна доказательству того, что уравнение

$$2b^2 = a^2 + c^2 \tag{11.125}$$

имеет бесконечно много решений в нечётных натуральных числах таких, что $a < b < c$.

Уравнение (11.125) является однородным. Поэтому, если $(a_0; b_0; c_0)$ является его решением, то и тройка чисел $(ka_0; kb_0; kc_0)$, где k – произвольное действительное число, также будет решением. Если, кроме того, числа a_0, b_0, c_0 – нечётные натуральные и $a_0 < b_0 < c_0$, то в случае, когда параметр k является нечётным натуральным числом, числа ka_0, kb_0, kc_0 также будут нечётными натуральными и для них будут справедливы неравенства $ka_0 < kb_0 < kc_0$.

Итак, достаточно найти частное решение уравнения (11.125), обладающее нужными свойствами. Таковым является, например, следующая тройка чисел: $a_0 = 1$, $b_0 = 5$, $c_0 = 7$.

Отметим, что если $k = 2n+1$, где $n \in N$, то $ka_0 = 2n+1$, $kb_0 = 10n+5$, $kc_0 = 14n+7$. Этому семейству решений уравнения (11.125) соответствуют следующие формулы для решений уравнения (11.124): $2x+1 = 2n+1$, $2y+1 = 10n+5$, $2z+1 = 14n+7$, откуда $x = n$, $y = 5n+2$, $z = 7n+3$.

Если в качестве частного решения уравнения (11.125) взять $a_0 = 1$, $b_0 = 29$, $c_0 = 41$, то мы получим ещё одно семейство решений: $x = n$, $y = 29n+14$, $z = 41n+20$, где $n \in N$.

Ответ: например, $x = n, y = 5n+2, z = 7n+3$, где $n \in N$, или $x = n, y = 29n+14, z = 41n+20$, где $n \in N$. □

Решение задачи 1486. Пусть $a_1, a_2, \dots$ – данная геометрическая прогрессия. Как и всякая геометрическая прогрессия, она полностью определяется первым членом a_1 и знаменателем q – эти величины обычно являются основными неизвестными в любой задаче на геометрические прогрессии.

Чтобы найти эти две неизвестные, нужно иметь (в идеале) систему из двух уравнений. Записав коротко условие задачи:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = -7 \\ a_5 = a_2 - 14 \\ a_1 > a_2 > a_3 > \dots \end{cases}$$

мы получим “заготовку” для этой системы. Чтобы превратить эту “заготовку” в обычную систему, распишем все величины a_k по формуле общего члена:

$$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 = -7 \\ a_1q^4 = a_1q - 14 \\ a_1 > a_1q > a_1q^2 > \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1 + q + q^2) = -7 \\ a_1q(q-1)(q^2 + q + 1) = -14 \\ a_1 > a_1q > a_1q^2 > \dots \end{cases}$$

Исключая из первого уравнения a_1, приведём второе уравнение к виду:

$$q^2 - q - 2 = 0,$$

откуда $q = -1$ или $q = 2$.

В случае $q = -1$, $a_1 = -7$ и поэтому наша прогрессия имеет вид: $-7, +7, -7, +7, \dots$, т.е. не является убывающей.

В случае $q = 2$, $a_1 = -1$ и поэтому наша прогрессия имеет вид: $-1, -2, -4, \dots$, т.е. является убывающей.

Ответ: $q = 2.\square$

Решение задачи 1492. Пусть b_k – объём добычи за k-й год в тысячах тонн, n – номер года, в течение которого добыча в последний раз увеличилась по сравнению с предыдущим годом (так что $b_1 < b_2 < \dots < b_n$, а $b_{n+1} = b_{n+2} = b_{n+3} = b_n$). Условие задачи означает, что последовательность $b_1, \dots, b_n$ – геометрическая прогрессия с первым членом $b_1 = 100$ и знаменателем $q = 1,25 = \frac{5}{4}$.

Общий объём добытой руды за все время добычи – это сумма

$$S = (b_1 + \dots + b_n) + (b_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3}).$$

Используя формулу для суммы n первых членов геометрической прогрессии и формулу общего члена геометрической прогрессии, мы можем записать сумму S в виде:

$$S = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} + 3b_1q^{n-1} = 640 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^n - 400.$$

По условию, эта величина равна 850:

$$640 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^n - 400 = 850 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^n = \frac{125}{64} \Leftrightarrow n = 3.$$

Поэтому месторождение разрабатывалось $n+3=6$ лет.

Ответ: 6 лет. □

Решение задачи 1494. *Первый способ.* Опишем, как менялось количество лекарства, введённого в начальный момент (без учета последующих инъекций).

1. сразу после первой инъекции (назовём этот момент – 1) в организме пациента находится 8 единиц лекарства;
2. сразу после второй инъекции (назовём этот момент – 2) в организме пациента находится $\frac{8}{6}$ единиц лекарства;
3. сразу после третьей инъекции (назовём этот момент – 3) в организме пациента находится $\frac{8}{6^2}$ единиц лекарства;
4. ...
5. сразу после 25-й инъекции (назовём этот момент – 25) в организме пациента находится $\frac{8}{6^{24}}$ единиц лекарства.

Теперь опишем, как менялось количество лекарства, введённого в момент 2 (без учёта остальных инъекций).

1. в момент 2 в организме пациента находится 5 единиц лекарства;
2. в момент 3 в организме в организме пациента находится $\frac{5}{6}$ единиц лекарства;
3. ...
4. в момент 25 в организме пациента находится $\frac{5}{6^{23}}$ единиц лекарства.

Ясно, что от n-й инъекции, $n=2,3,\ldots,25$, к моменту 25 в организме пациента останется $\frac{5}{6^{25-n}}$ единиц лекарства.

Теперь общее количества лекарства в организме пациента в момент 25 можно найти как сумму

$$\frac{8}{6^{24}}+\frac{5}{6^{23}}+\cdots+5.$$

Если не принимать во внимание первое слагаемое, то это – сумма геометрической прогрессии со знаменателем 6. Поэтому её легко подсчитать:

$$\frac{5}{6^{23}}+\cdots+5=6-\frac{6}{6^{24}},$$

так что общее количества лекарства в организме пациента в момент 25 равно $6+\frac{2}{6^{24}}$.

Второй способ. Пусть x_n – общее количество лекарства в организме пациента после n-й инъекции, $n=1,2,\ldots,25$. Динамика последовательности x_n описывается следующим рекуррентным соотношением

$$x_n=\frac{x_{n-1}}{6}+5,\ n=2,3,\ldots,25. \tag{11.126}$$

Это равенство можно рассматривать как функциональное уравнение для последовательности x_n. Чтобы его решить, введём новую неизвестную последовательность $y_n = x_n + t$; точное значение параметра t мы укажем позже. Для последовательности y_n уравнение (11.126) примет вид:

$$y_n = \frac{y_{n-1}}{6} + \left(5 + \frac{5t}{6}\right),\ n = 2, 3, \ldots, 25. \qquad (11.127)$$

Выберем параметр t таким, чтобы второе слагаемое в правой части (11.127) было равно 0: $5 + \frac{5t}{6} = 0 \Leftrightarrow t = -6$. Тогда уравнение (11.127) примет вид:

$$y_n = \frac{y_{n-1}}{6},\ n = 2, 3, \ldots, 25.$$

Это равенство означает, что последовательность y_n является геометрической прогрессией со знаменателем $\frac{1}{6}$. Значит, $y_n = y_1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$. Для основной последовательности x_n это равенство даёт: $x_n - 6 = (x_1 - 6) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$. Поскольку $x_1 = 8$, окончательно имеем: $x_n = 6 + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$. В частности, $x_{25} = 6 + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{24}$.

Ответ: $6 + \frac{2}{6^{24}}$.$\square$

Решение задачи 1497. Пусть x и y – знаменатели первой и второй прогрессий соответственно, так что их n-е члены даются формулами x^{n-1} и y^{n-1} соответственно.

Условие задачи означает, что справедлива система уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x^4 + y^4 = 161. \end{cases} \qquad (11.128)$$

Исключая из первого уравнения одну из неизвестных, скажем y, мы получим одно уравнение с одной неизвестной x:

$$x^4 - 6x^3 + 27x^2 - 54x - 40 = 0. \qquad (11.129)$$

В соответствии с общей идеологией решения уравнений высоких степеней для его решения нужно разложить левую часть на множители. Это не совсем простая задача, т.к. это уравнение не имеет рациональных корней. Однако метод неопределённых коэффициентов приводит к успеху (детали метода см. в решении задачи 204):

$$x^4 - 6x^3 + 27x^2 - 54x - 40 = (x^2 - 3x + 20)(x^2 - 3x - 2).$$

Поэтому уравнение (11.129) распадается на два квадратных уравнения:

$$x^2 - 3x + 20 = 0 \qquad x^2 - 3x - 2 = 0$$

Первое уравнение не имеет корней, а второе имеет два корня: $x_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$. Соответственно, система (11.128) имеет два решения:

$$\begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}, \\ y = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{17}}{2}, \\ y = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \qquad (11.130)$$

Теперь можно найти искомую сумму S шестых членов прогрессий: $S = x^5 + y^5$. Несложные (но весьма громоздкие) вычисления показывают, что $\left(\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}\right)^5 = \frac{573\pm139\sqrt{17}}{2}$. Поэтому $S = 573$ для каждой из двух пар (11.130).

Технически сложные алгебраические преобразования, связанные с методом неопределённых коэффициентов, и громоздкие вычисления при подсчёте значения выражения x^5+y^5 являются "платой" за применение самого простого метода решения системы (11.128) – метода исключения.

Более изящное решение получится, если обратить внимание на то, что эта система симметрична. В соответствии с общей идеологией решения таких систем необходимо ввести новые неизвестные $a = x+y$ и $b = xy$. Конечно, перед этим необходимо провести преобразования, которые бы выделяли в выражении $x^4 + y^4$ блоки $x + y$ и xy:

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = \left((x + y)^2 - 2xy\right)^2 - 2x^2y^2.$$

Для новых неизвестных a и b система (11.128) примет вид:

$$\begin{cases} a = 3, \\ (a^2 - 2b)^2 - 2b^2 = 161. \end{cases}$$

Второе уравнение немедленно превращается в квадратное уравнение относительно b:

$$b^2 - 18b - 40 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня: $b_1 = 20$, $b_2 = -2$. Соответственно, система (11.128) распадается на две системы

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = -2 \end{cases}$$

Первая система не имеет действительных решений, а вторая имеет два решения, которые даются формулами (11.130).

Однако, точный вид этих решений не играет роли для подсчета суммы шестых членов прогрессий. Дело в том, что выражение $S = x^5 + y^5$ симметрично относительно x и y и потому может быть записано как многочлен от элементарных симметрических многочленов $a = x + y$, $b = xy$, значения которых нам известны ($a = 3$, $b = -2$):

$$\begin{aligned} S &= (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) \\ &= (x + y)\left(x^4 + y^4 - xy(x^2 + y^2) + x^2y^2\right) \\ &= a\left(\left(a^2 - 2b\right)^2 - 2b^2 - b\left(a^2 - 2b\right) + b^2\right) = a(a^4 - 5a^2b + 5b^2) = 573. \end{aligned}$$

Хотя этот способ подсчета S "изящнее" прямых возведений иррациональных двучленов $3\pm\sqrt{17}$ в степень, технически он не намного проще (если проще).

Ответ: 573. □

Решение задачи 1501. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n \equiv 1, q \ldots, q^{n-1}$ – данная прогрессия ($q > 0$ – ее знаменатель). Члены этой прогрессии с чередующимися знаками образуют последовательность $1, -q, q^2, \ldots, (-1)^{n-1}q^{n-1}$, которая является геометрической прогрессией со знаменателем $(-q)$.

По условию

$$\begin{cases} 1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{40}{27}, \\ 1 - q + q^2 - \cdots + (-1)^{n-1}q^{n-1} = \frac{20}{27}. \end{cases}$$

Если $q = 1$, то первое уравнение даёт: $n = \frac{40}{27}$, что невозможно. Если $q = -1$, то второе уравнение даёт: $n = \frac{20}{27}$, что невозможно.

Поэтому $q \neq \pm 1$. В этом случае с помощью формулы для суммы n первых членов геометрической прогрессии мы получим:

$$\begin{cases} 40q - 27q^n = 13, \\ 20q + 27 \cdot (-1)^n q^n = 7. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 2 и вычтем из первого. После несложных преобразований мы получим:

$$q^n = \frac{1}{27 \cdot (1 + 2 \cdot (-1)^n)}.$$

Отсюда следует, что n не может быть нечётным числом, т.к. в противном случае число q^n равнялось бы $-\frac{1}{27}$ (это противоречит условию $q > 0$).

Если же n – чётное, то последняя система примет вид:

$$\begin{cases} 40q - 27q^n = 13, \\ 20q + 27q^n = 7, \end{cases}$$

откуда $q = \frac{1}{3}$, $q^n = \frac{1}{9}$, $n = 2$.

Ответ: $q = \frac{1}{3}$. □

Решение задачи 1510. Условие задачи коротко можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} b_n = \frac{1}{6} \\ \frac{b_1 + \cdots + b_{n-1}}{b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots} = 6 \\ b_1 + b_2 + \cdots = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Используя формулу общего члена, получим:

$$\begin{cases} b_1 q^{n-1} = \frac{1}{6} \\ 1 - q^{n-1} = 6q \cdot q^{n-1} \\ b_1 = \frac{3}{4}(1 - q) \end{cases}$$

Кроме того, поскольку b_n – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, необходимо иметь в виду условия $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$, $-1 < q < 1$.

Из первого и третьего уравнения исключим q^{n-1} и q соответственно. Второе уравнение превратится в уравнение относительно одной неизвестной b_1, откуда $b_1 = \frac{1}{2}$. Соответственно, $q = \frac{1}{3}$, $q^{n-1} = \frac{1}{3}$, так что $n = 2$.

Ответ: $n = 2$. $\square$

Решение задачи 1513. Дробь $\frac{x}{1-\frac{x}{2}}$ можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = x$ и знаменателем $q = \frac{x}{2}$ ($|q| < 1$ в силу условия $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$):

$$\frac{x}{1-\frac{x}{2}} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{16} + \ldots .$$

Это равенство наводит на мысль выбрать в качестве искомого многочлена $P_3(x)$ сумму трёх первых членов ряда в правой части: $P_3(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4}$.

Проверим, что этот многочлен обладает требуемым свойством. Разность Δ между дробью $\frac{x}{1-\frac{x}{2}}$ и $P_3(x)$ может быть записана как $\frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{16} + \ldots$. Эта сумма является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = \frac{x^4}{8}$ и знаменателем $q = \frac{x}{2}$. Поэтому $\Delta = \frac{\frac{x^4}{8}}{1-\frac{x}{2}} = \frac{x^4}{8-4x}$. Если $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, то $0 \le x^4 \le \frac{1}{16}$, $6 \le 8 - 4x \le 8$, так что $0 \le \Delta \le \frac{1}{96}$. Поскольку $\frac{1}{96} < \frac{1}{50} = 0,02$, многочлен $P_3(x)$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $P_3(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4}$. $\square$

Решение задачи 1517. Пусть a, b, c – исходные числа. Тот факт, что эти числа образуют геометрическую прогрессию, равносилен справедливости равенства $b^2 = ac$ и условия $a, b, c \neq 0$ (в геометрической прогрессии по определению не может быть нулевых членов).

Тот факт, что числа $16a, 5b, c$ в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, равносилен справедливости равенства $10b = 16a + c$.

Кроме того, по условию задачи $abc = 8$.

Итак, неизвестные a, b, c удовлетворяют системе (условие $a, b, c \neq 0$) вытекает из последнего уравнения и поэтому его можно не учитывать)

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ 10b = 16a + c \\ abc = 8 \end{cases}$$

Эта система легко решается методом исключения.

Ответ: $1; 2; 4$ или $\frac{1}{4}; 2; 16$. $\square$

Решение задачи 1522. Решение этой задачи базируется на двух простых фактах из теории прогрессий:

1. *если последовательности a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 являются арифметическими прогрессиями с разностями d_a и d_b соответственно, то последовательность $a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3$ также будет арифметической прогрессией, а её разность равна $d_a \pm d_b$;*

2. *последовательность c_1, c_2, c_3 является одновременно и арифметической, и геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда она постоянна, т.е. состоит из одних и тех же (ненулевых) чисел (в этом случае она арифметическая с разностью 0 и геометрическая со знаменателем 1).*

Докажем эти утверждения.

1. Разность $c_{n+1} - c_n$ соседних членов последовательности $c_n = a_n \pm b_n$ равна:

$$(a_{n+1} \pm b_{n+1}) - (a_n \pm b_n) = (a_{n+1} - a_n) \pm (b_{n+1} - b_n) = d_a \pm d_b.$$

Поскольку эта разность не зависит от n, последовательность c_n является арифметической прогрессией (непосредственно в силу определения арифметической прогрессии). Разность этой прогрессии – это общее значение разностей $c_{n+1} - c_n$, т.е. $d_a \pm d_b$.

2. Последовательность c_1, c_2, c_3 является одновременно и арифметической, и геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда справедливы равенства

$$\begin{cases} c_2 = \frac{c_1+c_3}{2}, \\ c_2^2 = c_1 \cdot c_3. \end{cases}$$

Эту систему двух уравнений с тремя неизвестными легко решить, исключая c_2 с помощью первого уравнения. Тогда второе уравнение примет вид:

$$c_1^2 - 2 \cdot c_1 \cdot c_3 + c_3^2 = 0 \Leftrightarrow (c_1 - c_3)^2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_3.$$

Если t – общее значение чисел c_1 и c_3, то $c_2 = \frac{t+t}{2} = t$. Итак, последовательность c_1, c_2, c_3 имеет вид t, t, t, т.е. является постоянной.

Теперь займёмся непосредственно нашей задачей.

В силу первого утверждения, последовательность сумм $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3$ – арифметическая прогрессия с разностью $d_a + d_b$. С другой стороны, по условию она является геометрической прогрессией. Значит, эта последовательность постоянна и $d_a + d_b = 0$, т.е. $d_b = -d_a$. Тогда последовательности a_n и b_n имеют вид $a_1, a_1 + d_a, a_1 + 2d_a$ и $b_1, b_1 - d_a, b_1 - 2d_a$ соответственно. Условие

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$$

означает, что $b_1 = a_1 + 2d_a$, а тогда последовательность $b_1, b_1 - d_a, b_1 - 2d_a$ превратится в последовательность $a_1 + 2d_a, a_1 + d_a, a_1$ – от последовательности a_1, a_2, a_3 она отличается обратным порядком членов. □

Решение задачи 1523. Решение этой задачи базируется на следующем факте из теории геометрических прогрессий (аналогичном первому утверждению из решения задачи 1522):

если последовательности a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 являются геометрическими прогрессиями со знаменателями q_a и q_b соответственно, то последовательности a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 и $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}$ также будет геометрическими прогрессиями, а их знаменатели равны q_aq_b и $\frac{q_a}{q_b}$ соответственно.

Его справедливость является непосредственным следствием определения геометрической прогрессии и равенств

$$a_{n+1}b_{n+1} = a_nq_a \cdot b_nq_b = (a_nb_n) \cdot (q_aq_b), \qquad \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_nq_a}{b_nq_b} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{q_a}{q_b}.$$

Теперь займёмся непосредственно нашей задачей. В силу доказанного утверждения, последовательность произведений a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 – геометрическая прогрессия со знаменателем q_aq_b. С другой стороны, по условию она является арифметической прогрессией. Применяя второе утверждение из решения задачи 1522, можно гарантировать, что эта последовательность постоянна и $q_aq_b = 1$, т.е. $q_b = \frac{1}{q_a}$. Тогда последовательности a_n и b_n имеют вид $a_1, a_1q_a, a_1q_a^2$ и $b_1, \frac{b_1}{q_a}, \frac{b_1}{q_a^2}$ соответственно. Условие

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$$

означает, что $b_1 = a_1q_a^2$, а тогда последовательность $b_1, \frac{b_1}{q_a}, \frac{b_1}{q_a^2}$ превратится в последовательность $a_1q_a^2, a_1q_a, a_1$. От последовательности a_1, a_2, a_3 она отличается обратным порядком членов, так что $a_1 + b_1 = a_3 + b_3$. □

Решение задачи 1525. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – данные арифметическая и геометрическая прогрессии соответственно.

Рассмотрим три новые новые последовательности: (1) $x_1 = a_1, x_2 = a_3, x_3 = a_5$; (2) $y_1 = b_1, y_2 = b_3, y_3 = b_5$; (3) $z_1 = -3, z_2 = 1, z_3 = 5$.

Так как $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия, последовательность x_1, x_2, x_3 также будет арифметической прогрессией; её разность d_x равна $2d$, где d – разность прогрессии $\{a_n\}$.

Так как $\{b\}n$ – геометрическая прогрессия, последовательность y_1, y_2, y_3 также будет геометрическая прогрессией; её знаменатель равен q^2, где q – знаменатель прогрессии $\{b_n\}$.

Последовательность z_1, z_2, z_3, очевидно, является арифметической прогрессией с разностью $d_z = 4$.

Условие задачи равносильно тому, что последовательность $\{y_n\}$ является разностью последовательностей $\{z_n\}$ и $\{x_n\}$. Поскольку эти последовательности – арифметические прогрессии, отсюда следует, что последовательность $\{y_n\}$ также будет арифметической прогрессией с разностью $d_y = d_z - d_x$. С другой стороны, $\{y_n\}$ – геометрическая прогрессия. Но последовательность может быть одновременно арифметической и геометрической прогрессиями тогда и только тогда, когда она постоянна, т.е. состоит из одних и тех же (ненулевых) чисел. В этом случае она арифметическая с разностью 0 и геометрическая со знаменателем 1. Итак, $d_y = 0$. Это равносильно тому, что

$$d_x = d_z \Leftrightarrow 2d = 4 \Leftrightarrow d = 2.$$

Ответ: $d = 2$. □

Решение задачи 1526. Найдем последние, сотые, члены прогрессий $a_1 = 12, a_2 = 15, a_3 = 18, \ldots$ и $b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 9, \ldots$:

$$a_{100} = a_1 + 99d = 12 + 99 \cdot 3 = 309, \quad b_{100} = b_1q^{99} = 3^{99}.$$

Поэтому из геометрической прогрессии $1, 3, 9, \ldots$ лишь несколько первых членов могут быть членами и первой (арифметической) прогрессии. Чтобы высказать более определенную гипотезу, подсчитаем еще несколько членов прогрессий a_n и b_n:

$$a_4 = 21, a_5 = 24, a_6 = 27, a_7 = 30, \quad b_4 = 27, b_5 = 81, b_6 = 243, b_7 = 729.$$

Сопоставляя ряды

$$12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, \ldots, 309$$

и

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, \ldots, 3^{99},$$

мы видим, что общими членами (кроме 27) могут быть лишь 81 и 243.

Число 81 является членом арифметической прогрессии a_n тогда и только тогда, когда для некоторого натурального $n \leq 100$ верно равенство

$$81 = 12 + (n-1)3 \Leftrightarrow n = 24.$$

Аналогично, число 243 является членом арифметической прогрессии a_n тогда и только тогда, когда для некоторого натурального $n \leq 100$ верно равенство

$$243 = 12 + (n-1)3 \Leftrightarrow n = 78.$$

Ответ: 27, 81, 243. □

Решение задачи 1530. *Первый способ.* Рассмотрим исходное функциональное уравнение только для натуральных значений аргумента и введём последовательность $a_n = f(n) - f(n-1)$, $n = 1, 2, \ldots$. Величину $f(n)$ можно выразить через эту последовательность следующим образом:

$$\begin{aligned} f(n) &= (f(n) - f(n-1)) + (f(n-1) - f(n-2)) + \ldots \\ &+ (f(1) - f(0)) + f(0) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1. \end{aligned}$$

Для последовательности a_n наше уравнение примет вид:

$$a_n = 2(n-1) + 1.$$

Разность между соседними членами этой последовательности равна $a_{n+1} - a_n = (2n+1) - (2(n-1)+1) = 2$. Это означает, что последовательность a_n является арифметической прогрессией с разностью $d = 2$ (и первым членом $a_1 = 1$).

Теперь величину $f(n)$ можно найти как сумму n первых членов этой прогрессии:

$$f(n) = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = n^2.$$

Второй способ. Отметим, что в приведённом выше решении мы предполагали, что исходное функциональное уравнение

$$f(x+1) = f(x) + 2x + 1, \text{ для всех} x \in R, \tag{11.131}$$

имеет решение, удовлетворяющее условию $f(0) = 0$, и при этом предположении находили $f(n)$, $n \in N$. Вопрос о существовании такого решения остался открытым. Нетрудно проверить, что квадратичная функция $f_0(x) = x^2$,

$x \in R$, является одним из решений нашей задачи. Но при этом возникает естественный вопрос о существовании других решений.

Для ответа на этот вопрос мы подойдем к решению исходного функционального уравнения (11.131) с более общих позиций. Именно, не будем ограничивать себя только натуральными значениями аргумента и попробуем решить это уравнение как уравнение для функции действительного аргумента. Для этого будем использовать методы, использовавшиеся при решении других общих функциональных уравнений (см., например, решение задачи 585).

Начнём решение функционального уравнения (11.131), с поиска частного решения. Фактически мы его уже нашли, когда отметили, что $f_0(x) = x^2$ является решением.

Теперь введём новую неизвестную функцию $g(x) = f(x) - f_0(x)$. Для неё наше уравнение примет вид:

$$g(x+1) = g(x) \text{ для всех } x. \qquad (11.132)$$

Уравнение (11.132) совпадает с определением периодической функции с периодом $T = 1$, определённой на всей числовой прямой. Поэтому решениями этого уравнения будут все периодические функции с периодом $T = 1$, определённые на всей числовой прямой, и только они. Соответственно, общее решение исходного функционального уравнения имеет вид:

$$f(x) = x^2 + g(x),$$

где $g(x)$ – произвольная периодическая функция с периодом $T = 1$, определённая на всей числовой прямой. Начальное условие $f(0) = 0$ превратится в дополнительное условие, которому должны удовлетворять эти периодические функции: $g(0) = 0$. Для натуральных значений аргумента имеем: $f(n) = n^2 + g(n) = n^2 + g(0) = n^2$.

Ответ: $f(2001) = 2001^2$. □

Решение задачи 1532. Рассмотрим члены последовательности с нечётными номерами: $a_1, a_3, a_5, \ldots$. Они образуют новую последовательность x_k:

$$x_1 = a_1, x_2 = a_3, x_3 = a_5, \ldots, x_k = a_{2k-1}, \ldots$$

Интересующее нас число a_{1999} будет 1000-м членом этой последовательности: $a_{1999} = x_{1000}$.

Преобразуем теперь функциональное уравнение для последовательности a_n в функциональное уравнение для последовательности x_k:

$$x_{k+1} = a_{2k+1} = 2a_{2k} = 2a_{(2k-1)+1} = 2\left(a_{2k-1} + 2\right) = 2x_k + 4.$$

Полученное функциональное уравнение для последовательности x_k имеет вид $x_{k+1} = qx_k + d$. Процедура решения подобных уравнений описана в задаче 1494: новая неизвестная последовательность $y_k = x_k + 4$ удовлетворяет уравнению $y_{k+1} = 2y_k$, т.е. является геометрической последовательностью со знаменателем 2. Значит,

$$y_k = y_1 \cdot 2^{k-1}.$$

Для последовательности x_k это равенство даёт (напомним, что $x_1 = a_1 = 2$):

$$x_k + 4 = (x_1 + 4) \cdot 2^{k-1} = 3 \cdot 2^k.$$

Ответ: $a_{1999} = 3 \cdot 2^{1000} - 4$. При $n = 2k - 1$ последовательность a_n дается формулой: $a_n \equiv a_{2k-1} = 3 \cdot 2^k - 4$. □

Решение задачи 1533. *Первый способ.* Поскольку искомая величина является значением неизвестной функции при $x = 1999 \in N$, рассмотрим исходное функциональное уравнение только для натуральных значений аргумента, иначе говоря, введём последовательность $f(n)$ $(n = 1, 2, \dots)$. Однако превратить исходное функциональное уравнение

$$f\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{f(a) + 2f(b)}{3}. \tag{11.133}$$

для функции действительного аргумента x в функциональное уравнение для функции натурального аргумента не так просто. Дело в том, что число $\frac{a+2b}{3}$ может и не быть натуральным, даже если a и b – натуральные. Чтобы решить эту проблему, запишем это число в виде: $\frac{a+2b}{3} = a + \frac{2(b-a)}{3}$. Поэтому число $\frac{a+2b}{3}$ будет целым, если a и $\frac{b-a}{3}$ – целые. Последнее условие означает, что $b = a + 3k$, $k \in Z$. Имея в виду эти соображения, заменим в исходном функциональном уравнении (11.133) a на n, а b на $n+3$ (n – произвольное натуральное число):

$$3f(n+2) = f(n) + 2f(n+3) \tag{11.134}$$

Но число $\frac{a+2b}{3}$ можно было записать и в виде: $\frac{a+2b}{3} = b + \frac{a-b}{3}$. Поэтому оно будет целым, если b и $\frac{a-b}{3}$ – целые. Последнее условие означает, что $a = b + 3k$, $k \in Z$. Имея в виду эти соображения, заменим в исходном функциональном уравнении (11.133) b на n, a на $n+3$ (n – произвольное натуральное число):

$$3f(n+1) = 2f(n) + f(n+3) \tag{11.135}$$

Исключая из уравнений (11.134) и (11.135) выражение $f(n+3)$, получим следующее функциональное уравнение для последовательности $f(n)$:

$$f(n+1) = \frac{f(n) + f(n+2)}{2}. \; n \in N. \tag{11.136}$$

Равенство (11.136) утверждает, что каждый член последовательности $f(n)$, начиная со второго, является средним арифметическим соседних. Это означает, что последовательность $f(n)$ является арифметической прогрессией. Используя формулу общего члена, мы получаем общее решение уравнения (11.136) :

$$f(n) = f(1) + (n-1)d,$$

где d – некоторый параметр (разность прогрессии).

Из условия задачи мы знаем $f(1)$: $f(1) = 1$. Чтобы найти d, воспользуемся равенством $f(4) = 7$, которое также содержится с условии задачи:

$$f(1) + 3d = 7 \Leftrightarrow d = 2.$$

Итак, теперь мы имеем следующее окончательное выражение для значений функции $f(x)$ в натуральных точках:

$$f(n) = 2n - 1.$$

В частности, $f(1999) = 3997$.

Отметим, что в приведённом выше решении (как и в задаче 1530) мы предполагали, что функциональное уравнение (11.133) имеет решение, и при этом предположении находили $f(n)$, $n \in N$. Вопрос существования решения остался открытым. Нетрудно проверить, что линейная функция $f(x) = 2x - 1$, $x \in R$, является одним из решений функционального уравнения (11.133). Но при этом (как и в задаче 1530) возникает естественный вопрос о существовании других решений.

Для ответа на этот вопрос мы подойдём к решению исходного функционального уравнения (11.133) с более общих позиций. Именно, не будем ограничивать себя только натуральными значениями аргумента, а попробуем решить это уравнение как уравнение для функции действительного аргумента. Для этого будем использовать методы, использовавшиеся при решении других общих функциональных уравнений (см., например, решение задачи 581).

Второй способ. Прежде всего, введём новую неизвестную функцию $g(x) = f(x) - f(0)$. Эта функция удовлетворяет равенству

$$g\left(\frac{a + 2b}{3}\right) = \frac{g(a) + 2g(b)}{3}. \tag{11.137}$$

и дополнительному условию $g(0) = 0$, которое мы будем использовать позже.

Полагая в (11.137) $b = 0$, мы получим:

$$g\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{1}{3}g(a),\ a \in R.$$

Если же в (11.137) заменить числом 0 переменную a, то мы получим:

$$g\left(\frac{2b}{3}\right) = \frac{2}{3}g(b),\ b \in R.$$

Эти равенства позволяют выносить (и вносить) коэффициенты $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ за знак функции g. С их помощью можно дополнительно установить следующее свойство:

$$g(2b) = 3 \cdot \frac{1}{3}g\,(2b) = 3g\left(\frac{2b}{3}\right) = 3 \cdot \frac{2}{3}g\,(b) = 2g(b).$$

Итак, за знак функции g можно выносить и коэффициент 2.

С помощью этих свойств функции $g(x)$ функциональное уравнение (11.137) можно преобразовать следующим образом:

$$g\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{g(a)+2g(b)}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3}g\left(a+2b\right) = \frac{g(a)+2g(b)}{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g\left(a+2b\right) = g(a)+2g(b) \Leftrightarrow g\left(a+2b\right) = g(a)+g(2b).$$

Заменяя $2b$ на c, мы получим:

$$g(a+c) = g(a)+g(c),\ \ a,c \in R.$$

Как было установлено в задаче 581, общее решение этого уравнения для *рациональных* значений аргумента даётся формулой

$$g(x) = kx.$$

Соответственно, общее решение исходного функционального уравнения для рациональных значений аргумента даётся формулой

$$f(x) = f(0)+kx,\ \ x \in Q.$$

Значения $f(0)$ и k можно найти из условий $f(1)=1$, $f(4)=7$: $f(0)=-1$, $k=2$, так что окончательно мы имеем:

$$f(x) = 2x-1,\ \ x \in Q. \tag{11.138}$$

Итак, единственным решением функционального уравнения (11.133) в классе функций рационального аргумента является функция (11.138).

Отметим, что если дополнительно предположить непрерывность функции $f(x)$, то (11.138) будет единственной функцией действительного аргумента, удовлетворяющей условию исходной задачи.

Ответ: $f_{1999} = 3997$. □

Решение задачи 1539. Перепишем условие $a_{n-1}a_{n+1} = ka_n$, $n > 1$, в виде

$$a_n = \frac{ka_{n-1}}{a_{n-2}},\ \ n \geq 3. \tag{11.139}$$

Конечно, для этого нужно доказать, что все члены последовательности a_n отличны от нуля. Первые три члена, a_1, a_2, a_3, не равны 0 в силу условий $a_1 = 1$, $a_2a_3 = 2007$. Кроме того, равенство $a_1a_3 = ka_2$ влечёт, что $k \neq 0$. Для остальных членов мы получим этот результат в ходе дальнейших рассуждений.

Функциональное уравнение (11.139) позволяет найти a_n, если известны значения a_{n-1} и a_{n-2}. Поскольку мы знаем a_1, мы можем последовательно выразить все члены последовательности a_n через a_2:

$$\begin{aligned}
&a_3 = \tfrac{ka_2}{a_1} = ka_2, && a_4 = \tfrac{ka_3}{a_2} = \tfrac{k\cdot ka_2}{a_2} = k^2,\\
&a_5 = \tfrac{ka_4}{a_3} = \tfrac{k\cdot k^2}{ka_2} = \tfrac{k^2}{a_2}, && a_6 = \tfrac{ka_5}{a_4} = \tfrac{k\cdot \frac{k^2}{a_2}}{k^2} = \tfrac{k}{a_2},\\
&a_7 = \tfrac{ka_6}{a_5} = \tfrac{k\cdot \frac{k}{a_2}}{\frac{k^2}{a_2}} = 1, && a_8 = \tfrac{ka_7}{a_6} = \tfrac{k\cdot 1}{\frac{k}{a_2}} = a_2.
\end{aligned} \tag{11.140}$$

Поскольку $a_7 = a_1$, $a_8 = a_2$, а член a_n определяется значениями членов a_{n-1} и a_{n-2}, можно гарантировать, что последовательность a_n является периодической с периодом 6, т.е. устроена она следующим образом:

$$1, a_2, ka_2, k^2, \frac{k^2}{a_2}, \frac{k}{a_2};\ 1, a_2, ka_2, k^2, \frac{k^2}{a_2}, \frac{k}{a_2};\ ;\dots$$

Отсюда, в частности следует, что все члены нашей последовательности отличны от нуля. Кроме того, $a_{2007} = a_{6\cdot 334+3} = a_3 = ka_2$.

Рассмотрим теперь равенство

$$a_2a_3 = 2007 \Leftrightarrow ka_2^2 = 9\cdot 223.$$

Из уравнения (11.140) следует, что $k = a_2a_6$ и потому является целым числом. Поскольку 223 – простое число, равенство $ka_2^2 = 9\cdot 223$ равносильно тому, что $a_2^2 = 9, k = 223$ или $a_2^2 = 1, k = 2007$.

В первом случае $a_5 = \frac{k^2}{a_2} = \pm\frac{223\cdot 223}{3}$, что противоречит условию о целочисленности всех a_n.

Следовательно, $a_2^2 = 1, k = 2007$.

Случай $a_2 = 1$, $k = 2007$ соответствует последовательности, которая состоит из периодически повторяющегося блока $1, 1, 2007, 2007^2, 2007^2, 2007$.

В случае $a_2 = -1$, $k = 2007$ этот блок заменяется блоком 1, -1, -2007, 2007^2, -2007^2, -2007.

В обоих случаях все условия задачи выполнены, так что $ka_2 = \pm 2007$.

Ответ: ± 2007. □

Решение задачи 1542. Условие "неравенство $|f(x)| > \frac{1}{2}$ не имеет решений на отрезке $[1;3]$"равносильно тому, что при всех $x \in [1;3]$ справедливо неравенство $|f(x)| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le f(x) \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x^2 + px + q \le \frac{1}{2}$.

Подставляя вместо x числа 1, 2, 3, мы получим систему из трёх неравенств относительно p и q:

$$\begin{cases} -1\frac{1}{2} \le p + q \le -\frac{1}{2} \\ -4\frac{1}{2} \le 2p + q \le -3\frac{1}{2} \\ -9\frac{1}{2} \le 3p + q \le -8\frac{1}{2} \end{cases}$$

Фигура, задаваемая этими неравенствами на координатной плоскости $(p;q)$, состоит из одной точки $(-4; 3.5)$. Таким образом, условие "неравенство $|f(x)| > \frac{1}{2}$ не имеет решений на отрезке $[1;3]$"с необходимостью влечёт, что $f(x) = x^2 - 4x + 3.5$.

С другой стороны функция $f(x) = x^2 - 4x + 3.5 \equiv (x-2)^2 - 0.5$ на отрезке $[1;3]$ сначала монотонно убывает от $f(1) = 0.5$ до $f(2) = -0.5$, а затем монотонно возрастает от $f(2) = -0.5$ до $f(3) = 0.5$, т.е. удовлетворяет неравенству $-\frac{1}{2} \le f(x) \le \frac{1}{2}$.

Пусть $x_0 = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ... В этих обозначениях искомое число – это x_{2017}.

Простые вычисления показывают, что $x_1 = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$, $x_2 = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$, т.е. x_2 совпадает с x_0. Поэтому $x_3 = f(x_2) = f(x_0) = x_1$, $x_4 = f(x_3) = f(x_1) = x_2 = x_0$ и т.д. Таким образом, последовательность x_n является периодической с периодом 2: $x_n = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$ при чётном n, $x_n = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$ при нечётном n.

□

Решение задачи 1545. Найдём, на каком месте стоит k-е по порядку число 1.

Перед этим числом стоит одно число из блока 1; два числа из блока $1, 2$; три числа из блока $1, 2, 3$; ... ; $k-1$ чисел из блока $1, 2, \ldots, (k-1)$. Поэтому всего перед ним стоит

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}$$

чисел. Следовательно, k-я по порядку 1 стоит на $\left(1 + \frac{k(k-1)}{2}\right)$-м месте.

Теперь найдём, в каком блоке находится 2003-е число нашей последовательности. Для этого отметим, что в k-й блок $1, 2, \ldots, k$ входят числа с номерами от $\left(1 + \frac{k(k-1)}{2}\right)$ до $\left(k + \frac{k(k-1)}{2}\right)$. Поэтому 2003-е число находится в k-м блоке тогда и только тогда, когда справедливо двойное неравенство

$$1 + \frac{k(k-1)}{2} \leq 2003 \leq k + \frac{k(k-1)}{2} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k^2 - k - 4004 \leq 0 \\ k^2 + k - 4006 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow k = 63.$$

В 63-м блоке число 1 стоит на 1954 месте. Поэтому на 2003-м месте стоит число $2003 - 1953 = 50$.

Ответ: $a_{2003} = 50$. □

Решение задачи 1553. Перейдём во всех логарифмах к одному основанию a:

$$\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}\right)\cdot \log_a x = \frac{n}{n+1}\cdot \log_a x.$$

Поскольку параметры a и x – произвольны, это равенство равносильно тому, что

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Используя тождество $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, левую часть этого равенства можно записать как:

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

□

Решение задачи 1559. Мы докажем более общее неравенство

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

С этой целью обозначим сумму в левой части через X_n и отметим, что

$$1 > \frac{1}{\sqrt{n}},\ \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{n}},\ \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Складывая эти $n-1$ неравенств и равенство $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ мы получим:

$$X_n > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Неравенство $X_n > \sqrt{n}$ можно доказать и с помощью следующих геометрических соображений. Рассмотрим график функции $y = 1/\sqrt{x}$. Тогда число $1/\sqrt{k}$ можно интерпретировать как площадь прямоугольника, основанием которого является отрезок $[k; k+1]$, а высотой – отрезок прямой $x = k$ под этим графиком. Сумма X_n может рассматриваться как площадь соответствующей ступенчатой фигуры, основанием которой является отрезок $[1; n+1]$. Ясно, что прямоугольник с этим основанием и высотой $1/\sqrt{n}$ лежит внутри этой ступенчатой фигуры. Но его площадь равна $n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. □

Решение задачи 1561. Сумму вида

$$S'_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

можно рассматривать как разность $S_{2n} - S_n$, где

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}.$$

Запишем сумму S_n в виде:

$$S_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n}\right).$$

Поэтому

$$S'_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n}\right).$$

Рассматривая дроби $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2n}$ как подобные члены, мы получим, что

$$S'_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}.$$

В частном случае $n = 100$ этот результат означает, что две исходные суммы равны.

Ответ: суммы равны.□

Решение задачи 1562. Решение. Как доказано в ходе решения задачи 1561,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2010} = \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \cdots + \frac{1}{2010}.$$

Поэтому первое число $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011}$ в нашей задаче равно

$$\begin{aligned} A &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2010}\right) - \frac{1}{2011} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \cdots + \frac{1}{2010}\right) - \frac{1}{2011} = 1 - B, \end{aligned}$$

где $B = \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \cdots + \frac{1}{2011}$ – второе число из нашей задачи.

Следовательно, неравенство $B > A$ равносильно неравенству $B > \frac{1}{2}$.

Сумма B состоит из 1006 монотонно убывающих слагаемых. Поэтому каждое из них больше (или, для последнего, равно), чем $\frac{1}{2011}$. Соответственно, $B > \frac{1006}{2011} > \frac{1006}{2012} = \frac{1}{2}$.

Ответ: второе число больше.□

Решение задачи 1564.

$$\begin{aligned} S &= \frac{2-1}{2!} + \frac{3-1}{3!} + \frac{4-1}{4!} + \cdots + \frac{n+1-1}{(n+1)!} \\ &= \frac{2}{2!} - \frac{1}{2!} + \frac{3}{3!} - \frac{1}{3!} + \frac{4}{4!} - \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

На третьем шаге преобразований мы использовали очевидное соотношение $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Ответ: $S = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$; при $n = 8$ $S = \frac{362879}{362880}$. □

Решение задачи 1567. *Первый способ.* Будем исходить из тождества

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

Подставим вместо k последовательно числа $1, 2, \ldots, n$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ 3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ \ldots \\ (n+1)^3 - n^3 = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 \end{array} \right.$$

и сложим эти равенства почленно. В левой части сократятся все члены, кроме $(n+1)^3$ и 1^3. В правой части перегруппируем слагаемые так, чтобы выделить суммы

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= 1^2 + 2^2 + \ldots n^2, \\ S^{(1)} &= 1 + 2 + \cdots + n, \\ S^{(0)} &= 1 + 1 + \cdots + 1. \end{aligned}$$

В итоге мы получим:

$$(n+1)^3 - 1 = 3S^{(2)} + 3S^{(1} + S^{(0)}. \tag{11.141}$$

Сумма $S^{(0)}$, очевидно, равна n. Сумма $S^{(1)}$ – это сумма арифметической прогрессии, так что она легко считается: $S^{(1)} = \frac{n(n+1)}{2}$. Поэтому из равенства (11.141) мы можем найти искомую сумму $S^{(2)}$.

Второй способ. Будем использовать метод математической индукции.

Основание индукции: При $n = 1$ доказываемая формула сводится к верному числовому равенству $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Шаг индукции: Допустим, что мы доказали нашу формулу для $n = k$. Докажем её справедливость для $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} & 1^2 + 2^2 + \ldots k^2 + (k+1)^2 = \left(1^2 + 2^2 + \ldots k^2\right) + (k+1)^2 \\ = \quad & \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)\left(k(2k+1) + 6(k+1)\right) \\ = \quad & \frac{1}{6}(k+1)\left(2k^2 + 7k + 6\right) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3). \end{aligned}$$

Правая часть последнего равенства – это в точности доказываемая формула для $n = k + 1$. □

11.8 Глава 8

Решение задачи 1573. Обычно решение текстовых задач состоит из трёх этапов:

1. "перевод" условия задачи с русского языка на язык математики;
2. решение полученной математической задачи;
3. интерпретация найденного решения в терминах исходной задачи.

Для данной задачи первый этап – очень лёгкий.

Пусть x, y, z – стоимость (в рублях) 1 кг лука, картофеля, огурцов соответственно. Условие задачи означает, что эти неизвестные удовлетворяют системе из двух уравнений

$$\begin{cases} 0,5x + 3y + z = 2,38 \\ 2x + 4z = 8,2 \end{cases}$$

Второй этап – сложнее, т.к. мы имеем систему из *двух* уравнений с *тремя* неизвестными.

Решим её методом исключения.

Из первого уравнения исключим z: $z = 2,38 - 0,5x - 3y$. Тогда второе уравнение примет вид: $12y = 1,32$, откуда $y = 0,11$. Но после исключения z у нас осталось две неизвестные: x и y. Поскольку никаких уравнений больше нет, неизвестная x может принимать произвольное действительное значение: $x = t$, где $t \in R$. Теперь можно восстановить неизвестную z: $z = 2,05 - 0,5t$.

Таким образом, исходная система двух уравнений с тремя неизвестными имеет бесконечно много решений, которые зависят от одного параметра: $(x; y; z) = (t; 0,11; 2,05 - 0,5t)$, $t \in R$ (если учитывать физический смысл неизвестных, то переменная t может принимать только значения $0,02; 0,04; \ldots; 4,08$).

Теперь можно найти искомую величину $f = x + 2y + 2z$:

$$f = t + 2 \cdot 0,11 + 2 \cdot (2,05 - 0,5t) = 4,32.$$

Итак, для любого из бесконечного числа решений исходной системы искомая величина принимает одно и тоже значение.

Отметим, что после того, как мы нашли значение y, можно сразу определить искомую величину f с помощью следующего преобразования:

$$\begin{aligned} f &= x + 2y + 2z = 2(0,5x + y + z) \\ &= 2(0,5x + 3y + z - 2y) = 2 \cdot (2,38 - 2 \cdot 0,11) = 4,32. \end{aligned}$$

Ответ: 4 руб. 32 коп. □

Решение задачи 1589. Примем дневной норматив расхода горючего в качестве единицы измерения объёма горючего. Пусть a, b, c – расход горючего, если грузовик весь день возит щебень, песок, кирпич соответственно.

Если грузовик половину первого рабочего дня возил щебень, а половину – песок, то расход горючего равен $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$. Аналогично, расход горючего во второй день равен $\frac{a}{7} + \frac{4b}{7} + \frac{2c}{7}$, а в третий – $\frac{a}{4} + \frac{3b}{8} + \frac{3c}{8}$. По условию эти величины равны $0,95 = \frac{19}{20}$, $\frac{101\frac{3}{7}}{100} = \frac{71}{70}$ и $\frac{101\frac{1}{4}}{100} = \frac{81}{80}$ соответственно:

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{19}{20}, \\ \frac{a}{7} + \frac{4b}{7} + \frac{2c}{7} = \frac{71}{70}, \\ \frac{a}{4} + \frac{3b}{8} + \frac{3c}{8} = \frac{81}{80}. \end{cases}$$

Избавляясь от дробей, мы получим простую систему из трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 10a + 10b = 19, \\ 10a + 40b + 20c = 71, \\ 20a + 30b + 30c = 81, \end{cases}$$

которая легко решается методом последовательного исключения неизвестных: $a = 0,9$, $b = 1$, $c = 1,1$.

Ответ: 90% □

Решение задачи 1594. Пусть $\overline{ab}$ – искомое двузначное число. Таким образом, в качестве неизвестных мы вводим a – число десятков и b – число единиц. Эти переменные могут быть только цифрами от 1 до 9 (значение 0 исключено, т.к. и a, и b являются первыми цифрами некоторых двузначных чисел; впрочем, условие задачи можно толковать и так, что случай $b = 0$ не исключен).

Условие задачи можно записать в виде системы (неравенства выражают тот факт, что остаток меньше делителя)

$$\begin{cases} \overline{ab} = 6(a+b)+8, \\ a+b > 8, \\ \overline{ba} = 15(a-b)+2, \\ a-b > 2. \end{cases}$$

Запись $\overline{xy}$ можно выразить через обычные действия как $10x+y$, что позволяет переписать эту систему в виде:

$$\begin{cases} 4a-5b = 8, \\ 25b-14a = 2, \\ a+b > 8, \\ a-b > 2. \end{cases}$$

Система из двух первых уравнений имеет единственное решение $a = 7$, $b = 4$. Это решение удовлетворяет неравенствам системы и условию a, b – цифры от 1 до 9.

Ответ: 74. □

Решение задачи 1602. Пусть $\overline{abc}$ – искомое трёхзначное число. Таким образом, в качестве неизвестных мы вводим a – число сотен, b – число десятков и c – число единиц. Эти переменные могут быть только цифрами от 0 до 9, причем для a значение 0 исключено, т.к. a является первой цифрой некоторого трёхзначного числа.

Условие задачи можно записать в виде равенства

$$\overline{abc} = a^2+b^2+c^2+517. \qquad (11.142)$$

Отсюда следует, что $\overline{abc} > 517$. Поэтому a может быть только $5; 6; 7; 8; 9$. С другой стороны, $a^2+b^2+c^2 \leq 3\cdot 9^2 = 243$. Поэтому $\overline{abc} \leq 760$, так что для a остаются только три возможности: 5, 6 или 7.

Если $a = 5$, то основное уравнение (11.142) примет вид:

$$500+10b+c = 25+b^2+c^2+517 \Leftrightarrow b^2-10b+(c^2-c+42) = 0.$$

Рассмотрим его как квадратное относительно b. Тогда $\frac{D}{4} = 25-c^2+c-42 = -c(c-1)-17$. Поскольку c – цифра, число $c(c-1)$ – неотрицательное. Значит, $\frac{D}{4} < 0$, так что случай $a = 5$ невозможен.

Если $a = 6$, то основное уравнение (11.142) примет вид:

$$600+10b+c = 36+b^2+c^2+517 \Leftrightarrow b^2-10b+(c^2-c-47) = 0.$$

Рассмотрим его как квадратное относительно b. Тогда $\frac{D}{4} = 25-c^2+c+47 = 72-c(c-1)$. Поскольку c – цифра, число $c(c-1)$ не превосходит 72. Значит, $\frac{D}{4} \geq 0$, так что $b = 5 \pm \sqrt{72-c(c-1)}$. Чтобы b было целым числом, число $\frac{D}{4} = 72-c(c-1)$ должно быть полным квадратом. Для $c = 0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 оно равно 72, 72, 70, 66, 60, 52, 42, 30, 16, 0 соответственно. Поэтому

c может быть равно только 8 или 9. Если $c = 8$, то $b = 5 \pm 4 = 1; 9$, а если $c = 9$, то $b = 5$. В каждом случае b является цифрой, что дает три варианта ответа: 618, 698, 659.

И наконец, если $a = 7$, то основное уравнение (11.142) примет вид:

$$700 + 10b + c = 49 + b^2 + c^2 + 517 \Leftrightarrow (b-5)^2 + c(c-1) = 159.$$

Поскольку b и c – цифры, число $(b-5)^2$ меньше или равно 25, а число $c(c-1)$ меньше или равно 72. Значит, их сумма не превосходит 97, так что случай $a = 7$ невозможен.

Ответ: 618, 659, 698. □

Решение задачи 1603. Пусть x – "заданное трёхзначное число", а y – "заданное натуральное число". Условие задачи означает справедливость равенства

$$\frac{\log_2 x - y}{y} = \frac{y}{\log_3 x - y}.$$

Переходя в логарифмах к одному основанию, например, x (это можно делать, т.к. $x > 0$, $x \neq 1$), мы получим:

$$1 - y \cdot (\log_x 3 + \log_x 2) = 0 \Leftrightarrow 1 - y \cdot \log_x 6 = 0 \Leftrightarrow \log_x 6^y = 1 \Leftrightarrow x = 6^y.$$

Для $y = 1, 2, 3, 4, \ldots$ число 6^y будет равно $6^1 = 6$, $6^2 = 36$, $6^3 = 216$, $6^4 = 1296, \ldots$ соответственно. Так как при $y > 4$ число $x = 6^y$ больше, чем 1296, трёхзначным оно будет только при $y = 3$.

Ответ: 216. □

Решение задачи 1617. Пусть x – популярность продукта А в начале 2002 года, y – популярность продукта Б в начале 2002 года. По условию, $x = \frac{2}{3}y$, так что дальше мы будем работать только с величиной y.

В начале 2003 года популярность продукта А увеличилась до $x_1 = x + 20\% \cdot x = 1,2x = \frac{6}{5}x = \frac{4}{5}y$, а популярность продукта Б уменьшилась до $y_1 = y - 20\% \cdot y = 0,8y = \frac{4}{5}y$.

В начале 2004 года популярность продукта А уменьшилась до $x_2 = x_1 - 10\% \cdot x_1 = 0,9x_1 = \frac{18}{25}y$, а популярность продукта Б осталась неизменной: $y_2 = y_1 = \frac{4}{5}y$.

В начале 2005 года популярность продукта Б увеличилась до $y_3 = y_2 + 40\% \cdot y_2 = 1,4y_2 = \frac{28}{25}y$.

По условию в конце 2004 года популярность продукта А сравнялась с популярностью продукта Б, т.е. стала равной $x_3 = y_3 = \frac{28}{25}y$. Следовательно, за 2004 год относительное изменение популярности продукта А составило (переменная y сокращается)

$$t = \frac{x_3 - x_2}{x_2} = \frac{5}{9} = \frac{500}{9}\% = 55\frac{5}{9}\%.$$

Поскольку эта величина положительна, за 2004 год популярность продукта А выросла, а не уменьшилась.

Ответ: популярность продукта А за 2004 год выросла на $55\frac{5}{9}\%$. □

Решение задачи 1657. При решении текстовых задач на смеси основными являются понятия *абсолютного* и *относительного* содержания вещества в смеси.

Абсолютное содержание вещества в смеси – это количество вещества, выраженное в обычных единицах измерения (грамм, литр и т.д.).

Относительное содержание вещества в смеси – это отношение абсолютного содержания к общей массе (объему) смеси. Часто относительное содержание называют концентрацией или процентным содержанием.

Решение любой задачи на смеси обычно сводится к расчёту абсолютного и относительного содержания компонент смесей, фигурирующих в условии задачи. Хотя часто эта информация избыточна, лучше не ломать голову над тем, что может понадобиться в процессе решения, а что нет.

Имея в виду эти общие соображения, проанализируем ситуацию, описанную в нашей задаче.

Руда – Общая масса 24 т.

1. Относительное содержание примесей $40\% \equiv \frac{2}{5}$.
2. Абсолютное содержание примесей $\frac{2}{5} \cdot 24 = \frac{48}{5}$ (т).
3. Относительное содержание чистого металла $60\% \equiv \frac{3}{5}$.
4. Абсолютное содержание чистого металла $\frac{3}{5} \cdot 24 = \frac{72}{5}$ (т).

Металл – Общая масса x т.

1. Относительное содержание примесей $4\% \equiv \frac{1}{25}$.
2. Абсолютное содержание примесей $\frac{1}{25} \cdot x$ (т).
3. Относительное содержание чистого металла $96\% \equiv \frac{24}{25}$.
4. Абсолютное содержание чистого металла $\frac{24}{25} \cdot x$ (т).

В процессе плавки из руды удаляется большая часть примесей, а общее количество чистого металла остается неизменным, т.е. $\frac{24}{25} \cdot x = \frac{72}{5}$, откуда $x = 15$.

Ответ: 15 тонн. □

Решение задачи 1658. Возьмём x кг первого сплава и y кг второго. В них содержится соответственно $0.9x$ кг и $0.3y$ кг примесей.

Если мы соединим эти сплавы, то получим сплав массой $x + y$ кг, в котором содержится $0.9x + 0.3y$ кг примесей. Таким образом, относительное содержание примесей в этом новом сплаве равно $\frac{0.9x+0.3y}{x+y}$. По условию эта величина равна 0.4:

$$\frac{0.9x + 0.3y}{x + y} = 0.4 \Leftrightarrow 0.9x + 0.3y = 0.4x + 0.4y \Leftrightarrow 5x = y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{5}.$$

□

Решение задачи 1670. Пусть x (кг) – масса первого слитка, так что масса второго слитка равна $(x + 3)$ (кг). Первый слиток содержит $0,1x$ кг меди, а второй – $0,4(x + 3)$ (кг). Поэтому сплав содержит $0,5x + 1,2$ (кг) меди, а его масса равна $2x + 3$ (кг). Поэтому относительное содержание меди в сплаве равно $\frac{0,5x+1,2}{2x+3}$. По условию задачи эта величина равна $0,3$:

$$\frac{0,5x + 1,2}{2x + 3} = 0,3.$$

Решая это уравнение, мы получим $x = 3$, так что масса сплава равна 9 кг.

Ответ: 9 кг. □

Решение задачи 1673. Пусть x – искомый объем кофе (в мл). Отлить это количество из чашки можно, если $0 \leq x \leq 100$.

После того, как из чашки перелили в кувшин x мл кофе, в чашке осталось $(100 - x)$ мл кофе, а в кувшине оказалось $(300 + x)$ мл смеси кофе и молока. Абсолютное содержание молока в кувшине равно 300 мл, а его концентрация равна $\frac{300}{300+x}$.

Количество смеси, которое перелили из кувшина в чашку, очевидно, равно x мл (чашка должна быть снова наполнена до краев). Относительное содержание молока в этой части смеси такое же, как и в кувшине, т.е. $\frac{300}{300+x}$. Поэтому абсолютное содержание молока в этой части смеси равно $\frac{300x}{300+x}$.

После того, как чашка опять наполнится, абсолютное содержание молока в ней будет $\frac{300x}{300+x}$. По условию задачи эта величина равна 50 (мл). Решая уравнение

$$\frac{300x}{300 + x} = 50,$$

мы получим: $x = 60$. Это значение удовлетворяет ограничению $0 \leq x \leq 100$, отмеченному в начале решения.

Ответ: 60 мл. □

Решение задачи 1684. Обозначим абсолютное содержание соли (в кг) в исходном растворе через x. Соответственно относительное содержание соли равно $\frac{x}{9}$.

По условию каждый раз отливали и доливали жидкости ровно $\frac{x}{2}$ кг (воду добавляли один раз и её вес вдвое меньше первоначального веса соли). Поскольку первоначально в сосуде находилось 9кг раствора, эта операция возможна, если $0 < \frac{x}{2} < 9$, т.е. $0 < x < 18$ – это ограничение мы используем на заключительном этапе решения.

После того, как первый раз отлили $\frac{x}{2}$ кг раствора, его масса стала $9 - \frac{x}{2}$ кг. При этом концентрация соли не изменилась, т.е. осталась равной $\frac{x}{9}$. Значит, абсолютное содержание соли в этой части раствора равно $\frac{x}{9} \cdot \left(9 - \frac{x}{2}\right) = \frac{18x - x^2}{18}$ кг.

После того, как добавили $\frac{x}{2}$ кг воды, масса раствора опять стала 9 кг. При этом абсолютное содержание соли не изменилось, т.е. осталось равным $\frac{18x-x^2}{18}$ кг. Соответственно, концентрация соли равна $\frac{18x-x^2}{162}$.

После того, как второй раз отлили $\frac{x}{2}$ кг раствора, его масса стала $9 - \frac{x}{2}$ кг. При этом концентрация соли не изменилась, т.е. осталась равной $\frac{18x-x^2}{162}$. Значит, абсолютное содержание соли в этой части раствора равно $\frac{18x-x^2}{162} \cdot \left(9 - \frac{x}{2}\right) = \frac{x(18-x)^2}{324}$ кг.

По условию задачи, эта величина равна $\frac{4x}{9}$ кг.:

$$\frac{x(18 - x)^2}{324} = \frac{4x}{9},$$

Это уравнение имеет три корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 30$, $x_3 = 6$. По смыслу задачи подходит только третий корень.

Ответ: первоначально в сосуде находилось 6 кг соли.□

Решение задачи 1688. Пусть V – объём бассейна (в каких нибудь единицах измерения, например, м^3), p_1 – производительность первой трубы, p_2 – производительность второй трубы. Тогда первая труба наполнит бассейн за время $t_1 = \frac{V}{p_1}$, вторая – за время $t_2 = \frac{V}{p_2}$, а обе трубы, открытые одновременно – за время $t_{1+2} = \frac{V}{p_1+p_2}$ (при совместной работе производительности складываются).

По условию задачи

$$\begin{cases} \frac{V}{p_1} = \frac{V}{p_1+p_2} + 2, \\ \frac{V}{p_2} = \frac{V}{p_1+p_2} + 4,5. \end{cases}$$

Поскольку в задаче нигде не упомянута единица измерения объёма, её можно взять какой угодно, например, в качестве этой единицы может быть выбран объём бассейна. Тогда $V = 1$ и эта система примет вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{p_1} = \frac{1}{p_1+p_2} + 2, \\ \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1+p_2} + 4,5. \end{cases}$$

Если мы вычтем уравнения почленно и сохраним одно из исходных уравнений, например, первое, то получим систему, равносильную первоначальной:

$$\begin{cases} \frac{1}{p_1} = \frac{1}{p_1+p_2} + 2, \\ \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} = 2,5. \end{cases}$$

Эта система легко решается методом исключения; она имеет два решения: $(p_1; p_2) = \left(\frac{1}{5}; \frac{2}{15}\right)$ и $(p_1; p_2) = \left(-1; \frac{2}{3}\right)$. Второе решение не подходит по смыслу задачи (производительности – положительные величины).

Теперь можно найти величины t_1 и t_2: $t_1 = \frac{1}{p_1} = 5$, $t_2 = \frac{1}{p_2} = 7,5$.

Ответ: 5 часов и 7 часов 30 минут. □

Решение задачи 1708. Пусть x_1, x_2, x_3 – количество вареников, съеденных Пацюком в первый, второй и третий день соответственно, y_1, y_2, y_3 – количество вареников, съеденных Солохой в первый, второй и третий день соответственно, p – скорость, с которой поглощал вареники Пацюк, s – скорость, с которой поглощала вареники Солоха. Переменные x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 – это объем “работы”, выполненной Пацюком и Солохой в первый, второй и третий день соответственно, а переменные p и s – их “производительности”.

Условие задачи означает, что эти величины являются решением системы

$$\begin{cases} p = 3s, \\ 2p = x_1, \\ s = y_1, \\ \frac{x_2}{p} + \frac{y_2}{s} \leq 3, \\ \frac{x_3}{p} + \frac{y_3}{s} \geq 1, \\ x_1 + y_1 + 2(x_3 + y_3) = x_2 + y_2. \end{cases} \tag{11.143}$$

Из четырёх уравнений системы можно исключить четыре неизвестных:

$$\begin{cases} p = 3s, \\ x_1 = 6s, \\ y_1 = s, \\ x_2 = 7s + 2(x_3 + y_3) - y_2. \end{cases}$$

Тогда неравенства системы дадут систему из двух неравенств

$$\begin{cases} \frac{7s+2(x_3+y_3)-y_2}{3s} + \frac{y_2}{s} \leq 3, \\ \frac{x_3}{3s} + \frac{y_3}{s} \geq 1. \end{cases}$$

Для новых переменных $a_3 = \frac{x_3}{s}$, $b_2 = \frac{y_2}{s}$, $b_3 = \frac{y_3}{s}$ (они равны временам, за которые Солоха съест соответствующие порции вареников) эти неравенства примут вид:

$$\begin{cases} a_3 + b_2 + b_3 \leq 1, \\ a_3 + 3b_3 \geq 3. \end{cases}$$

Поскольку переменные a_3, b_2, b_3 неотрицательны, первое неравенство влечёт, что сумма $a_3 + b_3$ не превосходят 1. С другой стороны, второе неравенство можно преобразовать к виду $a_3 + b_3 \geq 1 + \frac{2}{3}a_3$, откуда следует, что $a_3 + b_3 \geq 1$. Поэтому $a_3 + b_3 = 1$, а переменные a_3 и b_2 равны нулю. Это, в свою очередь, даёт, что $b_3 = 1$.

Возвращаясь к основным неизвестным, мы получим общее решение системы (11.143): $p = 3s$, $x_1 = 6s$, $x_2 = 9s$, $x_3 = 0$, $y_1 = s$, $y_2 = 0$, $y_3 = s$.

Теперь можно определить искомую величину X:

$$X = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3} = \frac{15s}{17s} = \frac{15}{17}.$$

Ответ: $\frac{15}{17}$. □

Решение задачи 1722. Введём на дороге между пунктами A и B систему координат, выбрав в качестве начала – пункт A, положительного направления – направление от A к B, единицы масштаба – 1 км. Если s – расстояние между A и B, v_1, v_2 – скорости пешехода и велосипедиста соответственно, то уравнения движений пешехода и велосипедиста даются формулами

$$x_1(t) = v_1 t, \quad x_2(t) = s - v_2 t.$$

Поскольку расстояние между двумя точками на числовой оси – это модуль разности чисел, представляемых этими точками, условие задачи можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} |x_1(1) - x_2(1)| = 3, \\ |x_1(2) - x_2(2)| = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |v - s| = 3, \\ |2v - s| = 14, \end{cases}$$

где $v = v_1 + v_2$ – скорость сближения пешехода и велосипедиста.

Первое уравнение системы распадается на два уравнения: $v - s = 3$, $v - s = -3$. В каждом из этих случаев можно исключить v: $v = s + 3$ или $v = s - 3$. Соответственно, второе уравнение примет вид (в первом случае):

$$|s + 6| = 14 \Leftrightarrow s + 6 = \pm 14 \Leftrightarrow s = 8 \text{ или } -20$$

или (во втором случае)

$$|s - 6| = 14 \Leftrightarrow s - 6 = \pm 14 \Leftrightarrow s = 20 \text{ или } -8.$$

Случаи $s = -20$, $s = -8$ противоречат физическому смыслу переменной s (это расстояние, которое всегда неотрицательно).

Итак, возможны два случая: $s = 8$, $s = 20$.

В первом случае $v_1 + v_2 = 11$, так что встреча пешехода и велосипедиста произошла в момент $t = \frac{8}{11}$, а спустя 1 час после начала движения один из них (очевидно, велосипедист) уже, может быть, проедет пункт, к которому он направлялся (например, если $v_1 = 2$, $v_2 = 9$). Этот случай вполне осмыслен, но возможен только, если дорога не заканчивается в пунктах A и B. Поскольку в тексте задачи на этот счёт нет никаких указаний, мы должны принять эту возможность.

Во втором случае $v_1 + v_2 = 17$, так что встреча пешехода и велосипедиста произошла в момент $t = \frac{20}{17}$, т.е. спустя 1 час после начала движения они еще не встретились. Однако нельзя исключить, что в момент $t = 2$ один из них (очевидно, велосипедист) уже проедет пункт, к которому он направлялся (например, если $v_1 = 5$, $v_2 = 12$).

Отметим, что проведённые рассуждения практически не изменятся, если из текста задачи исключить неявно подразумеваемое условие, что пешеход двигался по направлению от A к B, а велосипедист – от B к A. В этой общей ситуации уравнения движения примут вид:

$$x_1(t) = v_{1x}t, \quad x_2(t) = s + v_{2x}t,$$

где v_{1x} (v_{2x}) – проекция вектора скорости пешехода (велосипедиста) на введённую ось координат, а переменная v заменится на $v_{1x} + v_{2x}$. Все последующие выкладки останутся без изменений.

Ответ: 20 км (если $v_1 + v_2 = 17$ км/час) или 8 км (если $v_1 + v_2 = 11$ км/час). □

Решение задачи 1767. Для текстовых задач на движение особенно трудным обычно является этап "перевода" условия задачи с русского языка на язык математики. Для того, чтобы безошибочно пройти его, нужно двигаться небольшими шагами, читая (и переводя на язык математики) условие задачи небольшими фрагментами. Читать условие задачи до конца часто не имеет смысла хотя бы потому, что в конце уже трудно вспомнить, о чём шла речь в начале.

После этих общих комментариев приступим к решению задачи.

1. *"Из пункта A в пункт B вышел пешеход, и одновременно из пункта B в пункт A выехал мотоциклист".*

Эта фраза предполагает введение основных величин, характеризующих движение: s – расстояние от A до B, x – скорость пешехода, y – скорость мотоциклиста.

2. *"Встретив в пути пешехода..."*

Найдём момент встречи t_1, считая что движение пешехода и мотоциклиста началось в момент $t_0 = 0$. Момент t_1 характеризуется тем, что путь, пройденный до встречи пешеходом, xt_1, и путь, пройденный до встречи мотоциклистом, yt_1, в сумме дают все расстояние от A до B: $xt_1 + yt_1 = s$, откуда

$$t_1 = \frac{s}{x + y}.$$

Отметим, что равенство $xt_1 + yt_1 = s$ можно получить и из более общих соображений, которые полезны при решении более сложных задач на движение. Именно, введём систему координат на дороге из A в B, считая, что пункт A является началом отсчета, а в качестве положительного выбрано направление от A к B. В терминах координат факт встречи означает совпадение координат движущихся точек в момент встречи. До момента встречи координата пешехода меняется по закону $x(t) = x \cdot t$, а координата мотоциклиста – по закону $y(t) = s - y \cdot t$. В момент встречи $x(t_1) = y(t_1)$, т.е. $x \cdot t_1 = s - y \cdot t_1$.

3. *"мотоциклист сразу же развернулся, довёз пешехода до пункта B...*

Найдём, сколько времени потребуется мотоциклисту, чтобы доехать до пункта B.

Поскольку расстояние от места встречи, C, до пункта B равно $y \cdot t_1$, а скорость мотоциклиста – y, это время равно t_1. Конечно, это очевидно непосредственно: т.к. скорость мотоциклиста не менялась, время на путь из B в C такое же, как и время на путь от C до B. Однако, если бы скорость мотоциклиста менялась (такое условие не редкость в задачах на движение), первый метод был бы единственно возможным.

4. *"а затем тотчас же снова поехал в пункт A, куда и беспрепятственно добрался.*

Найдём, в какой момент мотоциклист окажется в пункте A.

Поскольку расстояние от пункта B до пункта A равно s, а скорость мотоциклиста – y, время на путь от B до A равно $t_2 = \frac{s}{y}$. Таким образом, мотоциклист окажется в пункте A в момент $t_3 = t_1 + t_1 + t_2 = \frac{2s}{x+y} + \frac{s}{y}$ (считая от момента $t_0 = 0$).

5. *"Во сколько раз больше времени мотоциклист затратил на дорогу до пункта A по сравнению с тем временем, за которое он проехал бы путь от B до A, не подвозя пешехода...*

Как мы подсчитали в предыдущем пункте, мотоциклист затратил на дорогу до пункта A время $t_3 = \frac{2s}{x+y} + \frac{s}{y}$. Если бы он не подвозил пешехода, то это время было бы равно $\frac{s}{y}$.

Поэтому вопрос задачи звучит так: найти отношение

$$f = \frac{\frac{2s}{x+y} + \frac{s}{y}}{\frac{s}{y}} = \frac{2y}{x + y} + 1.$$

6. *"если известно, что пешеход в четыре раза быстрее добрался до пункта B по сравнению с тем временем, которое ему понадобилось бы, чтобы пройти весь путь от A до B пешком?"*

Реально пешеход добрался до пункта B за время $t_1 + t_1 = \frac{2s}{x+y}$ (до места встречи C он шёл время t_1, а затем такое же время вместе с мотоциклистом ехал от C до B). Если бы он шёл весь от A до B пешком, то потратил бы время $\frac{s}{x}$. Условие задачи означает, что $\frac{2s}{x+y} = \frac{1}{4}\frac{s}{x}$. Это равенство легко преобразуется в соотношение $y = 7x$ – фактически к одному этому уравнению сводится условие задачи.

Итак, на математическом языке наша задача звучит следующим образом: зная, что $y = 7x$, найдите величину $f = \frac{2y}{x+y} + 1$.

Решение этой математической задачи тривиально:

$$f = \frac{2y}{x+y} + 1 = \frac{14x}{8x} + 1 = \frac{11}{4},$$

что непосредственно даёт ответ исходной текстовой задачи.

Ответ: $\frac{11}{4}$. □

Решение задачи 1799. Пусть s (км) – расстояние между пунктами A и B, v_1, v_2, v_3 – скорости пешехода, велосипедиста и мотоциклиста соответственно (в км/час), t (час) – время от момента выезда мотоциклиста из пункта A до момента обгона им пешехода, T (час) – время от момента момента обгона пешехода мотоциклистом до момента обгона пешехода велосипедистом.

Последовательный перевод условия задачи с русского языка на язык математики даёт следующую систему:

$$v_3 = 3v_2, \tag{11.144}$$

$$t \le \frac{1}{4}, \tag{11.145}$$

$$v_3 \cdot t = v_1 \cdot (2 + t), \tag{11.146}$$

$$v_2 \cdot (t + T) = v_1 \cdot (2 + t + T), \tag{11.147}$$

$$T \ge \frac{3}{4}, \tag{11.148}$$

$$8 + \frac{s}{v_1} = 14. \tag{11.149}$$

Уравнения (11.146) и (11.147) выражают равенство координат (определённых как расстояние от пункта A) мотоциклиста и пешехода, велосипедиста и пешехода в момент их встречи.

Поскольку мотоциклист прибудет в B спустя $\frac{s}{v_3}$ часов после отъезда из A, абсолютное время прибытия в B равно $x = 10 + \frac{s}{v_3}$ час – именно эту величину нужно определить.

Из трёх уравнений системы, (11.144), (11.146) и (11.147), можно исключить переменные v_1, v_2, v_3. Для этого заменим в (11.146) v_3 на $3v_2$ и разделим получившееся уравнение на уравнение (11.147):

$$\frac{3t}{t+T} = \frac{2+t}{2+t+T} \Leftrightarrow t^2 + tT + 2t - T = 0.$$

Последнее уравнение позволяет в дополнение к уже исключенным трём переменным v_1, v_2, v_3 исключить ещё одну переменную, T, которая входит в это уравнение линейно:

$$T = \frac{t^2 + 2t}{1 - t}. \tag{11.150}$$

Теперь неравенства (11.145) и (11.148) превратятся в систему двух неравенств относительно одной неизвестной t:

$$\left\{ \begin{array}{l} t \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{t^2+2t}{1-t} \geq \frac{3}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{\left(t+\frac{3}{4}\right)\left(t-\frac{1}{4}\right)}{t-1} \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow t \leq -\frac{3}{4} \text{ или } t = \frac{1}{4}.$$

Поскольку по смыслу задачи величина t является положительной, $t = \frac{1}{4}$.

Теперь из (11.150) можно определить значение T: $T = \frac{3}{4}$.

Соответственно уравнения системы (11.144)-(11.149) превратятся в систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_3 = 3v_2, \\ v_3 = 9v_1, \\ v_2 = 3v_1, \\ \frac{s}{v_1} = 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_3 = 9v_1, \\ v_2 = 3v_1, \\ \frac{s}{v_3} = \frac{2}{3}, \end{array} \right.$$

так что искомая величина $x = 10 + \frac{s}{v_3}$ равна $10\frac{2}{3}$ (часа), или, в обычных терминах, 10 часов 40 минут.

Ответ: 10 часов 40 минут (того же дня). □

Решение задачи 1811. Пусть s – расстояние между пунктами B и C, r – расстояние между пунктами C и D, v_a, v_b, v_m – скорости автомобиля, велосипедиста и мотоциклиста соответственно.

Относительно велосипедиста автомобиль движется со скоростью $v_a - v_b$. Поэтому расстояние в 24 км, которое разделяло их в момент старта, автомобиль преодолеет за $t_1 = \frac{24}{v_a - v_b}$ часа – именно в этот момент (считая от момента старта) автомобиль догонит велосипедиста. Мотоциклист относительно велосипедиста движется со скоростью $v_m - v_b$. Поэтому за время t_1 он обгонит его на $(v_m - v_b)t_1 = \frac{24(v_m - v_b)}{v_a - v_b}$ (км). По условию эта величина равна 6:

$$\frac{24(v_m - v_b)}{v_a - v_b} = 6 \Leftrightarrow 4v_m = v_a + 3v_b. \tag{11.151}$$

До пункта C автомобиль едет $\frac{24+s}{v_a}$ часов, а мотоциклист – $\frac{s}{v_m}$ часов. Тот факт, что в пункте C автомобиль догнал мотоциклиста, означает равенство этих промежутков времени:

$$\frac{24 + s}{v_a} = \frac{s}{v_m}. \tag{11.152}$$

Велосипедисту на путь до пункта C потребуется $\frac{s}{v_b}$ часов. На обратном пути автомобиль окажется в пункте C в момент $\frac{24+s+2r}{v_a}$. Тот факт, что в пункте C автомобиль встретит велосипедиста, означает равенство этих промежутков времени:

$$\frac{24+s+2r}{v_a} = \frac{s}{v_b}. \qquad (11.153)$$

Кроме того, по условию

$$\frac{s}{v_b} = 2 \cdot \frac{s}{v_m} \Leftrightarrow v_m = 2v_b.$$

Последнее равенство вместе с уравнением (11.151) даёт:

$$v_a = 5v_b.$$

Теперь уравнения (11.152) и (11.153) примут вид:

$$\begin{cases} \frac{24+s}{5} = \frac{s}{2} \\ \frac{24+s+2r}{5} = s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 16 \\ r = 20 \end{cases}$$

Ответ: 16 км. □

Решение задачи 1814. Примем момент старта автобусов в качестве начального и обозначим через t_n', t_n'' – моменты времени, когда первый и второй автобусы в n-й раз окажутся в пункте B.

Поскольку первый автобус стартует из пункта A, к моменту n-го визита в B он пройдёт путь $s_n' = 2 + 4(n-1) = 4n - 2$ (последовательность s_n' образует арифметическую прогрессию с разностью 4). Поэтому $t_n' = \frac{4n-2}{51}$.

Второй автобус к моменту n-го визита в B пройдёт путь $s_n'' = 4(n-1) = 4n-4$ (последовательность s_n'' также будет арифметической прогрессией с разностью 4). Поэтому $t_n'' = \frac{4n-4}{42}$.

Встреча автобусов в пункте B означает, что для некоторых натуральных n и m верно равенство

$$t_n' = t_m'' \Leftrightarrow 14n - 17m = -10$$

Рассмотрим его как уравнение относительно n и m и решим его.

В качестве частного решения можно взять, например, $n_0 = 9$, $m_0 = 8$:

$$14 \cdot 9 - 17 \cdot 8 = -10.$$

Вычитая это равенство из уравнения $14n - 17m = -10$, мы получим однородное уравнение:

$$14(n-9) = 17(m-8).$$

Его общее решение в целых числах имеет вид: $n - 9 = 17k$, $m - 8 = 14k$, где $k \in Z$. Отсюда $n = 9 + 17k$, $m = 8 + 14k$. Поскольку нас интересует решение в натуральных числах, возможные значения целочисленного параметра k должны быть неотрицательными: $k \in Z_+$. Переменную k можно интерпретировать как номер встречи автобусов в пункте B (имея в виду, что встречи нумеруются не с 1, а с 0). Момент k-й встречи можно подсчитать как t'_n при $n = 9 + 17k$: $t_k = \frac{4k+2}{3}$. Число встреч за 8 часов равно числу решений неравенства $t_k \le 8$ на множестве $k \in Z_+$:

$$\frac{4k+2}{3} \le 8 \Leftrightarrow k \le \frac{11}{2} \Leftrightarrow k = 0; 1; \ldots ; 5.$$

Таким образом, за 8 часов автобусы ровно 6 раз встретятся в пункте B.

Перейдём теперь ко второй части задачи ("сколько раз за 8 часов автобусы окажутся в одном месте строго между пунктами A и B?"). Прежде всего найдём, сколько раз за 8 часов автобусы встретятся в пункте A – эта информация окажется позже нам полезной.

Как и в предыдущем исследовании, примем момент старта автобусов в качестве начального и обозначим через T'_n, T''_n – моменты времени, когда первый и второй автобусы в n-й раз окажутся в пункте A.

Поскольку первый автобус стартует из пункта A, к моменту n-го визита в A он пройдет путь $S'_n = 4(n-1)$ (последовательность S'_n образует арифметическую прогрессию с разностью 4). Поэтому $T'_n = \frac{4n-4}{51}$.

Второй автобус к моменту n-го визита в A пройдет путь $S''_n = 2 + 4(n-1) = 4n - 2$ (последовательность S''_n также будет арифметической прогрессией с разностью 4). Поэтому $T''_n = \frac{4n-2}{42}$.

Встреча автобусов в пункте A означает, что для некоторых натуральных n и m верно равенство

$$T'_n = T''_m \Leftrightarrow 28n - 34m = 11.$$

Левая часть этого уравнения – чётное число, а правая – нет. Поэтому оно не имеет решений в целых числах. Следовательно, автобусы никогда не встретятся в пункте A.

Теперь непосредственно перейдём к решению второй части задачи. Для этого введём систему координат на дороге между A и B, выбрав в качестве начала отсчета пункт A, в качестве положительного направления – направление от A к B.

Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$ – координаты первого и второго автобусов соответственно в момент t. Графики функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – это ломаные линии, изображённые на рисунках 11.20 и 11.21 соответственно. Первая ломаная состоит из 102 пар звеньев с угловыми коэффициентами 51 и -51, а вторая – из 84 пар звеньев с угловыми коэффициентами 42 и -42 (на рисунках мы исказили масштаб). Точки A и B на оси ординат имеют координаты 0 и 2 соответственно и соответствуют прохождению через пункты A и B.

Встреча автобусов в какой-то момент t означает совпадение их координат в этот момент: $x_1(t) = x_2(t)$, т.е. пересечение графиков функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Поскольку звенья первой ломаной идут круче звеньев второй ломаной, каждое звено первой ломаной пересекает вторую ломаную ровно в одной точке. Поэтому всего будет 102 точки пересечения возрастающих звеньев первой ломаной со второй ломаной и 102 точки пересечения убывающих

Рис. 11.20:

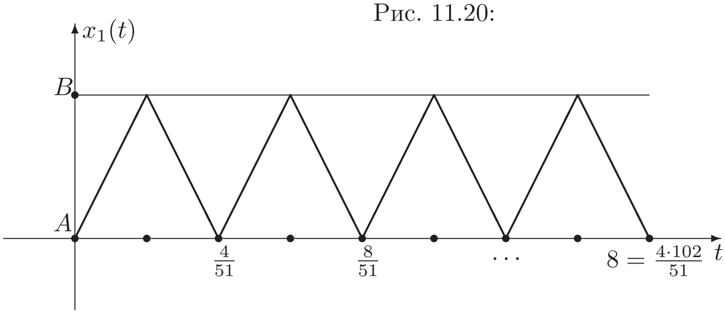
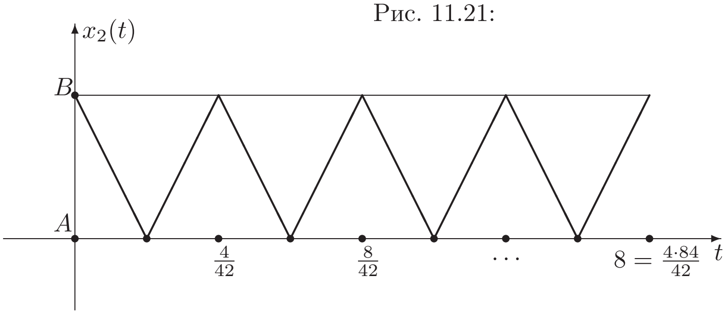


Рис. 11.21:



звеньев первой ломаной со второй ломаной. Поскольку автобусы не встречаются в пункте A, ни одна из этих точек не будет лежать на оси абсцисс. С другой стороны, поскольку автобусы встречаются 6 раз в пункте B, ровно 6 точек пересечения будет лежать на горизонтальной прямой $y = 2$. Эти точки будут включены как в 102 точки пересечения возрастающих звеньев первой ломаной со второй ломаной, так и в 102 точки пересечения убывающих звеньев первой ломаной со второй ломаной. Поэтому число точек пересечения, лежащих *внутри* полосы $0 < y < 2$ равно $2 \cdot (102 - 6) = 192$.

Ответ: а) 6 раз; б) 192 раза. □

Решение задачи 1827. Пусть t_1 (t_2) – время, за которое первое (второе) тело проходит окружность. По условию

$$t_1 = t_2 - 2. \tag{11.154}$$

Чтобы перевести на язык математики второе условие задачи ("первое тело ... догоняет второе тело каждые 12 сек."), введём угловые скорости тел: ω_1 и ω_2 (рад/сек).

Относительно второго тела первое тело движется с угловой скоростью $\omega_1 - \omega_2$. Поэтому второе условие задачи можно записать в виде:

$$12(\omega_1 - \omega_2) = 2\pi.$$

Поскольку (по определению) $\omega_1 = \frac{2\pi}{t_1}$, $\omega_2 = \frac{2\pi}{t_2}$, это уравнение равносильно уравнению

$$12\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) = 1. \tag{11.155}$$

Система из уравнений (11.154) и (11.155) легко решается методом исключения. Она имеет два решения: $t_1 = 4$, $t_2 = 6$ и $t_1 = -6$, $t_2 = -4$. Второе решение не подходит по физическому смыслу задачи.

Ответ: 4 сек. и 6 сек. соответственно. □

Решение задачи 1832. Пусть v_1, v_2 (км/мин) – скорости первого и второго спортсменов соответственно.

Тогда первый спортсмен приходит на финиш через $t_1 = \frac{10}{v_1}$ мин после старта, а второй – через $t_2 = \frac{10}{v_2}$ мин. По условию, $t_1 = t_2 - 16\frac{2}{3}$. Это даёт первое уравнение для неизвестных v_1 и v_2:

$$\frac{10}{v_1} = \frac{10}{v_2} - 16\frac{2}{3}. \tag{11.156}$$

Чтобы получить второе уравнение, рассмотрим движение первого спортсмена относительно второго (т.е. считая второго спортсмена неподвижным). Тогда время, через которое первый спортсмен догонит второго – это время, за которое он пробежит полный круг при этом относительном движении. Относительная скорость первого спортсмена равна $v_1 - v_2$. Поэтому полный круг он пробежит за $\frac{0{,}4}{v_1 - v_2}$ минут, а два круга – за $\frac{0{,}8}{v_1 - v_2}$ минут. По условию, $t_1 = \frac{0{,}8}{v_1 - v_2} + 43\frac{1}{3}$. Это даёт второе уравнение для неизвестных v_1 и v_2:

$$\frac{10}{v_1} = \frac{0,8}{v_1 - v_2} + 43\frac{1}{3}. \tag{11.157}$$

Решать систему (11.156)-(11.157) удобно с помощью неизвестных $t_1 = \frac{10}{v_1}$ и $t_2 = \frac{10}{v_2}$. Тогда $v_1 = \frac{10}{t_1}$, $v_2 = \frac{10}{t_2}$, так что для них эти уравнения примут вид:

$$\begin{cases} t_1 = t_2 - \frac{50}{3}, \\ t_1 = \frac{0{,}08 t_1 t_2}{t_2 - t_1} + \frac{130}{3}. \end{cases}$$

Исключая из первого уравнения t_2, получим квадратное уравнение относительно t_1:

$$\frac{24}{50}t_1^2 - 92t_1 + \frac{13000}{3} = 0.$$

Оно имеет два корня: $t_1 = \frac{250}{3}$ или $\frac{325}{3}$. Соответственно, $v_1 = 0,12$ или $\frac{6}{65}$ (км/мин). По условию, скорость первого спортсмена больше 0,1 (км/мин). Поэтому для v_1 остаётся только одно значение: $v_1 = 0,12$. Тогда $t_2 = \frac{100}{3}$, $v_2 = 0,1$.

Относительная скорость первого спортсмена (относительно второго) равна $v_1 - v_2 = 0,02$. Поэтому он будет обгонять второго спортсмена через каждые $\frac{0{,}4}{0{,}02} = 20$ минут. За $t_1 = 83\frac{1}{3}$ минут, в течение которых он пробежит всю дистанцию, он обгонит второго спортсмена ровно 4 раза.

Ответ: четыре раза. □

Решение задачи 1848. Обозначим через x количество слов, которое людоед узнал к концу первого полугодия, так что его словарный запас составил $300+x$ слов. Это означает рост в $\frac{300+x}{300}$ раз. Поэтому после одного года посещения проповедей людоед будет знать $(300+x)\cdot\frac{300+x}{300} = 300+2x+\frac{x^2}{300}$ слов. Это число является целым тогда и только тогда, когда x^2 делится на 300. Поскольку $300 = 3\cdot 2^2\cdot 5^2$, x^2 делится на 300 тогда и только тогда, когда $x = 2\cdot 3\cdot 5\cdot y = 30y$ для некоторого $y \in N$.

Если $x = 30y$, то через полгода посещения проповедей людоед будет знать $300+30y$ слов, а через год – $300+60y+3y^2$ слов.

Словарный запас Эллочки каждый месяц увеличивался на $\frac{300+30y}{2} = 150+15y$ слов, так что через месяц он составил $s_1 = 180+15y$ слов, через два месяца – $s_2 = 330+30y$ слов, ... , через n месяцев – $s_n = 30+n(150+15y)$ слов.

Словарь людоеда после одного года посещения проповедей состоит из $300+60y+3y^2$ слов. Очевидно, что это число для любого натурального y больше, чем s_1.

Пусть теперь $n \geq 2$. Найдём, для каких n при всех $y \in N$ выполнено неравенство

$$300+60y+3y^2 > 30+n(150+15y) \Leftrightarrow y^2+5(4-n)y+(90-50n) > 0.$$

Дискриминант квадратного трёхчлена $f(y) = y^2+5(4-n)y+(90-50n)$ равен $D = 25(4-n)^2-4(90-50n) = 25n^2+140$. Поэтому соответствующее квадратное уравнение имеет два корня. В силу теоремы Виета их произведение равно $90-50n < 0$ (т.к. $n \geq 2$), так что один корень положителен, а другой отрицателен. Из графика функции $f(y)$ тогда ясно, что $f(y) > 0$ при всех натуральных y тогда и только тогда, когда

$$f(1) > 0 \Leftrightarrow n < 2\frac{1}{55} \Leftrightarrow n = 2.$$

Итак, в условиях задачи словарь людоеда после одного года посещения проповедей богаче словаря Эллочки после n месяцев учебы в школе только для $n = 0; 1; 2$. Наибольшее из этих чисел равно 2.

Ответ: 2. □

Решение задачи 1852. Пусть n (машин в сутки) – первоначальная производительность первого автомобильного завода, m (машин в сутки) – первоначальная производительность второго автомобильного завода.

По условию

$$\begin{cases} n \leq 950 \\ m = \frac{19}{20}n. \end{cases}$$

После ввода дополнительной линии производительность второго завода стала $m+\frac{23}{100}n$. По условию

$$m+\frac{23}{100}n > 1000.$$

Кроме того, в задаче предполагается, что каждый завод в сутки выпускает целое количество машин. Поэтому величина $\frac{23}{100}n$ является целым числом. Это равносильно тому, что n кратно 100: $n = 100k$.

Если вместо n использовать эту новую переменную, то приведённые выше уравнение и неравенства примут вид:

$$\begin{cases} 100k \leq 950 \\ m = 95k \\ m + 23k > 1000. \end{cases}$$

Исключая неизвестную m, получим двойное неравенство для k: $8\frac{28}{59} < k \leq 9\frac{1}{2}$. Это неравенство имеет единственное решение в натуральных числах: $k = 9$. Соответственно, $n = 900$ и $m = 855$.

Ответ: 900 и 855. □

11.9 Глава 9

Решение задачи 1870. Выражения под первым и последним радикалами можно рассматривать как квадратные трёхчлены относительно переменной x. Попробуем разложить их на множители.

Для многочлена

$$x^2 - y^2 - dx + 3dy - 2d^2 = x^2 - dx - (y^2 - 3dy + 2d^2)$$

дискриминант равен

$$D = d^2 + 4y^2 - 12dy + 8d^2 = 4y^2 - 12dy + 9d^2 = (2y - 3d)^2,$$

так что корни соответствующего квадратного уравнения равны $x_{1,2} = y - d;\ -y + 2d$. Поэтому выражение под первым радикалом равно

$$(x - y + d)(x + y - 2d).$$

Для многочлена

$$-2x^2 - 2xy + (5d+4)x + (d+4)y - 2d^2 - 8d = -2x^2 - (2y - 5d - 4)x - (2d^2 - dy - 4y + 8d)$$

дискриминант равен

$$D = 4y^2 + 9d^2 + 16 - 12dy + 16y - 24dy = (2y - 3d + 4)^2,$$

так что корни соответствующего квадратного уравнения равны $x_{1,2} = \frac{d+4}{2};\ -y + 2d$. Поэтому выражение под последним радикалом равно

$$(-2x + d + 4)(x + y - 2d).$$

Теперь исходное уравнение можно переписать в виде:

$$\sqrt{(x - y + d)(x + y - 2d)} + \sqrt{x - y + d} \cdot \sqrt{4 - 2x + d} +$$
$$+ \sqrt{(-2x + d + 4)(x + y - 2d)} = 4.$$

Обращая внимание на повторяющиеся блоки, введём новые переменные:

$$a = x - y + d, \quad b = x + y - 2d, \quad c = 4 - 2x + d.$$

Для них исходное уравнение примет вид:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{a}\sqrt{c} + \sqrt{bc} = 4. \qquad (11.158)$$

Поскольку выражения a, c, ab, bc стоят под знаками арифметических квадратных корней, они неотрицательны. Если бы выражение b было отрицательным, то отсюда бы следовало, что $a = b = 0$, а тогда левая часть уравнения (11.158) равнялась бы 0. Поэтому $b \geq 0$ и, значит, выражения $\sqrt{ab}$, $\sqrt{ac}$, $\sqrt{bc}$ являются средними геометрическими чисел a и b, a и c, b и c соответственно. Применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, мы получим:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc} \leq \frac{a+b}{2} + \frac{a+c}{2} + \frac{b+c}{2} = a + b + c.$$

Сумма $a + b + c$ равна

$$(x - y + d) + (x + y - 2d) + (4 - 2x + d) = 4,$$

т.е. в точности правой части уравнения (11.158). Если хотя бы в одном из трех использованных неравенств о среднем арифметическом и среднем геометрическом стоял знак $<$, то левая часть уравнения (11.158) была бы меньше 4. Поэтому во всех трёх неравенствах достигается знак равенства, что означает равенство чисел a, b, c. Поскольку их сумма равна 4, каждое из них равно $\frac{4}{3}$. Следовательно, уравнение (11.158) равносильно системе:

$$\begin{cases} x - y + d = \frac{4}{3}, \\ x + y - 2d = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3d}{2}, \\ x = \frac{3d+8}{6} \end{cases}$$

Таким образом, при каждом $d \in R$ исходное уравнение имеет единственное решение $(x; y) = \left(\frac{3d+8}{6}; \frac{3d}{2}\right)$.

Отметим, что процесс решения исходного уравнения совершенно не зависел от значения параметра d. Это, впрочем, исключительно редкий случай. Обычно, начиная с некоторого места, рассуждения начинают зависеть от параметра, что приводит к ветвлению случаев. В сложных задачах получается “дерево”, в структуре которого довольно тяжело разобраться.

Ответ: при каждом $d \in R$ уравнение имеет единственное решение $(x; y) = \left(\frac{3d+8}{6}; \frac{3d}{2}\right)$. □

Решение задачи 1871. Левая часть исходного уравнения является суммой двух показательных функций $y = A^x$ и $y = B^x$, где $A = \frac{1-a^2}{1+a^2}$, $B = \frac{2a}{1+a^2}$. При условии $a \in (0; 1)$ основания A и B меньше 1 (и положительны):

$$A < 1 \Leftrightarrow 1 - a^2 < 1 + a^2 \Leftrightarrow 2a^2 > 0,$$

$$B < 1 \Leftrightarrow 2a < 1 + a^2 \Leftrightarrow (1 - a)^2 > 0.$$

Значит, при росте x от $-\infty$ до $+\infty$ функция $y = A^x + B^x$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0. Поэтому уравнение $A^x + B^x = 1$ имеет и притом единственный корень x_0.

Простые алгебраические преобразования показывают, что число 2 является корнем:

$$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^2 + \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^2 = \frac{1-2a^2+a^4+4a^2}{(1+a^2)^2} = \frac{1+2a^2+a^4}{(1+a^2)^2} = 1.$$

Ответ: при всех $a \in (0;1)$ уравнение имеет единственный корень $x = 2$. □

Решение задачи 1878. Начнём решать это неравенство как обычное неравенство с одной неизвестной x, не обращая внимания на наличие параметра (как будто вместо b стоит конкретное число).

Раскрывая модуль, получим двойное неравенство

$$-x - 3 \le b - 2x \le x + 3,$$

или, что то же самое, систему из двух неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} b - 2x \le x + 3 \\ b - 2x \ge -x - 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x \ge b - 3 \\ x \le b + 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \ge \frac{b-3}{3} \\ x \le b + 3 \end{array}\right. \tag{11.159}$$

Теперь мы должны образовать пересечение двух полупрямых: $\left[\frac{b-3}{3}; +\infty\right)$ – это множество решений первого неравенства системы (11.159), и $(-\infty; b+3]$ – это множество решений второго неравенства системы (11.159). Результат будет зависеть от взаимного расположения точек $\frac{b-3}{3}$ и $b+3$ на числовой оси. Поэтому в этом месте наше решение начнёт зависеть от параметра.

1 случай. Если $\frac{b-3}{3} < b + 3$, т.е. $b > -6$, то эти полупрямые имеют непустое пересечение – это отрезок $\left[\frac{b-3}{3}; b+3\right]$.

2 случай. Если $\frac{b-3}{3} = b + 3$, т.е. $b = -6$, то пересечение полупрямых $\left[\frac{b-3}{3}; +\infty\right) \equiv [-3; +\infty)$ и $(-\infty; b+3] \equiv (-\infty; -3]$ будет состоять из одной точки $x = -3$.

3 случай. Если $\frac{b-3}{3} > b + 3$, т.е. $b < -6$, то эти полупрямые не пересекаются, так что решением системы (11.159) будет пустое множество.

Ответ: если $b > -6$, то $\frac{b-3}{3} \le x \le b + 3$; если $b = -6$, то $x = -3$; если $b < -6$, то $\emptyset$. □

Решение задачи 1880. Начнём решать это неравенство как обычное неравенство с одной неизвестной x, не обращая внимания на наличие параметра (как будто вместо a стоит конкретное число).

Прежде всего разложим левую часть на множители методом группировки:

$$(ax^4 + 2ax^2) + (x^3 + 2x) + (3a^3x^2 + 6a^3) > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$ax^2(x^2+2) + x(x^2+2) + 3a^3(x^2+2) > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(ax^2 + x + 3a^3) \cdot (x^2 + 2) > 0$$

Поскольку выражение x^2+2 положительно при всех значениях x, на него можно сократить, так что неравенство примет вид:

$$ax^2 + x + 3a^3 > 0. \tag{11.160}$$

С этого места наше решение начнёт зависеть от значения параметра. Прежде всего, от значения параметра зависит тип неравенства (11.160): если $a \neq 0$, то это – квадратичное неравенство, а если $a = 0$, то это – линейное неравенство. При решении квадратичного неравенства необходимо учитывать знак старшего коэффициента. Поэтому случай $a \neq 0$ мы разобьём на два: $a > 0$ и $a < 0$.

1 случай: $a = 0$. Неравенство (11.160) примет вид $x > 0$, так что множество его решений – это луч $(0; +\infty)$.

2 случай: $a > 0$. Это означает, что ветви параболы

$$y = ax^2 + x + 3a^3 \tag{11.161}$$

идут вверх.

Поскольку (11.160) – квадратичное неравенство, подсчитаем его дискриминант: $D = 1 - 12a^4$. Дальнейшее решение неравенства (11.160) зависит от знака D.

случай 2.1: $D < 0$. В терминах переменной a условие $D < 0$ означает, что (мы учитываем тот факт, что рассматривается случай $a > 0$):

$$1 - 12a^4 < 0 \Leftrightarrow a^4 > \frac{1}{12} \Leftrightarrow a > \frac{1}{\sqrt[4]{12}}.$$

Если $D < 0$, то парабола (11.161) не пересекает ось абсцисс, так что решением неравенства (11.160) будет вся числовая прямая.

случай 2.2: $D = 0$. В терминах переменной a условие $D = 0$ означает, что (мы учитываем тот факт, что рассматривается случай $a > 0$):

$$1 - 12a^4 = 0 \Leftrightarrow a^4 = \frac{1}{12} \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt[4]{12}}.$$

Если $D = 0$, то парабола (11.161) касается оси абсцисс в точке $x_0 = -\frac{1}{2a} = -\frac{\sqrt[4]{12}}{2}$, так что множество решений неравенства (11.160) – числовая прямая с выколотой точкой x_0.

случай 2.3: $D > 0$. В терминах переменной a условие $D > 0$ означает, что (мы учитываем тот факт, что рассматривается случай $a > 0$):

$$1 - 12a^4 > 0 \Leftrightarrow a^4 < \frac{1}{12} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{\sqrt[4]{12}}.$$

Если $D > 0$, то парабола (11.161) пересекает ось абсцисс в двух точках:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 12a^4}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 12a^4}}{2a},$$

так что решением неравенства (11.160) будет множество $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

3 случай: $a < 0$. Это означает, что ветви параболы (11.161) идут вниз.

Дискриминант даётся той же формулой, что и случае 2: $D = 1 - 12a^4$. Дальнейшее решение неравенства (11.160) также определяется знаком D.

случай 3.1: $D < 0$. В терминах переменной a условие $D < 0$ означает, что (мы учитываем тот факт, что рассматривается случай $a < 0$):

$$1 - 12a^4 < 0 \Leftrightarrow a^4 > \frac{1}{12} \Leftrightarrow a < -\frac{1}{\sqrt[4]{12}}.$$

Если $D < 0$, то парабола (11.161) не пересекает ось абсцисс, так что решением неравенства (11.160) будет пустое множество.

случай 3.2: $D = 0$. В терминах переменной a условие $D = 0$ означает, что (мы учитываем тот факт, что рассматривается случай $a < 0$):

$$1 - 12a^4 = 0 \Leftrightarrow a^4 = \frac{1}{12} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{\sqrt[4]{12}}.$$

Если $D = 0$, то парабола (11.161) касается оси абсцисс в точке $x_0 = -\frac{1}{2a} = \frac{\sqrt[4]{12}}{2}$, так что решением неравенства (11.160) будет пустое множество (поэтому случаи 3.1 и 3.2 можно объединить в один).

случай 3.3: $D > 0$. В терминах переменной a условие $D > 0$ означает, что (мы учитываем тот факт, что рассматривается случай $a < 0$):

$$1 - 12a^4 > 0 \Leftrightarrow a^4 < \frac{1}{12} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt[4]{12}} < a < 0.$$

Если $D > 0$, то парабола (11.161) пересекает ось абсцисс в двух точках:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 12a^4}}{2a}, \ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 12a^4}}{2a},$$

так что решением неравенства (11.160) будет интервал $(x_2; x_1)$ ($x_2 < x_1$ при $a < 0$).

Ответ: если $a \le -\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, то $\emptyset$;

если $a \in \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{12}}; 0\right)$, то $\left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}; \frac{-1-\sqrt{1-a^4}}{2a}\right)$;

если $a = 0$, то $(0; +\infty)$;

если $a \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[4]{12}}\right)$, то $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{1-a^4}}{2a}; +\infty\right)$;

если $a = \frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, то $(-\infty; +\infty) \setminus \left\{-\frac{\sqrt[4]{12}}{2}\right\}$;

если $a > \frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, то $(-\infty; +\infty)$. $\square$

Решение задачи 1899. Данные неравенства являются квадратными относительно неизвестной x. Решим их обычным способом.

1. Запишем первое неравенство в стандартном виде:

$$x^2 + 4kx + (3k^2 - 2k - 1) > 0 \tag{11.162}$$

и решим соответствующее квадратное уравнение

$$x^2 + 4kx + (3k^2 - 2k - 1) = 0. \tag{11.163}$$

Для $\frac{D}{4}$ имеем:

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - (3k^2 - 2k - 1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Поэтому квадратное уравнение (11.163) имеет два корня (возможно совпадающие):

$$x_1 = -2k - |k+1|, \quad x_2 = -2k + |k+1|.$$

Поскольку $x_1 \le x_2$, множество решений неравенства (11.162) является объединением двух промежутков: $x < x_1$ и $x > x_2$.

Отметим, что корни уравнения (11.163) можно записать и в виде:

$$x = -2k - (k+1) = -3k - 1, \quad x = -2k + (k+1) = -k + 1,$$

но в этом случае мы не знаем, какой из них больше, а это важно для решения неравенства.

2. Запишем второе неравенство в стандартном виде:

$$x^2 + 2kx - (3k^2 - 8k + 4) \le 0 \tag{11.164}$$

и решим соответствующее квадратное уравнение

$$x^2 + 2kx - (3k^2 - 8k + 4) = 0. \tag{11.165}$$

Для $\frac{D}{4}$ имеем:

$$\frac{D}{4} = k^2 + (3k^2 - 8k + 4) = 4k^2 - 8k + 4 = 4(k-1)^2.$$

Поэтому квадратное уравнение (11.165) имеет два корня (возможно совпадающие):

$$x_1' = -k - 2|k-1|, \quad x_2' = -k + 2|k-1|.$$

Поскольку $x_1' \le x_2'$, множество решений неравенства (11.164) является отрезком: $x_1' \le x \le x_2'$ (который может выродиться в одноэлементное множество).

Пересечение множеств $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ и $[x_1'; x_2']$ будет пустым тогда и только тогда, когда $x_1 \le x_1'$, $x_2' \le x_2$, т.е. параметр k является решением системы

$$\begin{cases} -2k - |k+1| \le -k - 2|k-1|, \\ -k + 2|k-1| \le -2k + |k+1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|k-1| - |k+1| \le k, \\ 2|k-1| - |k+1| \le -k, \end{cases}$$

которая легко решается стандартным раскрытием модулей:

1. если $k \le -1$, то эта система примет вид:

$$\begin{cases} -2(k-1)+(k+1) \le k, \\ -2(k-1)+(k+1) \le -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \ge \frac{3}{2}, \\ 3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

2. если $-1 < k \le 1$, то эта система примет вид:

$$\begin{cases} -2(k-1)-(k+1) \le k, \\ -2(k-1)-(k+1) \le -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \ge \frac{1}{4}, \\ k \ge \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le k \le 1$$

3. если $k > 1$, то эта система примет вид:

$$\begin{cases} 2(k-1)-(k+1) \le k, \\ 2(k-1)-(k+1) \le -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le 0, \\ k \le \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < k \le \frac{3}{2}$$

Таким образом, система из двух исходных неравенств не имеет решений тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2} \le k \le \frac{3}{2}$. Иначе говоря, исходные неравенства имеют хотя бы одно общее решение тогда и только тогда, когда $k < \frac{1}{2}$ или $k > \frac{3}{2}$.

Ответ: $k < \frac{1}{2}$, $k > \frac{3}{2}$.$\square$

Решение задачи 1946. Рассмотрим a и x не как параметр и неизвестную, а как две *переменные* величины, и нарисуем на координатной плоскости (a, x) фигуру, задаваемую нашим уравнением. Для этого раскроем модули и приведём его к виду $a = f(x)$:

$$\begin{cases} x \le -3 \\ a = 1 + \frac{8}{x-1} \end{cases} \quad \begin{cases} -3 < x < 1 \\ a = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

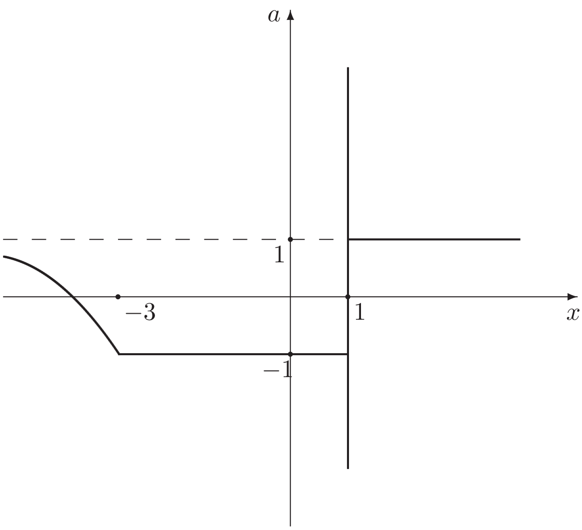
Первая из них задаёт кусок гиперболы $a = 1 + \frac{8}{x-1}$, соответствующий значениям $x \le -3$. Эта гипербола имеет вертикальную асимптоту $x = 1$, горизонтальную асимптоту $a = 1$ и проходит через точку $(-3, -1)$. Вторая система задаёт отрезок (без концов) прямой $a = -1$, соответствующий значениям $x \in (-3; 1)$. Третья система задаёт вертикальную прямую, проходящую через точку $x = 1$. Четвёртая система задает луч $a = 1$, соответствующий значениям $x > 1$.

Склеивая четыре описанных выше куска, мы получим фигуру, изображённую на рис. 11.22.

Теперь начнём решать нашу исходную задачу с параметром. Ключевым является следующее соображение: при данном значении параметра a множество решений исходного уравнения является проекцией на ось абсцисс точек пересечения горизонтальной прямой, проведённой на высоте a, с фигурой, изображённой на рис. 11.22. Эту горизонтальную прямую удобно мыслить как движущуюся ось Ox. Тогда её пересечение с вышеупомянутой фигурой непосредственно даёт множество решений исходного уравнения.

Поэтому из рис. 11.22 очевидно, что исходное уравнение имеет ровно два решения при $a \in (-1; 1)$.

Рис. 11.22:



Сами решения также легко вычисляются с помощью этого рисунка. Особо отметить следует только меньший из двух корней в случае $a \in (-1; 1)$. Из рисунка ясно, что этот корень – единственная точка пересечения горизонтальной прямой, проведённой на высоте a, и гиперболы $\frac{x+7}{x-1}$. Поэтому его можно вычислить формальным решением уравнения $\frac{x+7}{x-1} = a$: $x = \frac{a+7}{a-1}$.

Ответ: при $|a| > 1$ $x = 1$; при $a = 1$ $x \geq 1$; при $|a| < 1$ $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{a+7}{a-1}$; при $a = -1$ $-3 \leq x \leq 1$. Два решения – при $|a| < 1$.□

Решение задачи 1949. Основное неравенство

$$(p - x^2)(p + x - 2) < 0$$

распадается на две системы:

$$\begin{cases} p < x^2, \\ p > -x + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} p > x^2, \\ p < -x + 2 \end{cases}$$

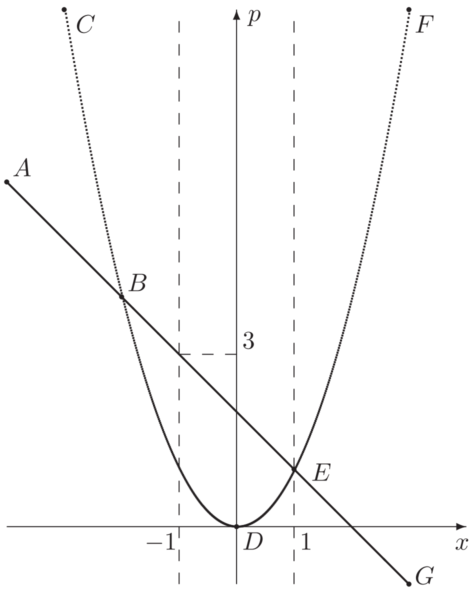
Множество решений этой совокупности систем, Φ, изображено на рис.11.23 Оно состоит из трёх областей (с внутренними точками): ABC, BDE, FEG (первая и третья области неограниченно продолжаются влево и вправо соответственно).

Множество решений неравенства $x^2 \leq 1$ – это отрезок $-1 \leq x \leq 1$.

Поэтому исходную задачу можно переформулировать следующим образом:

найти все значения параметра p, при которых горизонтальная прямая, проведённая на уровне p, не пересекает фигуру Φ в пределах вертикальной полосы $-1 \leq x \leq 1$.

Рис. 11.23:



Из рисунка ясно, что этому условию удовлетворяют значения $p \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$ и только они.

Ответ: $p \le 0$, $p \ge 3$. □

Решение задачи 1962. Если в левой части первого уравнения исходной системы формально убрать все модули и привести подобные члены, то мы получим число 2, стоящее в правой части. Поэтому это уравнение можно записать в виде

$$|a_1| + \cdots + |a_n| = a_1 + \cdots + a_n.$$

Как было показано при решении задачи 274, это равенство равносильно неотрицательности всех a_k, $k = 1, \ldots, n$. В нашем случае это означает, что:

$$\left\{\begin{array}{l} a \le x, \\ a \ge x - 1, \\ a \le y, \\ a \ge y - 1. \end{array}\right.$$

Второе уравнение исходной системы позволяет однозначно определить y, если известно значение неизвестной x. Поэтому неизвестную y можно исключить, так что исходная задача примет вид:

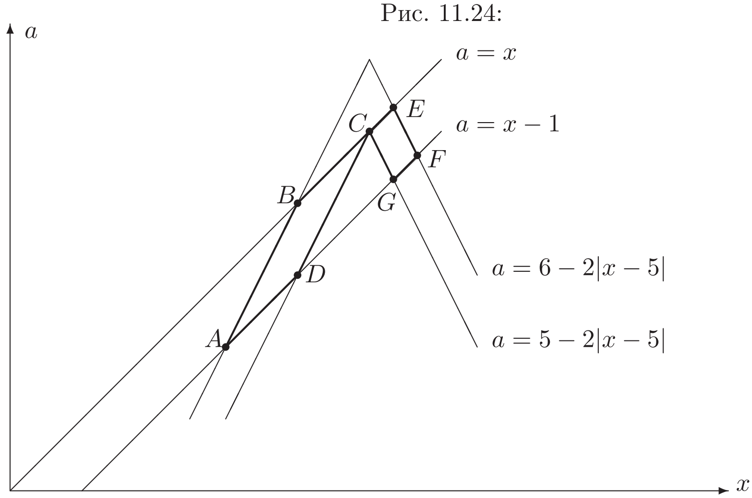
при каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} a \le x, \\ a \ge x-1, \\ a \le 6-2|x-5|, \\ a \ge 5-2|x-5|. \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Фигура, которую задаёт на координатной плоскости $(x;a)$ эта система, изображена на рис.11.24; она состоит из двух параллелограммов $ABCD$ и $CEFG$ (с внутренними точками).

Рис. 11.24:



Из этого рисунка ясно, что искомые значения параметра a – это ординаты точек A и E. Их координаты могут быть найдены из решения систем

$$\begin{cases} a = x-1, \\ a = 6+2(x-5) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a = x, \\ a = 6-2(x-5) \end{cases}$$

соответственно: $A = (3;2)$, $E = \left(\frac{16}{3};\frac{16}{3}\right)$.

Ответ: $a_1 = 2;\ a_2 = \frac{16}{3}$. □

Решение задачи 1963. Поскольку по условию параметр a принимает только положительные значения, исходное уравнение можно записать в виде:

$$\{x\} + \log_2 x = \log_2 a + \frac{1}{2}.$$

Введём новый параметр $b = \log_2 a + \frac{1}{2}$. При изменении a на отрезке $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{3}{2}\right]$ переменная b меняется на отрезке $\left[0;\log_2 3 - \frac{1}{2}\right]$. При этом соответствие между a и b взаимно однозначное. Поэтому исходную задачу можно переформулировать следующим образом:

найти количество корней уравнения $\{x\} + \log_2 x = b$ для каждого значения $b \in \left[0; \log_2 3 - \frac{1}{2}\right]$

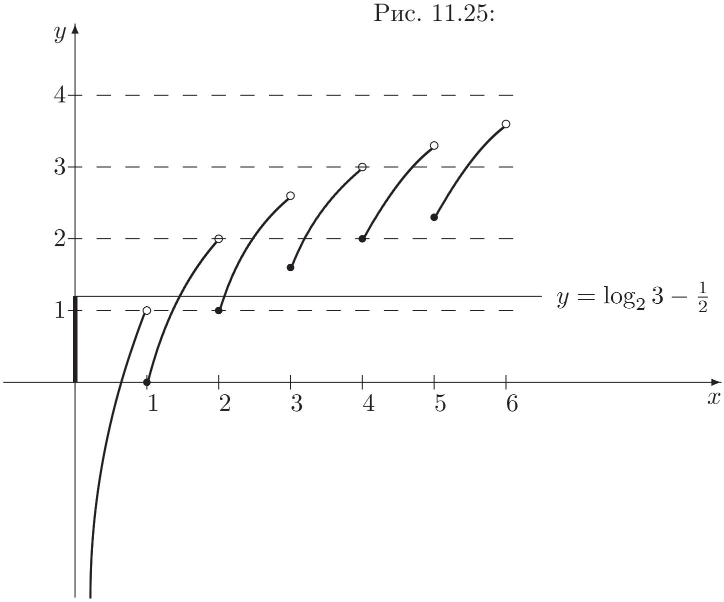
или, что то же самое,

для каждого $b \in \left[0; \log_2 3 - \frac{1}{2}\right]$ найти количество точек пересечения графика функции $f(x) = \{x\} + \log_2 x$ и горизонтальной прямой $y = b$.

Функция $f(x) = \{x\} + \log_2 x$ определена при $x > 0$ и является суммой функций $y = \{x\}$ и $y = \log_2 x$. Функция $y = \log_2 x$ возрастает всюду на области определения, а функция $y = \{x\}$ возрастает от 0 до 1 (причём значение 1 не достигается) на каждом из промежутков $n \leq x < n + 1$, $n \in Z$. Поэтому на каждом из промежутков $(0; 1)$, $[1; 2)$, $[2; 3), \ldots$ функция $f(x) = \{x\} + \log_2 x$ также возрастает. На первом из них $f(x)$ возрастает от $-\infty$ до 0 (причём значение 0 не достигается), а на промежутках вида $[n; n + 1)$, $n \in N$, $f(x)$ возрастает от $\log_2 n$ до $\log_2(n + 1) + 1$ (причём это значение не достигается).

Эта информация приводит к графику, изображённому на рис.11.25, который, в свою очередь, немедленно даёт ответ на вопрос задачи.

Рис. 11.25:



Ответ: 2.□

Решение задачи 1964. Нарисуем на координатной плоскости $(x; a)$ фигуру, задаваемую уравнением $x2^{ax} = 2$. Для этого разрешим уравнение относительно a:

$$a = \frac{1 - \log_2 x}{x}$$

и (по обычной схеме) построим график функции $f(x) = \frac{1 - \log_2 x}{x}$.

1. Найдём область определения $f(x)$: это множество положительных чисел.

2. Подсчитаем производную:

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x\ln 2}\cdot x - (1-\log_2 x)}{x^2} = \frac{-\log_2 e - 1 + \log_2 x}{x^2} = \frac{\log_2\left(\frac{x}{2e}\right)}{x^2}.$$

3. Определим знаки производной:

$$\begin{array}{lcc} f'(x) > 0 & \Leftrightarrow & x > 2e, \\ f'(x) < 0 & \Leftrightarrow & 0 < x < 2e. \end{array}$$

4. Найдём промежутки возрастания/убывания функции: при $x > 2e$ функция $f(x)$ возрастает, а при $0 < x < 2e$ – убывает.

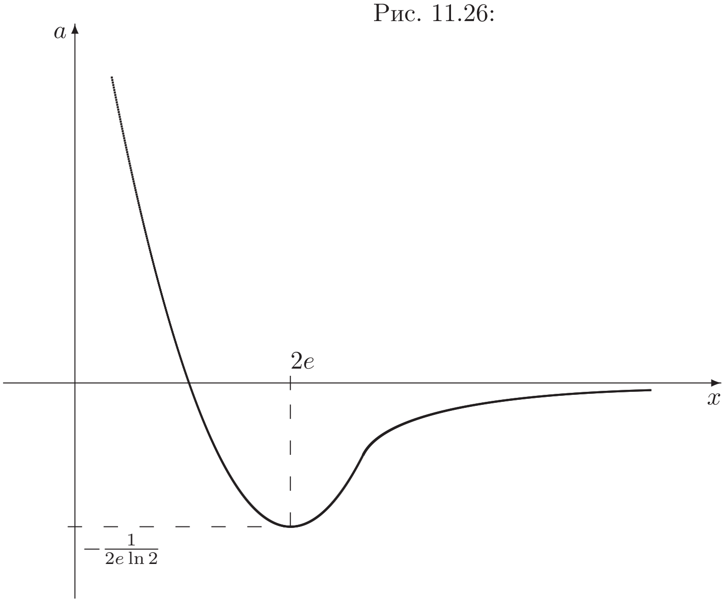
5. Найдём значение функции в критической точке $x_0 = 2e$: $f(2e) = -\frac{1}{2e\ln 2}$.

6. Найдём поведение функции на границе области определения:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1-\log_2 x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty}\frac{1-\log_2 x}{x} = 0.$$

Эта информация приводит к графику, изображённому на рис.11.26, который, в свою очередь немедленно даёт ответ на вопрос задачи.

Рис. 11.26:



Ответ: $a < -\frac{1}{2e\ln 2}$. $\square$

Решение задачи 1968. Нарисуем на координатной плоскости $(x; a)$ фигуру, задаваемую уравнением

$$||x+a|-2x|-3x=7|x-1|$$

Для этого раскроем все модули.

Начнём с $|x-1|$:

$$\left\{\begin{array}{l} x \geq 1 \\ ||x+a|-2x|-3x=7(x-1) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x<1 \\ ||x+a|-2x|-3x=-7(x-1) \end{array}\right.$$
$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$
$$\left\{\begin{array}{l} x \geq 1 \\ ||x+a|-2x|=10x-7 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x<1 \\ ||x+a|-2x|=-4x+7 \end{array}\right. \tag{11.166}$$

Если $x \geq 1$, то $10x-7>0$, так что первая система распадётся на две системы:

$$\left\{\begin{array}{l} x \geq 1 \\ |x+a|-2x=10x-7 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x \geq 1 \\ |x+a|-2x=-(10x-7) \end{array}\right.$$
$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$
$$\left\{\begin{array}{l} x \geq 1 \\ |x+a|=12x-7 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x \geq 1 \\ |x+a|=-8x+7 \end{array}\right.$$

Если $x \geq 1$, то $12x-7>0$, а $-8x+7<0$, так что вторая из этих систем не имеет решений, а первая распадается на две системы:

$$\left\{\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x+a=12x-7 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x+a=-(12x-7) \end{array}\right.$$
$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$
$$\left\{\begin{array}{l} x \geq 1 \\ a=11x-7 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x \geq 1 \\ a=-13x+7 \end{array}\right.$$

На координатной плоскости $(x; a)$ первая система задает луч, идущий из точки $(1; 4)$ вправо и вверх с угловым коэффициентом 11, а вторая система – луч, идущий из точки $(1; -6)$ вправо и вниз с угловым коэффициентом -13 (см. рис.11.27; отметим, что на этом рисунке мы исказили масштаб).

Теперь займёмся второй системой (11.166). Если $x<1$, то $-4x+7>0$, так что эта система распадётся на две системы:

$$\left\{\begin{array}{l} x<1 \\ |x+a|-2x=-4x+7 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x<1 \\ |x+a|-2x=-(-4x+7) \end{array}\right.$$
$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$
$$\left\{\begin{array}{l} x<1 \\ |x+a|=-2x+7 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x<1 \\ |x+a|=6x-7 \end{array}\right.$$

Если $x<1$, то $-2x+7>0$, а $6x-7<0$, так что вторая из этих систем не имеет решений, а первая распадается на две системы:

$$\begin{cases} x < 1 \\ x + a = -2x + 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 1 \\ x + a = -(-2x + 7) \end{cases}$$

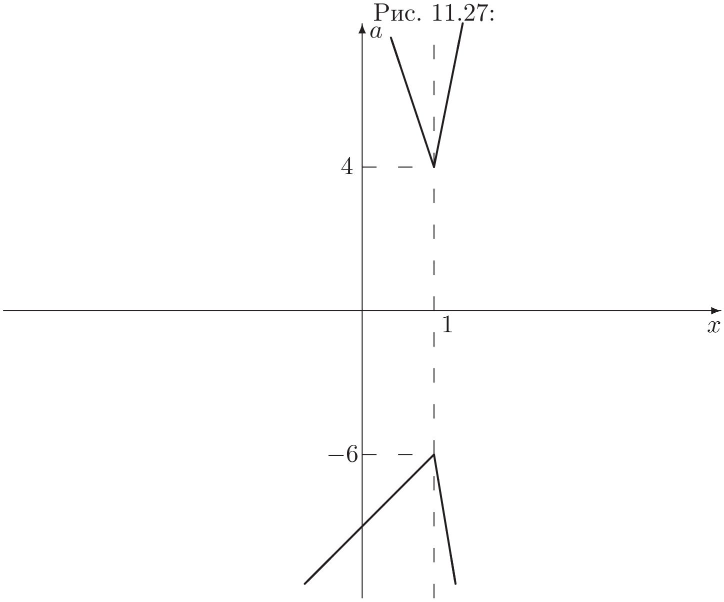
$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} x < 1 \\ a = -3x + 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 1 \\ a = x - 7 \end{cases}$$

На координатной плоскости $(x; a)$ первая система задает луч с угловым коэффициентом -3, идущий из точки $(1; 4)$ влево и вверх, а вторая система – луч с угловым коэффициентом 1, идущий из точки $(1; -6)$ влево и вниз (см. рис.11.27).

Таким образом, исходное уравнение задаёт на координатной плоскости $(x; a)$ фигуру, изображённую на рис.11.27. Из этого рисунка ясно, что при $a > 4$ и $a < -6$ исходное уравнение имеет ровно два корня, при $a = 4$ и $a = -6$ – один корень, а при $-6 < a < 4$ не имеет корней.

Рис. 11.27:



Ответ: $-6 \le a \le 4$. $\square$

Решение задачи 1969. Относительно неизвестной x исходное уравнение является показательным. Как рекомендует общая теория решения показательных уравнений, введём новую неизвестную $t = 2^x$. Эта замена даст уравнение четвёртой степени относительно t:

$$t^4 - 6t^3 + 8t^2 + 2(a-1)t - (a-1)^2 = 0. \tag{11.167}$$

При фиксированном значении параметра a исходное уравнение (относительно x) имеет три корня тогда и только тогда, когда уравнение (11.167) имеет три положительных корня, что, в свою очередь, равносильно тому, что фигура на плоскости $(x; a)$, задаваемая уравнением (11.167), имеет ровно три точки пересечения в правой полуплоскости с горизонтальной прямой, проведённой на высоте a.

Чтобы нарисовать эту фигуру, разрешим уравнение (11.167) относительно a. Для этого рассмотрим (11.167) как квадратное уравнение относительно параметра $b = a - 1$:

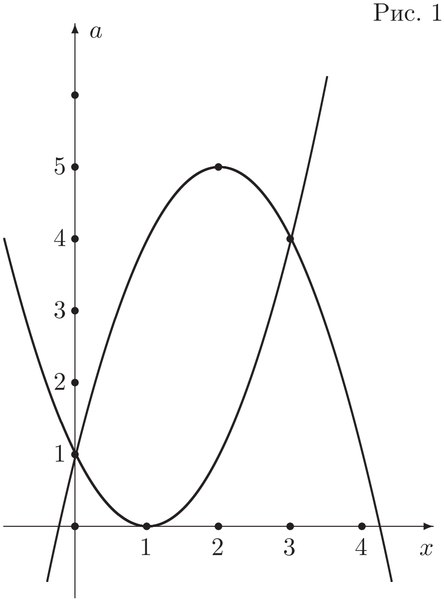
$$b^2 - 2tb - (t^4 - 6t^3 + 8t^2) = 0.$$

Для него $\frac{D}{4} = t^4 - 6t^3 + 9t^2 = (t^2 - 3t)^2$, так что это уравнение имеет два корня: $b_1 = t^2 - 2t$, $b_2 = -t^2 + 4t$. Соответственно (11.167) распадается на два уравнения

$$a = t^2 - 2t + 1, \ a = -t^2 + 4t + 1. \tag{11.168}$$

Иначе говоря, фигура на плоскости $(x; a)$, задаваемая уравнением (11.167), является объединением двух парабол (11.168). Первая парабола имеет вершину в точке $(1; 0)$, а вторая – в точке $(2; 5)$. между собой эти параболы пересекаются в двух точках: $(0; 1)$ и $(3; 4)$. Поэтому рис 11.28 немедленно влечёт ответ задачи.

Рис. 11.28:



Ответ: $a \in (0; 5) \setminus \{1; 4\}$. $\square$

Решение задачи 1974. Поскольку параметр входит в исходные неравенства линейно, разрешим их относительно a:

$$\begin{cases} a(x+1)^2 \le x^2 - 4, \\ a(x+1)^2 \ge -2x - 1. \end{cases}$$

При $x = -1$ первое неравенство примет вид: $0 \le -3$. Поэтому значение $x = -1$ не является решением этой системы ни при одном a и мы можем разделить неравенства на $(x+1)^2$:

$$\begin{cases} a \le \frac{x^2-4}{(x+1)^2}, \\ a \ge -\frac{2x+1}{(x+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le 1 - \frac{2}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}, \\ a \ge -\frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}. \end{cases}$$

Для новой неизвестной $t = \frac{1}{x+1}$ последняя система примет вид:

$$\begin{cases} a \le -3t^2 - 2t + 1, \\ a \ge t^2 - 2t. \end{cases} \qquad (11.169)$$

Поскольку функция $t = \frac{1}{x+1}$ задаёт взаимно однозначное соответствие между числами $x \ne -1$ и числами $t \ne 0$, исходную задачу можно переформулировать следующим образом:

Найти все значения a, при которых система (11.169) имеет единственное решение $t \ne 0$.

На координатной плоскости $(t; a)$ эта система задаёт область Φ, ограниченную сверху параболой $a = -3t^2 - 2t + 1$, а снизу – параболой $a = t^2 - 2t$. Первая парабола имеет вершину в точке с координатами $t = -\frac{1}{3}$, $a = \frac{4}{3}$. Координаты вершины второй параболы – $(1; -2)$. Точки пересечения этих парабол с осями координат не играют никакой роли, а вот точки пересечения парабол между собой исключительно важны. Чтобы их найти, решим уравнение

$$-3t^2 - 2t + 1 = t^2 - 2t \Leftrightarrow 4t^2 = 1.$$

Оно имеет два корня: $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{1}{2}$, которые являются абсциссами точек пересечения. Ординаты этих точек равны $\frac{5}{4}$ и $-\frac{3}{4}$ соответственно. Теперь можно нарисовать область Φ; её примерный вид изображён на рис. 11.29.

Из этого рисунка немедленно следует ответ задачи.

Ответ: $a_1 = -\frac{3}{4}$, $a_2 = \frac{4}{3}$.$\square$

Решение задачи 1985. Исходное уравнение легко привести к виду

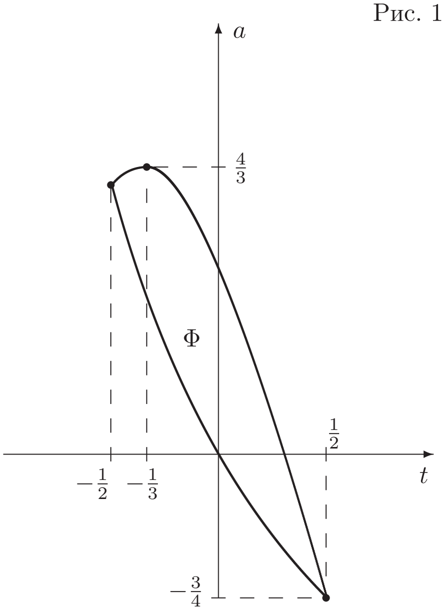
$$3 \cdot \sqrt[5]{x+4} - a \cdot \sqrt[5]{x+3} = \sqrt[10]{(x+3)(x+4)},$$

где $a = 14b^2$. Поскольку $x = -3$ не является его корнем, это уравнение равносильно уравнению

$$a = 3 \cdot \sqrt[5]{\frac{x+4}{x+3}} - \frac{\sqrt[10]{(x+3)(x+4)}}{\sqrt[5]{x+3}}. \qquad (11.170)$$

Если обозначить выражение $\frac{\sqrt[10]{(x+3)(x+4)}}{\sqrt[5]{x+3}}$ через t, то $t^2 = \sqrt[5]{\frac{x+4}{x+3}}$. Обозначим через $f(x)$ выражение в правой части (11.170). Функцию $y = f(x)$ можно рассматривать как суперпозицию квадратичной функции $y = 3t^2 - t$ и функции $t(x) = \frac{\sqrt[10]{(x+3)(x+4)}}{\sqrt[5]{x+3}}$.

Рис. 11.29:



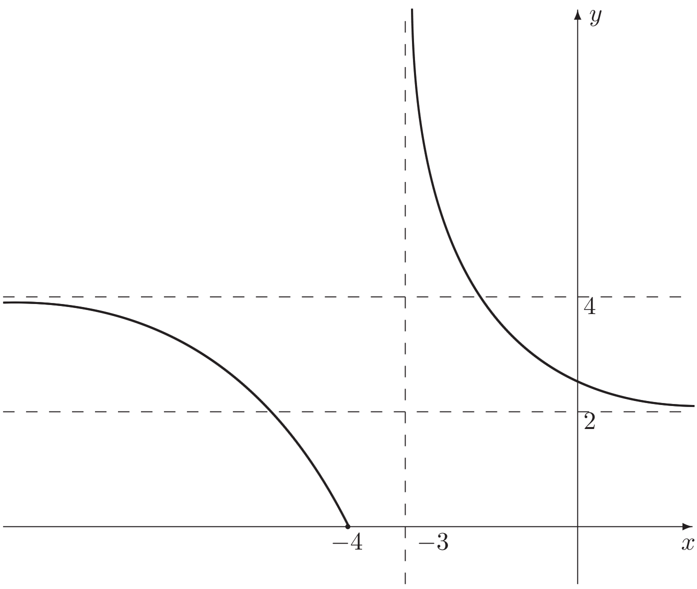
Функция $y = f(x)$, так же как и функция $t = t(x)$, определена на множестве $(-\infty; -4] \cup (-3; +\infty)$.

График внешней функции, $y = 3t^2 - t$, является обычной параболой, которая пересекает ось абсцисс в точках 0 и $\frac{1}{3}$.

Чтобы построить график внутренней функции, $t = t(x)$, упростим формулу, которая задаёт эту функцию. Если $x \geq -3$, то $\sqrt[5]{x+3} = \left(\sqrt[10]{x+3}\right)^2$, так что $t(x) = \sqrt[10]{\frac{x+4}{x+3}}$. Если $x \leq -4$, то $\sqrt[5]{x+3} = -\left(\sqrt[10]{-x-3}\right)^2$, так что $t(x) = -\sqrt[10]{\frac{x+4}{x+3}}$. В обоих случаях дело сводится к обычной дробно-линейной функции $\frac{x+4}{x+3}$, график которой – гипербола с вертикальной асимптотой $x = -3$, горизонтальной асимптотой $y = 1$. Эта гипербола пересекает ось абсцисс в точке $x = -4$. Поэтому при $x \in (-\infty; -4]$ график функции $t = t(x)$ монотонно возрастает от -1 (прямая $y = -1$ является горизонтальной асимптотой при $x \to -\infty$) до $t(-4) = 0$. При $x \in (-3; +\infty)$ график функции $t(x)$ монотонно убывает от $+\infty$ (прямая $x = -3$ является вертикальной асимптотой при $x \to -3$) до 1 (прямая $y = 1$ является горизонтальной асимптотой при $x \to +\infty$).

Соответственно, график функции $f(x)$ при $x \in (-\infty; -4]$ монотонно убывает от 4 (прямая $y = 4$ является горизонтальной асимптотой при $x \to -\infty$) до $f(-4) = 0$. При $x \in (-3; +\infty)$ график функции $f(x)$ монотонно убывает от $+\infty$ (прямая $x = -3$ является вертикальной асимптотой при $x \to -3$) до 2 (прямая $y = 2$ является горизонтальной асимптотой при $x \to +\infty$). График функции $y = f(x)$ изображён на рис.11.30.

Рис. 11.30:



Из этого рисунка ясно, что уравнение (11.170) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $0 \le a \le 2$, $a \ge 4$. Возвращаясь к основному параметру b, мы немедленно получаем ответ задачи.

Ответ: $(-\infty; -\sqrt{2/7}] \cup [-\sqrt{1/7}; \sqrt{1/7}] \cup [\sqrt{2/7}; +\infty)$. □

Решение задачи 1990. Очевидно, $x = 0$, $y = 0$ является решением уравнения при любом a. Поэтому уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда других решений нет. Поскольку обе неизвестные должны быть неотрицательными, нам нужно выяснить, при каких a данное уравнение не имеет решений на множестве $M = \{x \ge 0, y \ge 0, (x, y) \ne (0, 0)\}$.

Соотношения $\sqrt{x} = R\cos t$, $\sqrt{y} = R\sin t$ устанавливают взаимно однозначное соотношение между точками этого множества и парами (R, t) такими, что $R > 0$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. В новых переменных уравнение примет вид: $a = \sqrt{3}\cos t + 2\sin t$. Для его решения введём дополнительное значение α равенствами $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$, $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, что приведёт уравнение к виду $\sin(t + \alpha) = \frac{a}{\sqrt{7}}$. Соответственно, исходная задача примет вид:

при каких значениях a уравнение $\sin(t + \alpha) = \frac{a}{\sqrt{7}}$ не имеет решений на множестве $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

При изменении переменной t от 0 до $\frac{\pi}{2}$ функция $f(t) = \sin(t + \alpha)$ сначала возрастает от $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ до 1, а затем убывает от 1 до $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

Поэтому уравнение $\sin(t + \alpha) = \frac{a}{\sqrt{7}}$ не имеет решений на множестве

$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ тогда и только тогда, когда $\frac{a}{\sqrt{7}} > 1$ или $\frac{a}{\sqrt{7}} < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Ответ: $a < \sqrt{3}$, $a > \sqrt{7}$. □

Решение задачи 1991. Фраза "множество решений неравенства содержит точку $x = 1$" означает "при подстановке вместо неизвестной числа 1 получится верное неравенство". Поэтому вопрос задачи можно переформулировать следующим образом: *найти все значения a, при которых верно неравенство*

$$\frac{a}{1-a} > 0. \tag{11.171}$$

Иначе говоря, нужно просто решить неравенство (11.171). Метод интервалов немедленно даёт ответ.

Ответ: $(0; 1)$. □

Решение задачи 1994. Поскольку пара $(x, y) = (1, 1)$ является решением исходной системы, справедливы равенства:

$$\begin{cases} a^2 - a = 1 - a, \\ b + (3 - 2b) = 3 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1, \\ b = -a \end{cases}$$

Рассматривая их как систему относительно a и b, мы получим две возможности:

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1, \\ b = 1 \end{cases}$$

Выясним теперь, сколько решений имеет исходная система для этих двух пар $(a; b)$.

Если $(a; b) = (1; -1)$, то исходная система примет вид:

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ -x + 5y = 4. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение $x = 1$, $y = 1$. Поэтому пару $(a; b) = (1; -1)$ следует включить в ответ.

Если $(a; b) = (-1; 1)$, то исходная система примет вид:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Ее множество решений – бесконечно: $(x; y) = (t, 2 - t)$, $t \in R$. Поэтому пара $(a; b) = (-1; 1)$ не включается в ответ.

Ответ: $a = 1$, $b = -1$. □

Решение задачи 1996. Если x_1, x_2 – корни уравнения $x^3 - 2007x = a$, то верны числовые равенства:

$$x_1^3 - 2007x_1 = a, \quad x_2^3 - 2007x_2 = a.$$

Вычитая их почленно, мы получим:

$$x_1^3 - x_2^3 - 2007(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - 2007(x_1 - x_2) = 0.$$

Если $x_1 \neq x_2$, то последнее равенство равносильно равенству

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 2007.$$

Ответ: *если* данное уравнение имеет два различных корня, то, каковы бы ни были эти корни, искомое выражение равно 2007. □

Решение задачи 1997. Фраза "числа x_1, x_2 являются корнями уравнения $x^2 - 6px + q = 0$", означает справедливость равенств $x_1^2 - 6px_1 + q = 0$ и $x_2^2 - 6px_2 + q = 0$.

Фраза "числа p, x_1, x_2, q – четыре последовательных члена геометрической прогрессии", означает, что эти числа отличны от нуля и для них справедливы равенства $x_1^2 = px_2$ и $x_2^2 = qx_1$.

Таким образом, условие задачи означает, что числа p, x_1, x_2, q являются решением системы

$$\begin{cases} x_1^2 - 6px_1 + q = 0, \\ x_2^2 - 6px_2 + q = 0, \\ x_1^2 = px_2, \\ x_2^2 = qx_1, \\ p, x_1, x_2, q, x_1 - x_2 \neq 0 \end{cases}$$

Исключая p и q, мы получим систему относительно двух неизвестных x_1 и x_2:

$$\begin{cases} x_1^3 - 6x_1^4 + x_2^2 = 0, \\ x_1x_2^3 - 6x_1^3x_2 + x_2^3 = 0, \\ x_1, x_2, x_1 - x_2 \neq 0. \end{cases} \qquad (11.172)$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$x_1x_2(x_1^2 - x_2^2) - 6x_1^3(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1(x_1 - x_2)(x_1x_2 + x_2^2 - 6x_1^2) = 0.$$

Поскольку x_1 и $x_1 - x_2$ отличны от 0,

$$x_2^2 + x_1x_2 - 6x_1^2 = 0.$$

Рассматривая это уравнение как квадратное относительно x_2, мы получим, что $x_2 = 2x_1$ или $x_2 = -3x_1$.

В первом случае второе уравнение системы (11.172) даёт $x_1 = 2$, так что $x_2 = 4$.

Во втором случае второе уравнение системы (11.172) даёт $x_1 = -3$, так что $x_2 = 9$.

Оба варианта, $x_1 = 2; x_2 = 4$ и $x_1 = -3; x_2 = 9$, удовлетворяют последнему условию системы (11.172).

Ответ: $x_1 = 2; x_2 = 4$ или $x_1 = -3; x_2 = 9$. □

Решение задачи 1998. Если при некотором значении параметра a данные уравнения имеют общий корень x, то одновременно выполнены два равенства

$$\begin{cases} x^3 + 2ax^2 - a^2x - 2a^3 + 2 = 0 \\ x^3 - ax^2 - 10a^2x + 10a^3 - 1 = 0 \end{cases} \qquad (11.173)$$

т.е. пара $(x; a)$ является решением системы (11.173). Обратно, если пара $(x; a)$ является решением системы (11.173), то (по определению решения системы) одновременно выполнены оба данных уравнения, т.е. при этом значении a число x является их общим корнем.

Поэтому, чтобы получить ответ задачи, нужно просто решить систему (11.173) и затем отобрать из найденных пар $(x; a)$ только значения a. Геометрически это означает, что нужно спроектировать множество решений системы (11.173) на ось a.

Уравнения системы (11.173) – "почти" однородные уравнения третьей степени. "Лишними" являются свободные члены. Чтобы их уничтожить, умножим второе уравнение на 2 и сложим с первым. Для равносильности этого преобразования нужно сохранить одно из исходных уравнений, скажем, первое:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^3 - 7a^2x + 6a^3 = 0, \\ x^3 + 2ax^2 - a^2x - 2a^3 + 2 = 0 \end{array} \right. \tag{11.174}$$

Левая часть первого уравнения системы (11.174) раскладывается на множители методом группировки:

$$\begin{aligned} & x^3 - 7a^2x + 6a^3 = x^3 - a^2x - 6a^2x + 6a^3 \\ = \; & x(x^2 - a^2) - 6a^2(x - a) = (x - a)(x^2 + ax - 6a^2). \end{aligned}$$

Множитель $x^2 + ax - 6a^2$ можно рассматривать как квадратный трёхчлен относительно x. Его дискриминант равен $D = a^2 + 24a^2 = 25a^2$, так что соответствующее квадратное уравнение имеет два корня: $x = -3a$ и $x = 2a$. Таким образом, первое уравнение системы (11.174) распадается на три уравнения: $x = a$, $x = -3a$, $x = 2a$. Соответственно, вся система распадается на три системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a, \\ x^3 + 2ax^2 - a^2x - 2a^3 + 2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = a, \\ 2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \emptyset$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -3a, \\ x^3 + 2ax^2 - a^2x - 2a^3 + 2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -3a, \\ -8a^3 + 2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}, \\ a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2a, \\ x^3 + 2ax^2 - a^2x - 2a^3 + 2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2a, \\ 12a^3 + 2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{2}{\sqrt[3]{6}}, \\ a = -\frac{1}{\sqrt[3]{6}} \end{array} \right.$$

Отбирая из найденных пар $(x; a)$ только значения a, мы получаем ответ.

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. □

Решение задачи 2000. Если целое число n является корнем уравнения

$$(1 + a)x^2 + (1 - a)x + a + 3 = 0, \tag{11.175}$$

то верно равенство

$$(1 + a)n^2 + (1 - a)n + a + 3 = 0.$$

Отсюда можно найти параметр a:

$$a = -\frac{n^2+n+3}{n^2-n+1}, \tag{11.176}$$

что позволяет переписать уравнение (11.175) в виде

$$(n+1)x^2 - (n^2+2)x - (n^2-2n) = 0. \tag{11.177}$$

Если $n = -1$, то это уравнение является линейным: $-3x - 3 = 0$. Оно имеет единственный корень $n = -1$. Соответствующее значение параметра a можно подсчитать по формуле (11.176): $a = -1$.

Если $n \neq -1$, то уравнение (11.177) является квадратным. Число $x = n$ является его корнем, так что дискриминант этого уравнения неотрицателен. Второй корень (возможно, совпадающий с n) можно подсчитать по теореме Виета: $x_2 = \frac{n^2+2}{n+1} - n = -1 + \frac{3}{n+1}$. Он будет целым числом тогда и только тогда, когда $n+1 = \pm1; \pm3$, т.е. $n = -2; 0; -4; 2$. Соответствующие значения параметра a можно подсчитать по формуле (11.176):

1. если $n = -2$, то $a = -\frac{5}{7}$ ($x_1 = -2$, $x_2 = -4$);
2. если $n = 0$, то $a = -3$ ($x_1 = 0$, $x_2 = 2$);
3. если $n = -4$, то $a = -\frac{5}{7}$ ($x_1 = -4$, $x_2 = -2$);
4. если $n = 2$, то $a = -3$ ($x_1 = 2$, $x_2 = 0$).

Ответ: $a_1 = -1$, $a_2 = -3$, $a_3 = -\frac{5}{7}$. □

Решение задачи 2003. Данное уравнение является линейным относительно неизвестной x. Запишем его в стандартном виде $Ax = B$:

$$(b^4 - 9) \cdot x = b^3 + (1+\sqrt{3})b^2 - (2-\sqrt{3})b - 2\sqrt{3}.$$

Известно, что линейное уравнение $Ax = B$ не имеет корней тогда и только тогда, когда $A = 0$, $B \neq 0$. В нашем случае эти условия примут вид:

$$\begin{cases} b^4 = 9 \\ b^3 + (1+\sqrt{3})b^2 - (2-\sqrt{3})b - 2\sqrt{3} \neq 0 \end{cases} \tag{11.178}$$

Итак, решение исходной задачи с *параметром* b сводится к решению обычной системы (11.178), где b является *неизвестной*.

Первое уравнение этой системы имеет два корня: $b_1 = \sqrt{3}$, $b_2 = -\sqrt{3}$. Простая подстановка показывает, что второму условию удовлетворяет только $b_1 = \sqrt{3}$.

Ответ: $b = \sqrt{3}$. □

Решение задачи 2006. Из первого уравнения системы можно исключить x:

$$x = -\frac{a}{2}y + \frac{a}{2} + 1.$$

Тогда второе уравнение превратится в линейное уравнение с одной неизвестной y:

$$(a^2 - 3a)y = a^2 - a - 6. \tag{11.179}$$

Поскольку значение x однозначно восстанавливается по y, исходная система имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда уравнение (11.179) имеет бесконечно много решений.

Известно, что линейное уравнение $Ax = B$ имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда $A = 0$, $B = 0$. В нашем случае эти условия примут вид:

$$\begin{cases} a^2 - 3a = 0, \\ a^2 - a - 6 = 0. \end{cases} \tag{11.180}$$

Итак, решение исходной задачи с *параметром* a сводится к решению обычной системы (11.180), где a является *неизвестной*.

Первое уравнение этой системы имеет два корня: 0 и 3. Второе уравнение также имеет два корня: -2 и 3. Поэтому система (11.180) имеет единственное решение: $a = 3$.

Ответ: $a = 3$. $\square$

Решение задачи 2007. Данное уравнение является квадратным. Оно не имеет решений тогда и только тогда, когда его дискриминант $D = \frac{-7a+9}{a+5}$ отрицателен. Решая неравенство $\frac{-7a+9}{a+5} < 0$ методом интервалов, мы получим ответ.

Ответ: $a < -5$, $a > \frac{9}{7}$. $\square$

Решение задачи 2012. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (a+4)x^2 + 6x - 1 = 0, \\ x + 3 \neq 0. \end{cases} \tag{11.181}$$

Первое уравнение системы является линейным или квадратным в зависимости от того, $a + 4 = 0$ или $a + 4 \neq 0$. Поэтому мы отдельно рассмотрим эти случаи.

Если $a + 4 = 0$, т.е. $a = -4$, то система (11.181) примет вид

$$\begin{cases} 6x - 1 = 0, \\ x \neq -3. \end{cases}$$

Она, очевидно, имеет единственное решение $x = \frac{1}{6}$, так что значение $a = -4$ следует включить в ответ задачи.

Если $a + 4 \neq 0$, т.е. $a \neq -4$, то система (11.181) будет иметь единственное решение в двух случаях:

1. квадратное уравнение из системы (11.181) имеет единственный корень и этот корень не равен -3.

2. квадратное уравнение из системы (11.181) имеет два корня, но один из них равен -3.

Квадратное уравнение из системы (11.181) имеет единственный корень тогда и только тогда, когда его дискриминант $D = 4a + 52$ равен 0, т.е. $a = -13$. В этом случае сам корень равен $\frac{1}{3}$. Так как он отличен от -3, значение $a = -4$ следует включить в ответ задачи.

Квадратное уравнение из системы (11.181) имеет два корня тогда и только тогда, когда его дискриминант $D = 4a + 52$ положителен, т.е. $a > -13$ (и $a \neq -4$). При этом число $x = -3$ будет корнем этого квадратного уравнения тогда и только тогда, когда

$$(a+4)\cdot(-3)^2 + 6\cdot(-3) - 1 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{17}{9}.$$

Так как значение $a = -\frac{17}{9}$ удовлетворяет условиям $a > -13$, $a \neq -4$, его следует включить в ответ задачи.

Ответ: $-4; -13; -\frac{17}{9}$. □

Решение задачи 2021. По смыслу задачи уравнение

$$ax^2 + (2a+2)x + (a+3) = 0 \tag{11.182}$$

имеет два корня. Это возможно тогда и только тогда, когда

1. оно действительно квадратное, т.е. $a \neq 0$;

2. его дискриминант положителен: $(a+1)^2 - a(a+3) > 0 \Leftrightarrow a < 1$.

Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что параметр a удовлетворяет условиям: $a < 1$, $a \neq 0$.

Если x_1 и x_2 – корни уравнения (11.182), то расстояние между ними – это $|x_1 - x_2|$, так что условие отбора значений параметра можно записать в виде: $|x_1 - x_2| > 1$. Возводя это неравенство в квадрат, мы получим эквивалентную формулировку:

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 > 1 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 > 1.$$

С помощью теоремы Виета последнее неравенство можно записать в терминах коэффициентов уравнения (11.182):

$$\left(-\frac{2a+2}{a}\right)^2 - 4\cdot\frac{a+3}{a} > 1 \Leftrightarrow a^2 + 4a - 4 < 0 \Leftrightarrow -2-2\sqrt{2} < a < -2+2\sqrt{2}$$

Учитывая условия $a < 1$, $a \neq 0$, получаем ответ задачи.

Ответ: $-2-\sqrt{2} < a < 0$, $0 < a < -2+2\sqrt{2}$.□

Решение задачи 2028. Точки $x, x+1, x+h, x+1+h$ расположены на числовой оси симметрично относительно точки $x + \frac{h+1}{2}$. Имея это в виду, введём новую неизвестную $t = x + \frac{h+1}{2}$. Для неё исходное уравнение превратится в биквадратное уравнение

$$16t^4 - 8(h^2+1)t^2 + (h^4 - 18h^2 + 1) = 0. \tag{11.183}$$

Поскольку соответствие между основной неизвестной x и новой неизвестной t является взаимно однозначным, исходное уравнение имеет четыре различных корня тогда и только тогда, когда уравнение (11.183) имеет четыре различных корня. Это, в свою очередь, равносильно тому, что соответствующее квадратное уравнение

$$16y^2 - 8(h^2+1)y + (h^4 - 18h^2 + 1) = 0 \qquad (11.184)$$

имеет два различных положительных корня y_1, y_2; тогда уравнение (11.183) имеет четыре различных корня: $\pm\sqrt{y_1}$, $\pm\sqrt{y_2}$.

Дискриминант уравнения (11.184) равен $D = 1280h^2$.

Поэтому для $h = 0$ оно имеет один корень $y = \frac{1}{4}$. Соответственно, уравнение (11.183) имеет два корня: $t = \frac{1}{2}$, $t = -\frac{1}{2}$.

Если $h \neq 0$, то уравнение (11.184) имеет два корня. По теореме Виета $y_1 + y_2 = \frac{h^2+1}{2} > 0$, $y_1 y_2 = \frac{h^4-18h^2+1}{16}$. Поэтому оба эти корня будут положительны тогда и только тогда, когда $h^4 - 18h^2 + 1 > 0$. Это неравенство легко решается, что и даёт ответ задачи.

Ответ: $h < -2-\sqrt{5}$, $2-\sqrt{5} < h < 0$, $0 < h < \sqrt{5}-2$, $h > 2+\sqrt{5}$.□

Решение задачи 2034. Поскольку исходная система выглядит довольно громоздко, прежде всего попробуем её упростить.

Левая часть первого уравнения является квадратным трёхчленом относительно x, так что её легко можно разложить на линейные множители: $x^2 - 2xy - 3y^2 = (x+y)(x-3y)$.

Если ввести новые неизвестные $u = x+y$, $v = x-3y$, то первое уравнение примет вид: $uv = 8$.

Поскольку новые неизвестные выражаются через x и y линейным образом, основные неизвестные x и y можно выразить через новые:

$$\begin{cases} x = \frac{3u+v}{4}, \\ y = \frac{u-v}{4}. \end{cases}$$

Теперь и второе уравнение можно переписать в терминах новых неизвестных, так что исходная система примет вид:

$$\begin{cases} uv = 8, \\ 35u^2 - 6uv + 3v^2 = 16b, \end{cases} \qquad (11.185)$$

где для сокращения записей мы обозначили выражение $a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105}$ через b.

Поскольку между парами $(x; y)$ и $(u; v)$ имеется взаимно однозначное соответствие, исходная система и система (11.185) имеют одно и то же число решений.

Будем решать систему (11.185) методом исключения. Выражая из первого уравнения неизвестную v через u, $v = \frac{8}{u}$, мы сведем второе уравнение к биквадратному уравнению

$$35u^4 - (16b+48)u^2 + 192 = 0. \qquad (11.186)$$

Равенство $v = \frac{8}{u}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между отличными от 0 значениями переменных u и v. Поэтому система (11.185) имеет решение тогда и только тогда, когда уравнение (11.186) имеет решение (которое, очевидно, не может быть равно 0).

Уравнение (11.186) с помощью новой неизвестной $t = u^2$ сводится к квадратному уравнению

$$35t^2 - (16b + 48)t + 192 = 0. \tag{11.187}$$

Если уравнение (11.186) имеет корень u_0, то уравнение (11.187) имеет корень $t_0 = u_0^2 \geq 0$. Обратно, если уравнение (11.187) имеет корень $t_0 \geq 0$, то уравнение (11.186) имеет корень $u_0 = \sqrt{t_0}$ (и корень $u_0' = -\sqrt{t_0}$). Поэтому нам нужно найти значения параметра b, при которых уравнение (11.187) имеет неотрицательный корень.

Это уравнение квадратное. Поэтому, если оно имеет корни, то в силу теоремы Виета их произведение равно $\frac{192}{35}$, так что либо они оба положительны, либо оба отрицательны. Сумма корней равна $\frac{16b+48}{35}$. Значит, корни будут положительны тогда и только тогда, когда $16b + 48 > 0$.

Итак, уравнение (11.187) имеет неотрицательный корень тогда и только тогда, когда $D \geq 0$ (корни есть) и $16b + 48 > 0$ (корни положительны), т.е. параметр b является решением системы

$$\begin{cases} (16b + 48)^2 - 4 \cdot 35 \cdot 192 \geq 0, \\ 16b + 48 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 16b + 48 \geq 16\sqrt{105} \Leftrightarrow b \geq -3 + \sqrt{105}.$$

В терминах основной переменной a неравенство $b \geq -3+\sqrt{105}$ означает, что $a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 9 \geq 0$. Левую часть последнего неравенства легко разложить на множители; она равна

$$(a^2 - 2a)^2 - 9 = (a^2 - 2a - 3)(a^2 - 2a + 3) = (a + 1)(a - 3)(a^2 - 2a + 3).$$

Метод интервалов немедленно даёт ответ.

Ответ: $a \leq -1$, $a \geq 3$.□

Решение задачи 2035. Поскольку исходная система выглядит довольно громоздко, прежде всего попробуем её упростить.

В первом уравнении можно увидеть две группы похожих членов: $2xy - ax = x(2y - a)$ и $-2ay + a^2 = -a(2y - a)$, что позволяет привести это уравнение к виду $(2y - a)(x - a) = 2$.

Во втором уравнении можно увидеть “осколки” двух полных квадратов: $4x^2 - 8ax = 4(x^2 - 2a) = 4(x - a)^2 - 4a^2$ и $4y^2 - 4ay = (2y - a)^2 - a^2$, что позволяет привести это уравнение к виду $4(x - a)^2 + (2y - a)^2 = 12a^2 + 20a$.

Теперь естественно ввести новые неизвестные $u = x - a$ и $v = 2y - a$. Кроме того, для сокращения записей обозначим выражение $12a^2 + 20a$ через A. Для новых переменных исходная система примет вид:

$$\begin{cases} uv = 2, \\ 4u^2 + v^2 = A. \end{cases} \tag{11.188}$$

Поскольку между парами $(x; y)$ и $(u; v)$ имеется взаимно однозначное соответствие, исходная система и система (11.188) имеют одно и то же число решений.

Будем решать систему (11.188) методом исключения. Выражая из первого уравнения неизвестную v через u, $v = \frac{2}{u}$, мы сведем второе уравнение к биквадратному уравнению

$$4u^4 - Au^2 + 4 = 0. \tag{11.189}$$

Равенство $v = \frac{2}{u}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между отличными от 0 значениями переменных u и v. Поэтому система (11.188) имеет два решения тогда и только тогда, когда уравнение (11.189) имеет два ненулевых решения.

Уравнение (11.189) с помощью новой неизвестной $t = u^2$ сводится к квадратному уравнению

$$4t^2 - At + 4 = 0. \tag{11.190}$$

Если это уравнение не имеет корней, то и уравнение (11.189) не имеет корней. Если уравнение (11.190) имеет два корня t_1 и t_2, то их произведение равно 1. Поэтому либо они оба положительны, либо отрицательны. В первом случае уравнение (11.189) будет иметь четыре корня: $\pm\sqrt{t_1}$, $\pm\sqrt{t_2}$, а во втором не будет иметь корней. Поэтому уравнение (11.189) имеет ровно два корня тогда и только тогда, когда уравнение (11.190) имеет ровно один положительный корень, что, в свою очередь, означает, что его дискриминант равен 0 (т.е. корень один) и $A > 0$ (в силу теоремы Виета корни уравнения (11.190) имеют такие же знаки, что и A):

$$\left\{\begin{array}{l} D = 0, \\ A > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A^2 - 64 = 0, \\ A > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow A = 8$$

В терминах основной переменной a равенство $A = 8$ означает, что $12a^2 + 20a = 8$. Решая это квадратное уравнение, мы получим, что $a = \frac{1}{3}; -2$.

Ответ: $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = -2$. $\square$

Решение задачи 2038. Первое уравнение системы можно переписать в виде:

$$(x-y)(x+y) + a(x+y) = x - y + a \Leftrightarrow (x+y)(x-y+a) = x + y - a,$$

так что оно распадается на два уравнения: $x + y = 1$ и $x - y + a = 0$. Соответственно, вся система распадётся на две системы:

$$\begin{array}{cc} \left\{\begin{array}{l} x + y = 1, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} x - y + a = 0, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{array}\right. \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ \left\{\begin{array}{l} y = 1 - x, \\ (b-2)(x^2 - x) = 0 \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} y = x + a, \\ (b+2)x^2 + a(b+2)x + a^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \end{array}$$

Множество решений исходной системы является объединением множеств решений этих систем. Число решений каждой из них совпадает с числом решений второго уравнения соответствующей системы.

Если $b \neq \pm 2$, то вторые уравнения этих систем являются квадратными и поэтому имеют не более двух корней каждое. Соответственно, исходная система имеет не более четырех решений.

Если $b = 2$, то второе уравнение первой системы сводится к линейному уравнению $0 \cdot x = 0$, так что оно имеет бесконечно много корней. Значит, если $b = 2$, то вне зависимости от значения a исходная система имеет бесконечно много решений.

Если же $b = -2$, то второе уравнение первой системы имеет два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, а второе уравнение второй системы является линейным уравнением вида $0 \cdot x = 1 - a^2$. Если $a^2 \neq 1$, то оно не имеет корней, а если $a^2 = 1$, то оно имеет бесконечно много корней. Значит, если $b = -2$ и $a^2 = 1$, то исходная система имеет бесконечно много решений, а если $b = -2$ и $a^2 \neq 1$, то исходная система имеет ровно два решения: $(0; 1)$ и $(1; 0)$.

Следовательно, исходная система имеет не менее пяти решений тогда и только тогда, когда пара $(a; b)$ принимает одно из значений $(1; -2)$, $(-1; -2)$, $(t; 2)$, где t – произвольное действительное число (в этих случаях число решений не просто больше четырёх, а бесконечно).

Ответ: $(1; -2)$, $(-1; -2)$, $(t; 2)$, где t – произвольное действительное число. □

Решение задачи 2039. Найдём множество пар $(a; b)$, для которых наша система не имеет решений.

Исключая y из первого уравнения, мы получим уравнение

$$(2b^2 + b - 6)x = 2abz^2 + 4z + 4. \tag{11.191}$$

Исходная система не имеет решений тогда и только тогда, когда это уравнение не имеет решений.

Уравнение (11.191) является линейным относительно x. Следовательно, если $2b^2 + b - 6 \neq 0$, то уравнение (11.191) имеет бесконечно много решений вида

$$\begin{cases} x = \frac{2abt^2+4t+4}{2b^2+b-6}, \\ z = t, \end{cases}$$

где $t \in R$.

Если $2b^2 + b - 6 = 0$ и $2abz^2 + 4z + 4 = 0$ для некоторого $z = z_0$, то уравнение (11.191) имеет бесконечно много решений вида

$$\begin{cases} x = t, \\ z = z_0, \end{cases}$$

где $t \in R$.

Если же $2b^2 + b - 6 = 0$, т.е. $b = -2$ или $b = \frac{3}{2}$, и $2abz^2 + 4z + 4 \neq 0$ для всех z, т.е. уравнение (относительно z)

$$2abz^2 + 4z + 4 = 0 \tag{11.192}$$

не имеет корней, то уравнение (11.191) не имеет решений.

Если уравнение (11.192) не имеет корней, то, в частности, при $z = -1$ мы получим, что $ab \neq 0$ и потому уравнение (11.192) является квадратным.

В этом случае оно не имеет корней тогда и только тогда, когда его дискриминант отрицателен, т.е. $16-32ab<0$. Для $b=-2$ это условие превратится в неравенство $a<-\frac{1}{4}$, а для $b=\frac{3}{2}$ – в неравенство $a>\frac{1}{3}$.

Итак, уравнение (11.191) не имеет решений тогда и только тогда, когда выполнены условия: $b=-2$, $a<-\frac{1}{4}$ или $b=\frac{3}{2}$, $a>\frac{1}{3}$. Поэтому множество пар $(a;b)$, для которых исходная система имеет хотя бы одно решение, заполняет всю координатную плоскость, за исключением двух горизонтальных лучей $\{(a;-2)|a<-\frac{1}{4}\}$ и $\left\{\left(a;\frac{3}{2}\right)\big|a>\frac{1}{3}\right\}$.

Требование задачи означает, что вертикальная прямая, проходящая через точку a на оси абсцисс, не пересекает эти лучи. Ясно, что этому требованию удовлетворяют $a\in\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right]$ и только они.

Ответ: $-\frac{1}{4}\le a\le\frac{1}{3}$. □

Решение задачи 2041. Вычтем из второго уравнения исходной системы первое и сохраним первое уравнение:

$$\left\{\begin{array}{l}9x^2-6xy+y^2+6x-13y+3=0,\\ 4x^2+12xy+9y^2+10x+15y-4ax-6ay+a^2-2a=0\end{array}\right.$$
$$\Updownarrow$$
$$\left\{\begin{array}{l}(3x-y)^2+6x-13y+3=0,\\ (2x+3y)^2+5(2x+3y)-2a(2x+y)+a^2-2a=0\end{array}\right.$$

Введём новые неизвестные $u=2x+3y$, $v=3x-y$. Через них можно выразить основные неизвестные: $x=\frac{u+3v}{11}$, $y=\frac{3u-2v}{11}$, так что для новых неизвестных мы имеем систему

$$\left\{\begin{array}{l}v^2+4v-(3u-3)=0,\\ u^2+(5-2a)u+a^2-2a=0\end{array}\right. \tag{11.193}$$

Поскольку между парами $(x;y)$ и $(u;v)$ имеется взаимно однозначное соответствие, нам нужно найти значения параметра a, при которых последняя система имеет хотя бы одно решение.

Рассмотрим первое уравнение этой системы как квадратное относительно v. При фиксированном значении неизвестной u это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен:

$$D\ge 0\Leftrightarrow 4+3u-3\ge 0\Leftrightarrow u\ge -\frac{1}{3}.$$

Поскольку второе уравнение системы (11.193) содержит только неизвестную u, система (11.193) имеет решение тогда и только тогда, когда второе уравнение имеет хотя бы один корень, больший или равный $-\frac{1}{3}$. Это условие, в свою очередь, сведется к двум неравенствам:

1. $D\ge 0\Leftrightarrow 25-12a\ge 0$ (тогда уравнение имеет два корня $u_-\le u_+$);
2. $u_+\ge -\frac{1}{3}$ (если $u_-\ge -\frac{1}{3}$, то, тем более, $u_+\ge -\frac{1}{3}$).

Неравенство $u_+\ge -\frac{1}{3}$ автоматически предполагает, что $D\ge 0$, так что наша задача сведется к решению неравенства

$$u_+\ge -\frac{1}{3}\Leftrightarrow \frac{2a-5+\sqrt{25-12a}}{2}\ge -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}-\sqrt{2} \le a \le \frac{2}{3}+\sqrt{2}$. $\square$

Решение задачи 2050. Как обычно в случае подобных показательных задач, введём новые неизвестные $u = 2^x$, $v = 2^y$ и, кроме того, обозначим для сокращения записей выражение $\frac{108\alpha-161}{2\alpha-3}$ через a. Теперь наша задача может быть переформулирована следующим образом:

Найти все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} u^2 - uv \le a, \\ 5uv - 9v^2 \ge 54 \end{cases} \tag{11.194}$$

имеет хотя бы одно решение (u, v) такое, что $u > 0$, $v > 0$.

Второе неравенство системы (11.194) как неравенство относительно одной неизвестной u является линейным. Поэтому при фиксированном значении $v > 0$ множество его решений – это луч $u \ge u_0$, где $u_0 = \frac{9v^2+54}{5v} = \frac{9}{5}v + \frac{54}{5v}$. Число u_0, очевидно, является положительным.

Первое неравенство системы (11.194) как неравенство относительно одной неизвестной u является квадратичным. При фиксированном значении $v > 0$ и фиксированном значении параметра a оно имеет решения тогда и только тогда, когда его дискриминант D неотрицателен. При этом множество его решений – это отрезок $u_- \le u \le u_+$, где $u_\pm = \frac{v\pm\sqrt{D}}{2}$ – корни соответствующего квадратного уравнения. Середина этого отрезка равна $\frac{u_1+u_2}{2} = \frac{v}{2}$ и, поскольку $v > 0$, число $u_0 = \frac{9}{5}v + \frac{54}{5v}$ находится правее этой середины. Поэтому (при фиксированном значении $v > 0$ и фиксированном значении параметра a) система неравенств (11.194) имеет непустое множество решений тогда и только тогда, когда значение функции $f(u) = u^2 - uv - a$ в точке u_0 меньше или равно 0:

$$\left(\frac{9v^2+54}{5v}\right)^2 - v\frac{9v^2+54}{5v} - a \le 0. \tag{11.195}$$

В этом случае само это множество является отрезком $[u_0, u_+]$. Поскольку концы этого отрезка – положительные числа, система (11.194) имеет положительное решение (u, v) тогда и только тогда, когда неравенство (11.195) имеет положительное решение v.

Это неравенство легко преобразуется к виду

$$36t^2 + (13 \cdot 54 - 25a)t + 54^2 \le 0, \tag{11.196}$$

где $t = v^2$.

Теперь исходную задачу можно переформулировать следующим образом:

найти все значения параметра a, при которых квадратичное неравенство (11.196) имеет хотя бы одно положительное решение t.

Неравенство (11.196) имеет решения тогда и только тогда, когда его дискриминант D неотрицателен:

$$(13 \cdot 54 - 25a)^2 - 4 \cdot 36 \cdot 54^2 \ge 0 \Leftrightarrow a \ge 54 \text{ или } a \le \frac{54}{25}. \tag{11.197}$$

При этом условии множество решений неравенства (11.196) – это отрезок $t_- \le t \le t_+$ (возможно, вырождающийся в точку), где $t_\pm$ – корни соответствующего квадратного уравнения. По теореме Виета, $t_-t_+ = \frac{54^2}{36}$. Поэтому оба корня имеют один знак. Если они отрицательны, то, очевидно, положительных решений у неравенства (11.196) нет. Если они оба положительны, то неравенство (11.196) имеет положительные решения. Поскольку $t_- + t_+ = \frac{25a-13\cdot 54}{36}$, этот случай равносилен тому, что

$$\frac{25a - 13\cdot 54}{36} > 0 \Leftrightarrow a > \frac{13\cdot 54}{25}.$$

С учетом условия (11.197) мы получим ответ исходной задачи в терминах параметра a: $a \ge 54$. Для основного параметра α это равносильно тому, что

$$\frac{108\alpha - 161}{2\alpha - 3} \ge 54 \Leftrightarrow \frac{1}{2\alpha - 3} \ge 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 3 > 0 \Leftrightarrow \alpha > \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\alpha > \frac{3}{2}$. □

Решение задачи 2057. Вопрос задачи можно сформулировать следующим образом: *найти все значения a, при которых отрезок* $[1;2]$ *является подмножеством множества решений неравенства*

$$\frac{x - 2a - 1}{x - a} < 0. \qquad (11.198)$$

Поскольку множество решений неравенства (11.198) совпадает с множеством решений квадратичного неравенства

$$f(x) \equiv (x - 2a - 1)(x - a) < 0, \qquad (11.199)$$

задача примет вид: *найти все значения a, при которых отрезок* $[1;2]$ *является подмножеством множества решений неравенства* (11.199).

Из графика функции $y = (x-2a-1)(x-a)$ ясно, что это, в свою очередь, равносильно тому, что одновременно выполнены два неравенства: $f(1) < 0$, $f(2) < 0$ (см. рис.11.31).

Поскольку $f(1) = 2a(a-1)$, $f(2) = (2a-1)(a-2)$, задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} 2a(a-1) < 0, \\ (2a-1)(a-2) < 0. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{1}{2} < a < 1$. □

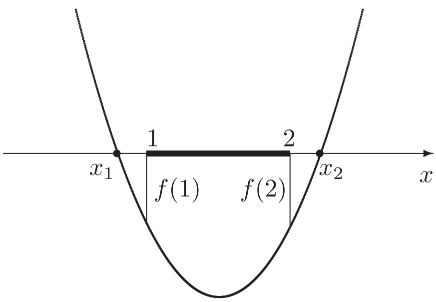
Решение задачи 2062. По смыслу задачи переменная x играет роль параметра, а b – неизвестной. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы будем использовать новые обозначения: t – вместо b, a – вместо x.

Теперь наша задача примет вид:

найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\sqrt{a^2 + 2a + t} > a^2 t + (2a - 1)(1 - t) - 2 \qquad (11.200)$$

Рис. 11.31:



выполняется для всех t из отрезка $[-2; 0]$.

Под знаком радикала в неравенстве (11.200) стоит линейное выражение относительно неизвестной t. Поэтому от радикала можно избавиться, обозначив его новой буквой: $u = \sqrt{a^2 + 2a + t}$ (тогда $t = u^2 - a^2 - 2a$). Между значениями переменной t из отрезка $[-2; 0]$ и значениями переменной u из отрезка $[\sqrt{a^2 + 2a - 2}; \sqrt{a^2 + 2a}]$ имеется взаимно однозначное соответствие. Поэтому теперь наша задача примет вид (мы немного изменили её формулировку, перейдя на язык множеств):

найти все значения параметра a, при которых множество решений неравенства

$$(a-1)^2u^2 - u - (a^4 - 3a^2 + 3) < 0 \tag{11.201}$$

содержит отрезок $[\sqrt{a^2 + 2a - 2}; \sqrt{a^2 + 2a}]$.

Неравенство (11.201) является линейным или квадратным в зависимости от того, $a - 1$ равно 0 или отлично от 0. Поэтому мы отдельно рассмотрим эти случаи.

Если $a = 1$, то неравенство (11.201) примет вид: $-u - 1 < 0$. Множество решений этого неравенства – промежуток $(-1; +\infty)$.

Отрезок $[\sqrt{a^2 + 2a - 2}; \sqrt{a^2 + 2a}]$ превратится в отрезок $[1; \sqrt{3}]$. Поскольку он является подмножеством промежутка $(-1; +\infty)$, рассматриваемое значение параметра a включается в ответ.

Если $a \neq 1$, то неравенство (11.201) – квадратное с положительным старшим коэффициентом. Множество его решений содержит отрезок тогда и только тогда, когда в граничных точках отрезка левая часть неравенства отрицательна:

$$\begin{cases} (a-1)^2(\sqrt{a^2 + 2a - 2})^2 - \sqrt{a^2 + 2a - 2} - (a^4 - 3a^2 + 3) < 0, \\ (a-1)^2(\sqrt{a^2 + 2a})^2 - \sqrt{a^2 + 2a} - (a^4 - 3a^2 + 3) < 0. \end{cases}$$

Мы должны установить, при каких значениях a выполнены эти неравенства, т.е. просто решить эту систему.

После раскрытия скобок и приведения подобных мы получим систему:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+2a-2} > -2a^2+6a-5, \\ \sqrt{a^2+2a} > 2a-3. \end{cases} \tag{11.202}$$

Квадратный трёхчлен в правой части первого неравенства отрицателен при всех значениях a (т.к. его дискриминант отрицателен). Поэтому это неравенство выполнено всюду, где определено. Иначе говоря, оно равносильно неравенству

$$a^2+2a-2 \geq 0 \Leftrightarrow a \leq -1-\sqrt{3} \text{ или } a \geq -1+\sqrt{3}$$

Второе неравенство системы (11.202) является стандартным иррациональным неравенством; оно распадается на две системы:

$$\begin{array}{cc} \begin{cases} 2a-3 \geq 0, \\ a^2+2a > (2a-3)^2 \end{cases} & \begin{cases} 2a-3 < 0, \\ a^2+2a \geq 0 \end{cases} \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ \frac{3}{2} \leq a < \frac{7+\sqrt{22}}{3} & a \leq -2,\ 0 < a < \frac{3}{2} \end{array}$$

Объединяя множества решений первой и второй систем этой совокупности, мы получим два промежутка: $(-\infty; -2]$ и $\left[0; \frac{7+\sqrt{22}}{3}\right)$ – это и будет множество решений второго неравенства системы (11.202) .

Пересечение множеств решений первого и второго неравенств системы (11.202) состоит из двух промежутков: $(-\infty; -1-\sqrt{3}]$ и $\left[-1+\sqrt{3}; \frac{7+\sqrt{22}}{3}\right)$. Из этого множества нужно выколоть точку $a = 1$ (мы рассматриваем случай $a \neq 1$), но для получения окончательного ответа исходной задачи её нужно опять включить.

Ответ: $(-\infty; -1-\sqrt{3}] \cup \left[-1+\sqrt{3}; \frac{7+\sqrt{22}}{3}\right)$.□

Решение задачи 2074. Наше уравнение инвариантно (неизменно) при замене x на $-x$. Действительно, если мы заменим x на $-x$, то получим уравнение,

$$\left|\frac{(-x)\left(2^{-x}-1\right)}{2^{-x}+1} + 2a\right| = a^2+1,$$

которое после умножения числителя и знаменателя дроби в левой части на 2^x превращается в исходное:

$$\left|-\frac{x\left(1-2^x\right)}{1+2^x} + 2a\right| = a^2+1 \Leftrightarrow \left|\frac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1} + 2a\right| = a^2+1$$

Поэтому, если число x_0 является корнем исходного уравнения, то число $-x_0$ также будет его корнем. Вследствие этого, количество корней может быть нечётным только в случае, когда среди корней находится число $x_0 = 0$.

Иначе говоря, если некоторое значение a удовлетворяет условию исходной задачи, то оно удовлетворяет и условию следующей простой задачи:

Найти все значения параметра a, при которых число $x = 0$ является корнем уравнения

$$\left|\frac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1}+2a\right|=a^2+1.$$

Задачи такого рода собраны в разделе 9.3, так что дальнейшее решение нашей задачи будет похоже на решение задач 1991 и 1994.

Для того, чтобы найти, при каких a число $x = 0$ будет корнем исходного уравнения, подставим в это уравнение вместо неизвестной x число 0. Получающееся простое уравнение относительно a легко решается:

$$|2a| = a^2 + 1 \Leftrightarrow (|a| - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow |a| = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

Таким образом, только для $a = 1$ или $a = -1$ исходное уравнение может иметь нечётное число корней.

Итак, для завершения решения задачи достаточно выяснить, конечно или нет число корней исходного уравнения для двух "подозрительных" значений параметра, $a = 1$ и $a = -1$.

Если $a = 1$, то исходное уравнение примет вид:

$$\left|\frac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1}+2\right|=2.$$

Оно распадается на два уравнения:

$$\tfrac{x(2^x-1)}{2^x+1} = 0 \qquad \tfrac{x(2^x-1)}{2^x+1} = -4$$

Первое уравнение, очевидно, имеет единственный корень $x = 0$.

Второе уравнение решим графически. Для этого разрешим его относительно 2^x (при этом необходимо проверить, что $x = -4$ не является его решением):

$$2^x = \frac{x-4}{x+4}.$$

Левая часть – стандартная показательная функция $y = 2^x$. Её график монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ и проходит через точку $(0; 1)$. Правая часть – дробно-линейная функция. Её график – гипербола, проходящая через точку $(0; -1)$, с вертикальной асимптотой $x = -4$ и горизонтальной асимптотой $y = 1$. Эта гипербола возрастает на промежутках $(-\infty; -4)$ и $(-4; +\infty)$. Изобразив эти графики на рисунке (мы оставляем это читателю), легко видеть, что они не пересекаются, так что второе уравнение не имеет корней.

Итак, в случае $a = 1$ исходное уравнение имеет ровно 1 корень.

Если $a = -1$, то исходное уравнение примет вид:

$$\left|\frac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1}-2\right|=2.$$

Оно также распадается на два уравнения:

$$\tfrac{x(2^x-1)}{2^x+1} = 0 \qquad \tfrac{x(2^x-1)}{2^x+1} = 4$$

Первое уравнение такое же, как и первое уравнение в случае $a = 1$; оно имеет единственный корень $x = 0$.

Второе уравнение, как и в случае $a = 1$, решим графически. Для этого разрешим его относительно 2^x (при этом необходимо проверить, что $x = 4$ не является его решением):

$$2^x = \frac{x+4}{x-4}.$$

Левая часть – стандартная показательная функция $y = 2^x$. Её график монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ и проходит через точку $(0; 1)$. Правая часть – дробно-линейная функция. Её график – гипербола, проходящая через точку $(0; -1)$, с вертикальной асимптотой $x = 4$ и горизонтальной асимптотой $y = 1$. Эта гипербола убывает на промежутках $(-\infty; 4)$ и $(4; +\infty)$. Изобразив эти графики на рисунке (мы оставляем это читателю), легко видеть, что они пересекаются в двух точках. *Точные* значения корней второго уравнения нам совершенно не важны; впрочем, графики позволяют локализовать эти корни: $-5 < x_1 < -4$, $4 < x_2 < 5$ $(x_1 = -x_2)$.

Итак, в случае $a = -1$ исходное уравнение имеет ровно 3 корня.

Ответ: $a_1 = 1$, $a_2 = -1$. □

11.10 Глава 10

Решение задачи 2085. Область определения функции, заданной формулой – это множество решений системы, составленной из ограничений, накладываемых формулой, которая задает функцию. В нашем случае есть два действия, которые выполнимы не всегда:

извлечение корня – эта операция требует, чтобы подкоренное выражение было неотрицательным: $x^2 - x - 2 \geq 0$;

логарифмирование – эта операция требует, чтобы число, от которого берётся логарифм, было положительным, а основание логарифма было положительно и не равнялось 1: $9 - x^2 > 0$, $3 + x > 0$, $3 + x \neq 1$.

Итак, найти область определения нашей функции – это значит решить систему

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 - x - 2 \geq 0, \\ 9 - x^2 > 0, \\ 3 + x > 0, \\ 3 + x \neq 1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \leq -1 \text{ или } x \geq 2 \\ -3 < x < 3, \\ x > -3, \\ x \neq -2. \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-3; -2) \cup (-2; -1] \cup [2; 3).$$

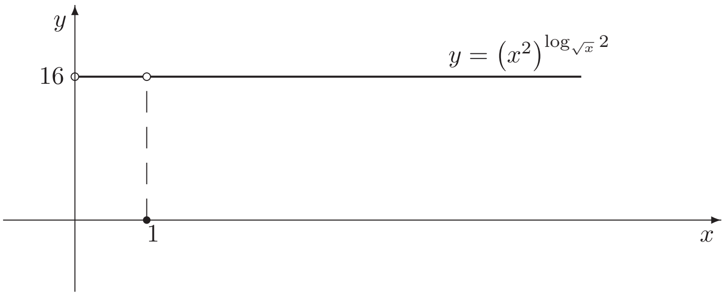
Ответ: $(-3; -2) \cup (-2; -1] \cup [2; 3)$.□

Решение задачи 2097. Функция $y = \left(x^2\right)^{\log_{\sqrt{x}} 2}$ определена тогда и только тогда, когда выполнены условия $x > 0$, $x \neq 1$. На этом множестве формулу, которая задаёт функцию, можно упростить:

$$y = \left(\sqrt{x}^4\right)^{\log_{\sqrt{x}} 2} = \left(\sqrt{x}\right)^{4 \log_{\sqrt{x}} 2} = \left(\sqrt{x}\right)^{\log_{\sqrt{x}} 16} = 16.$$

Поэтому её графиком будет часть горизонтальной прямой $y = 16$, соответствующая значениям $x \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$. Этот график изображён на рис. 11.32. □

Рис. 11.32:



Решение задачи 2108. Введём новую переменную $t = x^2$. Тогда функция $y(x) = 1 + x^2 - x^4$ может рассматриваться как суперпозиция квадратичных функций $y(t) = 1 + t - t^2$ и $t = x^2$, поведение которых легко изучить:

График функции $y = -t^2 + t + 1$ – парабола с ветвями, обращёнными вниз. Её вершина имеет координаты $t_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = \frac{5}{4}$. Поэтому при росте t от $-\infty$ до $\frac{1}{2}$ переменная y растет от $-\infty$ до $\frac{5}{4}$, а затем, при росте t от $\frac{1}{2}$ до $+\infty$ переменная y убывает от $\frac{5}{4}$ до $-\infty$.

График функции $t = x^2$ – стандартная парабола с ветвями, обращёнными вверх. При росте x от $-\infty$ до 0 переменная t убывает от $+\infty$ до 0, а затем, при росте t от 0 до $+\infty$ переменная t возрастает от 0 до $+\infty$.

Эта информация позволяет установить поведение переменной y при изменении переменной x:

Пусть переменная x начинает расти от $-\infty$ до 0. Тогда переменная t убывает от $+\infty$ до 0. Вследствие этого переменная y сначала возрастает от $-\infty$ до $\frac{5}{4}$, а затем начинает убывать до 1.

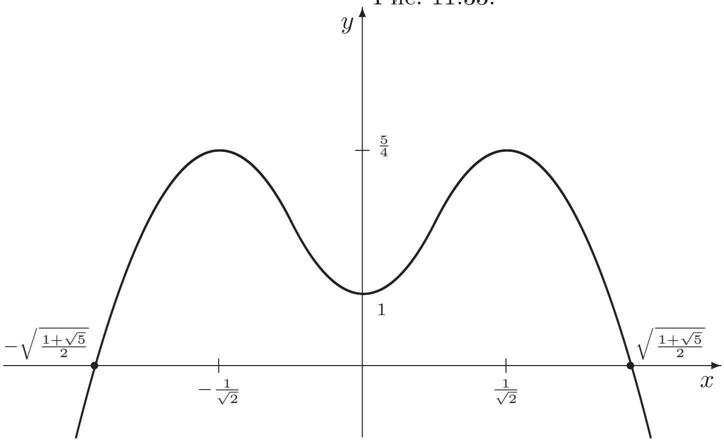
Чтобы определённее описать поведение переменной y, ограничим изменение переменной x точкой $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (при $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ переменная $t = \frac{1}{2}$ – это граница промежутка возрастания $y(t)$). Тогда переменная t убывает от $+\infty$ до $\frac{1}{2}$, а, значит, y возрастает от $-\infty$ до $\frac{5}{4}$.

При дальнейшем росте x от $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ до 0 переменная t убывает от $\frac{1}{2}$ до 0; соответственно, переменная y убывает от $\frac{5}{4}$ до 1.

Проведённое исследование позволяет построить часть графика функции $y = 1 + x^2 - x^4$ в левой полуплоскости $x \leq 0$. График в правой полуплоскости $x \geq 0$ можно построить, продолжив исследование поведения переменной y при росте x, но, если заметить, что функция $y = 1 + x^2 - x^4$ чётная, это можно сделать проще, отобразив уже построенную часть графика симметрично относительно оси Oy.

Примерный вид зависимости $y(x)$ приведён на рис. 11.33 (мы исказили масштабы, чтобы отчетливее показать характерные особенности графика). Точки пересечения графика с осью Ox найдены решением уравнения $-x^4 + x^2 + 1 = 0$; оно имеет два корня $x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. □

Рис. 11.33:



Решение задачи 2117. Точка (x_0, y_0) является центром симметрии графика функции $y = f(x)$, если

- область определения функции, D_f, симметрична относительно точки x_0, т.е. если точка x входит в область определения, то и точка $2x_0 - x$, симметричная x относительно x_0, также входит в область определения: $x \in D_f \Leftrightarrow 2x_0 - x \in D_f$.

- значения функции в точках x и $2x_0 - x$ $(x \in D_f)$ симметричны относительно y_0, т.е. верно равенство $f(x) - y_0 = y_0 - f(2x_0 - x)$. Иначе говоря, выражение
$$\frac{f(x) + f(2x_0 - x)}{2} \tag{11.203}$$
при всех $x \in D_f$ не зависит от x; значение этого выражения – это y_0 (в частности, если $x_0 \in D_f$, то $y_0 = f(x_0)$).

Вернёмся теперь к исходной задаче. Функция
$$f(x) = 4x + \log_2\left(\frac{x^2 + 5x}{x^2 + 3x - 4}\right) \tag{11.204}$$
определена тогда и только тогда, когда выполнено условие
$$\frac{x^2 + 5x}{x^2 + 3x - 4} > 0.$$

Решая это неравенство методом интервалов, мы получим:

$$D_f = (-\infty; -5) \cup (-4; 0) \cup (1; +\infty).$$

Это множество имеет единственный центр симметрии: $x_0 = -2$. Поэтому, если график функции (11.204) имеет центр симметрии (x_0, y_0), то $x_0 = -2$. Поскольку $x_0 \in D_f$, $y_0 = f(x_0) = -8$ и для завершения доказательства достаточно показать, что выражение (11.203) не зависит от x:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) + f(2x_0 - x)}{2} &= \frac{f(x) + f(-4 - x)}{2} \\ = & \quad \frac{4x + \log_2 \frac{x(x+5)}{(x+4)(x-1)} - 16 - 4x + \log_2 \frac{(-4-x)(-x+1)}{(-x)(-x-5)}}{2} \\ = & \quad -8 + \frac{\log_2 \frac{x(x+5)}{(x+4)(x-1)} + \log_2 \frac{(x+4)(x-1)}{x(x+5)}}{2} \equiv -8. \end{aligned}$$

Ответ: координаты центра симметрии: $(-2, -8)$. □

Решение задачи 2118. Функция

$$y(x) = (x + a)(|x + 1 - a| + |x - 3|) - 2x + 4a$$

определена при всех x, так что из структуры области определения нельзя извлечь никакой информации относительно центра симметрии графика (в отличие от решения задачи 2117). Поэтому будем анализировать выражение

$$A = \frac{y(x) + y(2x_0 - x)}{2}. \tag{11.205}$$

Как мы отмечали при решении задачи 2117, график нашей функции имеет центр симметрии (x_0, y_0) тогда и только тогда, когда выражение (11.205) тождественно равно y_0.

В нашем случае,

$$\begin{aligned} A &= \frac{x + a}{2}(|x + 1 - a| + |x - 3|) \\ &- \frac{x - 2x_0 - a}{2}(|x - 2x_0 - 1 + a| + |x - 2x_0 + 3|) - 2x_0 + 4a. \end{aligned}$$

При достаточно больших положительных x все выражения под знаками модулей будут положительными и поэтому выражение A примет вид:

$$A = (a + 4x_0 - 2)x + 4a - ax_0 - 4x_0^2, \ (x \text{ достаточно велико}).$$

Это выражение не зависит от x тогда и только тогда, когда коэффициент при x равен 0. В этом случае свободный член – это y_0:

$$a + 4x_0 - 2 = 0, \quad y_0 = 4a - ax_0 - 4x_0^2.$$

Отсюда можно выразить x_0 и y_0 через a:

$$x_0 = \frac{2 - a}{4}, \quad y_0 = \frac{9a - 2}{2}.$$

Используя эти соотношения, можно превратить равенство $y_0 = y(x_0)$ в уравнение относительно a:

$$\frac{3a+2}{16}\left(|5a-6|+|a+10|\right)=0.$$

Поскольку выражения под знаками модулей в левой части этого уравнения одновременно не обращаются в 0, их сумма положительна. Значит, $a = -\frac{2}{3}$., а тогда $x_0 = \frac{2}{3}$, $y_0 = -4$.

Итак, если при некотором значении параметра a график нашей функции имеет центр симметрии (x_0, y_0), то $a = -\frac{2}{3}$, $x_0 = \frac{2}{3}$, $y_0 = -4$.

Для завершения решения достаточно убедиться, что при этих значениях a, x_0, y_0 выражение (11.205) тождественно равно y_0. Действительно, несложные преобразования дают:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{9}(3x-2)\left(|3x+5|+|3x-9|\right)-2x-\frac{8}{3}, \\ y(2x_0-x) &= -\frac{1}{9}(3x-2)\left(|3x+5|+|3x-9|\right)+2x-\frac{16}{3}, \end{aligned}$$

так что $A \equiv -4$.

Ответ: $a = -\frac{2}{3}$. □

Решение задачи 2119. Прежде всего найдём формулу, которой может быть задана функция $g(x)$. Для этого отметим, что если $(x; g(x))$ – точка графика функции $g(x)$, то точка, симметричная ей относительно точки $(x_0; y_0) = (2; 2)$ имеет координаты

$$\begin{cases} x_1 = 2x_0 - x = 4 - x, \\ y_1 = 2y_0 - g(x) = 4 - g(x). \end{cases}$$

По условию задачи эта точка лежит на графике функции $f(x)$, т.е. её координаты удовлетворяют равенству $y = f(x)$:

$$4-g(x)=f(4-x) \Leftrightarrow g(x)=4-f(4-x)=-2|x-1|+2|x-4|+3x-5.$$

Для упрощения анализа уравнения $f(x-a) = g(x+a)$ введём новую неизвестную $t = x + a$. Поскольку между t и x существует взаимно однозначное соответствие, исходную задачу можно переформулировать следующим образом:

Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$f(t-2a)=g(t) \tag{11.206}$$

имеет бесконечно много решений.

Будем решать это уравнение графически.

Начнём с того, что нарисуем графики функций $f(t)$ и $g(t)$ (это легко сделать стандартным раскрытием модулей).

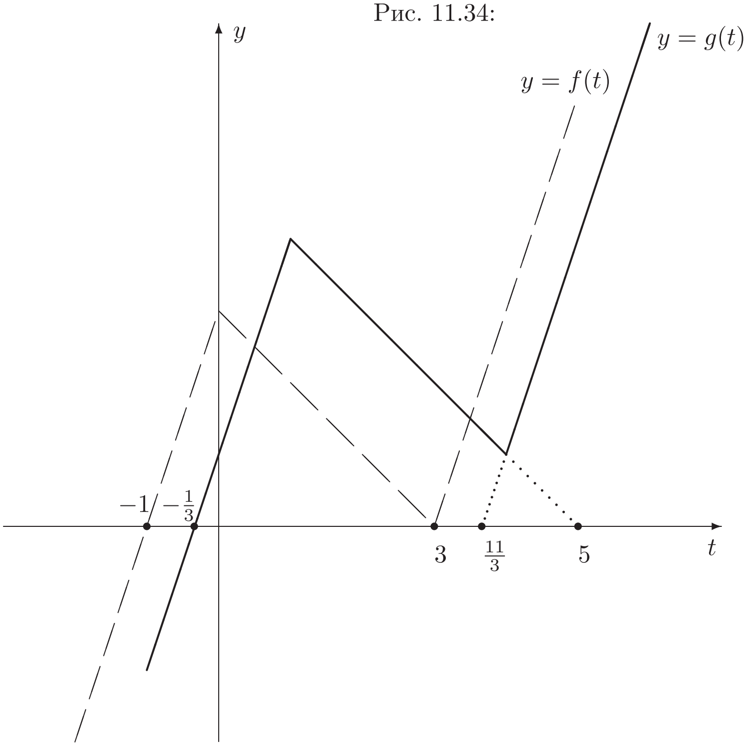
График функции $y = f(t)$ – ломаная из трёх звеньев: $y = 3t + 3$ при $t \le 0$, $y = -t + 3$ при $0 \le t \le 3$, $y = 3t - 9$ при $t \ge 3$. Эти звенья пересекают ось абсцисс в точках $t_1 = -1$, $t_2 = 3$ и $t_3 = 3$ соответственно.

График функции $y = g(t)$ – ломаная из трёх звеньев: $y = 3t + 1$ при $t \leq 1$, $y = -t + 5$ при $1 \leq t \leq 4$, $y = 3t - 11$ при $t \geq 4$. Эти звенья (или их продолжения) пересекают ось абсцисс в точках $t_4 = -\frac{1}{3}$, $t_5 = 5$ и $t_6 = \frac{11}{3}$ соответственно.

Для дальнейшего будет важно, что соответствующие звенья этих ломаных параллельны (на самом деле график функции $g(x)$ может быть получен из графика функции $f(x)$ параллельным переносом на $\frac{2}{3}$ вправо (вдоль оси абсцисс) и 1 вверх (вдоль оси ординат).

На рис.11.34 график функции $y = g(t)$ изображён сплошной линией, а график функции $y = f(t)$ – прерывистой.

Рис. 11.34:



Для $a = 0$ уравнение (11.206) примет вид $f(t) = g(t)$. Из рис. 11.34 ясно, что оно имеет ровно два корня.

При увеличении a от 0 до $+\infty$ график функции $y = f(t - 2a)$ будет получаться из графика функции $y = f(t)$ параллельным переносом на $2a$ единиц вправо (вдоль оси абсцисс). Он пересекается с графиком $y = g(t)$ в бесконечном числе точек когда $2a = t_4 - t_1 = t_6 - t_3 = \frac{2}{3}$ (частично наложатся левые и правые звенья графиков), $2a = t_5 - t_2 = 2$ (частично наложатся средние звенья графиков), и $2a = t_6 - t_1 = \frac{14}{3}$ (частично наложатся левое звено графика $y = f(t)$ и правое звено графика $y = g(t)$).

При уменьшении a от 0 до $-\infty$ график функции $y = f(t-2a)$ будет получаться из графика функции $y = f(t)$ параллельным переносом на $-2a$ единиц влево (вдоль оси абсцисс). Он пересекается с графиком $y = g(t)$ в бесконечном числе точек когда $-2a = t_3 - t_4 = \frac{10}{3}$ (частично наложатся правое звено графика $y = f(t)$ и левое звено графика $y = g(t)$).

Ответ: $-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{7}{3}$. □

Решение задачи 2121. Операция выделения полного квадрата из квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$:

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right),$$

означает, что произвольный многочлен 2-й степени можно получить из стандартной квадратичной функции $y = x^2$ с помощью

1. замены переменной x на $x + \frac{b}{2a}$;
2. вычитания константы $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$;
3. умножения на константу a.

Поэтому, если бы нам удалось представить функцию $y = x^2$ в виде разности двух многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$, возрастающих на всей числовой оси, то для произвольного квадратного трёхчлена ax^2+bx+c было бы выполнено равенство

$$ax^2 + bx + c = Q_1(x) - Q_2(x), \tag{11.207}$$

где

$$Q_1(x) = aP_1\left(x + \frac{b}{2a}\right), \quad Q_2(x) = a\left(P_2\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).$$

Функции $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$, очевидно, будут многочленами и их степени равны степеням многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ соответственно.

Если $a > 0$, то функции $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ будут возрастающими, так что равенство (11.207) даёт требуемое представление.

Если $a < 0$, то функции $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ будут убывающими, а функции $-Q_1(x)$ и $-Q_2(x)$ возрастающими. Тогда равенство (11.207) нужно заменить равенством

$$ax^2 + bx + c = (-Q_2(x)) - (-Q_1(x)).$$

Итак, достаточно показать, что функцию $y = x^2$ можно представить в виде разности двух многочленов, возрастающих на всей числовой оси.

Простейшим многочленом, возрастающим на всей числовой оси, является функция $y = x^3$. Ясно, что все функции вида $y = (x \pm a)^3$ также будут возрастающими (они получаются из $y = x^3$ сдвигом вдоль оси Ox).

Рассмотрим разность $(x+1)^3 - (x-1)^3$. Она равна $6x^2 + 2$. Поэтому

$$x^2 = \frac{1}{6}(x+1)^3 - \frac{1}{6}\left((x-1)^3 + 2\right)$$

будет искомым представлением. □

Решение задачи 2123. Прежде всего найдём область определения функции, D_y. Она совпадает с множеством решений неравенства

$$2x - x^2 + 4 \geq 0.$$

Соответствующее квадратное уравнение $-x^2 + 2x + 4 = 0$ имеет два корня $x_1 = 1 - \sqrt{5}$, $x_2 = 1 + \sqrt{5}$, так что $D_y = [1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}]$.

На этом отрезке поведение данной функции повторяет поведение подкоренного выражения, т.е. квадратичной функции $f(x) = -x^2 + 2x + 4$, которая при изменении независимой переменной x от x_1 до $x_0 = 1$ (это первая координата вершины параболы $f(x) = -x^2 + 2x + 4$; она может быть найдена как среднее арифметическое корней x_1 и x_2) возрастает от значения $f(x_1) = 0$ до значения $f(x_0) = 5$, а затем, при изменении x от x_0 до x_2, убывает от значения $f(x_0) = 5$ до значения $f(x_2) = 0$.

Соответственно исходная функция при изменении независимой переменной x от x_1 до $x_0 = 1$ сначала возрастает от 0 до значения $\sqrt{5}$, а затем, при изменении x от x_0 до x_2, убывает от $\sqrt{5}$ до 0. Таким образом, наша функция принимает все значения из отрезка $[0; \sqrt{5}]$ и только их.

Ответ: $[0; \sqrt{5}]$. □

Решение задачи 2130. Зафиксируем значение y и рассмотрим выражение $A = 4^{x-2y-1} - 4y + 4x - 4$ как функцию одной переменной x. Эта функция является возрастающей как сумма возрастающих функций $f(x) = 4^{x-2y-1}$ и $g(x) = 4x - 4y - 4$. Поэтому при изменении x на отрезке $[3; 4]$ значения переменной A заполняют отрезок $\left[4^{2-2y} - 4y + 8; 4^{3-2y} - 4y + 12\right]$.

В частности, когда $y = 1$, область значений переменной A (как функции x) – это отрезок $[5; 12]$. Пусть теперь переменная y начинает возрастать до значения $y = 2$. Поскольку функции $4^{2-2y} - 4y + 8$ и $4^{3-2y} - 4y + 12$ убывают (как суммы убывающих функций 4^{2-2y}, $-4y + 8$ и 4^{3-2y}, $-4y + 12$ соответственно), область значений переменной A (как функции x) начнет непрерывно смещаться влево, пока не превратится в отрезок $\left[\frac{1}{16}; \frac{17}{4}\right]$. Поэтому все возможные значения переменной A заполнят отрезок $\left[\frac{1}{16}; 12\right]$.

Ответ: $\frac{1}{16} \leq A \leq 12$. □

Решение задачи 2132. *1 способ.* По определению, область значений функции $y = f(x)$ – это множество чисел y таких, что существует хотя бы одно значение x из области определения функции, для которого верно равенство $y = f(x)$.

Это определение можно переформулировать следующим образом: область определения функции $y = f(x)$ – это множество значений параметра y, для которых уравнение $f(x) = y$ имеет решение.

В нашем случае это уравнение примет вид:

$$\frac{x}{1 + x^2} = y \Leftrightarrow yx^2 - x + y = 0. \tag{11.208}$$

Если $y = 0$, то уравнение (11.208) – линейное. Оно имеет единственный корень $x_1 = 0$. Таким образом, $y = 0$ входит в область значений нашей функции.

Если $y \neq 0$, то уравнение (11.208) – квадратное. Оно имеет корень тогда и только тогда, когда $D \equiv 1 - 4y^2 \geq 0$, т.е. при условии $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$. Из этого отрезка мы должны выколоть точку $y = 0$ (т.к. мы рассматриваем случай $y \neq 0$).

Объединяя множества $\{0\}$ и $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$, мы получим ответ.

2 способ. С помощью тригонометрической подстановки $x = \operatorname{tg} t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ (что равносильно введению новой неизвестной $t = \operatorname{arctg} x$) функция $y = \frac{x}{x^2+1}$ превратится в функцию $y = \frac{1}{2}\sin 2t$ – теперь нужно находить её область значений при изменении переменной t на интервале $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Из графика этой функции ясно, что искомая область значений – это отрезок $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.□

Решение задачи 2135. *1 способ.* Неравенство

$$|2x + 4 - 2a| + |x - 2 + a| \leq 3$$

равносильно системе

$$\begin{cases} a \geq 3x - 1, \\ a \leq 3x + 5, \\ a \leq \frac{1}{3}x + 3, \\ a \geq \frac{1}{3}x + 1. \end{cases}$$

На координатной плоскости $(x; a)$ эта система задает параллелограмм $ABCD$ (с внутренностью и границей). Вершины этого параллелограмма имеют координаты: $A\left(-\frac{3}{4}; \frac{11}{4}\right)$, $B\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$, $C\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$, $D\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Функцию $f(x, a) = x + a$, область значений которой мы должны найти, будем интерпретировать геометрически не с помощью графика (он является поверхностью в трехмерном пространстве; в нашем случае – плоскостью), а с помощью понятия линии уровня.

Линия данного уровня C для функции $z = f(x; y)$ – это множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $f(x; y) = C$.

В нашем случае линия уровня C – это прямая $a = C - x$. При $C = 0$ прямая $a = -x$, очевидно пересекается с параллелограммом $ABCD$. Поэтому число 0 входит в искомую область значений.

По мере увеличения параметра C прямая $a = C - x$ будет смещаться вверх. Она будет пересекаться с параллелограммом $ABCD$ до тех пор, пока на неё не попадет точка $B\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$, что равносильно равенству $\frac{7}{2} = C - \frac{3}{2}$, откуда $C = 5$. Таким образом, из положительных чисел в искомую область значений входят числа $C \leq 5$ и только они.

При уменьшении параметра C прямая $a = C - x$ будет смещаться вниз. Она будет пересекаться с параллелограммом $ABCD$ до тех пор, пока на неё не попадет точка $D\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$, что равносильно равенству $\frac{1}{2} = C + \frac{3}{2}$, откуда $C = -1$. Таким образом, из отрицательных чисел в искомую область значений входят числа $C \geq -1$ и только они.

2 способ. Введём новую переменную (вместо a) $y = x + a$. Тогда $a = y - x$ и наша задача примет вид:

найдите значения переменной y *при условии, что справедливо неравенство* $|4x-2y+4|+|y-2|\le 3$.

Фраза "справедливо неравенство ..." в данном контексте означает "неравенство ... имеет решение". Поэтому исходную задачу можно переформулировать в виде:

найдите значения переменной y*, при которых неравенство* $|4x-2y+4|+|y-2|\le 3$ *имеет решения.*

Последнее неравенство можно записать как

$$|4x-2y+4|\le 3-|y-2|. \tag{11.209}$$

Поскольку функция $t=4x-2y+4$ линейна по x, существование x, удовлетворяющего неравенству (11.209) равносильно существованию t, удовлетворяющего неравенству

$$|t|\le 3-|y-2|.$$

Область значений левой части неравенства – множество $[0;+\infty)$. Поэтому такое t существует тогда и только тогда, когда правая часть неравенства неотрицательна:

$$3-|y-2|\ge 0 \Leftrightarrow |y-2|\le 3 \Leftrightarrow -1\le y\le 5.$$

Ответ: $[-1;5]$. □

Решение задачи 2141.

По определению, число y принадлежит области значений функции f, если $y=f(x)$ для некоторого x из области определения D_f этой функции. Иначе говоря, область определения функции f образована всевозможными числами $f(x)$, когда x пробегает всю область определения функции. Условие задачи требует, чтобы все числа $f(x)$, $x\in D_f$, лежали внутри интервала $(-1;2)$, т.е. удовлетворяли двойному неравенству $-1<f(x)<2$. Поэтому нашу задачу можно переформулировать следующим образом:

Найти все действительные значения c*, для которых неравенство*

$$-1<\frac{x^2+cx-1}{2x^2-3x+2}<2$$

выполнено при всех $x\in D_f$.

Для дальнейшего отметим, что квадратный трёхчлен $2x^2-3x+2$ в знаменателе дроби положителен при всех x (т.к. его дискриминант отрицателен, а старший коэффициент положителен) и, в частности, функция $f(x)=\frac{x^2+cx-1}{2x^2-3x+2}$ определена при всех x. Это позволяет переформулировать задачу ещё раз:

Найти все действительные значения c*, для которых множеством решений двойного неравенства*

$$-(2x^2-3x+2)<x^2+cx-1<2(2x^2-3x+2)$$

или, что то же самое, системы

$$\begin{cases} 3x^2+(c-3)x+1>0\\ 3x^2-(c+6)x+5>0\end{cases}$$

является вся числовая прямая.

Последняя система имеет множеством решений R тогда и только тогда, когда оба составляющих систему квадратичных неравенства имеют множеством решений R. Это требование равносильно тому, что дискриминанты этих неравенств отрицательны:

$$\left\{\begin{array}{l}(c-3)^2-12<0\\(c+6)^2-60<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}|c-3|<2\sqrt{3}\\|c+6|<2\sqrt{15}\end{array}\right. \Leftrightarrow 3-2\sqrt{3}<c<-6+2\sqrt{15}$$

Ответ: $3-2\sqrt{3}<c<-6+2\sqrt{15}$.□

Решение задачи 2144. Графиком функции $y = 2x^2 - 3x$ является парабола с вершиной в точке с координатами $x_0 = \frac{3}{4}$, $y_0 = -\frac{9}{8}$. Значения функции в граничных точках отрезка $[-1;3]$ равны $y(-1) = 5$ и $y(3) = 9$ соответственно. Из графика функции $y = 2x^2 - 3x$ видно, что наименьшее значение $y(x)$ достигается при $x = \frac{3}{4}$, а наибольшее – при $x = 3$.

Ответ: $y_{\max} = 9$, это значение достигается при $x = 3$; $y_{\min} = -\frac{9}{8}$, это значение достигается при $x = \frac{3}{4}$. □

Решение задачи 2145. Умножим и разделим формулу, которая задает нашу функцию, на $\sqrt{3x^2+5}+\sqrt{3x^2}$ (это выражение, очевидно, никогда не обращается в нуль):

$$y = \frac{5}{\sqrt{3x^2+5}+\sqrt{3x^2}}.$$

Поведение функции $f(x) = \sqrt{3x^2+5}$ повторяет поведение подкоренного выражения, которое при изменении независимой переменной x от $-\infty$ до 0 сначала убывает от $+\infty$ до значения 5, а затем, при изменении x от 0 до $+\infty$, возрастает от 5 до $+\infty$. Таким, образом, $f(x)$ при изменении x от $-\infty$ до 0 сначала убывает от $+\infty$ до значения $\sqrt{5}$, а затем, при изменении x от 0 до $+\infty$, возрастает от $\sqrt{5}$ до $+\infty$.

Аналогичные рассуждения показывают, что функция $g(x) = \sqrt{3x^2}$ при изменении x от $-\infty$ до 0 сначала убывает от $+\infty$ до значения 0, а затем, при изменении x от 0 до $+\infty$, возрастает от 0 до $+\infty$ (этот вывод можно получить и проще, если заметить, что $g(x) = \sqrt{3}|x|$).

Поскольку функции $f(x)$ и $g(x)$ убывают и возрастают на *одних и тех же* промежутках, на тех же самых промежутках убывает/возрастает и их сумма: при изменении x от $-\infty$ до 0 функция $f(x)+g(x)$ сначала убывает от $+\infty$ до значения $\sqrt{5}$, а затем, при изменении x от 0 до $+\infty$, возрастает от $\sqrt{5}$ до $+\infty$.

Исходная функция является дробью с постоянным положительным числителем и знаменателем $f(x)+g(x)$. Поэтому её поведение противоположно: при изменении x от $-\infty$ до 0 исходная функция сначала возрастает от 0 до значения $\sqrt{5}$, а затем, при изменении x от 0 до $+\infty$, убывает от $\sqrt{5}$ до 0. Отсюда немедленно следует ответ.

Ответ: $y_{\min} = 4\sqrt{2}-3\sqrt{3}$; это значение достигается при $x = 3$. □

Решение задачи 2155. Поскольку $(r-2)(r-3) = r^2-5r+6$, $(r-1)(r-4) = r^2-5r+4$, функцию $F(r)$ можно записать в виде

$$F(r) = (r^2-5r+6)\cdot(r^2-5r+8) = t(t+2),$$

где $t = r^2 - 5r + 6$.

При изменении r от $-\infty$ до $+\infty$ значения переменной t заполняют промежуток $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. Поэтому наименьшее значение функции $F(r)$ совпадает с наименьшим значением функции $f(t) = t(t+2)$ на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Графиком функции $f(t) = t(t+2)$ является парабола с вершиной в точке с абсциссой $t_0 = -1$. Поэтому при $t \in \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$ функция $f(t) = t(t+2)$ монотонно возрастает. Следовательно, её наименьшее значение равно $f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{7}{16}$.

Чтобы найти, в какой точке достигается наименьшее значение $F(r)$, нужно найти значение r, которое соответствует значению $t = -\frac{1}{4}$:

$$r^2 - 5r + 6 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow r^2 - 5r + \frac{25}{4} = 0 \Leftrightarrow r = \frac{5}{2}.$$

Ответ: $F_{\min} = -\frac{7}{16}$; это значение достигается при $r = \frac{5}{2}$. □

Решение задачи 2159. Чтобы найти наименьшее значение функции $y(x) = |x-3| + |2x-4| + 1$, нарисуем её график. Для этого раскроем модули, рассмотрев три случая: $x \le 2$, $2 \le x \le 3$, ≥ 3. В каждом из трёх случаев формула, которая задает нашу функцию, упростится:

1. если $x \le 2$, то $y(x) = -3x + 8$;

2. если $2 \le x \le 3$, то $y(x) = x$;

3. если $x \ge 3$, то $y(x) = 3x - 6$.

Поэтому графиком функции $y(x)$ будет ломаная, изображённая на рис. 11.35.

Из этого рисунка ясно, что наименьшее значение $y(x)$ равно $y(2) = 2$.

График функции $y(x)$ позволяет просто решить неравенство $y(x) > 8$. Для этого проведём горизонтальную прямую $y = 8$. Она пересекает график нашей функции в двух точках с абсциссами x_1 и x_2. Первая точка образуется от пересечения прямой $y = -3x + 8$ и прямой $y = 8$. Поэтому x_1 – это корень уравнения $-3x + 8 = 8$, т.е. $x_1 = 0$. Вторая точка образуется от пересечения прямой $y = 3x - 6$ и прямой $y = 8$. Поэтому x_2 – это корень уравнения $3x - 6 = 8$, т.е. $x_2 = \frac{14}{3}$.

Из рисунка ясно, что множество решений неравенства $y(x) > 8$ состоит из двух интервалов: $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$.

Ответ: а) $y_{\min} = 2$, это значение достигается при $x = 2$; б) $x < 0$, $x > \frac{14}{3}$.
□

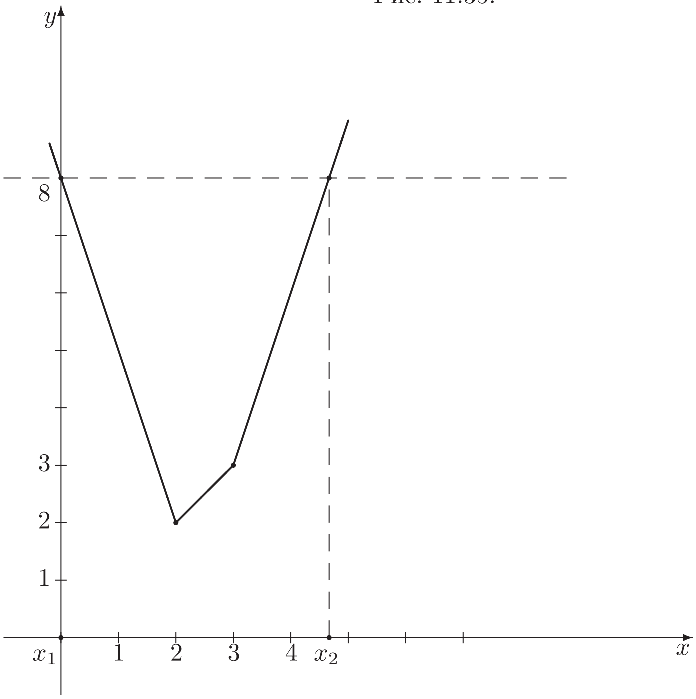
Решение задачи 2161. Для того, чтобы найти наименьшее значение функции

$$f(x) = |x-3| + |x| + |x+3| + |x+5|$$

мы построим её график. Это можно сделать с помощью стандартного раскрытия модулей, но в данном случае удобнее применить другой приём. Он основан на следующих соображениях.

Линейное выражение $ax + b$, $a \ne 0$, обращается в 0 в точке $x = -\frac{b}{a}$, а при $x \ge -\frac{b}{a}$ и $x \le -\frac{b}{a}$ сохраняет постоянный знак: если $a > 0$, то $ax + b \ge 0$

Рис. 11.35:



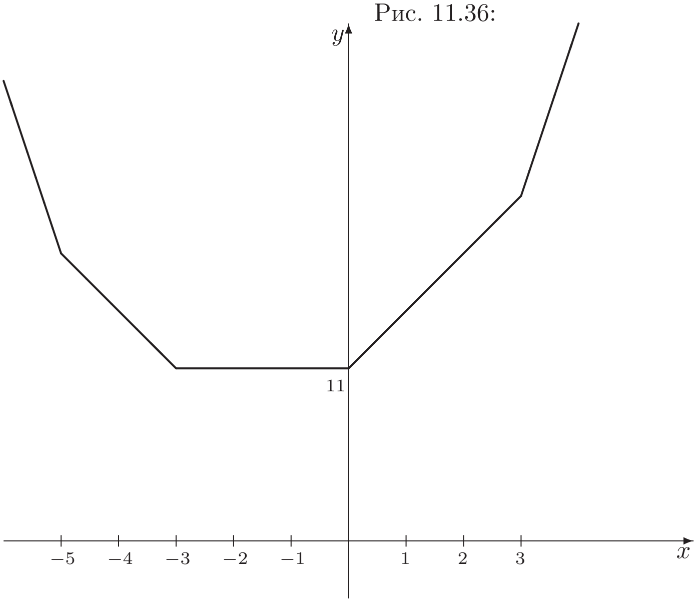
при $x \geq -\frac{b}{a}$, $ax + b \leq 0$ при $x \leq -\frac{b}{a}$; если же $a < 0$, то $ax + b \geq 0$ при $x \leq -\frac{b}{a}$, $ax + b \leq 0$ при $x \geq -\frac{b}{a}$. Таким образом, при росте x выражение $ax+b$ меняет знак (с $-$ на $+$ или с $+$ на $-$ в зависимости от знака a) только при переходе через точку $-\frac{b}{a}$.

В нашей задаче мод знаками модулей стоит четыре линейных выражения: $x - 3$, x, $x + 3$, $x + 5$. Они обращаются в 0 в точках 3, 0, -3, -5 соответственно. Поэтому на каждом из пяти промежутков, $(-\infty; -5]$, $[-5; -3]$, $[-3; 0]$, $[0; 3]$, $[3; +\infty)$, функция $f(x)$ будет суммой линейных функций, т.е. снова будет линейной. Следовательно, графиком функции $f(x)$ будет ломаная с вершинами в точках с абсциссами -5, -3, 0, 3 и ординатами $y(-5) = 15$, $y(-3) = 11$, $y(0) = 11$, $y(3) = 17$ соответственно. Справа от точки 3 все модули раскрываются со знаком $+$, так что $f(x) = 4x+5$. Слева от точки -5 все модули раскрываются со знаком $-$, так что $f(x) = -4x-5$. Эта информация приводит к графику, изображённому на рис.11.36 (мы исказили масштаб по оси ординат, чтобы рисунок не занимал слишком много места). Из графика ясно, что наименьшее значение данной функции равно 11; оно достигается во всех точках отрезка $[-3; 0]$.

Ответ: $f_{\min} = 11$; это значение достигается при $x \in [-3; 0]$. □

Решение задачи 2169. Формула, которая задает нашу функцию, со-

Рис. 11.36:



держит “почти взаимно обратные” числа $2x^2$ и $\frac{1}{x^2+1}$. Это естественно приводит к мысли воспользоваться неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Для этого запишем данную функцию в виде:

$$y = 2(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} - 3.$$

Применяя к положительным числам $a = 2(x^2+1)$ и $b = \frac{1}{x^2+1}$ неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, мы получим, что их сумма больше или равна $2\sqrt{ab} = 2\sqrt{2}$. При этом знак равенства достигается тогда и только тогда, когда

$$2(x^2+1) = \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow (x^2+1)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Числа $-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ – отрицательные. Поэтому знак равенства не достигается, т.е. нижняя граница $2\sqrt{2}$ не является наименьшим значением суммы $2(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1}$.

Поэтому необходимы более тонкие рассуждения.

Представим исходную функцию как

$$y = 2t + \frac{1}{t} - 3, \tag{11.210}$$

где $t = x^2+1$. При изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ значения переменной t заполняют промежуток $[1; +\infty)$. Поэтому задача сводится к нахождению наименьшего значения функции (11.210) на множестве $1 \le t < +\infty$.

На этом множестве функция (11.210) возрастает, т.к. её производная

$$y' = 2 - \frac{1}{t^2} = \frac{2t^2 - 1}{t^2} > 0$$

при $t \geq 1$. Поэтому искомое наименьшее значение достигается при $t = 1$ и равно $y(1) = 0$. Точке минимума функции (11.210) соответствует значение переменной x, которое находится как решение уравнения $x^2 + 1 = 1$: $x = 0$.

Отметим, что монотонность функции (11.210) при $t \geq 1$ можно доказать непосредственно по определению возрастающей функции, не используя производные: если $1 \leq t_1 < t_2$, то

$$y(t_2) - y(t_1) = (t_2 - t_1)\frac{2t_1t_2 - 1}{t_1t_2} > 0.$$

Ответ: 0; это значение достигается при $x = 0$. □

Решение задачи 2172. Функция

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{3}} + \sqrt[6]{1 + x}$$

определена при $x \in [-1; 3]$.

Применим для оценки слагаемых сверху неравенство Бернулли:

$$\sqrt[n]{1 + t} \leq 1 + \frac{t}{n}, \text{ если } t \geq -1$$

Тогда при $x \leq 3$

$$\sqrt{1 - \frac{x}{3}} \leq 1 - \frac{x}{6},$$

а при $x \geq -1$

$$\sqrt[6]{1 + x} \leq 1 + \frac{x}{6}.$$

Складывая эти неравенства почленно, мы получим, что на множестве $-1 \leq x \leq 3$ верно неравенство $f(x) \leq 2$. Эта верхняя граница, очевидно, достигается при $x = 0$ (и только при этом значении, т.к. знак равенства в каждом из двух использованных неравенств Бернулли достигается только при $x = 0$).

Ответ: $f_{\max} = 2$; это значение достигается при $x = 0$.□

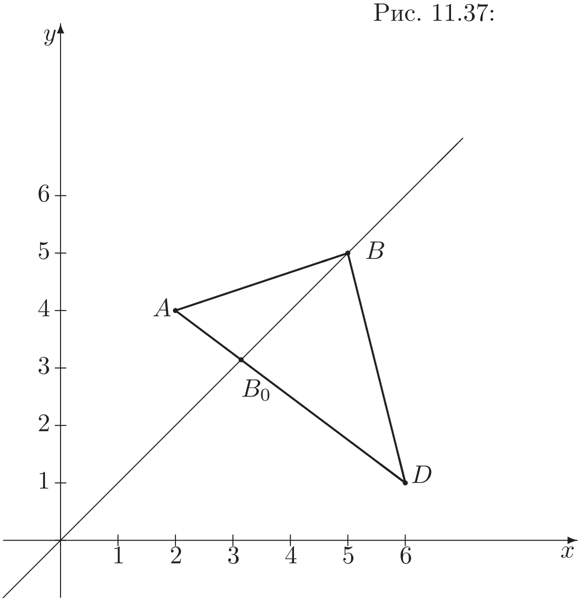
Решение задачи 2173. Число $\sqrt{(x-2)^2 + (x-4)^2}$ можно рассматривать как расстояние между точками $A(2; 4)$ и $B = (x; x)$ на координатной плоскости. Аналогично, число $\sqrt{(x-1)^2 + (x-6)^2}$ можно рассматривать как расстояние между точками $C(1; 6)$ и $B = (x; x)$ или между точками $D(6; 1)$ и $B = (x; x)$ (точка D симметрична точке C относительно биссектрисы первого координатного угла). Для дальнейшего решения удобнее вторая интерпретация (ключевым является тот факт, что точки A и D находятся по разные стороны от прямой $y = x$).

Поэтому функцию

$$y = \sqrt{(x-2)^2 + (x-4)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (x-6)^2} \qquad (11.211)$$

можно рассматривать как длину ломаной ABD. Точки A и D фиксированы, а точка B при изменении переменной x пробегает всю прямую $y = x$. Нам нужно найти такое положение точки B, при котором эта длина минимальна. Из рис.11.37 ясно, что искомый минимум соответствует случаю, когда точка B лежит на отрезке AD.

Рис. 11.37:



Тогда
$$AB + BD = AD = \sqrt{(2-6)^2 + (4-1)^2} = 5.$$

Точка B_0, при которой достигается этот минимум, может быть найдена как точка пересечения прямых $y = x$ и AD. Поскольку координаты точек A и D известны, уравнение прямой AD легко определить; оно имеет вид $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$. Поэтому для точки минимума функции (11.211) имеем уравнение $-\frac{3}{4}x + \frac{11}{2} = x$, откуда $x = \frac{22}{7}$.

Ответ: 5; это значение достигается при $x = \frac{22}{7}$.$\square$

Решение задачи 2176. Поскольку старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x) = 2x^2 - 2ax + (a^2 - 2a - 4)$ положителен, наибольшее значение $f(x)$ на отрезке $1 \le x \le 3$ достигается в одной из граничных точек этого отрезка. Поэтому наибольшее значение $f(x)$ будет меньше или равно 2 тогда и только тогда, когда одновременно выполнены два неравенства, $f(1) \le 2$ и $f(3) \le 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) \le 2 \\ f(3) \le 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 - 4a - 4 \le 0 \\ a^2 - 8a + 12 \le \end{array} \right. \Leftrightarrow 2 \le a \le 2 + 2\sqrt{2}$$

Ответ: $2 \le a \le 2 + 2\sqrt{2}$. $\square$

Решение задачи 2178. Упростим условие $2|x| + |x - 3a| \leq 9a$, избавившись от модулей:

$$|x - 3a| \leq 9a - |2x| \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3a \leq 9a - |2x| \\ x - 3a \geq -9a + |2x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x| \leq 12a - x \\ |2x| \leq 6a + x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq 12a - x \\ 2x \geq -12a + x \\ 2x \leq 6a + x \\ 2x \geq -6a - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \leq 12a \\ x \geq -12a \\ x \leq 6a \\ 3x \geq -6a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4a \\ x \geq -12a \\ x \leq 6a \\ x \geq -2a \end{cases}$$

Поскольку параметр a положителен, справедливо неравенство $-12a < -2a < 4a < 6a$, так что решение последней системы имеет вид: $-2a \leq x \leq 4a$.

Далее, модуль разности чисел x и $2a$ можно интерпретировать как расстояние между точками x и $2a$ на числовой оси. Поэтому исходную задачу можно переформулировать следующим образом:

найти наибольшее расстояние от точки $2a$ *до точки* $x \in [-2a; 4a]$.

Из рис.11.38 ясно, что точкой отрезка $[-2a; 4a]$, наиболее удаленной от точки $2a$, является левый конец этого отрезка, так что искомый максимум равен $4a$.

Рис. 11.38:

Ответ: $4a$; это значение достигается при $x = -2a$.□

Решение задачи 2182. Рассмотрим выражение $f(x, y)$ как квадратный трёхчлен относительно переменной x (переменную y будем считать параметром): $f(x, y) = x^2 + 4y \cdot x + (5y^2 + 6y + 10)$. При фиксированном y наименьшее значение этого трёхчлена достигается при $x = -2y$; оно равно $g(y) = f(-2y, y) = y^2 + 6y + 10$. Наименьшее значение трёхчлена $g(y)$ достигается при $y = -3$; оно равно $g(-3) = 1$ – это и будет искомое наименьшее значение выражения $f(x, y)$.

Ответ: 1; это значение достигается в точке $(6; -3)$. □

Решение задачи 2184. Выражение

$$f(x, y, z) = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$$

при фиксированных значениях любых двух переменных является квадратным трёхчленом относительно третьей переменной. Например, если в качестве основной переменной рассматривать x, то

$$f(x, y, z) = 2x^2 - 2(y + z)x + 2(y^2 - yz + z^2).$$

Ясно, что старший коэффициент этого трёхчлена равен 2 при любом выборе основной переменной. Поэтому наибольшее значение $f(x, y, z)$ по любой из трех переменных (при фиксированных значениях двух других переменных) достигается в точке 1 или в точке -1 (возможно, в двух этих точках одновременно).

Таким образом, наибольшее значение выражения $f(x, y, z)$ достигается в одной или нескольких точках вида $(\pm 1; \pm 1; \pm 1)$. Чтобы его найти, нужно подсчитать значение $f(x, y, z)$ в этих точках и выбрать наибольшее.

В точках $(1; 1; 1)$ и $(-1; -1; -1)$ значение $f(x, y, z)$ равно 0, а в оставшихся шести точках значение $f(x, y, z)$ равно 8.

Ответ: 8. Это значение достигается в шести точках вида $(\pm 1; \pm 1; \pm 1)$, исключая точки $(1; 1; 1)$ и $(-1; -1; -1)$.□

Решение задачи 2190. *1 способ.* Перепишем выражение $f = 3x - 2y$ в виде: $f = \frac{3}{2} \cdot 2x + (-2) \cdot y$. В силу неравенства Коши-Буняковского,

$$f \le \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{4x^2 + y^2} = 10. \qquad (11.212)$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда существует положительное число k такое, что

$$2x = \frac{3}{2} \cdot k, \ y = (-2) \cdot k.$$

Из условия $4x^2 + y^2 = 16$ следует, что $k = \frac{8}{5}$. Тогда $x = \frac{6}{5}$, $y = -\frac{16}{5}$ – при этих значениях переменных достигается наибольшее значение выражения $3x - 2y$.

2 способ. Введем дополнительную переменную $z = 3x - 2y$. Тогда задача может быть переформулирована следующим образом: *найти наибольшее значение переменной z при условии, что выполнены равенства $z = 3x - 2y$, $4x^2 + y^2 = 16$.*

Эти условия можно рассматривать как систему относительно неизвестных x и y:

$$\begin{cases} z = 3x - 2y, \\ 4x^2 + y^2 = 16, \end{cases}$$

а фраза "выполнены равенства" означает: "система имеет решение".

Исключим из первого уравнения системы неизвестную у: $y = \frac{3x - z}{2}$. Тогда второе уравнение примет вид

$$25x^2 - 6xz + (z^2 - 64) = 0 \qquad (11.213)$$

и задача может быть переформулирована следующим образом: *найти наибольшее значение переменной z при условии, что квадратное уравнение (11.213) имеет решение.*

Это, в свою очередь, равносильно тому, что $\frac{D}{4} = -16z^2 + 1600 \ge 0$, т.е. условию $-10 \le z \le 10$. Наибольшее значение переменной z, удовлетворяющее этому условию, равно 10.

3 способ. Ограничение $4x^2 + y^2 = 16$ напоминает уравнение окружности. Чтобы превратить его в уравнение, которое является уравнением окружности, разделим обе части на 16 и перепишем получившееся равенство в виде

$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2=1$. Вспоминая комментарии к решению задачи 206, применим метод тригонометрических подстановок.

Равенство $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2=1$ означает, что точка $\left(\frac{x}{2};\frac{y}{4}\right)$ лежит на единичной окружности. Каждой такой точке соответствует и притом только одно значение α из промежутка $[0;2\pi)$ такое, что $\frac{x}{2}=\cos\alpha$, $\frac{y}{4}=\sin\alpha$, или, что то же самое, $x=2\cos\alpha$, $y=4\sin\alpha$.

Тогда задача может быть переформулирована следующим образом: *найти наибольшее значение выражения* $6\cos\alpha-8\sin\alpha$ *при условии, что* $\alpha\in[0;2\pi)$.

Из курса тригонометрии известно, что область значений функции $f(\alpha)=a\sin\alpha+b\cos\alpha$ – это отрезок $[-\sqrt{a^2+b^2};+\sqrt{a^2+b^2}]$. Поскольку $f(\alpha)$ – периодична с периодом 2π, ограничение $\alpha\in[0;2\pi)$ не меняет область значений.

В нашем случае $a=-8$, $b=6$, так что $\sqrt{a^2+b^2}=10$.

Ответ: 10.□

Решение задачи 2192. Ограничение $x^2-xy+2y^2=1$ напоминает уравнение окружности. Чтобы превратить его в уравнение, которое является уравнением окружности, рассмотрим выражение $z=x^2-xy+2y^2$ как квадратный трёхчлен относительно x и выделим полный квадрат: $z=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{7}{4}y^2$. Теперь введём новые переменные $u=x-\frac{y}{2}$ и $v=\frac{\sqrt{7}}{2}y$ (так что $x=u+\frac{1}{\sqrt{7}}v$, $y=\frac{2}{\sqrt{7}}v$). Для них наша задача примет вид:

Найти наибольшее и наименьшее значения выражения

$$f=\left(u+\frac{1}{\sqrt{7}}v\right)^2+2\left(\frac{2}{\sqrt{7}}v\right)^2,$$

если $u^2+v^2=1$.

Теперь применим метод тригонометрических подстановок.

Равенство $u^2+v^2=1$ означает, что точка $(u;v)$ лежит на единичной окружности. Каждой такой точке соответствует и притом только одно значение α из промежутка $[0;2\pi)$ такое, что $u=\cos\alpha$, $v=\sin\alpha$.

Тогда задача может быть переформулирована следующим образом:

Найти наибольшее и наименьшее значения выражения

$$f=\left(\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{7}}\sin\alpha\right)^2+2\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\sin\alpha\right)^2=\frac{8}{7}+\frac{\sqrt{7}}{7}\sin 2\alpha-\frac{1}{7}\cos 2\alpha,$$

при условии, что $\alpha\in[0;2\pi)$.

Область значений функции $\frac{\sqrt{7}}{7}\sin 2\alpha-\frac{1}{7}\cos 2\alpha$ – это отрезок $[-A;+A]$, где $A=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\right)^2+\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{7}$. Поэтому область значений выражения f – это отрезок $\left[\frac{8-2\sqrt{2}}{7};\frac{8+2\sqrt{2}}{7}\right]$.

Ответ: $\min=\frac{8-2\sqrt{2}}{7}$, $\max=\frac{8+2\sqrt{2}}{7}$.□

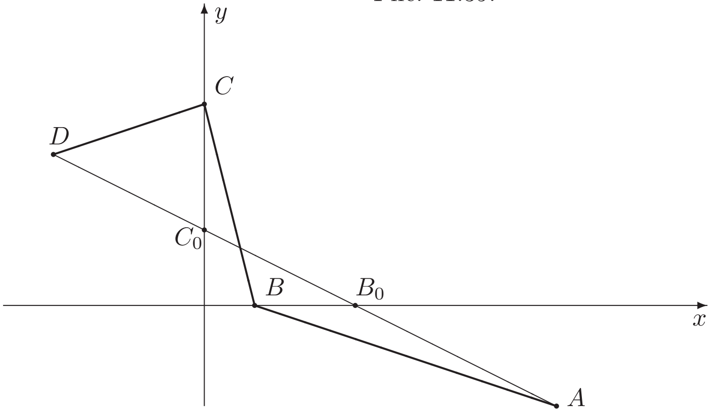
Решение задачи 2202. Число $\sqrt{(x-9)^2+4}$ можно рассматривать как расстояние между точками $A(9;-2)$ и $B=(x;0)$ на координатной плоскости. Аналогично, число $\sqrt{x^2+y^2}$ можно рассматривать как расстояние между точками $B(x;0)$ и $C=(0;y)$, а число $\sqrt{(y-3)^2+9}$ – как расстояние между точками $C(0;y)$ и $D=(-3;3)$.

Поэтому выражение

$$\sqrt{(x-9)^2+4}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(y-3)^2+9}$$

можно рассматривать как длину ломаной $ABCD$. Точки A и D фиксированы, а точки B и C при изменении переменных x и y движутся по осям Ox и Oy соответственно. Нам нужно найти такие положения точек B и C, при которых эта длина минимальна. Из рис.11.39 ясно, что искомый минимум соответствует случаю, когда точки B и C лежат на отрезке AD.

Рис. 11.39:



Тогда

$$AB+BC+CD=AD=\sqrt{(-3-9)^2+(3-(-2))^2}=13.$$

Точки $B_0=(x_0;0)$ и $C_0=(0;y_0)$, при которых достигается этот минимум, могут быть найдены как точки пересечения прямой AD с осями координат. Поскольку координаты точек A и D известны, уравнение прямой AD легко определить; оно имеет вид $y=-\frac{5}{12}x+\frac{7}{4}$. Поэтому $x_0=\frac{21}{5}$, $y_0=\frac{7}{4}$.

Ответ: 13; это значение достигается в точке $(x_0,y_0)=\left(\frac{21}{5},\frac{7}{4}\right)$.□

Решение задачи 2220. Если целое число N представимо в виде линейной комбинации $ak+bn$ целых чисел a и b с целыми коэффициентами k и n, то N делится на НОД$(a,b)=d$, т.е. $N=dl$ для некоторого $l\in Z$. Из алгоритма Евклида следует, что верно и обратное утверждение: если целое число N кратно d, т.е. $N=dl$ для некоторого $l\in Z$, то N представимо в виде линейной комбинации $ak+bn$ для некоторых $k,n\in Z$.

Поэтому выражение $40k+25n$ принимает значения

$$\ldots,-10,-5,0,5,10,15,20,25,30,35,40,\ldots$$

Соответственно, выражение $40k + 25n - 33$ принимает значения

$$\dots, -43, -38, -33, -28, -23, -18, -13, -8, -3, 2, 7 \dots$$

Наименьшим по абсолютной величине значением является 2.

Более формальный вариант последнего этапа этого решения выглядит следующим образом. Поскольку множество значений функции $40k+25n$ от двух целочисленных переменных k и n совпадает с множеством значений функции $5l$ от одной целочисленной переменной l, задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $f(l) = |5l - 33|$. Соответствующая функция $f(x) = |5x - 33|$ от непрерывной, т.е. действительной, переменной x при $x \leq 6\frac{3}{5}$ убывает, а при $x \geq 6\frac{3}{5}$ возрастает. Поэтому её наименьшее значение на множестве целых чисел – это $\min(f(6), f(7))$. Поскольку $f(6) = 3$, $f(7) = 2$, искомое наименьшее значение равно 2.

Ответ: 2. □

Решение задачи 2222. Известно, что для любых натуральных чисел x и y верно равенство $x \cdot y =$ НОД$(x, y) \cdot$ НОК(x, y). Поэтому $q = \frac{xy}{d}$ и наша задача может быть сформулирована в виде:

Найти наименьшее значение величины $\frac{xy}{d^2}$ при условии

$$3x = 8y - 29. \tag{11.214}$$

Теперь решим уравнение (11.214). В соответствии с общей теорией прежде всего найдем частное решение. В качестве частного решения можно взять, например, $x_0 = -7$, $y_0 = 1$:

$$3 \cdot (-7) = 8 \cdot 1 - 29. \tag{11.215}$$

Вычитая из уравнения (11.214) равенство (11.215), мы получим однородное уравнение

$$3 \cdot (x + 7) = 8 \cdot (y - 1).$$

Поскольку числа 3 и 8 – взаимно простые, его общее решение в целых числах имеет вид: $x+7 = 8n$, $y-1 = 3n$, где $n \in Z$. Соответственно, общее решения уравнения (11.214) в целых числах есть: $x = 8n - 7$, $y = 3n + 1$, $n \in Z$. Решение в натуральных числах означает дополнительное требование $x > 0$, $y > 0$, что равносильно условию $n \in N$.

Теперь наша задача может быть сформулирована в виде:

Найти наименьшее значение функции натурального аргумента $f(n) = \frac{(8n-7)(3n+1)}{d^2(n)}$, где $d(n) =$ НОД$(8n - 7, 3n + 1)$.

Далее, если $3x = 8y - 29$, то $29 = 8y - 3x$. Правая часть этого равенства делится на d. Значит, d – делитель простого числа 29. Поэтому $d(n)$ может быть только 1 или 29.

Разберёмся теперь, при каких $n \in Z$ наибольший общий делитель чисел $x = 8n - 7$, $y = 3n + 1$ равен 29. Прежде всего отметим, что из равенства $3x = 8y - 29$ следует, что x делится на 29 тогда и только тогда, когда y делится на 29. Поэтому $d(n) = 29$ тогда и только тогда, когда существует натуральное k такое, что $3n+1=29k$. Это уравнение имеет следующее общее решение (в натуральных числах): $n=29l-10$, $k=3l-1$, $l\in N$ (мы начинаем с частного решения $n_0=-10$, $k_0=-1$). Поэтому $d(n)=29$ для $n=29l-10$, $l\in N$ (этот вывод можно получить и с помощью алгоритма Евклида, использованного при решении задачи 1312).

Обозначим через N_1 множество тех натуральных чисел n, для которых $d(n)=1$, а через N_2 – множество тех натуральных чисел n, для которых $d(n)=29$. Как мы только что установили, $N_2=\{19,48,\dots\}$, и, значит, $N_1=\{1,2,\dots,18,20,\dots,\}$.

Теперь наша задача может быть сформулирована в виде:

Найти наименьшие значения функций $f_1(n)=\frac{(8n-7)(3n+1)}{1}$, *где* $n\in N_1$, *и* $f_2(n)=\frac{(8n-7)(3n+1)}{29^2}$, *где* $n\in N_2$, *и из них выбрать меньшее число.*

Поскольку функция $(8n-7)(3n+1)$ возрастает при $n\geq 1$, $\min f_1=f_1(1)=4$, $\min f_2=f_2(19)=10$, так что $\min(\min f_1,\min f_2)=4$.

Ответ: 4. □

Решение задачи 2223. Дроби $a=\cfrac{1}{y+\cfrac{2003}{z}}$ и $b=\cfrac{1}{v+\cfrac{2003}{w}}$ меньше 1 (т.к. их знаменатели больше 1). Кроме того, они положительны. Поэтому $a-b\in(-1;1)$. Но $a-b=u-x$ – число целое. Следовательно, $u-x=0$, $a-b=0$, так что исходное уравнение примет вид:

$$y+\frac{2003}{z}=v+\frac{2003}{w}\Leftrightarrow y-v=2003\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{z}\right).$$

Поскольку $\frac{1}{w}\leq 1$, а $-\frac{1}{z}<0$, отсюда следует, что $y-v<2003$. Более того, т.к. $y-v$ – целое число, можно утверждать, что $y-v\leq 2002$. С другой стороны, значение 2002 достигается, например, при $w=1$, $z=2003$ и следующих значениях остальных переменных: $y=v+2002$, $x=u$, значения v и u – произвольны.

Ответ: 2002. □

Решение задачи 2226. Тот факт, что числа a,b,c в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, равносилен справедливости равенства

$$2b=a+c. \tag{11.216}$$

Тот факт, что числа $a-c,c-b,2a$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию, равносилен справедливости равенства

$$(c-b)^2=2a(a-c) \tag{11.217}$$

и условия

$$a-c,c-b,2a\neq 0 \tag{11.218}$$

(в геометрической прогрессии по определению не может быть нулевых членов).

Систему из уравнений (11.216) и (11.217) можно решить методом исключения. Она имеет бесконечно много решений, которые можно описать двумя формулами: $(a, b, c) = (t, t, t)$, $(a, b, c) = (t, -3t, -7t)$, где $t \in R$ – произвольный параметр.

Для первой серии решений набор чисел $a-c, c-b, 2a$ примет вид: $0, 0, 2t$. Поскольку условие (11.218) не выполнено, первая серия не является решением системы (11.216)-(11.218).

Для второй серии решений набор чисел $a-c, c-b, 2a$ примет вид: $8t, -4t, 2t$. Справедливость условия (11.218) в этом случае равносильна требованию $t \neq 0$.

Итак, система (11.216)-(11.218) имеет бесконечно много решений, которые можно описать формулой: $(a, b, c) = (t, -3t, -7t)$, где $t \in R \setminus \{0\}$ – произвольный ненулевой параметр.

Для указанных значений a, b, c число y, минимум которого нужно найти, примет вид:

$$y = t^2 + 6t. \tag{11.219}$$

Теперь задачу можно сформулировать следующим образом: найти минимальное значение (неполного) квадратного трёхчлена $t^2 + 6t$ на множестве $R \setminus \{0\}$. Поскольку вершина параболы, которая является графиком функции (11.219), имеет координаты $(t, y) = (-3; -9)$, искомый минимум равен -9.

Ответ: -9. □

Решение задачи 2238. Пусть объём сосуда равен V, x_n – концентрация спирта после n-го переливания.

В ходе $(n+1)$-го переливания объём жидкости в сосуде сначала станет $\frac{2V}{3}$, а концентрация спирта не изменится, т.е. останется равной x_n. Поэтому абсолютное содержание спирта равно $\frac{2Vx_n}{3}$. После того, как в сосуд добавят воду, объём жидкости станет V, а абсолютное содержание спирта не изменится. Поэтому относительное содержание спирта станет равным $\frac{2}{3}x_n$.

Итак, $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n$. Это соотношение означает, что последовательность x_n является геометрической прогрессией со знаменателем $\frac{2}{3}$. Поскольку $x_0 = 1$, по формуле общего члена имеем: $x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Осталось найти наименьшее значение k, для которого $x_k < \frac{1}{10}$. Функция x_k монотонно убывает с ростом k. Поскольку $x_5 = \frac{32}{243} > \frac{1}{10}$, $x_6 = \frac{64}{729} < \frac{1}{10}$, искомое значение k равно 6.

Ответ: k=6. □

Решение задачи 2241. Предположим, что для приготовления нового сплава взяли x кг первого сплава, y кг второго и z кг третьего. Тогда новый сплав будет иметь массу $x+y+z$ кг и будет содержать $(0,55x+0,25y+0,7z)$ кг хрома, $(0,45x+0,6y)$ кг никеля, $(0,15y+0,3z)$ кг кобальта. Относительное содержание кобальта в новом сплаве равно $\frac{0,15y+0,3z}{x+y+z}$, а относительное содержание никеля – $f = \frac{0,45x+0,6y}{x+y+z}$ – область значений этой функции мы должны найти.

Условие $\frac{0,15y+0,3z}{x+y+z} = 0,2$ позволяет исключить одну из переменных, например, z: $z = 2x + 0,5y$. Теперь функция f станет зависеть только от двух переменных: $f = \frac{0,45x+0,6y}{3x+1,5y}$. Мы должны найти область её значений при изменении независимых переменных x и y в области $x \geq 0, y \geq 0$ (нетрудно понять, что эти переменные не могут быть одновременно равны нулю, т.к. тогда относительное содержание кобальта в новом сплаве будет $0,3$).

Если $x = 0$, то $f \equiv 0,4$. Если $y = 0$, то $f \equiv 0,15$.

Если $y \neq 0$, то f можно рассматривать как дробно-линейную функцию одной переменной x (считая y параметром). Записывая f в виде

$$f = 0,15\left(1 + \frac{5y}{6x+3y}\right),$$

легко видеть, что при росте x от 0 до $+\infty$ величина f убывает от $0,4$ до $0,15$.

Ответ: процентное содержание никеля в новом сплаве меняется от 15% (новый сплав составлен только из первого и третьего сплавов) до 40% (новый сплав составлен только из второго и третьего сплавов).□

Решение задачи 2242. Обозначим через x, y, z – массы сплавов, которые мы берём для приготовления нового сплава. По условию $x+y+z=10$ (масса нового сплава 10 кг), $0,2x+0,5y+0,3z=2,5$ (относительное содержание металла A в новом сплаве составляет 25%).

Из двух этих уравнений можно исключить две переменные, например, x и z: $x = 5+2y$, $z = 5-3y$. Поскольку все переменные в задаче неотрицательны, переменная y меняется на отрезке $0 \le y \le \frac{5}{3}$.

Процентное содержание металла B в сплаве равно $f = 0,3x + 0,2y + 0,4z = 3,5 - 0,4y$. Минимум этой функции на отрезке $0 \le y \le \frac{5}{3}$ достигается при $y = \frac{5}{3}$. Соответственно, $x = \frac{25}{3}$, $z = 0$.

Ответ: $\frac{25}{3}$, $\frac{5}{3}$ и 0 кг. □

Решение задачи 2244. Пусть n – число рабочих в бригаде, t – продолжительность рабочего дня (в часах), p – доля задания, которую может выполнить один рабочий за один час, т.е. производительность труда одного рабочего (в час). Тогда суммарная производительность всей бригады равна np (в час) и npt (в день). Следовательно, всё задание бригада выполнит за $\frac{1}{npt}$ дней. По условию эта величина равна 42:

$$\frac{1}{npt} = 42.$$

Если численность бригады увеличится на 4 человека, а продолжительность рабочего дня – на 1 час, то суммарная производительность всей бригады в день станет равной $(n+4)p(t+1)$. В этой ситуации всё задание бригада выполнит за $\frac{1}{(n+4)p(t+1)}$ дней. По условию эта величина не больше, чем 30:

$$\frac{1}{(n+4)p(t+1)} \le 30.$$

Если число рабочих увеличится ещё на 6 человек (т.е. станет $n+10$), а рабочий день ещё на 1 час (т.е. станет $t+2$), то суммарная производительность всей бригады в день станет равной $(n+10)p(t+2)$. В этой ситуации всё задание бригада выполнит за $\frac{1}{(n+10)p(t+2)}$ дней. По условию эта величина не меньше, чем 21:

$$\frac{1}{(n+10)p(t+2)} \geq 21.$$

Теперь нашу задачу можно сформулировать следующим образом:

Найти наибольшее натуральное n, при котором система

$$\begin{cases} 42npt = 1, \\ 30(n+4)(t+1)p \geq 1, \\ 21(n+10)(t+2)p \leq 1. \end{cases}$$

имеет решение в положительных числах.

Исключая из первого уравнения неизвестную p, мы получим систему из двух неравенств:

$$\begin{cases} 2t(n-10) \leq 5n+20, \\ t(n-10) \geq 2n+20. \end{cases}$$

Из второго неравенства следует, что $n > 10$. Поэтому эту систему можно переписать в виде:

$$\frac{2n+20}{n-10} \leq t \leq \frac{5n+20}{2(n-10)}. \tag{11.220}$$

Это двойное неравенство имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\frac{2n+20}{n-10} \leq \frac{5n+20}{2(n-10)} \Leftrightarrow n \geq 20.$$

Для $n \geq 20$ дробь $\frac{2n+20}{n-10}$ положительна, так что все значения t, удовлетворяющие неравенству (11.220), также положительны.

Наименьшее значение n равно 20. В этом случае неравенство (11.220) примет вид: $6 \leq t \leq 6$, откуда $t = 6$.

Ответ: 20 рабочих, 6 часов. □

Решение задачи 2253. Пусть n и m – число орфографических и пунктуационных ошибок в первоначальном варианте сочинения, n' и m' – число орфографических и пунктуационных ошибок в в тексте сочинения после того, как его проверила сестра. По смыслу задачи величины n и m являются натуральными числами (ошибки действительно были допущены). Условие задачи означает, что эти величины являются решением следующей системы:

$$\begin{cases} \frac{155}{1000}m \leq m' \leq \frac{18}{100}m, \\ n' = \frac{n}{3}, \\ n' = \frac{25}{100}m. \end{cases}$$

Решим эту систему.

Исключая из двух последних уравнений неизвестную n', мы получим однородное уравнение относительно n и m:

$$4n = 3m.$$

Его общее решение в натуральных числах имеет вид: $n = 3k$, $m = 4k$, где $k \in N$. Тогда $n' = k$, и вся системы сведется к двойному неравенству:

$$\frac{31}{50}k \le m' \le \frac{18}{25}k. \tag{11.221}$$

Теперь было бы логично решить это неравенство в натуральных числах. Точное описание множества решений – довольно громоздко и поэтому мы лишь определим, при каких $k \in N$ решения существуют. Этого вполне достаточно для ответа на два специальных вопроса, сформулированных в тексте исходной задачи.

Прежде всего отметим, что длина отрезка $\left[\frac{31}{50}k; \frac{18}{25}k\right]$ равна $\frac{k}{10}$ и поэтому при $k \ge 10$ длина этого отрезка не меньше 1, так что в него обязательно попадёт хотя бы одно натуральное число.

Для $k = 1, 2, \ldots, 9$ существование натуральных m', удовлетворяющих двойному неравенству (11.221), проще всего установить простой проверкой. Её результаты оформлены в виде следующей таблицы.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{31}{50}k$	$\frac{31}{50}$	$1\frac{12}{50}$	$1\frac{43}{50}$	$2\frac{24}{50}$	$3\frac{5}{50}$	$3\frac{36}{50}$	$4\frac{17}{50}$	$4\frac{48}{50}$	$5\frac{29}{50}$
$\frac{18}{25}k$	$\frac{18}{25}$	$1\frac{11}{25}$	$2\frac{4}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$3\frac{15}{25}$	$4\frac{8}{25}$	$5\frac{1}{25}$	$5\frac{19}{25}$	$6\frac{12}{25}$
m'	$\emptyset$	$\emptyset$	1	$\emptyset$	$\emptyset$	4	5	5	6

Теперь легко ответить на вопросы нашей задачи.

а) Число ошибок в новом тексте, $n' + m' = k + m'$, может быть равно 6 только для $k = 1, \ldots, 5$. Из таблицы видно, что из значений $k \le 5$ реально возможно только одно: $k = 3$. В этом случае $k + m' = 4$, так что ответ на поставленный вопрос – отрицательный.

б) Общее число ошибок в первоначальном тексте равно $n + m = 7k$. Эта величина минимальна, если k принимает наименьшее возможное значение. Из таблицы видно, что наименьшее возможное значение параметра k равно 3. Соответственно, наименьшее возможное число ошибок в первоначальном тексте равно 21.

Ответ: а) нет; б) 21.□

Решение задачи 2255. Пусть n – количество чётных чисел в множестве X, так что количество нечётных чисел в X равно $N-n$. Условие задачи означает, что N и n являются решением следующей системы:

$$\begin{cases} n < \frac{2}{3}N, \\ N - n \le \frac{36}{100}N \end{cases} \Leftrightarrow \frac{16}{25}N \le n < \frac{2}{3}N$$

Итак, вопрос исходной задачи сводится к определению наименьшего значения переменной N, при котором существует натуральное n, удовлетворяющее двойному неравенству

$$\frac{16}{25}N \le n < \frac{2}{3}N. \tag{11.222}$$

Для ответа на этот вопрос мы установим, при каких значениях N неравенство (11.222) имеет хотя одно решение в натуральных числах.

Длина промежутка $\left[\frac{16}{25}N; \frac{2}{3}N\right)$ равна $\frac{2}{75}N$ и поэтому при $N \geq 38$ длина этого отрезка больше 1, так что в него обязательно попадет хотя бы одно натуральное число.

Для $N = 1, 2, \ldots, 37$ существование натуральных n, удовлетворяющих двойному неравенству (11.222), в принципе можно было бы установить простой проверкой, но это потребовало бы больших вычислений.

Поэтому мы применим другой метод. Разобьём все значения N на три группы в соответствии с остатком при делении на 3.

1. Если $N = 3k$, то неравенство (11.222) примет вид:

$$\frac{48}{25}k \leq n < 2k. \tag{11.223}$$

Поскольку n и $2k$ – числа целые, правое неравенство равносильно нестрогому неравенству $n \leq 2k - 1$. Двойное неравенство (11.223) будет иметь решение в натуральных числах тогда и только тогда, когда

$$\frac{48}{25}k \leq 2k - 1 \Leftrightarrow k \geq 12,5 \Leftrightarrow k = 13; 14; \ldots$$

Таким образом, из чисел N, кратных 3, только для $N = 39; 42; \ldots$ двойное неравенство (11.222) будет иметь решение в натуральных числах.

2. Если $N = 3k + 1$, то неравенство (11.222) примет вид:

$$\frac{16}{25}(3k + 1) \leq n < 2k + \frac{2}{3}. \tag{11.224}$$

Поскольку n и $2k$ – числа целые, правое неравенство равносильно нестрогому неравенству $n \leq 2k$. Двойное неравенство (11.224) будет иметь решение в натуральных числах тогда и только тогда, когда

$$\frac{16}{25}(3k + 1) \leq 2k \Leftrightarrow k \geq 8.$$

Таким образом, из чисел N, которые при делении на 3 дают остаток 1, только для $N = 25; 28; \ldots$ двойное неравенство (11.222) будет иметь решение в натуральных числах.

3. Если $N = 3k + 2$, то неравенство (11.222) примет вид:

$$\frac{16}{25}(3k + 2) \leq n < 2k + 1 + \frac{1}{3}. \tag{11.225}$$

Поскольку n и $2k+1$ – числа целые, правое неравенство равносильно нестрогому неравенству $n \leq 2k + 1$. Двойное неравенство (11.225) будет иметь решение в натуральных числах тогда и только тогда, когда

$$\frac{16}{25}(3k + 2) \leq 2k + 1 \Leftrightarrow k \geq 3,5 \Leftrightarrow k = 4; 5; \ldots$$

Таким образом, из чисел N, которые при делении на 3 дают остаток 2, только для $N = 14; 17; \ldots$ двойное неравенство (11.222) будет иметь решение в натуральных числах.

Полный список возможных значений N выглядит следующим образом:

$$14, 17, 20, 23, 25, 26, 28, 29, 31, 32, 34, 35, 37, 38, 39, 40, \ldots$$

Из этих значений N наименьшим будет число 14.

Ответ: 14. □

Решение задачи 2262. Пусть x и y – число изделий первого и второго типа соответственно. Тогда общий вес изделий равен $12x + 15y$, а их суммарная стоимость – $C = 4x+6y$ (мы берём 100 тыс. руб. в качестве единицы измерения денежных сумм).

Теперь задачу можно сформулировать следующим образом:

Найти наименьшее и наибольшее значения функции $C(x, y) = 4x + 6y$ при условию, что x и y – натуральные числа, удовлетворяющие соотношению $12x + 15y = 321$.

Решим уравнение $12x + 15y = 321$. Чтобы коэффициенты при неизвестных были взаимно простыми числами, сократим почленно на 3:

$$4x + 5y = 107. \tag{11.226}$$

Теперь возьмём какое-нибудь частное решение уравнения (11.226) в целых числах, например, $x_0 = -107$, $y_0 = 107$, так что верно равенство:

$$4 \cdot (-107) + 5 \cdot 107 = 107, \tag{11.227}$$

и, наконец, вычтем из уравнения (11.226) равенство (11.227):

$$4(x + 107) = 5(107 - y).$$

Поскольку числа 4 и 5 – взаимно простые, общее решение этого уравнения в целых числах имеет вид:

$$\begin{cases} x + 107 = 5n, \\ 107 - y = 4n, \quad n \in Z. \end{cases}$$

Соответственно, общее решение уравнения (11.226) в целых числах имеет вид:

$$\begin{cases} x = 5n - 107, \\ y = 107 - 4n, \quad n \in Z. \end{cases}$$

Нас интересует решение в натуральных числах. Это означает, что $x > 0$, $y > 0$, т.е. параметр n должен удовлетворять неравенствам $5n - 107 > 0$, $107 - 4n > 0$. Отсюда $21\frac{2}{5} < n < 26\frac{3}{4}$. Итак, натуральным решениям $(x; y)$ соответствуют значения $n = 22, 23, \ldots, 26$.

Используя полученные результаты, мы можем переформулировать исходную задачу следующим образом:

Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$C(n) = 4 \cdot (5n - 107) + 6 \cdot (107 - 4n) = 214 - 4n$$

при условии, что параметр $n = 22, 23, \ldots, 26$.

Поскольку зависимость $C(n)$ – линейная с отрицательным угловым коэффициентом, наименьшее значение достигается при $n = 26$, а наибольшее – при $n = 22$.

Ответ: 11000 тыс. руб. и 12600 тыс. руб. □

Учебное издание

Фалин Геннадий Иванович
Фалин Анатолий Иванович

АЛГЕБРА НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ
ПО МАТЕМАТИКЕ В МГУ

Учебное пособие

Издательство «МАКС Пресс»
Главный редактор: *Е. М. Бугачева*

Отпечатано с готового оригинал-макета
Подписано в печать 16.12.2019 г.
Формат 60x90 1/16. Усл.печ.л. 35,0.
Тираж 10 экз. Заказ № 296.

Издательство ООО «МАКС Пресс»
Лицензия ИД N00510 от 01.12.99 г.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ им. М. В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 8(495) 939-3890/91. Тел./Факс 8(495) 939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»
115201, г. Москва, ул. Котляковская, д.3, стр. 13.