

Преподавание финансовой математики в английских школах¹

Г.И.Фалин, д.ф.м.н., проф.
кафедра теории вероятностей
механико-математический факультет
МГУ им М.В.Ломоносова (Москва)
<http://mech.math.msu.su/~falin>

Мы рассказываем о новом курсе для английских школьников под названием «Финансовые вычисления» и связанном с ним экзамене, а также о требованиях к изучению финансовой математики в новом национальном учебном плане.

Ключевые слова: *зарубежный опыт, применение математики, финансовые расчёты, экзамен, национальный учебный план*

1 Введение

В английских школах большое внимание уделяется выработке у учащихся твёрдых навыков решения разнообразных задач, встречающихся в повседневной жизни. Особое место занимают финансовые вычисления. Задачи с экономическим содержанием предлагаются на экзамене по математике для получения общего свидетельства о среднем образовании (General Certificate of Secondary Education – GCSE) [1]. В ходе этого экзамена проверяется большое число разнообразных разделов математики, от геометрии до теории вероятностей и статистики. Для слабых учащихся, которые не очень заинтересованы в продолжении учёбы, и хотят начать трудовую жизнь, а также для сильных учащихся, но не интересующихся математикой, этот экзамен является относительно сложным. Они просто игнорируют школьный курс математики и как следствие оказываются не в состоянии ориентироваться в простейших жизненных ситуациях, связанных с финансами. Для таких школьников предлагается специальный курс «Финансовые вычисления». Этот курс имеет ряд достоинств для отмеченных категорий школьников. Связь изучаемых тем и решаемых задач с повседневной жизнью облегчает усвоение материала. Очевидная важность и польза умения выполнять базовые финансовые вычисления мотивирует школьников. Успешно сдавшие экзамен получают формальный документ, который может сыграть свою роль при устройстве на работу. Это позволяет побороть страх и предубеждение, связанные с математикой и учёбой вообще, и создаёт хорошую основу для дальнейших успехов в учёбе. В частности, если школьник сдаст ещё два подобных практически ориентированных экзамена, то ему будет засчитан более общий курс под названием «Применение математики». В определённом смысле экзамен «Применение математики» считается эквивалентом стандартного экзамена по математике для получения общего свидетельства о среднем образовании. Результаты экзамена «Применение математики» принимаются в качестве вступительных университетскими техническими колледжами (в настоящее время британское правительство уделяет большое внимание этой новой форме образования). В первой части

¹ Г.И.Фалин. Преподавание финансовой математики в английских школах. *Математика в школе*, 2013, №7, стр.45-52.

нашей статьи мы расскажем о курсе «Финансовые вычисления» и связанном с ним экзамене.

В начале 2013 года был опубликован черновой вариант нового национального учебного плана (National Curriculum) [2] и в нём изучению финансов, в частности, финансовой математике, уделяется большое внимание. Предполагается, что к концу 2013 года будет готов окончательный вариант этого плана, а преподавание по нему начнётся с сентября 2014 года. Во второй части нашей статьи мы расскажем о требованиях к изучению финансовой математики в этом плане.

2 Курс и экзамен «Финансовые вычисления»

2.1 Программа курса

Исходные требования к математической подготовке школьников минимальны – навыки простейших вычислений с целыми, отрицательными, дробными числами, десятичными дробями, знакомство с процентами и простейшими задачами на проценты.

В ходе курса школьник должен научиться:

1. производить вычисления на калькуляторе и на компьютере с использованием электронных таблиц;
2. решать задачи на деление сумм в заданной пропорции, находить доли и проценты от заданных сумм, нахождение целого по известной его доле,
3. решать задачи, связанные с вычислением налогов,
4. решать задачи с разными валютами и их обменными курсами;
5. понимать и использовать формулу сложных процентов;
6. понимать разницу между разными процентными ставками и вычислять их;
7. использовать графики для изучения изменения величин с течением времени;
8. интерпретировать статистические диаграммы;
9. округлять денежные суммы;
10. использовать обратные вычисления и оценки для проверки точности вычислений;
11. понимать и использовать основные финансовые термины (годовой доход, подоходный налог, капитализация процентов, национальное страхование, чистый доход, валовой доход, комиссия и т.д.), в частности, термины, связанные со страхованием и кредитованием.

Детали программы изложены в [3]. Изучение материала по теме «Финансовые вычисления» занимает 60 часов.

2.2 Исходные данные для экзамена

В настоящей статье мы основное внимание уделим экзамену и расскажем об экзамене, который был проведён 24 мая 2012 года. Для удобства изложения и/или восприятия российским читателем мы немного отредактировали тексты задач. Однако мы оставили британскую систему денежных единиц, если она использовалась в оригинальном тексте. Хотя это не нужно для решения задач, напомним, что 1 фунт (фунт стерлингов – денежная единица Великобритании) состоит из 100 пенсов и приблизительно эквивалентен 50 рублям. Для его сокращённого обозначения используется символ £, так что, например, запись £5,99 означает 5 фунтов и 99 пенсов (читается она обычно как «пять девяносто девять», без упоминания слов «фунтов» и «пенсов»).

За 1-3 недели до экзамена всем экзаменуемым выдаются материалы с исходными данными для экзамена (Data Sheet), в которых кратко описано несколько реальных ситуаций. Ниже приведен вариант таких материалов для экзамена, который состоялся 24 мая 2012 года [4]. В этом варианте описаны 5 ситуаций: Банковские счета, Аптека на центральной улице, Автомобильная парковка, Кредиты, Налогообложение в 2011–2012 гг. Цель предварительного ознакомления с исходными данными для экзамена – предоставить

школьнику возможность разобраться в описанных ситуациях, вспомнить терминологию и прикинуть, какая математика может потребоваться на экзамене для решения задач, связанных с этими ситуациями.

Банковские счета. Банк предлагает несколько видов счетов, характеристики которых приведены в следующей таблице.

Название счёта	Процентная ставка
Премьер	2,11%, выплачиваемые ежегодно
Элитный	1,07%, выплачиваемые каждые 6 месяцев
Стандартный	0,58%, выплачиваемые каждые 3 месяца
Мгновенный доступ	0,1%, выплачиваемые ежегодно

Аптека на центральной улице. Аптека на центральной улице вывесила следующее рекламное объявление.

Тушь для ресниц Скидка 12%	Губная помада Купите две и получите одну бесплатно
Все виды кремов для лица Скидка 25%	Все виды лака для ногтей Скидка 1/6

Автомобильная парковка. В таблице указана самая высокая и самая низкая стоимость парковки на семь дней без предоплаты в пяти основных аэропортах Великобритании.

Аэропорт	самая низкая стоимость парковки (фунтов)	самая высокая стоимость парковки (фунтов)
Бирмингем	44,64	71,50
Гатуик	38,90	51,20
Хитроу	63,80	157,00
Манчестер	29,99	79,99
Станстед	36,70	47,30

При предварительном бронировании с предоплатой парковка обычно обходится гораздо дешевле.

Кредиты. В таблице приведены ежемесячные платежи (в фунтах) в счёт погашения долга в зависимости от величины займа и периода погашения.

сумма, взятая в долг (фунтов)	период погашения			
	12 месяцев	24 месяца	36 месяцев	48 месяцев
250	23,13	12,71	9,24	7,51
500	46,24	25,38	18,43	15,00
750	69,34	38,05	27,68	22,48
1000	92,35	50,72	36,81	29,97
2000	184,51	101,36	73,51	59,91

Налогообложение в 2011–2012 гг.

Налог на добавленную стоимость. Стандартная ставка равна 20%. Ставка для топлива равна 5%.

Подходный налог. Чтобы рассчитать сумму вашего налога, найдите ваш налогооблагаемый доход, вычитая из вашего годового дохода налоговый вычет. Вы

платите подоходный налог по ставке 20% на первые 35000 фунтов вашего налогооблагаемого дохода. Вы платите подоходный налог по ставке 40% на ту часть вашего налогооблагаемого дохода, которая превышает 35000 фунтов.

Национальное страхование. Ставки равны: 0% на доход до 139 фунтов в неделю или 602 фунта в месяц. 12% (сокращённая ставка 10,4%) на доход от 139 фунтов до 817 фунтов в неделю или от 602 фунтов до 3540 фунтов в месяц. 2% на доход, превышающий 817 фунтов в неделю или 3540 фунтов в месяц. Если работник включён в профессиональную пенсионную схему, то он может платить взносы в фонд национального страхования по уменьшенной ставке. В этом случае работник будет получать от государства только базовую государственную пенсию по старости.

2.3 Письменная экзаменационная работа

Собственно экзаменационный вариант приведён ниже [5]. После каждого вопроса в скобках указано максимальное количество баллов за этот вопрос. Максимальное количество баллов за эту работу равно 50. Экзамен длится 1 час 15 минут. Разрешается использовать калькулятор. После номера задачи в скобках указана ситуация из «Исходных данных для экзамена», данные из которой используются в задаче.

1 («Банковские счета») Мэт кладёт на Стандартный счёт 2500 фунтов на 12 месяцев. По вкладу каждые 3 месяца начисляют проценты с капитализацией по ставке 0,58%.

1(a) Заполните до конца следующую таблицу.

	Исходная сумма в фунтах	Проценты в фунтах	Итоговая сумма в фунтах
Первые 3 месяца	2500,00	14,50	2514,50
Вторые 3 месяца	2514,50	14,58	2529,08
Третьи 3 месяца	2529,08		
Четвёртые 3 месяца			

(4 балла)

1(b) Выпишите общую сумму процентов, полученных Мэтом за год. (1 балл)

1(c) Используя этот результат, подсчитайте эквивалентную годовую ставку. (2 балла)

2(a) («Аптека на центральной улице») Кэрл покупает тушь для ресниц. Обычная цена этой туши была £8,99. Сколько заплатила Кэрл? (3 балла)

2(b) Речел купила три тюбика губной помады, каждый из которых обычно стоит £5,49. На распродаже, используя предложение «Купите две и получите одну бесплатно», Речел заплатила £10,98 за три тюбика. Сколько Речел заплатила за каждый тюбик? (2 балла)

3(a) Сьюзи и Луиза потратили 28 фунтов на косметический набор. Они решили разделить его стоимость в пропорции 4:3, причём Сьюзи заплатит большую часть. Сколько она заплатит? (3 балла)

3(b) Многие вещи дешевле в магазинах беспошлинной торговли. В аэропорту Лиссабона флакон духов стоит 84 евро. Курс обмена равен 1,21 евро за 1 фунт. Вычислите стоимость этого флакона духов в фунтах. (3 балла)

4(a) («Автомобильная парковка») Заполните эту электронную таблицу и найдите, сколько процентов составляет самая дорогая парковка от самой дешёвой. Ответы округлите до ближайшего целого числа.

	A	B	C	D
1	Аэропорт	самая низкая стоимость парковки (фунтов)	самая высокая стоимость парковки (фунтов)	самая дорогая парковка как процент от самой дешёвой
2	Бирмингем	44,64	71,50	
3	Гатуик	38,90	51,20	
4	Хитроу	63,80	157,00	
5	Манчестер	29,99	79,99	
6	Станстед	36,70	47,30	

(5 баллов)

4(b) Выпишите формулу, которая могла бы давать значение ячейки D6. (1 балл)

4(c) Вы бронируете и сразу же платите £99,22 за стоянку автомобиля на протяжении 4 недель в Хитроу. Эта цена составляет только 22,55% от суммы, которую вам пришлось бы заплатить, если бы вы не сделали предоплату. Вычислите стоимость парковки без предоплаты. (3 балла)

4(d) Колин говорит, что он платит около 32 фунтов в неделю за парковку в аэропорту (сумма округлена до ближайшего целого числа фунтов). Какой может быть максимальная стоимость парковки для Колина на три недели. (2 балла)

5 («Кредиты») Даниэль хочет купить iPad. Для этого он берёт займы 750 фунтов и обязуется выплатить долг за 24 месяца.

5(a) Выпишите сумму ежемесячного платежа в счёт погашения этого долга. (1 балл)

5(b) Подсчитайте общую сумму, которую выплатит Даниэль, и общую сумму процентов, которые он должен будет заплатить за этот кредит. (3 балла)

5(c) Выразите общую сумму процентов, которые Даниэль должен будет заплатить за этот кредит, как процент от суммы, взятой в долг. (2 балла)

6 («Налогообложение в 2011–2012 гг.») Макс зарабатывает в месяц 4108 фунтов и имеет право на налоговый вычет в размере 7475 фунтов. Вычислите:

6(a) налогооблагаемый доход Макса; (3 балла)

6(b) сумму подоходного налога, выплаченного Максом в этом году. (5 баллов)

7 Если капитал P фунтов за n лет вырастет до суммы A фунтов, то соответствующая годовая процентная ставка R рассчитывается по формуле $R = \sqrt[n]{\frac{A}{P}} - 1$. За четыре года капиталовложение в размере 3500 фунтов выросло до 4506 фунтов. Найдите годовую процентную ставку, соответствующую этому инвестиционному проекту (выразите её в процентах). (3 балла)

8 Во время распродажи хозяин магазина снижает исходные цены на 70%. В конце сезона распродаж он устраивает день окончательной распродажи, когда все цены, установленные на период распродаж, снижаются ещё на 20%. Эмма покупает вещь в день окончательной распродажи. Какой процент от исходной цены она платит? (4 балла)

2.4 Пример решения

Чтобы показать уровень сложности задач и требования к их решению, приведём подробное решение задачи 6.

6(a) Прежде всего следует найти общий годовой доход Макса. Для этого нужно месячный доход, т.е. 4108 фунтов, умножить на количество месяцев в году, т.е. на 12: $4108 \text{ (фунтов)} \times 12 = 49296 \text{ (фунтов)}$.

Чтобы вычислить налогооблагаемый доход Макса, нужно из общего годового дохода (как мы установили, он равен 49296 фунтов) вычесть сумму налогового вычета (по условию он равен 7475 фунтов): $49296 \text{ (фунтов)} - 7475 \text{ (фунтов)} = 41821 \text{ (фунт)}$.

6(b) Налогооблагаемый доход Макса превышает порог 35000 фунтов. Поэтому его следует разбить на две части: 35000 фунтов и остаток в размере $41821 \text{ (фунт)} - 35000 \text{ (фунтов)} = 6821 \text{ (фунт)}$.

Первая часть в размере 35000 фунтов облагается налогом по ставке 20% и потому для неё подоходный налог равен $35000 \text{ (фунтов)} \times 0,20 = 7000 \text{ (фунтов)}$.

Вторая часть в размере 6821 фунт облагается налогом по ставке 40% и потому для неё подоходный налог равен $6821 \text{ (фунт)} \times 0,40 = 2728,40 \text{ (фунтов)}$.

Складывая 7000 (фунтов) и 2728,40 (фунтов) мы найдём искомый подоходный налог; он равен 9728,40 (фунтов).

Некоторые из экзаменующихся записали ответ в виде 9728,4 (фунтов). Хотя формально этот ответ верен, он не соответствует обычной практике записи денежных сумм с двумя десятичными знаками после запятой (что означает целое количество пенсов). Часть экзаменующихся округлили 9728,40 (фунтов) до 9728 (фунтов). Хотя отброшенная сумма (40 пенсов) чрезвычайно мала, в финансовых расчётах подобное совершенно недопустимо (формально речь идёт о недоплате налога). За отмеченные недочёты оценка снижалась.

2.5 Результаты экзамена

Итоговая оценка за экзамен определялась суммарным количеством баллов, набранных за решение экзаменационных задач. Если набрано 45 баллов и больше, то ставилась оценка A* (аналог «5+»), от 40 до 45 баллов – оценка A (аналог «5»), от 31 до 40 баллов – оценка B (аналог «5 с минусом»), от 23 до 31 баллов – оценка C (аналог «4»), от 15 до 23 баллов – оценка D (аналог «4 с минусом»). Если набрано меньше 15 баллов, то выставлялась оценка U (неудовлетворительно). Так как этот экзамен относится к высокому уровню (higher level), оценка «3» и её варианты «3 с минусом», «3+» (британские оценки F, G, E) не выставлялась. Результаты экзамена распределились следующим образом: 13,7% экзаменовавшихся получили оценку A*, 15,2% – A, 28,7% – B, 17,9% – C, 15% – D, 9,5% – U.

3 Финансовая математика в новом английском национальном учебном плане по математике

В Англии дети обязаны посещать школу с 5 до 16 лет (с 2013 года учиться будут до 17 лет, а с 2015 года – до 18 лет). Первые 6 лет (в возрасте от 5 до 11 лет) обучение проходит в рамках начальной школы (primary school). Затем школьники занимаются на протяжении 5 лет (в возрасте от 11 до 16 лет) в средней школе (secondary school). Содержание обучения в большинстве государственных школ регулируется национальным учебным планом (частные и некоторые другие типы школ не обязаны им руководствоваться). В соответствии с национальным учебным планом обучение занимает 11 лет. Оно разбито на четыре ключевых этапа (key stages).

Первый этап: 1-й и 2-й года обучения (обычно в возрасте 5-7 лет).

Второй этап: 3-й, 4-й, 5-й и 6-й года обучения. На этом этапе школьники обычно обучаются с 7 до 11 лет.

Третий этап: 7-й, 8-й и 9-й года обучения (обычно в возрасте от 11 до 14 лет) – это первые три класса средней школы.

Четвёртый этап: 10-й и 11-й года обучения (обычно в возрасте от 14 до 16 лет) – это четвёртый и пятый классы средней школы.

Базовое школьное образование завершается экзаменами на получение аттестата о среднем образовании (GCSE). После этого школьники или начинают работать (возможно, после дополнительной профессиональной подготовки и сдачи соответствующих экзаменов) или продолжают обучение ещё на протяжении двух лет (так называемый *six form* – шестой класс) – либо в школе, где есть такая возможность, либо в колледже. Обычно цель шестого класса – сдача экзаменов на получение аттестата об образовании повышенного уровня (Advanced level General Certificate of Education – A-level GCE). Эти экзамены фактически являются вступительными экзаменами в британские университеты. Следует, однако, иметь в виду, что процедура поступления содержит много важных нюансов, особенно для ведущих университетов, которые проводят собственные вступительные экзамены – эта тенденция сейчас всё больше распространяется в связи с «инфляцией оценок».

Как мы отмечали, в начале 2013 года министерством образования Великобритании был опубликован черновой вариант нового национального учебного плана и в нём изучению финансов, в частности, финансовой математике, уделяется большое внимание.

Программа по математике нового национального учебного плана по математике кроме детального описания разнообразных математических фактов и навыков, которые могут быть использованы при решении задач финансового характера из повседневной жизни, явно указывает ряд специфических требований. Ниже мы перечисляем их по ключевым этапам и годам обучения.

Первый этап.

1-й год: распознавать банкноты и монеты различного номинала и знать их ценность.

2-й год: знать условные символы для фунта (£) и пенса (p), называть денежные суммы, уметь составлять заданную сумму из монет, решать простые практические задачи, связанные со сложением и вычитанием денежных сумм (только фунты или только пенса), в частности, рассчитывать сдачу при покупке.

Второй этап.

3-й год: решать практические задачи, связанные со сложением и вычитанием небольших денежных сумм, состоящих из фунтов и пенсов, в частности, рассчитывать сдачу при покупке.

4-й год: оценивать и сравнивать различные суммы в фунтах и пенсах, использовать десятичные дроби для записи денежных сумм.

5-й год: использовать все четыре арифметических действия при решении задач, с денежными суммами.

6-й год: понимать проценты, решать практические задачи с денежными суммами с использованием деления десятичных дробей на однозначное целое число.

Третий этап. Решать задачи финансовой математики на простые проценты.

Четвёртый этап. Использовать знание математики для решения различных задач финансовой математики, в том числе на сложные проценты, уметь рассчитывать возврат долга.

Задачи по финансовой математике, разбираемые на третьем и четвёртом этапах, могут быть достаточно содержательными, т.к. на этих же этапах преподаётся курс «Гражданство» (Citizenship), в рамках которого новый национальный учебный план предполагает изучение более практических финансовых вопросов: функция и использование денег, важность личного бюджета, управление деньгами, финансовые

продукты и услуги (третий этап); заработная плата, налоги, кредит, долг, финансовый риск, более сложные финансовые продукты и услуги (четвёртый этап).

Список литературы

1. Г.И.Фалин, А.И.Фалин. Аттестат о среднем образовании в Великобритании: новая программа по математике. *Математика*, 2011, №13, стр. 49-62.
2. www.education.gov.uk/nationalcurriculum
3. AQA Free-Standing Mathematics Qualification Specification For Exams and Certification June 2012 Onwards – Higher Level. AQA, 2010.
4. AQA Free-Standing Mathematics Qualification – Higher Level 4984/PM. Financial Calculations. Data Sheet. AQA, 2012.
5. AQA Free-Standing Mathematics Qualification – Higher Level 4984. Financial Calculations. Question Paper 24 May 2012. AQA, 2012.