Остатки при делении полного квадрата на натуральное число[1]

Г.И.Фалин, д.ф.м.н., проф.
кафедра теории вероятностей
механико-математический факультет
МГУ им М.В.Ломоносова (Москва)
http://mech.math.msu.su/~falin

В сборнике [1] задач для подготовки к ЕГЭ в 2013, изданном ФИПИ, в варианте 2 под номером С6 предлагалась следующая задача.

Решите в натуральных числах уравнение $n!+5n+13=k^2$, *где* $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ *– произведение всех натуральных чисел от* 1 *до* n.

Фактически в задаче нужно найти все натуральные числа n, для которых число $x_n=n!+5n+13$ является полным квадратом. Решение этой многих других задач с целочисленными переменными, в которых фигурирует полный квадрат натурального числа, базируется на следующем простом соображении: остаток при делении полного квадрата на натуральное число m может принимать лишь некоторые значения из m логически возможных: $0,1,\ldots,m-1$.

Например, при делении натурального числа k^2 на 4 в остатке может быть только 0 или 1. Действительно, если $k=2l$, то $k^2=4l^2$, т.е. остаток при делении k^2 на 4 равен 0. Если $k=2l+1$, то $k^2=4l^2+4l+1$, т.е. остаток при делении k^2 на 4 равен 1.

При делении натурального числа k^2 на 5 в остатке может быть только 0, 1 или 4 (иначе говоря, остатки 2 и 3 невозможны). Действительно, пусть остаток от деления k на 5 равен r, т.е. $k=5q+r$. Тогда $k^2=25q^2+10qr+r^2$, т.е. остаток при делении k^2 на 5 совпадает с остатком от деления r^2 на 5. Переменная r может принимать любое из 5 значений: 0, 1, 2, 3, 4. Соответственно, r^2 может принимать только значения 0 (остаток от деления на 5 равен 0), 1 (остаток от деления на 5 равен 1), 4 (остаток от деления на 5 равен 4), 9 (остаток от деления на 5 равен 4), 16 (остаток от деления на 5 равен 1).

Теперь займёмся нашей задачей. Если $n\geq 5$, то $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot n$ делится на 5. Число $5n$ всегда делится на 5. Поэтому при $n\geq 5$ остаток от деления числа $x_n=n!+5n+13$ на 5 такой же, как и остаток от деления числа

[1] Г.Фалин. Остатки при делении полного квадрата на натуральное число. *Математика*, 2014, №2, стр.32-33.

13 на 5, т.е. этот остаток равен 3. Поэтому при $n \geq 5$ число $x_n = n! + 5n + 13$ не может быть полным квадратом. Оставшиеся 4 значения числа n можно проанализировать, просто вычисляя числа $x_1 = 1! + 5 \cdot 1 + 13 = 19$, $x_2 = 2! + 5 \cdot 2 + 13 = 25$, $x_3 = 3! + 5 \cdot 3 + 13 = 34$, $x_4 = 4! + 5 \cdot 4 + 13 = 57$. Из них только число x_2 является полным квадратом (числа 5). Таким образом, рассматриваемое уравнение имеет единственное решение: $n = 2$, $k = 5$.

Использованный приём хорошо известен в элементарной математике и задачи на его использование давно предлагались на олимпиадах и вступительных экзаменах в МГУ (см., например, учебное пособие [2], где теме «делимость целых чисел» уделено большое внимание). Для лучшего усвоения метода и демонстрации его возможностей, мы разберём несколько дополнительных задач, отличающихся от упомянутой задачи С6 из [1].

Задача 1 (ф-т ВМК МГУ, устный экзамен, 2005 + Московская математическая олимпиада, 1941, 2 тур, 7-8 кл.) Доказать, что квадрат любого простого числа p>3 при делении на 12 даёт в остатке 1.

Решение. Пусть p – произвольное натуральное число. Рассмотрим структуру числа p при делении на 6: p=6q+r, где $q \geq 0$– неполное частное, а $r = 0,1,\ldots,5$ – остаток. Тогда $p^2 = 36q^2 + 12pr + r^2$. Поскольку два первых члена делятся на 12, остаток от деления на 12 числа p^2 такой же, как и остаток от деления на 12 числа r^2. Поскольку $p = 6q + r$ – простое число, большее 3, из 6 логически возможных вариантов для остатка ($r = 0,1,\ldots,5$), реально возможны лишь 2: r=1 и r=5. Соответственно, r^2 может быть только 1 или 25. В каждом случае остаток от деления на 12 равен 1.

Задача 2 (ф-т ВМК МГУ, 2005, устный экзамен) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые не представимы в виде суммы квадратов двух других натуральных чисел.

Решение. Как мы видели, квадрат целого числа даёт при делении на 4 в остатке 0 или 1. Поэтому сумма квадратов двух любых натуральных чисел при делении на 4 может давать в остатке только 0, 1 или 2. Следовательно, любое натуральное число вида $n = 4k + 3$ (таких чисел бесконечно много) нельзя представить в виде суммы квадратов двух других натуральных чисел.

Задача 3 (ф-т ВМК МГУ, 2004, устный экзамен) Существуют ли целые числа m и n, удовлетворяющие уравнению $m^2 + 1954 = n^2$?

Решение. Поскольку квадрат целого числа даёт при делении на 4 в остатке 0 или 1: $n^2 = 4k + r$, $m^2 = 4l + s$, где r,s равны 0 или 1. Поэтому $n^2 - m^2 = 4(k - l) + (r - s)$. Разность $r - s$ может принимать только значения 0, 1, –1. Это означает, что разность квадратов двух любых натуральных чисел при делении на 4 может давать в остатке только 0, 1 или

3. С другой стороны, число 1954 при делении на 4 даёт остаток 2. Следовательно, исходное уравнение не имеет решений в целых числах.

Задача 4 (ф-т ВМК МГУ, 2001, устный экзамен) Решить в целых числах уравнение $x^2-7y^2=5$.

Решение. Равенство $x^2-7y^2=5$ равносильно тому, что $x^2=7y^2+5$, и, в частности, влечёт, что остаток от деления числа x^2 на 7 равен 5. Найдём, какие остатки при делении на 7 может давать полный квадрат натурального числа *x*. Если $x=7q+r$, где $r=0,1,\ldots,6$, то $x^2=49q^2+14qr+r^2=7(7q^2+2qr)+r^2$. Поэтому остаток от деления x^2 на 7 совпадает с остатком от деления r^2 на 7. Число *r* может принимать только значения из списка $0,1,\ldots,6$. Соответственно, все возможные значения величины r^2 есть: 0, 1, 4, $9=7\cdot1+2$, $16=7\cdot2+2$, $25=7\cdot3+4$, $36=7\cdot5+1$. Следовательно, при делении на 7 полный квадрат натурального числа может давать только остатки 0, 1, 2, 4; логически возможные (в соответствии с определением деления с остатком) значения 3, 5, 6 – исключены. Таким образом, равенство $x^2=7y^2+5$ невозможно (как и более общее равенство $x^2=7z+5$).

Литература

1. ЕГЭ-2013: Математика: самое полное издание типовых вариантов заданий / авт.-сост. И.В.Ященко, И.Р.Высоцкий; под ред. А.Л.Семёнова, И.В.Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2013. – 94 стр. (Федеральный институт педагогических измерений) ISBN 978-5-17-077049-6

2. Г.И.Фалин, А.И.Фалин. *Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ*. 2-е изд. Москва, БИНОМ, 2009. 367 стр. ISBN 978-5-9963-0008-2