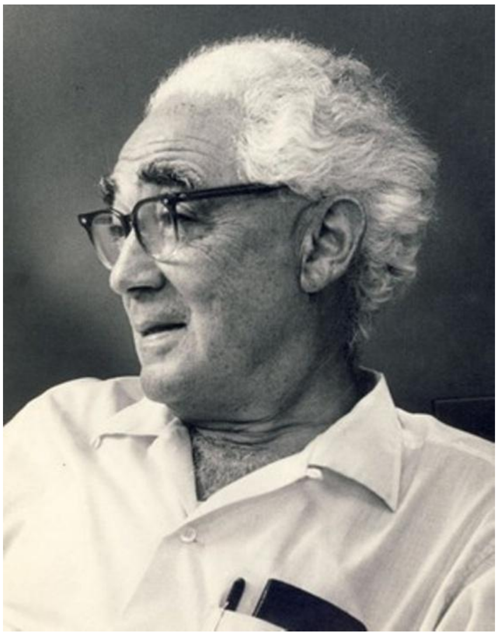
История опытов с бросанием монеты Часть 5. Опыт Феллера[1]

Г.И.Фалин, д.ф.м.н., проф.
кафедра теории вероятностей
механико-математический факультет
МГУ им М.В.Ломоносова (Москва)
http://mech.math.msu.su/~falin

В пятой части статьи мы рассказываем об «опыте с бросанием монеты», который провёл В.Феллер, и, в том числе, о необычных свойствах случайных флуктуаций при бросании монеты. Мы также кратко рассказываем о жизни и научной работе этого выдающегося учёного.

Ключевые слова: бросание монет, опыты, устойчивость частот, случайные флуктуации

Один из самых известных специалистов 20 века по теории вероятностей Вильям (Уильям) Феллер (William Feller, 7.07.1906 –14.01.1970) родился в г.Загреб (в то время Австро-Венгрия, ныне – Хорватия) в семье известного фармацевта Евгения Виктора Феллера. В 1923 году он поступил в университет Загреба, а через два года продолжил занятия математикой в Гёттингеннском университете, где под руководством выдающегося немецкого математика Рихарда Куранта в 1926 году защитил докторскую диссертацию. Два года он работал ассистентом профессора Куранта и в 1928 году получил должность доцента в университете Киля. После прихода к власти национал-социалистов был вынужден эмигрировать, сначала в Скандинавию (в 1933), а затем в США (в 1939). С 1939 по 1945 гг. он был профессором Брауновского университета, с 1945 по 1950 – профессором Корнельского университета, а с 1950 г. и до смерти – профессором университета Принстона.



Вильям Феллер

[1] Г.И.Фалин. История опытов с бросанием монеты. Часть 5. Опыт Феллера. *Математика в профильной школе. Фрактал*, 2015, №2, стр.44-54.

Всемирную известность среди специалистов по теории вероятностей ему принёсла опубликованная в 1950 году в США книга [1], которая считается одним из лучших учебников по предмету. На стр.40 этой книги мы читаем: «…мы приводим здесь запись результатов подобного эксперимента, ***соответствующего*** (выделено мной – Г.Ф.) 10000 бросаний монеты… Суммарное число «появлений герба» равно 4979…». Эта фраза на стр. 28 книги [2] была интерпретирована так: Феллер 10000 раз подбросил монету и по результатам этого эксперимента частота выпадения орла оказалась равной 0.4979. В этом виде она и перекочевала в школьные учебники.

Но если внимательно прочитать книгу Феллера, то выяснится, что он вообще не проводил никаких опытов с бросанием монеты. На самом деле Феллер описывает совсем другой эксперимент. Прежде всего, на стр. 38 своей книги [1] он отмечает, что «применение утончённых статистических методов к фактическим результатам опытов с бросанием монет неизменно показывало, что выпадение герба и выпадение решётки не являются одинаково вероятными событиями… отклонения от нашей схемы всегда связаны с такими явлениями, как, например, несовпадение центра тяжести монеты с её геометрическим центром». На стр.40 он продолжает: «Бросание любой настоящей монеты приводит к искажённым результатам, из-за действия не поддающихся учёту факторов» (мы хорошо видели это в наших статьях [3] и [4], посвящённых опытам Джевонса и Романовского). Поэтому Феллер предлагает рассмотреть «физический эксперимент, результаты которого оказываются значительно ближе к идеальной «модели бросания монеты», чем для любой настоящей монеты».

Такой эксперимент в 1947 году провели в США сотрудники исследовательской корпорации RAND при поддержке инженеров авиастроительной компании Douglas Aircraft Company. С помощью созданного ими электронного устройства на основе генератора случайных импульсов была получена последовательность из 1 миллиона случайных цифр. Первые 20 членов этой последовательности приведены ниже:

1;0;0;9;7;3;2;5;3;3;7;6;5;2;0;1;3;5;8;6.

Цифры, образующие эту последовательность, являются случайными в том смысле, что вероятность появления конкретной цифры от 0 до 9 равна 0.1. Важно также подчеркнуть, что, с какого бы места мы ни начали рассматривать эту последовательность, для любой позиции вероятность появления конкретной цифры не зависит от того, какие цифры и как часто появлялись на предшествующих позициях. Используя более аккуратный математический язык, можно сказать, что была получена реализация последовательности независимых одинаково распределённых случайных величин, каждая из которых равномерно распределена на множестве {0;1;…;9}.

Эта последовательность была опубликована в 1955 году в книге [5]. Для публикации цифры сгруппированы по 5 и потому можно сказать, что книга [5] содержит 200 тысяч случайных пятизначных неотрицательных целых чисел. Вероятность появления конкретного числа из промежутка $[0;99999]$ равна $\dfrac{1}{100\,000}$, причём различные числа не зависят друг от друга.

Эти пятизначные числа расположены в таблицу из 10 столбцов и 20000 строк, перенумерованных от 00000 до 19999 (на каждой из 400 страниц книги [5] напечатано 50 строк, разбитых на 10 групп по 5 строк в каждой). Таким образом, общее число цифр равно $5\times10\times20000=1000000$. На Рисунке 1 показан фрагмент стр.1 книги [5], содержащий первые 10 строк (500 случайных цифр). В каждой строке в первом столбце указан номер строки, а затем идёт очередная группа из 50 случайных цифр.

TABLE OF RANDOM DIGITS 1

00000	10097	32533	76520	13586	34673	54876	80959	09117	39292	74945
00001	37542	04805	64894	74296	24805	24037	20636	10402	00822	91665
00002	08422	68953	19645	09303	23209	02560	15953	34764	35080	33606
00003	99019	02529	09376	70715	38311	31165	88676	74397	04436	27659
00004	12807	99970	80157	36147	64032	36653	98951	16877	12171	76833
00005	66065	74717	34072	76850	36697	36170	65813	39885	11199	29170
00006	31060	10805	45571	82406	35303	42614	86799	07439	23403	09732
00007	85269	77602	02051	65692	68665	74818	73053	85247	18623	88579
00008	63573	32135	05325	47048	90553	57548	28468	28709	83491	25624
00009	73796	45753	03529	64778	35808	34282	60935	20344	35273	88435

Рисунок 1. Фрагмент страницы 1 из книги «A million random digits … »

Случайные числа являются основой метода Монте-Карло, который, в свою очередь, широко используется для решения многих научных и технических задач. В настоящее время случайные числа без труда генерируются компьютерами (строго говоря, эти числа являются псевдо-случайными). Например, в Microsoft Excel это делается с помощью встроенных функций RAND() (СЛЧИС() в русской версии), которая генерирует случайное действительное число, равномерно распределённое на промежутке [0;1], и RANDBETWEEN(N,M) (СЛУЧМЕЖДУ(N,M) в русской версии), которая генерирует случайное целое число, равномерно распределённое на множестве N,N+1,…,M. Но в первой половине 20 века основным источником случайности были таблицы случайных чисел. Таблица корпорации RAND считается лучшей из них. Подробнее об истории таблиц случайных чисел можно прочитать в рецензии [6] на книгу [5]; см. также статью [7], где кратко изложена история эксперимента корпорации RAND и в общих чертах описано устройство использованного электронного устройства.

Чтобы использовать таблицу случайных цифр, полученную корпорацией RAND, для иллюстрации закономерностей, возникающих при бросании идеальной монеты, Вильям Феллер провёл следующие рассуждения. Всего имеется 10 цифр: 0;1;2;3;4;5;6;7;8;9. Из них ровно 5 являются чётными; это цифры 0;2;4;6;8. Поэтому вероятность того, что конкретная цифра является чётной, равна $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$, т.е. вероятность появления чётной цифры такая же, как и вероятность выпадения орла при бросании правильной монеты. Следовательно, заменив чётную цифру на букву «о» (орёл), а нечётную – на «р» (решка), мы получим последовательность, которую *можно рассматривать* как результат 1 миллиона бросаний идеальной монеты. В частности, таблица, приведённая на Рисунке 1 (которая содержит первые 500 случайных цифр из книги [5]), превратится в Таблицу 1.

Таблица 1

номер строки	очередная группа результатов 50 «бросаний» монеты
00000	роорр ропрр ропоо рроо роорр рооро оорpр орррр рроро ророр
00001	ррроо оооор ооoро рооро оооор ооорр ооoро рoooo ооооо ррoор
00002	ооооо оорpр рроoр оррoр ороoр оoроо ррррр ророо рроoо рроoо
00003	рроpр оорoр оррро ропрр ропрр ррроp ооoро ропрр ооoро ороpр
00004	рооoр рррро оорpр ророр ооoро роорр ропрр роорр ропрр роорр
00005	оооoр ропрр рооро рооро роорр ропро ороpр рроoр ррррр оррро
00006	ррооо рооoр орррр ооооо ррроp ооoро оорpр ороpр ороoр оррро
00007	ороoр ррооо ооорр ороро оооoр рооро рроpр ороoр рооoр оорpр
00008	орррр ропрр оррoр ороoо ропрр ррроо ооооо оороp ороpр ороoо
00009	рррро орррр оррoр оорро ррооо рoooo оорpр оороо рроpр ооорр

Ещё раз подчеркнём, что в Таблице 1 приведены не результаты 500 бросаний монеты, а результаты *совсем другого* эксперимента, который *статистически неотличим* от эксперимента с бросанием монеты, является его *статистической копией*. Под статистической копией бросания монеты мы понимаем стохастический эксперимент, в результате которого наблюдается появление или нет события *A*, вероятность которого равна 0.5. Поэтому приведённые выше экспериментальные данные *можно интерпретировать* как частоту выпадения орла в опыте с бросанием монеты. Помня это обстоятельство, мы больше не будем употреблять кавычки, говоря о «бросаниях монеты» в «опыте Феллера».

После $n = 500$ бросаний монеты, результаты которых зафиксированы в Таблице 1, общее число орлов S_n равно 246. Поэтому относительная частота появления орла $\nu_n = \frac{S_n}{n}$ равна 0.492, что очень близко к вероятности $p = 0.5$ этого события. В Таблице 2 показана относительная частота $\nu_n = \frac{S_n}{n}$ по мере роста числа n бросаний монеты (с шагом 50; считается, что строки из Таблицы 1 расположены друг за другом).

Таблица 2

Общее число «бросаний», n	Число «орлов» в очередной группе из 50 «бросаний»	Общее число «орлов», S_n	Частота появления «орла», $\nu_n = \frac{S_n}{n}$
50	20	20	0.400
100	35	55	0.550
150	27	82	0.547
200	20	102	0.510
250	20	122	0.488
300	21	143	0.477
350	26	169	0.483
400	28	197	0.493
450	25	222	0.493
500	24	246	0.492

В книге В.Феллера [1] в качестве исходных экспериментальных данных представлена Таблица 3 на стр.40, аналогичная нашей Таблице 2. В этой таблице В.Феллер привёл «частоты появления чётных цифр в одном из разделов A million random digits …» (Примечание на стр.40 [5]). Однако Феллер не указал, из какого раздела взяты эти цифры, так что ему приходится верить на слово. Мы в качестве основы взяли ясно указанную часть таблицы [5]. Это увеличивает достоверность последующих рассуждений и, самое главное, позволяет решать дополнительные задачи.

Для большей наглядности на рис. 2 зависимость частоты ν_n от числа n бросаний монеты представлена графически (этот и все последующие графики, равно как и таблицы, построены с помощью Microsoft Excel).

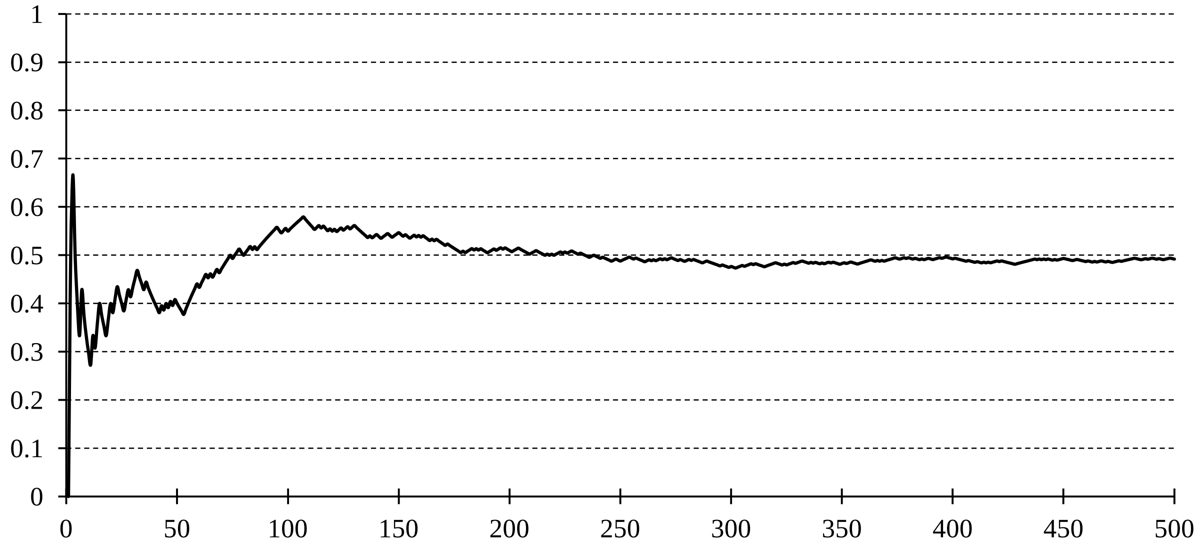


Рисунок 2

По поводу этого рисунка необходимо сделать важное замечание. Поскольку аргумент функции ν_n является дискретной переменной (величина n принимает значения 1,2,3,…), график этой функции состоит из изолированных точек вида $(n;\nu_n)$. Например, для первых 50 бросаний (первая строка Таблицы 1) график последовательности ν_n изображён на Рисунке 3.

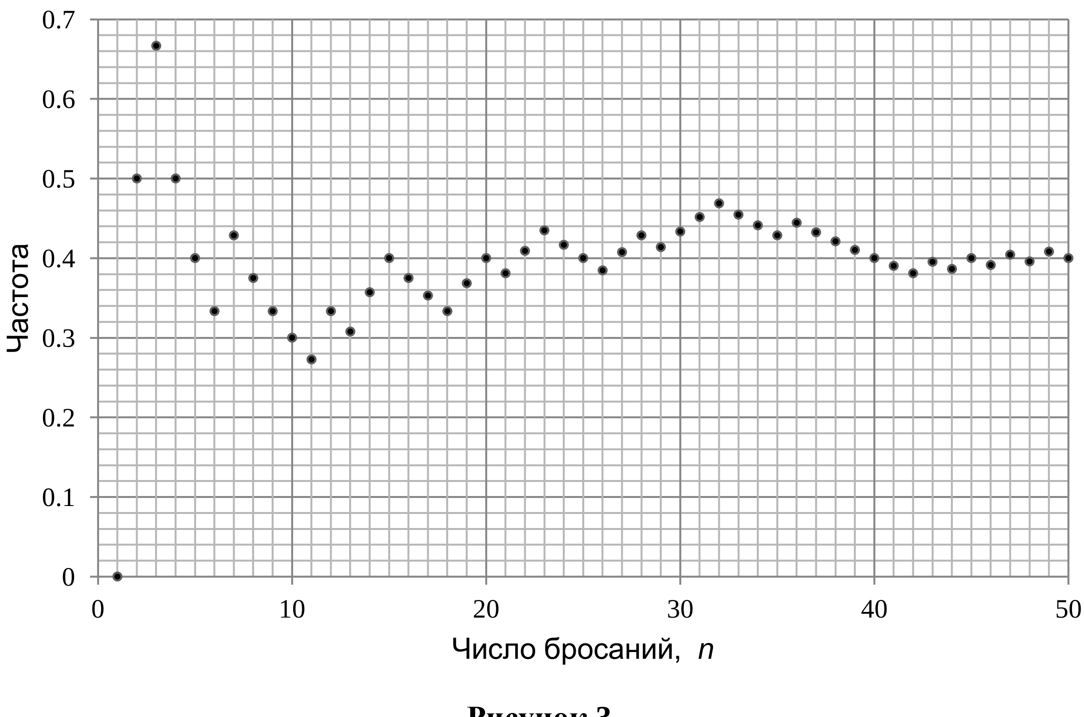


Рисунок 3

Чтобы лучше видеть характер зависимости ν_n от n, последовательные точки графика, изображённого на Рисунке 3 (и других подобных графиков), соединяют прямыми линиями. В результате получается ломанная линия, изображённая на Рисунке 4. Хотя часто графиком последовательности называют эту ломаную, надо помнить, что, строго говоря, графиком последовательности будут только вершины ломаной. Именно так и был получен Рисунок 2.

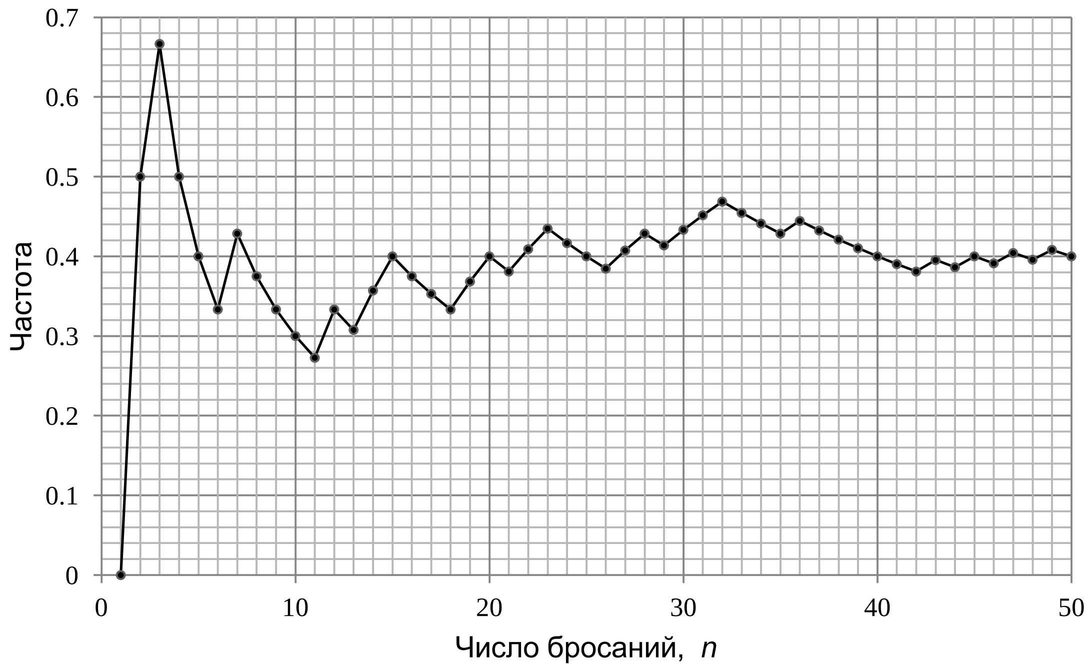


Рисунок 4

Из Рисунка 2 хорошо видно, что отклонения частоты ν_n от вероятности $p = 0.5$ становятся всё меньше. Однако Феллер бросал монету вовсе не для демонстрации факта устойчивости частоты наступления события в стохастическом эксперименте – как мы отмечали в наших предыдущих статьях, это свойство уже давно было общеизвестно. В §6 гл.III книги [1] он использовал данные эксперимента корпорации RAND для демонстрации необычных свойств случайных флуктуаций при бросании монеты и разъяснения смысла важных теорем о случайных блужданиях.

Хотя Феллер использует другой язык (об этом мы расскажем позже), фактически он демонстрирует характер приближения частоты ν_n к вероятности выпадения орла для длинной серии бросаний монеты. Использовать для этих целей график частоты, подобный изображённому на Рисунке 2, нельзя. Дело в том, что крайне малые значения разности $\nu_n - p$ не позволяют понять особенности приближения частоты к вероятности по мере роста числа экспериментов – для этого нужно рассматривать правую часть графика на Рисунке 2 в микроскоп. Но увеличить колебания величины $\nu_n - p$ можно и с помощью «математического микроскопа». Для этого нужно измерять $\nu_n - p$ не в обычных единицах, а выбрать гораздо более мелкую единицу масштаба, причём тем меньшую, чем больше n. Естественным кандидатом на эту роль является дробь $\frac{1}{n}$, что приводит нас к величине $\Delta_n = (\nu_n - p) : \frac{1}{n} = n\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right) = S_n - 0.5n$ (как мы ранее определили, S_n – общее число орлов). Если вместо дроби $\frac{1}{n}$ взять дробь $\frac{1}{2n}$ (что совершенно не принципиально), то мы получим целочисленную (что немного приятнее) величину $s_n = 2S_n - n$.

Эта величина, как, впрочем, и Δ_n, допускает простую наглядную интерпретацию с помощью следующей азартной игры, в которую играет игрок по имени Пётр. Бросается монета; если выпадает орёл, то Пётр выигрывает 1 рубль, а если решка, то проигрывает 1 рубль. Если выигрыш Петра в *k*-й игре обозначить через ε_k, то можно сказать, что ε_k является случайной величиной, которая принимает значения +1 и −1 с равными вероятностями: $P(\varepsilon_k = +1) = \frac{1}{2}$, $P(\varepsilon_k = -1) = \frac{1}{2}$, причём случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ независимы в совокупности. Вместо величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, описывающих выигрыш Петра в отдельных партиях, удобно ввести чистый выигрыш Петра после n первых бросаний монеты. Нетрудно сообразить, что чистый выигрыш после n бросаний равен разности между числом орлов и числом решек. С другой стороны, поскольку общее число бросаний равно n, а число орлов равно S_n, число решек равно $n - S_n$. Поэтому чистый выигрыш равен $S_n - (n - S_n) = 2S_n - n$, т.е. ранее введённой величине s_n, которая характеризует отличие между частотой и вероятностью. Отметим, что величину s_n можно записать и в виде $s_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$. Соответственно, $\varepsilon_n = s_n - s_{n-1}$, $n \geq 1$ (чтобы это равенство было верным и при $n = 1$, нужно ввести величину $s_0 = 0$).

Удобно считать, что на одно бросание требуется, например, 1 секунда и, соответственно, говорить о выигрыше Петра в момент *n* или на промежутке времени длины *n*.

Чтобы сделать изложение более наглядным и увлекательным, В.Феллер ведёт свой рассказ на примере этой азартной игры. Мы повторим его в сокращённой форме, но на нашем экспериментальном материале.

Рассмотрим опять результаты 500 бросаний монеты из Таблицы 1 и заменим каждую букву «р» на число −1, а каждую букву «о» – на число +1. Поскольку $s_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$, последовательно суммируя числа из получившейся таблицы, мы получим чистый выигрыш Петра s_n по мере роста числа n бросаний монеты. С шагом 50 результаты расчётов приведены в Таблице 3 (она фактически является вариантом Таблицы 2).

Таблица 3

Общее число бросаний, n	Число орлов в очередной группе из 50 бросаний	Общее число орлов, S_n	Общее число решек, $n - S_n$	Чистый выигрыш Петра, s_n
50	20	20	30	–10
100	35	55	45	10
150	27	82	68	14
200	20	102	98	4
250	20	122	128	–6
300	21	143	157	–14
350	26	169	181	–12
400	28	197	203	–6
450	25	222	228	–6
500	24	246	254	–8

На Рисунке 5 зависимость чистого выигрыша Петра от числа n бросаний монеты для этих 500 бросаний показана графически. Ломаная на этом рисунке состоит из звеньев с угловыми коэффициентами ± 1. Звено, соответствующее $x \in [n-1; n]$, имеет угловой коэффициент $+1$, если при n-м бросании выпал «орёл» и -1 – если «решка» (на рисунке угловые коэффициенты больше по абсолютной величине, т.к. выбраны разные масштабы по осям).

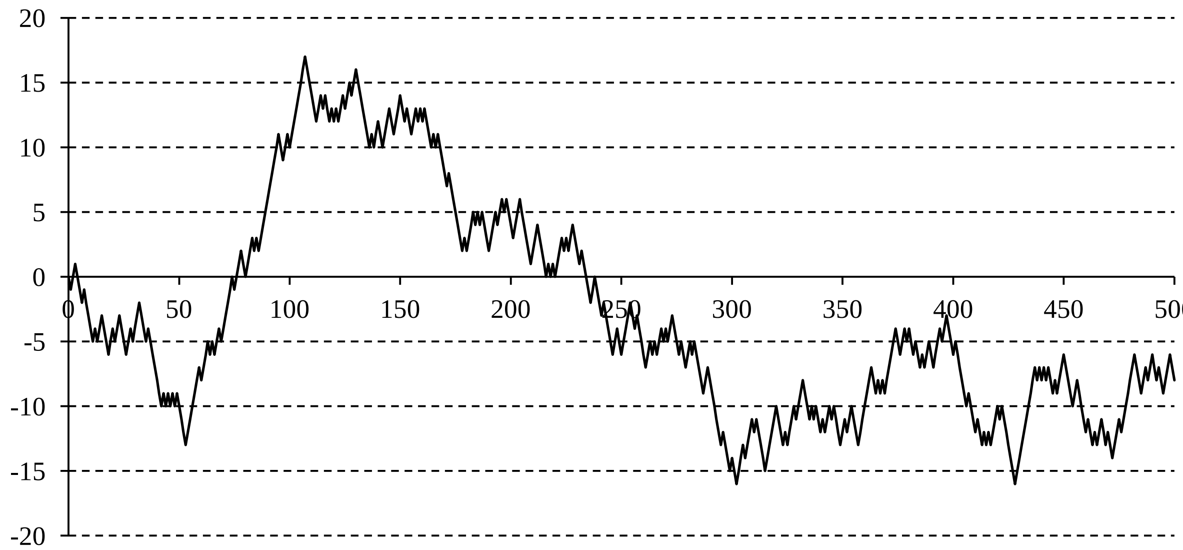


Рисунок 5

Сам Феллер использовал точечный график (Рис.5 на стр.100 книги [1]), аналогичный нашему графику на Рисунке 5, для *n*=10 тыс. Чтобы разместить этот график на одной книжной странице, Феллер разорвал его на три части: первая для *n* от 1 до 500, вторая для *n* от 500 до 6000, третья *n* от 6000 до 10000. Последний кусок состоит из 4000 точек и имеет длину по оси абсцисс в 9 см. Поэтому на 1 мм приходится примерно 50 точек, что должно смотреться как непрерывная линия. Между тем на рисунке из книги [1] мы ясно видим «созвездие» из изолированных точек. При увеличении копии страницы на компьютере ясно видно, например, что на куске графика для *n* от 6001 до 7000 изображено 50 точек (вместо 1000). Видимо, значения *n* откладывались с шагом 20.

Вернёмся к нашей игре. Будем говорить, что Пётр *в выигрыше* после *n*-го бросания, если $s_n > 0$ (т.е. чистый выигрыш положителен) или $s_n = 0$, но $s_{n-1} = 1$ (т.е. Пётр имел чистый выигрыш в размере $+1$ после $n-1$-й партии, проиграл n-ю партию, но ещё не в убытке). Геометрически это означает, что звено ломаной s_n, соответствующее отрезку $[n-1; n]$, находится выше оси абсцисс (нестрого). Аналогично, мы будем говорить, что Пётр *в проигрыше* после *n*-го бросания, если $s_n < 0$ (т.е. чистый выигрыш отрицателен) или $s_n = 0$, но $s_{n-1} = -1$ (т.е. Пётр был в проигрыше после $n-1$-й партии, выиграл n-ю партию, но ещё не имеет прибыли). Геометрически это означает, что звено ломаной s_n, соответствующее отрезку $[n-1; n]$, находится ниже оси абсцисс (нестрого).

Если Пётр был в проигрыше после $(n-1)$-го бросания, но оказался в выигрыше после n-го бросания, мы будем говорить о переходе от проигрыша к выигрышу в момент n. Ясно, что это возможно только в случае, когда Пётр после $(n-2)$-й партии проигрывал 1, но выиграл две последующие партии ($s_{n-2} = -1, \varepsilon_{n-1} = +1, \varepsilon_n = +1$ или, что равносильно, $s_{n-2} = -1, s_{n-1} = 0, s_n = 1$). Геометрически это означает, что звено ломаной s_n, соответствующее отрезку $[n-2; n]$, пересекает ось абсцисс снизу вверх.

Аналогично, если Пётр был в выигрыше после $(n-1)$-го бросания, но оказался в проигрыше после n-го бросания, мы будем говорить о переходе от выигрыша к проигрышу в момент n. Ясно, что это возможно только в случае, когда Пётр выигрывал 1 после $(n-2)$-й партии, но проиграл две последующие партии ($s_{n-2}=1, \varepsilon_{n-1}=-1, \varepsilon_n=-1$ или, что равносильно, $s_{n-2}=1, s_{n-1}=0, s_n=-1$). Геометрически это означает, что звено ломаной s_n, соответствующее отрезку $[n-2;n]$, пересекает ось абсцисс сверху вниз.

Переход от проигрыша к выигрышу и переход от выигрыша к проигрышу Феллер объединяет термином «смена лидерства». В ходе игры через случайные промежутки происходит смена лидерства: промежутки, когда Пётр был в выигрыше сменяются промежутками, когда он в проигрыше, и наоборот. Соответственно, сам график s_n состоит из своеобразных «волн» случайной длины, которые поочерёдно находятся то выше оси абсцисс, то ниже. Эти «волны» хорошо видны на Рисунке 5.

Для графика частоты ν_n промежуток, когда Пётр находится в выигрыше, означает, что этот график расположен выше предельного уровня $y=\frac{1}{2}$. Аналогично, промежуток, когда Пётр находится в проигрыше, означает, что график ν_n расположен ниже предельного уровня $y=\frac{1}{2}$. «Волны» соответствуют колебаниям частоты вокруг горизонтальной прямой $y=\frac{1}{2}$.

Поскольку игра является справедливой (шансы Пётра и его соперника на выигрыш равны), «очевидно», что после большого числа бросаний примерно половину времени в выигрыше будет Пётр, а оставшееся время (тоже примерно половину общего времени игры) – его противник. В равной степени «очевидно», что число ничьих в игре (моментов времени, когда $s_n=0$) пропорционально времени игры. Например, за 2 дня игры ничьих будет в 2 раза больше, чем за 1 день (ведь статистически игры в первый и второй день являются копиями друг друга). Вследствие этого длина «волны», хотя и является случайной, в среднем не зависит от числа бросаний.

Для частоты ν_n эти «очевидные» умозаключения означают, что число точек пересечения её графиком предельного уровня $y=\frac{1}{2}$ пропорционально длине графика (измеренной по оси абсцисс), а сам график находится выше предельного уровня примерно столько же времени, сколько и ниже его, причём частота колебаний в среднем постоянна.

Но эти «очевидные» умозаключения ошибочны! Точный математический анализ, проведённый Феллером в гл.III книги [1], даёт парадоксальные выводы:

1. Число ничьих растёт пропорционально квадратному корню из продолжительности игры. Феллер отмечает, что при *n*=10 тыс. медиана числа ничьих равна 67, а при увеличении продолжительности игры в 100 раз (до *n*=1 млн.) медиана равна 674 (т.е. увеличивается только в 10 раз).
2. Ничья только примерно в половине случаев означает действительное изменение лидерства. Соответственно, при увеличении числа бросаний с 10 тыс. типичная длина «волны» увеличивается примерно в 10 раз, с примерно 300 до 3000. Иначе говоря, «с увеличением продолжительности игры относительное число ничьих быстро убывает, а «волны» возрастают по длине.» (здесь и ниже все цитаты взяты из гл.III книги Феллера [1]). При *n*=10 тыс. бросаний правильной монеты вероятность отсутствия смен лидерства равна примерно 1% – событие такой вероятности вполне может произойти. «Мало кто поверит, что бросания правильной монеты могут привести к такой последовательности исходов, когда один из игроков всё время находится в выигрыше, однако и это вполне реально.»

Хотя на Рисунке 5 представлен случай относительно малого числа бросаний, тем не менее отмеченные странные эффекты, возникающие при бросании монеты, хорошо видны. Действительно, первое бросание даёт «решку», что приводит к проигрышу. Второе бросание даёт «орла», так что баланс для Петра становится равным 0, но в силу нашего определения мы считаем, что Пётр всё ещё в проигрыше. Третье бросание даёт «орла» и выигрыш Петра становится равным 1. Таким образом, после третьего бросания произошла смена лидерства; при этом длина первой «волны» равна 2. Четвёртое бросание даёт «решку» и баланс для Петра становится равным 0, но в силу нашего определения мы считаем, что Пётр всё ещё в выигрыше. Пятое бросание даёт «решку» и выигрыш Петра становится равным -1 – после пятого бросания произошла очередная смена лидерства, а длина второй «волны» равна 2. Продолжая подобным образом, мы получим следующие моменты, когда в игре была ничья: 2, 4, 74, 76, 80, 216, 218, 220, 234, 238, 638, 640, 644, 654, 656, 722, 762, 782, 784, … (мы используем для имитации бросания монеты не 500 первых чисел из книги [5], а больше). При этом смена лидерства была только после ничьих в моменты 2, 4, 76, 234, 640, 644, 656, 784, … Соответственно, распределение длин «волн» выглядит так (знак после длины «волны» указывает на её тип: «минус» означает период проигрыша, «плюс» – период выигрыша.

2–, 2+, 72–, 158+, 406–, 4+, 12–, 128+, …

Чем больше число бросаний в анализируемой серии, тем отчётливее видны «странности» в поведении монеты. Пусть, например, «монету подбрасывают через каждую секунду на протяжении 365 дней…». Тогда «в одном из двадцати случаев более удачливый игрок будет в выигрыше не менее 364 дней и 10 часов в году.» Итак, «если несколько монет подбросить n раз каждую, то удивительно большая доля этих монет будет вести себя таким образом, что один из играющих окажется почти всё время в выигрыше и в относительно немногих случаях лидерство будет меняться и колебаться так, как это обычно ожидается от правильной монеты.»

В.Феллер резюмирует: «…общепринятое мнение о характере случайных колебаний лишено оснований и … выводы из закона больших чисел часто истолковываются неправильно… Короче говоря, если бы результаты достаточно длинных игр с бросанием монеты описывал современный адвокат или психолог, он бы классифицировал большинство монет как неправильные.»

Литература

1. В.Феллер. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Том 1. М.:Мир, 1984 (первое издание: William Feller. An Introduction to Probability Theory and its Applications, Volume one, John Wiley & Sons, New York, 1950).

2. Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.В. Введение в теорию вероятностей. М.: Наука, 1982.

3. Г.И.Фалин. История опытов с бросанием монеты. Часть 3. Опыт Джевонса. *Математика в школе*, 2015, №1, стр.52-58.

4. Г.И.Фалин. История опытов с бросанием монеты. Часть 4. Опыт Романовского. *Математика в профильной школе. Фрактал*, 2015, №1, стр.33-40.

5. A million random digits with 100,000 random deviates. Rand Corporation. Glencoe, Ill.: Free Press, 1955 (копия этой публикаии доступна по адресу: http://www.rand.org/pubs/monograph_reports/MR1418.html).

6. John W. Tukey. The Analysts' Bookshelf . *Journal of the Operations Research Society of America*, 1955, Vol. 3, No. 4, pp. 568-571.

7. George W. Brown. History of RAND's random digits – summary. The RAND Corporation. Santa Monica, California. (копия этой публикаии доступна по адресу: http://www.rand.org/content/dam/rand/pubs/papers/2008/P113.pdf).