Московский центр непрерывного математического образования
(МЦНМО)
Московский центр педагогического мастерства (ЦПМ)
Кафедра теории вероятностей МГУ им. М.В.Ломоносова

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ С БРОСАНИЕМ МОНЕТЫ графа де БЮФФОНА

Лекция для участников финального тура IX Олимпиады по теории вероятностей
20 февраля 2016 г.

Фалин Геннадий Иванович

доктор физико-математических наук
профессор
кафедра теории вероятностей
механико-математический факультет
МГУ им.М.В.Ломоносова

http://mech.math.msu.su/~falin

Предмет теории вероятностей

Если речь идёт о событии, связанном с уникальным экспериментом, то сказать можно только одно: оно либо произойдёт, либо не произойдёт.

Уникальные эксперименты со случайным результатом не являются предметом теории вероятностей

Предметом теории вероятностей являются только события, связанными с *массовыми однородными экспериментами*, т.е. такими экспериментами, которые могут быть много раз повторены в примерно одних и тех же условиях. При этом должны быть выполнены ещё два условия:

1. Осуществилось или нет изучаемое случайное событие *A* в том или ином конкретном эксперименте из большой серии из *n* однотипных экспериментов, нам совершенно безразлично – важно только общее число $n(A)$ наступлений изучаемого события *A* в этой серии.
2. Если провести несколько длинных серий экспериментов (возможно разной длины), то частоты $\nu_n(A) = \dfrac{n(A)}{n}$ наступления события *A* в разных сериях должны быть примерно равны между собой, т.е. группироваться вокруг некоторого числа *P*(*A*), которое называют *вероятностью случайного события A* (при осуществлении данного комплекса условий *S*). По мере роста длин этих серий отличия между частотами (или, что то же самое, отклонения частот от числа *P*(*A*)) должны уменьшаться (условие *устойчивости частот*).

Иначе говоря, если вы говорите, что у события *A* есть вероятность, равная *P*(*A*), то вы должны ясно видеть массовый однородный эксперимент, для любой длинной серии повторений которого общее число появлений этого события, *n(A)*, примерно равно *nP*(*A*). При этом вас должно интересовать только это общее число *n(A)*, а не исход того или иного конкретного эксперимента из этой длинной серии.

Б.В.Гнеденко. Курс теории вероятностей. 8-е изд., М.: УРСС, 2005.(§1, гл. 1)

«…теория вероятностей занимается изучением не любых событий, которые в житейской практике называются случайными, а только тех из них, которые обладают определёнными свойствами.

Прежде всего, она ограничивается изучением лишь тех событий, которые в принципе могут быть осуществлены неограниченное число раз, притом в неизменных условиях…

Далее, теория вероятностей занимается лишь теми событиями, которые обладают так называемой статистической устойчивостью или, иначе, устойчивостью частот…»

А.Н.Колмогоров. «Теория вероятностей». В кн.: Математика, её содержание, методы и значение. Изд-во АН СССР, Москва, 1956, Том 2. Гл. XI, стр. 275.

«…о вероятности нельзя сказать **ничего больше** следующего: вероятность … есть число, вокруг которого … имеют тенденцию группироваться частоты, причём при возрастании численности этих серий … эта тенденция проявляется со всё большей отчётливостью и точностью…»

Важное замечание об устойчивости частот

Объявление на кабинете врача: «в понедельник, среду, пятницу приём утром, а во вторник, четверг, субботу – вечером (воскресенье – выходной)». Эксперимент: после рабочего дня фиксируем время приёма – 2 исхода: **У**тро, **В**ечер.

Наблюдаем много дней. Результат массового однородного эксперимента: **УВУВУВУВУВУВУВУВ….** В этой ситуации ни один человек не скажет, что время приёма (утро или вечер) является случайным. Однако частота наступления события **У** (и **В**) имеет предел, равный 0.5 (легко написать формулу для $\nu_n(\mathbf{У})$). В этой ситуации вряд ли разумно назвать предел частот, равный 0.5, вероятностью наступления события «приём утром».

Вот если бы врач написал что-нибудь вроде следующего: «каждое утро, после завтрака, я бросаю монету и если выпадет орёл, то приём будет утром, а если решка – то вечером», то никто бы не усомнился, что время приёма (утро или вечер) является случайным.

Во втором случае, когда врач устанавливает время приёма, бросая монету, мы получим «хаотичную» последовательность вида 0110101100001011… (а может быть такую: 1100010101110011… или ещё что-нибудь в этом духе) и никто не сомневается в том, что в этом случае мы имеем дело со стохастическим экспериментом, причём частоты $\nu_n(A)$ имеют предел, равный 0.5 (хотя не знаем значения $\nu_n(\mathbf{У})$), который разумно назвать вероятностью соответствующего события.

Ключевая особенность стохастических последовательностей: Если выбрать по какому-нибудь правилу бесконечную *под*последовательность из последовательности 0 и 1, описывающей исходы стохастического эксперимента (т.е. игнорировать результаты некоторых экспериментов), то для любой такой подпоследовательности частота появления 1 (т.е. частота наступления интересующего нас события *A*) имеет тот же предел *P*(*A*), что и для исходной последовательности.

Не любые правила образования подпоследовательностей приводят к этому результату. Какие правила образования подпоследовательностей допустимы – это самостоятельная проблема. В качестве *примера допустимых правил* можно указать следующие: (а) берутся только результаты экспериментов с нечётными номерами; (б) берутся результаты только тех экспериментов, перед которыми наступило интересующее нас событие и т.п.

Если же эксперимент не является стохастическим, но обладает свойством устойчивости частот, то даже для допустимой подпоследовательности предел может измениться.

Важное дополнение

Если вероятность события близка к 1, то при проведении единичного эксперимента можно быть практически уверенным, что это событие наступит. Если же вероятность события близка к 0, то при проведении единичного эксперимента можно быть практически уверенным, что это событие не наступит. Вероятность ε, которой мы пренебрегаем на практике, называется *уровнем значимости*, а вероятность $\alpha = 1 - \varepsilon$ – *коэффициентом доверия* (или *доверительной вероятностью*).

А.Н.Колмогоров. Основные понятия теории вероятностей. 1-е изд. 1933 (нем), 1936 (рус.), 2-е изд., 1974г., 3-е изд. М.:Фазис, 1998, §2:

«Применение теории вероятностей к действительному миру опыта происходит по следующей схеме… Если P(*A*) очень мало, то можно практически быть уверенным, что при однократной реализации условий σ событие *A* не будет иметь места…»

Б.Л.ван дер Варден. Математическая статистика. М.: Изд-во иностранной литературы, 1960, стр. 37-38:

«События, имеющие очень маленькую вероятность, следует рассматривать как почти невозможные; при однократной реализации условий, для которых эти события теоретически возможны, нельзя рассчитывать на их осуществление. На этом принципе основано вообще каждое практическое применение теории вероятностей.»

«Многие учёные проводили эксперимент. При многократном бросании монеты подсчитывалось число выпадений орла. Результаты этих опытов показаны в таблице

Фамилия	Кол-во бросков	Частота выпадений орла	Фамилия	Кол-во бросков	Частота выпадений орла
Бюффон	4040	0,507	Романовский	80640	0,4923
Де Морган	4092	0,5005	Пирсон К.	24000	0,5005
Джевонс	20480	0,5068	Феллер	10000	0,4979

Из таблицы видно, что выпадение орла во всех случаях близко к $\frac{1}{2}$.»

Швейцарский математик Яков Бернулли (Jacob Bernoulli, 27.12.1654-16.08.1705) в своём знаменитом труде «Искусство предположений» («Ars Conjectandi»), опубликованном в 1713 году (но написанном гораздо раньше), пишет:

«…если кто-либо будет рассматривать состояние погоды за очень большое число истекших годов и будет отмечать, сколько раз она была ясной или дождливой, или кто-либо очень часто будет присутствовать при игре двоих и наблюдать, сколько раз тот или другой оказывается в игре победителем, то тем самым откроет отношение, в котором вероятно находятся числа случаев, когда то же событие при обстоятельствах, подобных прежним, и в будущем может случиться или не случиться. Этот опытный способ определения числа случаев по наблюдениям *не нов и не необычен*... и то же все постоянно соблюдают в повседневной практике.»

Опыт де Бюффона

Жорж-Луи Леклерк, граф де Бюффон
(Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon, 7.09.1707 – 16.04.1788) –
французский естествоиспытатель

Жорж-Луи Леклер(к) родился 7 сентября 1707 г. в Монбаре, в Бургундии в семье советника парламента в Дижоне Бенжамена Леклера. Фамилию Бюффон (правильно: [byfɔ]) получил в 1725 по имени поместья, унаследованного от своей матери.

Образование получил в иезуитском колледже в Дижоне, где изучал юриспруденцию, но вскоре заинтересовался физическими науками и математикой. В молодые годы путешествовал по Франции, Италии, Англии. В Англии перевел "Теорию флукций" Ньютона и "Статику растений" Галя. За эти переводы и несколько самостоятельных математических работ в 1733 году его назначили членом французской академии наук. Позже он был избран членом большинства существовавщих в то время европейских научных обществ, в частности, академий наук в Лондоне, Берлине, Санкт-Петербурге.

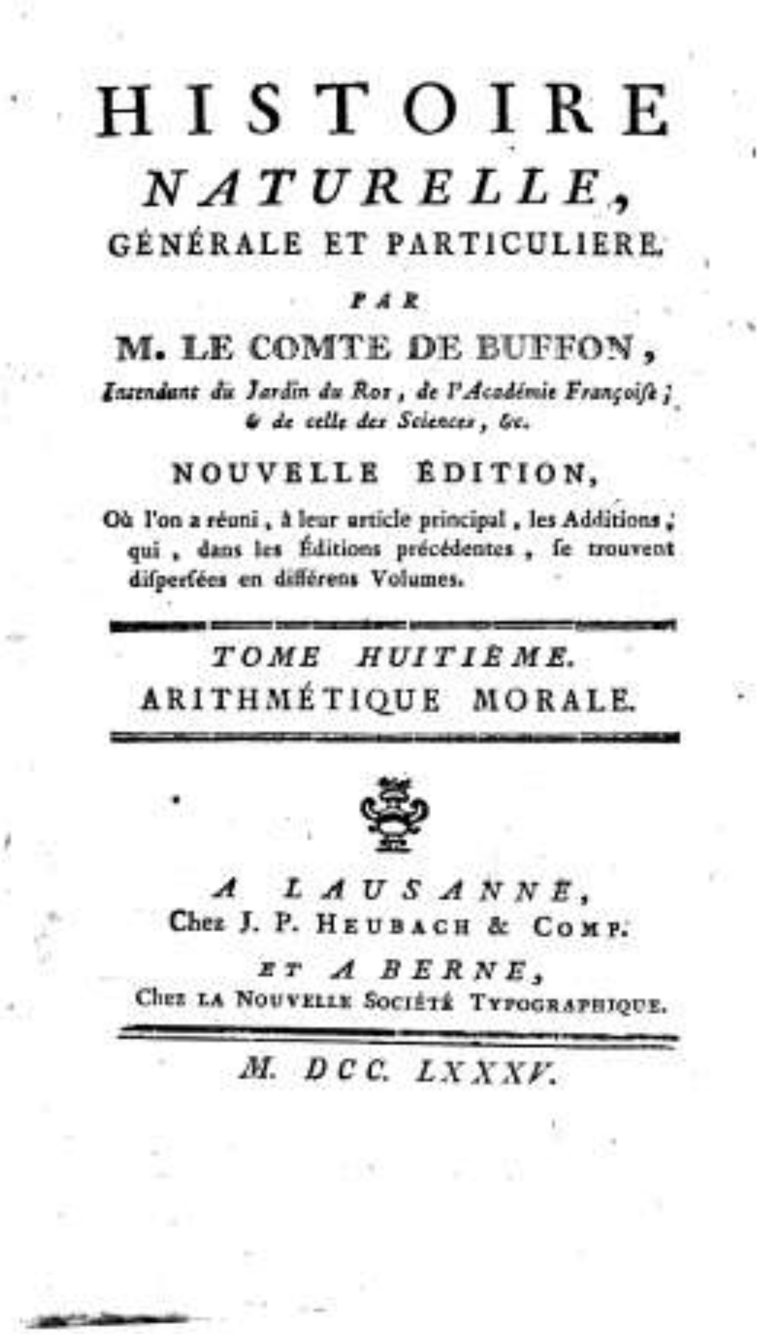
В 1739 г. стал назначен смотрителем королевского ботанического сада и королевского музея.

Поместье, унаследованное им от матери, было очень богатым, что позволило ему полностью сосредоточиться на занимавших его научных занятиях. Он занимался исследованиями и систематизировал известные научные факты в области естественных наук (ботаника, зоология, геология, минералогия и т.д.). Часть работ посвящена прикладным вопросам (например, выращиванием деревьев, приданию древесине нужных свойств).

Опубликовал многотомную (36 томов) «Естественную историю», в которой описал множество животных и выдвинул положение о единстве растительного и животного мира.

Людовик XV возвёл его в графское достоинство, а Людовик XVI приказал поставить его бюст у входа в королевский естественноисторический кабинет ещё при его жизни.

Де Бюффон описал свой опыт в разделе XVIII книги «Эссе по моральной арифметике» (1777). Считается, что это первый опубликованный статистический эксперимент.



HISTOIRE
NATURELLE,
GÉNÉRALE ET PARTICULIERE.
PAR
M. LE COMTE DE BUFFON,
Intendant du Jardin du Roi, de l'Académie Françoise; & de celle des Sciences, &c.

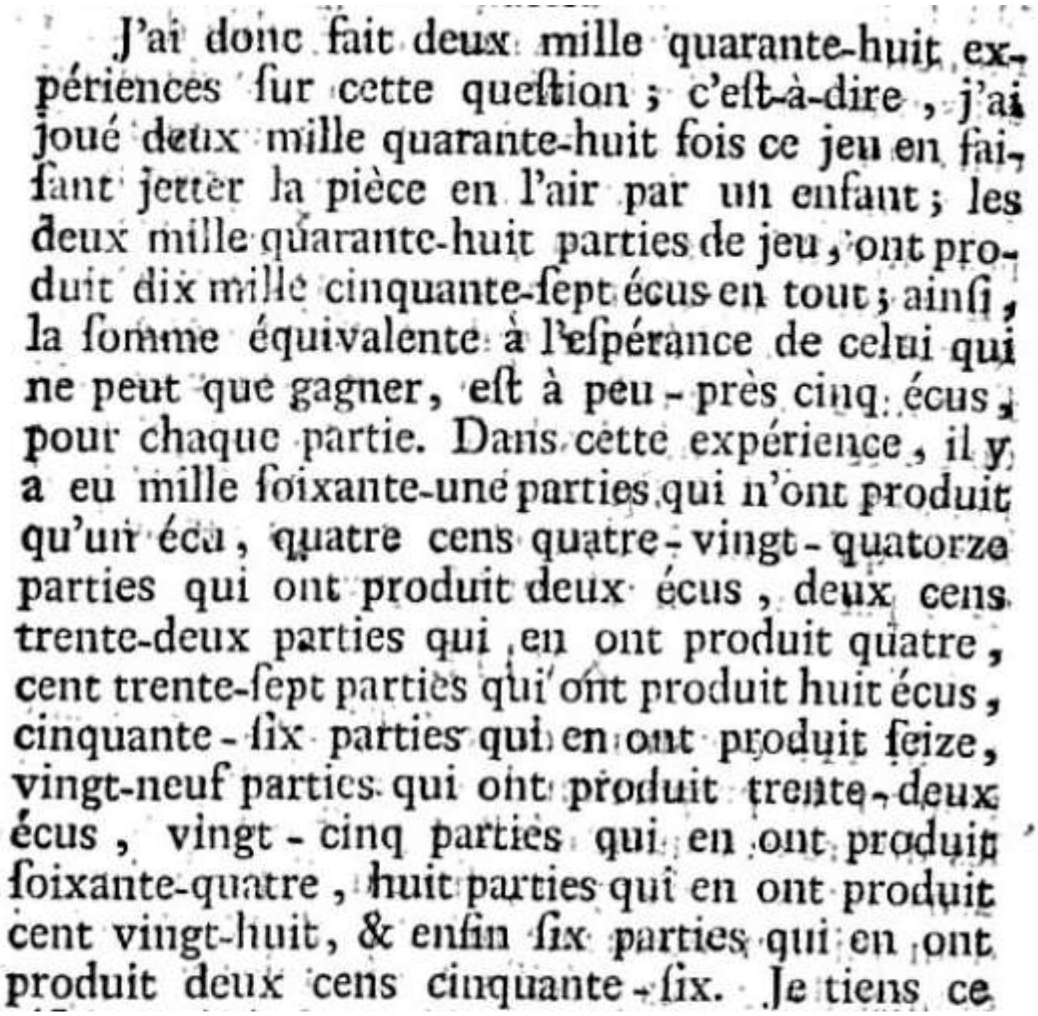
NOUVELLE ÉDITION,
Où l'on a réuni, à leur article principal, les Additions qui, dans les Éditions précédentes, se trouvent dispersées en différens Volumes.

TOME HUITIÈME.
ARITHMÉTIQUE MORALE.

A LAUSANNE,
Chez J. P. HEUBACH & COMP.
ET A BERNE,
Chez LA NOUVELLE SOCIÉTÉ TYPOGRAPHIQUE.

M. DCC. LXXXV.

Обложка «Эссе по моральной арифметике» графа де Бюффона


J'ai donc fait deux mille quarante-huit expériences ſur cette queſtion ; c'eſt-à-dire, j'ai joué deux mille quarante-huit fois ce jeu en faiſant jetter la pièce en l'air par un enfant ; les deux mille quarante-huit parties de jeu, ont produit dix mille cinquante-ſept écus en tout ; ainſi, la ſomme équivalente à l'eſpérance de celui qui ne peut que gagner, eſt à peu-près cinq écus, pour chaque partie. Dans cette expérience, il y a eu mille ſoixante-une parties qui n'ont produit qu'un écu, quatre cens quatre-vingt-quatorze parties qui ont produit deux écus, deux cens trente-deux parties qui en ont produit quatre, cent trente-ſept parties qui ont produit huit écus, cinquante-ſix parties qui en ont produit ſeize, vingt-neuf parties qui ont produit trente-deux écus, vingt-cinq parties qui en ont produit ſoixante-quatre, huit parties qui en ont produit cent vingt-huit, & enfin ſix parties qui en ont produit deux cens cinquante-ſix. Je tiens ce

Часть страницы из «Эссе по моральной арифметике» графа де Бюффона, где описан его опыт

«Поэтому я проделал 2048 экспериментов, чтобы разобраться в этом вопросе; т.е. я 2048 раз играл в эту игру, где монету в воздух бросал ребёнок; эти 2048 партий игры принесли в общей сложности 10057 экю, так что эквивалентная сумма, на которую может надеяться человек, который может только выигрывать, равна почти 5 экю за одну партию игры. В этом эксперименте было 1061 партий игры, которые принесли только по одному экю, 494 партий игры, которые принесли 2 экю, 232 партий игры, которые принесли 4 экю, 137 партий игры, которые принесли 8 экю, 56 партий игры, которые принесли 16 экю, 29 партий игры, которые принесли 32 экю, 25 партий игры, которые принесли 64 экю, 8 партий игры, которые принесли 128 экю, и, наконец, 6 партий игры, которые принесли 256 экю.».

Петербургская игра

Бросают монету до тех пор, пока не выпадет орёл; если для этого потребовалось *k* бросаний, то игрок получает 2^{k-1} экю (экю – старинная французская монета).

Иначе говоря, если перед первым появлением орла выпало *r* решек, то выигрыш равен 2^r.

Таким образом, в петербургской игре всегда имеют дело с последовательностями орлов и решек вида: РРРРРО (в этом конкретном случае выигрыш игрока равен $2^5 = 32$ экю), которые обязательно заканчиваются выпаданием орла, но перед этим стоит некоторое число решек (которое зависит от случая).

Поскольку орёл рано или поздно выпадет, игрок всегда будет в выигрыше.

Размер выигранной суммы зависит от случая и вопрос заключается в том, каков средний выигрыш – его можно считать справедливой платой за право участия в этой своеобразной безпроигрышной лотерее.

Интересно отметить, что широко известная телевизионная игра «Кто хочет стать миллионером» является разновидностью петербургской игры.

Изучение петербургской игры позволяет понять некоторые сложные явления в современной экономике, например, крах акций высокотехнологичных компаний в 2000 году.

Петербургскую игру в 1713 году (в слегка изменённой форме) придумал и предложил изучить швейцарский учёный Николай Бернулли (Nicolas Bernoulli, 27.01.1695–26.07.1726), племянник Якова Бернулли.

Брат Николая Бернулли, знаменитый швейцарский учёный Даниил Бернулли (Daniel Bernoulli, 29.01.1700-17.03.1782), установил, что этот справедливый взнос равен бесконечности, в то время как любой выигрыш, каким бы большим он ни был, всегда конечен.

Тот факт, что выигрыш всегда меньше взноса, делает игру бессмысленной и выглядит парадоксально и де Бюффон решил проверить его экспериментально.

Петербургская игра при $n=2^{11}$ повторениях

Исход игры	Выигрыш	Вероятность	Ожидаемое число партий с данным выигрышем	Реальное число партий с данным выигрышем
О	$2^0=1$	$1/2^1$	$n/2^1=2^{10}=1024$	1061
РО	$2^1=2$	$1/2^2$	$n/2^2=2^9=512$	494
РРО	$2^2=4$	$1/2^3$	$n/2^3=2^8=256$	232
РРРО	$2^3=8$	$1/2^4$	$n/2^4=2^7=128$	137
РРРРО	$2^4=16$	$1/2^5$	$n/2^5=2^6=64$	56
РРРРРО	$2^5=32$	$1/2^6$	$n/2^6=2^5=32$	29
РРРРРРО	$2^6=64$	$1/2^7$	$n/2^7=2^4=16$	25
РРРРРРРО	$2^7=128$	$1/2^8$	$n/2^8=2^3=8$	8
РРРРРРРРО	$2^8=256$	$1/2^9$	$n/2^9=2^2=4$	6
…………………………………………………………………………………				

Вероятность события A_k={игра потребовала k бросаний монеты} равна $\mathrm{P}(A_k)=\dfrac{1}{2^k}$. Поэтому ожидаемое из теории число наступлений этого события равно $n\mathrm{P}(A_k)=\dfrac{n}{2^k}$. Отсюда, в частности, ясно, что де Бюффон провёл ровно $n=2048=2^{11}$ испытаний именно потому, что вероятности $\mathrm{P}(A_k)$ являются дробями, в знаменателе которых стоят степени числа 2.

Значит, де Бюффон ясно понимал, что реальное число $n(A)$ появлений события A в серии из n однотипных экспериментов должно быть примерно равно $n\cdot\mathrm{P}(A)$:

$$n(A)\approx n\cdot\mathrm{P}(A)$$

Иначе говоря, он понимал, что ожидаемое из теории число наступлений события A равно $n\cdot\mathrm{P}(A)$ – сейчас это число называют матемаическим ожиданием случайной величины $n(A)$. Поскольку специально он об этом не писал, эти факты действительно были общеизвестны.

число бросаний монеты в одной партии игры, i	выигрыш в одной партии, 2^{i-1} экю	число партий игры с данным выигрышем N_i	выплата за все партии игры с данным выигрышем $N_i \cdot 2^{i-1}$ экю	число решек во всех играх с данным выигрышем $(i-1)N_i$	число орлов во всех играх с данным выигрышем $1 \cdot N_i$
1	1	1061	1061	0	1061
2	2	494	988	494	494
3	4	232	928	464	232
4	8	137	1096	411	137
5	16	56	896	224	56
6	32	29	928	145	29
7	64	25	1600	150	25
8	128	8	1024	56	8
9	256	6	1536	48	6
10,11,…	512,1024, …	0	0	0	0
	Всего:	**2048**	**10057**	**1992**	**2048**

После *k*=2048 партий петербургской игры общий выигрыш составил 10057 экю, т.е. средний выигрыш в расчёте на одну партию равен $\frac{10057}{2048} \approx 4.91$экю. Поэтому де Бюффон сделал вывод, что справедливая плата за одну партию петербургской игры должна быть примерно 5 экю, а вовсе не бесконечно большой суммой, как говорит теория вероятностей. Остроумные аргументы, выдвинутые де Бюффоном для обоснования этого вывода, хотя и ошибочные с формально-математической точки зрения, содержали интересные идеи относительно практической невозможности наступления событий очень малой вероятности, полезности денег и т.д.

В *k*=2048 испытаниях (напомним, что одно испытание – это одна партия петербургской игры, т.е. цикл бросаний монеты до появления орла) де Бюффон получил *k*=2048 орлов и *l*=1992 решек. Значит, всего он бросал монету $n = 2048 + 1992 = 4040$ раз (на самом деле, как мы отмечали, монету бросал вовсе не граф де Бюффон, а его маленький слуга). Эти числа во всех известных нам учебниках *интерпретируют* так: эксперимент де Бюффона при *n*=4040 бросаниях монеты дал *k*=2048 орлов; значит частота выпадения орла равна $\frac{k}{n} = \frac{2048}{4040} \approx 0.506931.$

Однако, строго говоря, *эта интерпретация незаконна*. Дело в том, что при расчёте частоты $\nu_n = \frac{k}{n}$ знаменатель *n* (число опытов) фиксирован заранее, а числитель *k* (число опытов, в которых наблюдалось интересующее нас событие) зависит от случая и, конечно, от *n*: $k \equiv k_n$. В опыте де Бюффона заранее был задан числитель *k* дроби $\frac{k}{n}$ (задавалось число партий петербургской игры, т.е. фактически число выпавших орлов), а знаменатель *n* (общее число потребовавшихся для этого бросаний монеты) зависел от случая и, конечно, от *k*: $n \equiv n_k$. Поэтому дробь $\frac{k}{n}$ является случайной величиной, зависящей от *k*: $\mu_k = \frac{k}{n_k}$.

Гораздо важнее то, что частота $\nu_n = \frac{k_n}{n}$ является частным от деления случайной величины k_n на натуральное число *n*, в то время как «частота» $\mu_k = \frac{k}{n_k}$ является частным от деления натурального числа *k* на случайную величину n_k. Статистические свойства частоты $\nu_n = \frac{k_n}{n}$ и «частоты» $\mu_k = \frac{k}{n_k}$ совершенно различны. Это легко понять, например, из следующего. Случайная величина k_n может принимать конечное число возможных значений: $0,1,2,\ldots,n-1,n$. Соответственно, возможные значения частоты $\nu_n = \frac{k_n}{n}$ есть: $0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1$. Случайная величина n_k может принимать бесконечное число возможных значений: $k,k+1,k+2,\ldots$. Соответственно, возможные значения «частоты» $\mu_k = \frac{k}{n_k}$ есть: $1,\frac{k}{k+1},\frac{k}{k+2},\ldots$.

Как ни интересно было бы изучать свойства случайной величины $\mu_k = \dfrac{k}{n_k}$, вовсе не она интересовала де Бюффона.

На самом деле опыт де Бюффона заключался в определении экспериментальным путём для разных значений *i* числа N_i партий петербургской игры, в которых для выигрыша потребовалось ровно *i* бросаний монеты. Иначе говоря, в опыте де Бюффона изучалась не частота появления одиночного события «выпал орёл», а *целой серии* событий: A_i=«орёл впервые появился после *i*-го бросания монеты», $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Соответствие результатов опыта де Бюффона теории

Исход игры	Ожидаемое число партий с данным выигрышем	Реальное число партий с данным выигрышем	Разница: реальное – ожидаемое
О	$n/2^1=2^{10}=1024$	1061	+37
РО	$n/2^2=2^9=512$	494	–18
РРО	$n/2^3=2^8=256$	232	–24
РРРО	$n/2^4=2^7=128$	137	+9
РРРРО	$n/2^5=2^6=64$	56	– 8
РРРРРО	$n/2^6=2^5=32$	29	– 3
РРРРРРО	$n/2^7=2^4=16$	25	+9
РРРРРРРО	$n/2^8=2^3=8$	8	0
РРРРРРРРО	$n/2^9=2^2=4$	6	+2

Из Таблицы хорошо видно, что частоты очень близки к соответствующим вероятностям. Не вдаваясь в делали, скажем, что современные методы математической статистики (критерий «хи-квадрат») подтверждают вывод (к которому пришёл и де Бюффон) о хорошем в целом соответствии наблюдаемых значений теории. Более того, именно этот и последующие аналогичные опыты привели К.Пирсона к открытию критерия «хи-квадрат».