Неравенства для средних [1]

Г.И. Фалин
д.ф.м.н., профессор
кафедра теории вероятностей
механико-математический факультет
МГУ им.М.В.Ломоносова

А.И. Фалин
к.ф.м.н., доцент
кафедра общей математики
факультет ВМК
МГУ им.М.В.Ломоносова

[1] *Математика*, Издательский Дом "Первое Сентября ", 2006, №10, стр.25-36.

Глава 1

Введение

Программа по математике для поступающих в МГУ содержит два пункта, относящихся к доказательству неравенств:

II.7 Неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел. Неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел.

III.2 На экзамене по математике поступающий должен уметь: ... доказывать ... неравенства для буквенных выражений.

Соответственно, в последние годы на вступительных экзаменах по математике в МГУ регулярно предлагаются задачи на доказательство неравенств. Особенно часто их дают на устном экзамене на факультете вычислительной математики и кибернетики (ВМК). Задачи, где неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел, используется при решении уравнений, неравенств и систем методом оценок, появляются в вариантах письменных экзаменов на всех факультетах.

В принципе все эти задачи можно решить с помощью неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического двух неотрицательных чисел, но часто использование общего неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического (когда количество чисел больше двух) и более общих понятий (таких как среднее гармоническое и среднее квадратичное) и соответствующих неравенств позволяет по другому взглянуть на задачу и предложить короткое и изящное решение. В настоящей статье мы кратко изложим соответствующую теорию и покажем, как она применяется при решении реальных экзаменационных задач.

Глава 2

Основные определения и факты

2.0.1 Случай двух чисел

Определение среднего арифметического двух чисел хорошо известно:

Определение 1 *Средним арифметическим чисел* x_1 *и* x_2 *называется число*

$$A(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{2.1}$$

Если числа x_1 и x_2 равны ($x_1 = x_2 = x$), то их среднее арифметическое совпадает с ними. Если же они различны, то на числовой оси среднее арифметическое лежит точно посередине между точками x_1 и x_2. Доказать это очень легко: если, например, $x_1 < x_2$, то

1. верно двойное неравенство $x_1 < A(x_1, x_2) < x_2$ (т.е. точка $A(x_1, x_2)$ лежит между точками x_1 и x_2)

2. число $A(x_1, x_2) - x_1$ (расстояние от точки x_1 до точки $A(x_1, x_2)$) равно числу $x_2 - A(x_1, x_2)$ (расстоянию от точки $A(x_1, x_2)$ то точки x_2).

Эти два свойства среднего арифметического оправдывают появление слова "среднее"в его определении. Конечно, формально можно дать любое определение, но каждый термин должен быть оправдан с интуитивной точки зрения.

Ниже мы введем несколько других средних величин – среднее геометрическое, среднее гармоническое, среднее квадратичное, среднее степенное, плюс соответствующие понятия не для двух, а для нескольких чисел. Для них термин "среднее"означает "расположенный между"(но не обязательно точно посередине) – именно такой смысл вкладывается в слово "среднее"в современном русском языке и в математике.

Поговорим теперь о среднем геометрическом двух чисел.

Определение 2 *Средним геометрическим неотрицательных чисел* x_1 *и* x_2 *называется число*

$$G(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}. \tag{2.2}$$

Школьников часто ставит в тупик вопрос: величина $\sqrt{x_1 x_2}$ определена и в случае, когда x_1 и x_2 – отрицательны; почему же в этом случае ее не называют средним геометрическим?

Ответ крайне прост. В принципе ничто не мешает это сделать, но тогда термин "среднее"не будет оправдан, т.к. число $\sqrt{x_1 x_2}$ – положительно и не может лежать между числами x_1 и x_2 (например, если $x_1 = -4$, $x_2 = -1$, то $\sqrt{x_1 x_2} = 2$). Кроме того, усложнится формулировка основного результата для среднего арифметического и среднего геометрического – неравенства

$$\sqrt{x_1 x_2} \le \frac{x_1 + x_2}{2},$$

а математики очень не любят неизящные формулировки.

В случае, когда оба числа x_1 и x_2 – неотрицательны, их среднее геометрическое лежит между точками x_1 и x_2 (хотя при $x_1 = x_2 = x > 0$ совпадает с ними, при $x_1 = 0$, $x_2 > 0$ совпадает с $x_1 = 0$, при $x_2 = 0$, $x_1 > 0$ совпадает с $x_2 = 0$). Например, если $0 < x_1 < x_2$, то требуемое утверждение сводится к двойному неравенству $x_1 < \sqrt{x_1 x_2} < x_2$, которое равносильно системе

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 < x_1 x_2 \\ x_1 x_2 < x_2^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1(x_2 - x_1) > 0 \\ x_2(x_2 - x_1) > 0 \end{array} \right.$$

и поэтому истинно (все множители – положительны).

Основное утверждение для среднего арифметического и среднего геометрического двух неотрицательных чисел x_1 и x_2 – это знаменитая теорема (неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух неотрицательных чисел):

Теорема 1 *Если числа* x_1 *и* x_2 *– неотрицательны, то*

$$\sqrt{x_1 x_2} \le \frac{x_1 + x_2}{2}$$

или, используя обозначения (2.1), (2.2),

$$G(x_1, x_2) \le A(x_1, x_2), \tag{2.3}$$

причем это нестрогое неравенство сводится к равенству тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$:

$$\sqrt{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow x_1 = x_2. \tag{2.4}$$

Доказательство обеих результатов сводится к цепочке равносильных преобразований, приводящих исходное неравенство (равенство) к неравенству (равенству) для полного квадрата:

$$\sqrt{x_1 x_2} \le \frac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} \ge 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \ge 0,$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

На вступительных экзаменах часто приходится пользоваться важным следствием этих результатов – неравенством для суммы двух взаимно обратных положительных чисел $x_1 = x$ и $x_2 = \frac{1}{x}$:

Теорема 2 *Если $x > 0$, то*

$$x + \frac{1}{x} \ge 2,$$

причем

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Более того, наличие в задаче двух взаимно обратных чисел часто является сигналом, что решение должно базироваться на этом неравенстве.

Если в задаче стоит сумма двух взаимно обратных чисел $t = x + \frac{1}{x}$, но из условия задачи не следует, что они положительны, то нужно рассматривать два логически возможных случая, $x > 0$ и $x < 0$. В первом случае можно применять теорему 2, что дает оценку $t \ge 2$. Во втором случае часто полезно следующее преобразование $t = -\left((-x) + \frac{1}{-x}\right)$. Число $-x$ уже положительно. Поэтому теорема 2 влечет, что $\left((-x)+\frac{1}{-x}\right)\geq 2$. Соответственно, можно утверждать, что $t=x+\frac{1}{x}\leq -2$, причем знак равенства в этом нестрогом неравенстве стоит тогда и только тогда, когда $x=-1$ (напомним, что мы рассматриваем случай $x<0$).

Решение многих экзаменационных задач становится проще (и додуматься до него – легче), если использовать другие средние: среднее гармоническое и среднее квадратичное.

Определение 3 *Средним гармоническим положительных чисел x_1 и x_2 называется число*

$$H(x_1,x_2)=\frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}=\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{H(x_1,x_2)}=A\left(\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2}\right),$$

среднее гармоническое – это такое число, что обратное к нему является средним арифметическим чисел, обратных к исходным.

Требование положительности чисел x_1 и x_2, кроме справедливости прочих естественных утверждений, гарантирует существование числа $\frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}$.

Как и для среднего арифметического и среднего геометрического, легко доказать, что среднее гармоническое лежит между числами x_1 и x_2 (совпадая с ними в случае, когда числа равны).

Поскольку

$$G\left(\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2}\right)=\frac{1}{G(x_1,x_2)},$$

из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом для чисел $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ (теорема 1) следует

Теорема 3 *Если числа x_1 и x_2 – положительны, то*

$$\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}\leq\sqrt{x_1x_2}\Leftrightarrow H(x_1,x_2)\leq G(x_1,x_2), \tag{2.5}$$

причем это нестрогое неравенство сводится к равенству тогда и только тогда, когда $x_1=x_2$.

Этот результат легко получить и непосредственно. Например, неравенство (2.5) означает, что

$$\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2} \le \sqrt{x_1x_2} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x_1x_2}}{x_1+x_2} \le 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x_1x_2} \le x_1+x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1x_2} \le \frac{x_1+x_2}{2},$$

т.е равносильно неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом для чисел x_1 и x_2.

Определение 4 *Средним квадратичным неотрицательных чисел x_1 и x_2 называется число*

$$K(x_1,x_2) = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}.$$

Другими словами, среднее квадратичное – это такое неотрицательное число, что его квадрат является средним арифметическим квадратов исходных чисел.

Как и для среднего арифметического, среднего геометрического и среднего гармонического, легко доказать, что среднее квадратичное лежит между числами x_1 и x_2 (совпадая с ними в случае, когда числа равны). Следует отметить, что величина $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}$ определена для любых действительных x_1 и x_2 (не обязательно неотрицательных), но она может и не лежать между точками x_1 и x_2. Например, если $x_1 = -7$, $x_2 = 1$, то $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} = 5$ – в этом случае термин "*среднее* квадратичное" вряд ли оправдан. Тем не менее, часто число $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}$ называют средним квадратичным и в случае, когда одно или оба из чисел x_1 и x_2 отрицательны. В принципе это вопрос соглашения, но методически более разумным представляется наше определение.

Аналогом предыдущих неравенств для средних является следующее неравенство для среднего арифметического и среднего квадратичного:

Теорема 4 *Если x_1 и x_2 – неотрицательные действительные числа, то*

$$A(x_1,x_2) \le K(x_1,x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{2} \le \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}, \qquad (2.6)$$

причем это нестрогое неравенство сводится к равенству тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$.

Этот результат легко получить непосредственно. Возводя неравенство (2.6) почленно в квадрат, мы имеем:

$$\frac{(x_1+x_2)^2}{4} \le \frac{x_1^2+x_2^2}{2} \Leftrightarrow x_1^2+2x_1x_2+x_2^2 \le 2x_1^2+2x_2^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1^2-2x_1x_2+x_2^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2 \ge 0.$$

(на первом шаге мы использовали неотрицательность чисел x_1, x_2). Это доказательство в сущности повторяет рассуждения, использовавшиеся при доказательстве неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

В общем случае (без ограничения $x_1, x_2 \ge 0$), мы имеем:

$$\frac{x_1+x_2}{2} \le \left|\frac{x_1+x_2}{2}\right| \le \frac{|x_1|+|x_2|}{2} \le \sqrt{\frac{|x_1|^2+|x_2|^2}{2}} = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}.$$

Если нестрогое неравенство (2.6) сводится к равенству, то мы имеем следующую цепочку равносильных преобразований:

$$\frac{(x_1+x_2)^2}{4} = \frac{x_1^2+x_2^2}{2} \Leftrightarrow x_1^2+2x_1x_2+x_2^2 = 2x_1^2+2x_2^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1^2-2x_1x_2+x_2^2 = 0 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

По аналогии со средним квадратичным вводят более общее понятие среднего степенного порядка n.

Определение 5 *Средним степенным порядка n неотрицательных чисел x_1 и x_2 называется число*

$$S_n(x_1,x_2) = \sqrt[n]{\frac{x_1^n+x_2^n}{2}} = \left(\frac{x_1^n+x_2^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Другими словами, среднее степенное порядка n – это такое неотрицательное число, что его n-я степень является средним арифметическим n-х степеней исходных чисел.

Как и для среднего арифметического, среднего геометрического и среднего гармонического, легко доказать, что среднее степенное порядка n лежит между числами x_1 и x_2 (совпадая с ними в случае, когда числа равны). Следует отметить, что величина $\sqrt[n]{\frac{x_1^n+x_2^n}{2}}$ определена для любых действительных x_1 и x_2 (не обязательно неотрицательных), но она может и не лежать между точками x_1 и x_2.

Среднее степенное порядка $n = 2$ – это введенное ранее среднее квадратичное, среднее степенное порядка $n = 1$ – это среднее арифметическое. Более того, среднее гармоническое можно рассматривать как среднее степенное порядка $n = -1$, а среднее геометрическое – это "среднее степенное порядка $n = 0$"(хотя точный смысл этой фразе можно придать только с использованием более общих понятий и результатов).

Для средних степенных порядка n можно получить следующие неравенства

$$S_2(x_1, x_2) \leq S_3(x_1, x_2) \leq S_4(x_1, x_2) \leq \dots \tag{2.7}$$

Мы не будем доказывать все эти неравенства, а в ходе решения реальных экзаменационных задач докажем те из них, в которых будет необходимость.

Доказанные выше теоремы, связывающие между собой различные средние, в случае $x_1, x_2 > 0$ можно объединить в следующую цепочку неравенств:

$$H(x_1, x_2) \leq G(x_1, x_2) \leq A(x_1, x_2) \leq K(x_1, x_2)$$

2.0.2 Обобщение на случай произвольного количества чисел

До сих пор мы определили средние значения (среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое и среднее квадратичное) для двух чисел. В математике вводят аналогичные понятия для произвольных наборов чисел.

Определение 6 *Средним арифметическим чисел $x_1, \dots, x_n$ называется число*

$$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Если $x_{(1)} = \min(x_1, \dots, x_n)$ – наименьшее из этих чисел, а $x_{(n)} = \max(x_1, \dots, x_n)$ – наибольшее из них, то для любого $k = 1, \dots, n$ верно неравенство $x_{(1)} \leq x_k \leq x_{(n)}$. Складывая эти n неравенств, мы получим:

$$nx_{(1)} \leq x_1 + \dots + x_n \leq nx_{(n)} \Leftrightarrow x_{(1)} \leq A(x_1, \dots, x_n) \leq x_{(n)}.$$

Иначе говоря, среднее арифметическое n чисел лежит между самым маленьким и самым большим из них – это оправдывает использование термина "среднее".

Определение 7 *Средним геометрическим неотрицательных чисел $x_1, \dots, x_n$ называется число*

$$G(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}.$$

Как и для среднего арифметического, легко доказать, что

$$x_{(1)} \le G(x_1, \dots, x_n) \le x_{(n)}.$$

Определение 8 *Средним гармоническим положительных чисел $x_1, \dots, x_n$ называется число*

$$H(x_1, \dots, x_n) = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dots + \dfrac{1}{x_n}}.$$

Иначе говоря, среднее гармоническое – это такое число, что обратное к нему является средним арифметическим чисел, обратных к исходным:

$$\frac{1}{H(x_1, \dots, x_n)} = A\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right).$$

Как и для среднего арифметического, легко доказать, что

$$x_{(1)} \le H(x_1, \dots, x_n) \le x_{(n)}.$$

Определение 9 *Средним квадратичным неотрицательных чисел $x_1, \dots, x_n$ называется число*

$$K(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

Иначе говоря, среднее квадратичное – это такое неотрицательное число, что его квадрат является средним арифметическим квадратов исходных чисел:

$$K^2(x_1, \dots, x_n) = A\left(x_1^2, \dots, x_n^2\right).$$

Как и для среднего арифметического, легко доказать, что

$$x_{(1)} \le K(x_1, \dots, x_n) \le x_{(n)}.$$

Для введенных средних значений (среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое и среднее квадратичное) для произвольного набора чисел справедливы неравенства, аналогичные доказанным ранее для случая $n = 2$.

Теорема 5 *Если числа $x_1, \ldots, x_n$ – неотрицательны, то*

$$G(x_1, \ldots, x_n) \leq A(x_1, \ldots, x_n), \tag{2.8}$$

причем это нестрогое неравенство сводится к равенству тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Доказательство этого утверждения требует очень непростых рассуждений.

1 шаг. Докажем неравенство (2.8) для случая $n = 4$. Начнем со следующего простого тождества:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2}}{2}.$$

Это равенство утверждает, что среднее арифметическое четырех чисел x_1, x_2, x_3, x_4 можно рассматривать как среднее арифметическое двух чисел, первое из которых – среднее арифметическое x_1, x_2, а второе – среднее арифметическое x_3, x_4.

Используя доказанное неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух чисел, можно утверждать, что

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq \frac{\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_3 x_4}}{2}.$$

Выражение в правой части этого равенства – это среднее арифметическое чисел $\sqrt{x_1 x_2}$ и $\sqrt{x_3 x_4}$. Применяя еще раз неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух чисел, получим, что

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq \sqrt{\sqrt{x_1 x_2}\sqrt{x_3 x_4}} = \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} = G(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Если

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = G(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

то во всех трех использованных неравенствах о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух чисел, должен стоять знак -". В силу теоремы 1, соответствующие числа равны:

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = x_4, \\ \sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{x_3 x_4}, \end{cases}$$

откуда следует, что все четыре числа x_1, x_2, x_3, x_4 равны между собой.

Подобным же образом можно доказать, что справедливость неравенства (2.8) для некоторого значения $n = k$ влечет его справедливость для $n = 2k$. Это означает справедливость неравенства (2.8) для $n = 8$, $n = 16$, $n = 32$ и т.д. (современный стандарт математической строгости требует обоснования этого вывода с помощью метода математической индукции).

2 шаг. Докажем неравенство (2.8) для случая $n = 3$. Для этого заменим в уже доказанном неравенстве

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}$$

число x_4 на $\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$ (среднее геометрическое чисел x_1, x_2, x_3):

$$\begin{gathered} \tfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}}{4} \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}} \\ \Updownarrow \\ x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \geq 4 \sqrt[4]{(x_1 x_2 x_3)^{\frac{4}{3}}} \\ \Updownarrow \\ x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \geq 4 \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \\ \Updownarrow \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \\ \Updownarrow \\ \tfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \end{gathered}$$

Если $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$, то в приведенной выше цепочке равносильных неравенств везде стоит знак -". В частности,

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}}{4} = \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}}$$

Но в случае $n = 4$ мы уже доказали, что равенство между средним арифметическим и средним геометрическим возможно только в случае равенства чисел между собой:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}.$$

Это доказывает, что и в случае $n = 3$ равенство между средним арифметическим и средним геометрическим возможно только в случае равенства чисел между собой.

Подобным же образом можно доказать, что справедливость неравенства (2.8) для некоторого значения $n = k$ влечет его справедливость для $n = k - 1$ (для этого нужно заменить x_k на $\sqrt[k-1]{x_1 \dots x_{k-1}}$). Это означает справедливость неравенства (2.8) для всех n. Строгое доказательство этого требует применения метода математической индукции в более общей форме, чем обычно приводится в школьных учебниках – это видимо, самое сложное место в доказательстве нашей теоремы.

Теорема 6 *Если числа $x_1, \dots, x_n$ – положительны, то*

$$H(x_1, \dots, x_n) \leq G(x_1, \dots, x_n), \tag{2.9}$$

причем это нестрогое неравенство сводится к равенству тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Доказательство. Поскольку

$$G\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{G(x_1, \dots, x_n)},$$

наша теорема следует из теоремы 5 о среднем арифметическом и среднем геометрическом для чисел $\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}$.

Теорема 7 *Если числа $x_1, \dots, x_n$ – неотрицательны, то*

$$A(x_1, \dots, x_n) \leq K(x_1, \dots, x_n), \tag{2.10}$$

причем это нестрогое неравенство сводится к равенству тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Доказательство. Обозначим для краткости величину $A(x_1, \dots, x_n)$ просто A и рассмотрим выражение

$$X = (x_1 - A)^2 + \dots + (x_n - A)^2.$$

Оно, очевидно, неотрицательно. С другой стороны, раскрывая скобки и приводя подобные, его можно записать в виде:

$$X = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 2A(x_1 + \dots x_n) + nA^2.$$

Поскольку $x_1 + \dots x_n = nA$, можно утверждать, что

$$X = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - nA^2.$$

Теперь ясно, что отмеченная в начале доказательства неотрицательность величины X равносильна неравенству (2.10).

Если же в (2.10) стоит знак -", то величина X равна 0, что равносильно равенству нулю членов $x_1 - A, \dots, x_n - A$. Это, очевидно, означает равенство чисел $x_1, \dots, x_n$ между собой.

Глава 3

Задачи на доказательство неравенств

Задача 1 (ВМК, 2005, устный) *Доказать, что если* $b \geq -1$, $b \neq 0$, *то имеет место неравенство*

$$\frac{4b^2 + b + 1}{4|b|} \geq \sqrt{b+1}.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$\frac{|2b|^2 + (b+1)}{2} \geq \sqrt{|2b|^2 \cdot (b+1)}.$$

Теперь оно сводится к неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух неотрицательных чисел $x = 4b^2$ и $y = b + 1$.

Задача 2 (ВМК, 1998, устный) *Доказать, что для неотрицательных чисел* a, b *имеет место неравенство*

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 \geq 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}.$$

Решение. Раскроем скобки в левой части и разделим почленно на 2:

$$\frac{(a+b) + 2\sqrt{ab}}{2} \geq \sqrt{(a+b) \cdot 2\sqrt{ab}}.$$

В таком виде – это неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического чисел $x_1 = (a+b)$, $x_2 = 2\sqrt{ab}$.

Задача 3 (ВМК, 1994, устный) *Известно, что 5 положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_5$ связаны соотношением $a_1 a_2 \cdots a_5 = 1$. Доказать, что в этом случае справедливо неравенство*

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_5) \geq 32.$$

Решение. Запишем неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического двух чисел, $x_1 = 1$ и $x_2 = a_k$ (для каждого $k = 1, \ldots, 5$):

$$\frac{1 + a_k}{2} \geq \sqrt{a_k}.$$

Перемножая эти неравенства, мы получим:

$$\frac{(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_5)}{32} \geq \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_5}.$$

По условию задачи число под знаком корня в правой части равно 1. Поэтому последнее неравенство немедленно дает требуемое утверждение.

Задача 4 (ВМК, 2004, устный) *Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то*

$$\frac{2a}{b + c} + \frac{2b}{a + c} + \frac{2c}{b + a} \geq 3.$$

Решение. Введем новые переменные $x_1 = b+c$, $x_2 = a+c$, $x_3 = b+a$; они, очевидно, положительны. Основные переменные могут быть выражены через них в виде: $2a = -x_1 + x_2 + x_3$, $2b = x_1 - x_2 + x_3$, $2c = x_1 + x_2 - x_3$. Соответственно неравенство, которое мы должны доказать, примет вид:

$$\frac{-x_1+x_2+x_3}{x_1} + \frac{x_1-x_2+x_3}{x_2} + \frac{x_1+x_2-x_3}{x_3} \geq 3$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}\right) + \left(\frac{x_3}{x_1} + \frac{x_1}{x_3}\right) + \left(\frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_2}\right) \geq 6.$$

В силу неравенства для суммы двух взаимно обратных положительных чисел каждая из трех скобок в левой части последнего неравенства больше или равна 2. Соответственно, можно гарантировать, что вся левая часть больше или равна 6, что и требовалось доказать.

Задача 5 (ВМК, 1994, устный) *Доказать, что для любых четырех действительных чисел a, b, c, d выполняется неравенство*

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd.$$

Решение. Рассмотрим неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического чисел $x_1 = a^4$, $x_2 = b^4$, $x_3 = c^4$, $x_4 = d^4$:

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4}{4} \geq \sqrt[4]{a^4 b^4 c^4 d^4}.$$

Выражение в правой части равно $|abcd|$; оно больше или равно $abcd$ – это и доказывает требуемое неравенство.

Мы рекомендуем читателю, используя рассуждения, проведенные в ходе первого шага доказательства теоремы 5, дать независимое решение этой задачи, опирающееся только на неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического двух чисел. Дело в том, что в соответствии с Программой по математике для поступающих в МГУ "объекты и факты, не изучаемые в общеобразовательной школе, ... могут использоваться поступающими, но при условии, что он способен их пояснять и доказывать."Это замечание относится и к другим аналогичным задачам.

Задача 6 (ВМК, 1996, устный) *Для положительных чисел a, b, c доказать неравенство*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

Решение. Перепишем данное неравенство в виде:

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3} \geq 1.$$

Выражение в левой части – это среднее арифметическое трех чисел $x_1 = \frac{a}{b}$, $x_2 = \frac{b}{c}$, $x_3 = \frac{c}{a}$. Среднее геометрическое этих чисел равно

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 1,$$

так что наше неравенство сводится к неравенству для среднего арифметического и среднего геометрического трех указанных чисел.

Задача 7 (ВМК, 1990+1994+1996, устный) *Доказать, что для любых 3 положительных чисел a, b, c выполняется неравенство*

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Решение.

1 способ. Перепишем неравенство, которое нужно доказать, в виде
$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$
Выражение в левой части – это среднее арифметическое чисел a, b и c. Выражение в правой части является средним гармоническим чисел a, b и c. Таким образом, наше неравенство утверждает, что среднее арифметическое больше среднего гармонического или равно ему (этот факт следует из теорем 5 и 6).

2 способ. Как мы рекомендовали читателю, полезно давать независимое решение подобных задач, опирающееся только на неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического двух чисел. В данном случае такое решение выглядит следующим образом.

Раскрывая скобки в левой части, преобразуем наше неравенство к виду
$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geq 6.$$
Применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух взаимно обратных чисел, можно утверждать, что
$$\begin{aligned} \frac{a}{b}+\frac{b}{a} &\geq 2, \\ \frac{a}{c}+\frac{c}{a} &\geq 2, \\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b} &\geq 2. \end{aligned}$$
Складывая эти неравенства почленно, мы получим желаемое неравенство.

Задача 8 (ВМК, 2003, устный) *Доказать, что для любых положительных a, b, c не могут одновременно выполняться неравенства:*
$$a(1-b) > \frac{1}{4},\ b(1-c) > \frac{1}{4},\ c(1-a) > \frac{1}{4}. \tag{3.1}$$

Решение. Допустим противное, что все три неравенства (3.1) одновременно справедливы. Поскольку числа a, b, c – положительны, тогда справедливы и неравенства
$$1-b > \frac{1}{4a},\ 1-c > \frac{1}{4b},\ 1-a > \frac{1}{4c}.$$

Сложим эти неравенства почленно:

$$\begin{gathered} 3-(a+b+c)>\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}\right) \\ \Updownarrow \\ 1-\tfrac{a+b+c}{3}>\tfrac{1}{4}\tfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \\ \Updownarrow \\ A+\tfrac{1}{4H}<1, \end{gathered}$$

где $A = A(a, b, c)$ – среднее арифметическое чисел a, b, c, $H = H(a, b, c)$ – их среднее гармоническое.

Применяя к сумме $A + \frac{1}{4H}$ неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, мы получим:

$$1 > A + \frac{1}{4H} \geq 2\sqrt{A \cdot \frac{1}{4H}} = \sqrt{\frac{A}{H}}.$$

Отсюда следует, что $A < H$, что противоречит неравенству о среднем арифметическом и среднем гармоническом.

Задача 9 (ВМК, 2000, устный) *Доказать, что для неотрицательных чисел a, b и c имеет место неравенство*

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Решение. Выражение в левой части – это среднее арифметическое чисел a, b и c. Выражение в правой части – среднее квадратичное чисел a, b и c. Таким образом, наше неравенство утверждает, что среднее арифметическое меньше среднего квадратичного или равно ему (теорема 7).

Задача 10 (ВМК, 1998, устный) *Доказать, что при $a \geq 1$*

$$\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}.$$

Решение. Умножим и разделим правую часть неравенства на $\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1}$:

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{\sqrt{a}} < \tfrac{2}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}} \\ \Updownarrow \\ \tfrac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{2} < \sqrt{a} \end{gathered}$$

Выражение в левой части – это среднее арифметическое чисел $x_1 = \sqrt{a+1}$ и $x_2 = \sqrt{a-1}$. Среднее квадратичное этих чисел равно

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{a+1+a-1}{2}} = \sqrt{a},$$

так что неравенство, которое нужно доказать, свелось к неравенству для среднего арифметического и среднего квадратичного двух неравных чисел.

Задача 11 (психолог., 1987, №6) *Доказать, что все решения неравенства*

$$\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^2-1} > 2$$

удовлетворяют неравенству

$$x + 2\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^4 - 2x^2 + 1} > 1 + 2\sqrt[3]{x^2-1}.$$

Решение. Второе неравенство можно преобразовать следующим образом:

$$\left((x-1) + 2\sqrt{x-1} + 1\right) + \left(\sqrt[3]{(x^2-1)^2} - 2\sqrt[3]{x^2-1} + 1\right) > 2$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(\sqrt{x-1} + 1\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x^2-1} - 1\right)^2 > 2$$

Если мы обозначим $\sqrt{x-1}+1$ через a, $\sqrt[3]{x^2-1}-1$ через b, то оно примет вид:

$$a^2 + b^2 > 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > 1.$$

Первое неравенство в терминах новых переменных означает, что $\frac{a+b}{2} > 1$. Поскольку среднее квадратичное двух чисел больше или равно их среднего арифметического, неравенство $\frac{a+b}{2} > 1$ влечет неравенство $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > 1$.

Задача 12 (ВМК, 1999, устный) *Пусть $a + b = 2$. Доказать, что $a^3 + b^3 \geq 2$.*

Решение. *1 способ.* Исключим переменную b: $b = 2 - a$. Тогда неравенство $a^3 + b^3 \geq 2$ примет вид:

$$a^3 + (2-b)^3 \geq 2$$
$$\Updownarrow$$
$$(a-2)^2 \geq 0.$$

2 способ. Равенство $a + b = 2$ означает, что среднее арифметическое чисел a и b равно 1: $A(a,b) = 1$. Неравенство, которое нужно доказать, можно записать в виде: $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \geq 1$. Поэтому оно означает, что среднее степенное порядка 3 чисел a и b, больше или равно 1. Этот результат следует из общего неравенства для среднего арифметического и среднего степенного порядка 3:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}. \tag{3.2}$$

Его справедливость доказывается следующей цепочкой равносильных преобразований:

$$\tfrac{a+b}{2} \leq \sqrt[3]{\tfrac{a^3+b^3}{2}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(\tfrac{a+b}{2}\right)^3 \leq \tfrac{a^3+b^3}{2}$$
$$\Updownarrow$$
$$(a+b)^3 \leq 4(a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$\Updownarrow$$
$$3(a+b)(a-b)^2 \geq 0.$$

Задача 13 (мех-мат, 1962) *Пусть a и b – произвольные числа, причем $a + b = 2$. Доказать, что $a^4 + b^4 \geq 2$.*

Решение. *1 способ.* Исключим переменную b: $b = 2 - a$. Тогда неравенство $a^4 + b^4 \geq 2$ примет вид:

$$a^4 + (2-a)^4 \geq 2$$
$$\Updownarrow$$
$$a^4 - 4a^3 + 12a^2 - 16a + 7 \geq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(a-1)^2 \cdot ((a-1)^2 + 6) \geq 0.$$

2 способ. Равенство $a+b=2$ означает, что среднее арифметическое чисел a и b равно 1: $A(a,b)=1$. Неравенство, которое нужно доказать, можно записать в виде: $\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}} \geq 1$. Поэтому оно означает, что среднее степенное порядка 4 чисел a и b, больше или равно 1. Этот результат следует из ранее доказанного (теорема 4) неравенства для среднего арифметического и среднего квадратичного:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

и общего неравенства для среднего квадратичного и среднего степенного порядка 4:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}}.$$

(оно получается из предыдущего неравенства заменой a на a^2 и b на b^2).

Задача 14 (ВМК, 2004, устный) *Пусть a и b –положительные числа. Доказать, что*

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leq \frac{a^6+b^6}{2}.$$

Решение. *1 способ.* Разложим выражение a^6+b^6 на множители и после сокращения общего множителя a^2+b^2 проведем упрощения:

$$\frac{(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)}{8} \leq \frac{(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)}{2}$$
$$\Updownarrow$$
$$3a^4-a^3b-4a^2b^2-ab^3+3b^4 \geq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(a-b)^2 \cdot (3a^2+5ab+3b^2) \geq 0.$$

Выражение $3a^2+5ab+3b^2$ можно рассматривать как квадратный трехчлен относительно a; его дискриминант равен $-11b^2$ и поэтому этот трехчлен положителен при всех a и b.

2 способ. Неравенство, которое нужно доказать, можно записать как неравенство для средних степенных чисел a и b:

$$S_1(a,b) \cdot S_2^2(a,b) \cdot S_3^3(a,b) \cdot S_6^6(a,b).$$

Для его справедливости достаточно выполнения трех неравенств:

$$S_1(a,b) \le S_6(a,b),\ S_2(a,b) \le S_6(a,b),\ S_3(a,b) \le S_6(a,b).$$

Заменяя в неравенстве (2.6) для среднего арифметического и среднего квадратичного чисел x_1 и x_2 переменную x_1 на a^3, а переменную x_2 на b^3 и извлекая кубический корень из обеих частей получившегося неравенства, мы получим неравенство для средних степенных порядка 3 и 6: $S_3(a,b) \le S_6(a,b)$.

Подобным же образом, применяя неравенство (3.2) для среднего арифметического и среднего степенного порядка 3 к числам a^2 и b^2, мы получим неравенство для средних степенных порядка 2 и 6: $S_2(a,b) \le S_6(a,b)$. Тогда, тем более, $S_1(a,b) \le S_6(a,b)$.

Глава 4

Применение к сравнению чисел

Задача 15 (геологический ф-т, 2004, устный) *Сравните числа* $\sqrt{2002}+\sqrt{2004}$ *и* $2\sqrt{2003}$.

Решение. Будем сравнивать не исходные числа, а числа $\frac{\sqrt{2002}+\sqrt{2004}}{2}$ и $\sqrt{2003}$. Первое число – это среднее арифметическое чисел $\sqrt{2002}$ и $\sqrt{2004}$, а второе – их среднее квадратичное. Поэтому первое число меньше.

Задача 16 (ВМК, устный, 2000) *Что больше,* $\lg 7 \cdot \lg 13$ *или* 1*?*

Решение. Применим к неравным положительным числам $x_1 = \lg 7$ и $x_2 = \lg 13$ неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$\sqrt{\lg 7 \cdot \lg 13} < \frac{\lg 7 + \lg 13}{2}.$$

Правую часть этого неравенства можно оценить сверху следующим образом:

$$\frac{\lg 7 + \lg 13}{2} = \frac{\lg(7 \cdot 13)}{2} = \frac{\lg 91}{2} < \frac{1}{2} \cdot \lg 100 = \lg \sqrt{100} = \lg 10 = 1.$$

Поэтому 1 больше, чем $\lg 7 \cdot \lg 13$.

Глава 5

Применение к доказательству геометрических неравенств

Задача 17 (ВМК, 2000, устный) *Доказать, что сумма длин высот треугольника не менее чем в девять раз превосходит радиус вписанной в этот треугольник окружности.*

Решение. В школьной планиметрии есть только одна величина, которая связана как с высотами треугольника, так и с радиусом вписанной в этот треугольник окружности – это площадь треугольника. Соответствующие формулы хорошо известны:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ah_a \\ S &= \frac{1}{2}bh_b \\ S &= \frac{1}{2}ch_c \\ S &= \frac{1}{2}(a+b+c)r \end{aligned}$$

Здесь: S – площадь треугольника, a, b, c – длины его сторон, h_a, h_b, h_c – длины высот, проведенных к сторонам a, b, c соответственно, r – радиус окружности, вписанной в треугольник.

Исключим из этих равенств переменную S и выразим высоты через стороны:

$$\begin{aligned} h_a &= \frac{r(a+b+c)}{a} \\ h_b &= \frac{r(a+b+c)}{b} \\ h_c &= \frac{r(a+b+c)}{c} \end{aligned}$$

Складывая эти равенства почленно, мы получим:

$$\frac{h_a+h_b+h_c}{r} = \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}.$$

Правая часть этого равенства появилась в задаче 7, где было доказано, что она не меньше 9. Поэтому можно утверждать, что

$$\frac{h_a+h_b+h_c}{r} \geq 9. \tag{5.1}$$

Задача 18 (ВМК, 1996, устный) *Доказать, что $l_a + l_b + l_c \geq 9r$, где l_a, l_b, l_c – биссектрисы треугольника, а r – радиус вписанной окружности.*

Решение. Поскольку перпендикуляр – кратчайшее расстояние от точки до прямой, биссектриса не может быть короче соответствующей высоты:

$$\begin{aligned} l_a &\geq h_a, \\ l_b &\geq h_b, \\ l_c &\geq h_c. \end{aligned}$$

Поэтому $l_a + l_b + l_c \geq h_a + h_b + h_c$ и требуемое неравенство немедленно следует из неравенства (5.1).

Задача 19 (ВМК, 2003, устный) *Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$, длины сторон которого равны a, b, c и d соответственно, не превосходит $\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$.*

Решение. Площадь четырехугольника $ABCD$ равна сумме площадей двух треугольников, ABC и ACD. Если $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, то

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2}ab\sin B \le \frac{1}{2}ab \le \frac{1}{4}(a^2+b^2), \\ S_{ACD} &= \frac{1}{2}cd\sin D \le \frac{1}{2}cd \le \frac{1}{4}(c^2+d^2). \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, получим требуемый результат.

Задача 20 (ВМК, 2002, устный) *В треугольнике со сторонами a, b, c и лежащими против этих сторон углами α, β, γ выполняется условие*

$$a < \frac{b+c}{2}. \tag{5.2}$$

Доказать, что тогда

$$\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}. \tag{5.3}$$

Решение. Прежде всего преобразуем неравенство (5.3), которое нужно доказать, к виду, содержащему только стороны треугольника (поскольку данное нам неравенство (5.2) содержит лишь стороны).

Поскольку сумма углов треугольника равна π, сумма $\beta + \gamma$ равна $\pi - \alpha$, так что неравенство (5.3) равносильно неравенству

$$\alpha < \frac{\pi - \alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha < \frac{\pi}{3}.$$

Далее, угол α, как угол треугольника, удовлетворяет двойному неравенству $0 < \alpha < \pi$. На промежутке $[0;\pi]$ функция $y = \cos x$ монотонно убывает. Поэтому неравенство $\alpha < \frac{\pi}{3}$ равносильно неравенству $\cos\alpha > \frac{1}{2}$. Применяя теорему косинусов ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$), мы сведем это неравенство к неравенству относительно сторон треугольника:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2 - bc. \tag{5.4}$$

Итак, мы должны доказать, что неравенство (5.2) влечет неравенство (5.4). Для этого достаточно показать, что всегда выполнено неравенство

$$\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 \le b^2 + c^2 - bc. \tag{5.5}$$

Упростим это неравенство раскрывая скобки и приводя подобные:

$$\begin{gathered}\tfrac{b^2+2bc+c^2}{4} \le b^2+c^2-bc \\ \Updownarrow \\ b^2+2bc+c^2 \le 4b^2+4c^2-4bc \\ \Updownarrow \\ 3b^2-6bc+3c^2 \ge 0 \\ \Updownarrow \\ 3(b-c)^2 \ge 0.\end{gathered}$$

Итак, неравенство (5.5) равносильно истинному неравенству и потому истинно.

В ходе преобразований на последнем этапе наших рассуждений мы фактически повторили доказательство неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Вместо этого можно было чуть изменить эти преобразования:

$$\begin{gathered}\tfrac{b^2+2bc+c^2}{4} \le b^2+c^2-bc \\ \Updownarrow \\ b^2+2bc+c^2 \le 4b^2+4c^2-4bc \\ \Updownarrow \\ 6bc \le 3b^2+3c^2 \\ \Updownarrow \\ bc \le \tfrac{b^2+c^2}{2},\end{gathered}$$

после чего сослаться на неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

Задача 21 (ВМК, 1990, устный) *Доказать, что если a и b – катеты прямоугольного треугольника, а c – его гипотенуза, то $a+b \le c\sqrt{2}$, причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда треугольник равнобедренный.*

Решение. *1 способ.* Возведем неравенство, которое нужно доказать, в квадрат: $a^2+2ab+b^2 \le 2c^2$. Поскольку по смыслу задачи переменные a, b, c – положительны, полученное неравенство равносильно исходному, т.е. оба эти неравенства истинны или ложны одновременно.

Заменяя с помощью теоремы Пифагора выражение c^2 в правой части выражением a^2+b^2, сведем задачу к неравенству с двумя переменными

a и b:

$$a^2 + 2ab + b^2 \le 2(a^2 + b^2)$$
$$\Updownarrow$$
$$a^2 - 2ab + b^2 \ge 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(a - b)^2 \ge 0.$$

Эта цепочка равносильных преобразований доказывает справедливость исходного неравенства.

Проделанные преобразования практически не меняются, если в исходном неравенстве стоял знак равенства – просто во всех последующих нестрогих неравенствах вместо знака неравенства будет стоять знак -". В частности, заключительным в ходе этих преобразований станет равенство $(a - b)^2 = 0$, которое равносильно тому, что $a = b$, т.е. треугольник равнобедренный.

2 способ. С помощью теоремы Пифагора неравенство $a + b \le c\sqrt{2}$ можно переписать в виде:

$$a + b \le \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\tfrac{a+b}{2} \le \sqrt{\tfrac{a^2+b^2}{2}},$$

так что оно сводится к неравенству о среднем арифметическом и среднем квадратичном чисел a и b, и поэтому справедливо. Кроме того, мы знаем, что знак равенства в неравенстве о среднем арифметическом и среднем квадратичном чисел a и b достигается тогда и только тогда, когда $a = b$ – в терминах нашей задачи это означает, что треугольник равнобедренный.

Нетрудно понять, что в ходе первого способа решения мы фактически повторяли доказательство неравенства о среднем арифметическом и среднем квадратичном чисел a и b (теорема 4).

Задача 22 (ВМК, 2002+2006, устный) *Доказать, что в прямоугольном треугольнике*

$$\frac{c}{r} \ge 2(1 + \sqrt{2}),$$

где c – длина гипотенузы, а r – радиус вписанной окружности.

Решение. Для любого треугольника со сторонами a, b, c радиус вписанной окружности может быть подсчитан по формуле

$$r = \frac{2S}{a + b + c}.$$

В случае прямоугольного треугольника $S = \frac{1}{2}ab$ (a и b – катеты), так что

$$r = \frac{ab}{a+b+c}.$$

Поэтому неравенство, которое нужно доказать, сводится к неравенству

$$\frac{c(a+b+c)}{ab} \geq 2(1+\sqrt{2}).$$

В задаче 21 было доказано, что $c \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)$. Используя эту оценку, мы имеем:

$$\frac{c(a+b+c)}{ab} \geq \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)\left(a+b+\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)\right)}{ab} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}\frac{(a+b)^2}{ab}.$$

Дробь $\frac{(a+b)^2}{ab}$ оценим с помощью неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического:

$$\frac{(a+b)^2}{ab} \geq \frac{(2\sqrt{ab})^2}{ab} = 4.$$

Таким образом,

$$\frac{c}{r} \geq \frac{\sqrt{2}+1}{2} \cdot 4 = 2(1+\sqrt{2}).$$

Глава 6

Применение к решению уравнений, неравенств и систем

Задача 23 (химический ф-т, 2003, июль, №4) *Решить уравнение*

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)=8.$$

Решение. Для сокращения записей при последующих преобразованиях введем новые переменные

$$a=\sqrt{x},\quad b=\sqrt{2-x}.$$

Отметим, что $a, b > 0$.

Тогда исходное уравнение примет вид:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)(a+b)=8.$$

Раскрывая скобки, получим:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=6. \tag{6.1}$$

Обращая внимание на наличие взаимно обратных положительных чисел, применим неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом к каждой из трех скобок в левой части уравнения (6.1):

$$\begin{aligned} a+\frac{1}{a} &\geq 2, \\ b+\frac{1}{b} &\geq 2, \\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a} &\geq 2. \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства почленно, мы получим, что

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) \geq 6, \tag{6.2}$$

причем, если хотя бы в одном из трех использованных неравенств о среднем арифметическом и среднем геометрическом стоял знак $>$, а не $\geq$, то и в неравенстве (6.2) будет стоять знак $>$. Поэтому равенство (6.1) равносильно тому, что в этих неравенствах стоит знак $=$, что, в свою очередь, равносильно тому, что

$$\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \\ \frac{a}{b}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{2-x}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1$$

Ответ: $x=1$.

Задача 24 (ВМК, 2006, июль, №4) *При каждом значении параметра d решить уравнение*

$$\begin{gathered} \sqrt{x^2-y^2-dx+3dy-2d^2}+\sqrt{x-y+d}\cdot\sqrt{4-2x+d}+ \\ +\sqrt{-2x^2-2xy+(5d+4)x+(d+4)y-2d^2-8d}=4. \end{gathered}$$

Решение. Выражения под первым и последним радикалами можно рассматривать как квадратные трехчлены относительно переменной x. Попробуем разложить их на множители.

Для многочлена

$$x^2-y^2-dx+3dy-2d^2=x^2-dx-(y^2-3dy+2d^2)$$

дискриминант равен

$$D=d^2+4y^2-12dy+8d^2=4y^2-12dy+9d^2=(2y-3d)^2,$$

так что корни соответствующего квадратного уравнения равны

$$x_{1,2} = \frac{d \pm (2y - 3d)}{2} = y - d;\ -y + 2d.$$

Поэтому выражение под первым радикалом равно

$$(x - y + d)(x + y - 2d).$$

Для многочлена

$$-2x^2-2xy+(5d+4)x+(d+4)y-2d^2-8d = -2x^2-(2y-5d-4)x-(2d^2-dy-4y+8d)$$

дискриминант равен

$$D = 4y^2 + 9d^2 + 16 - 12dy + 16y - 24dy = (2y - 3d + 4)^2,$$

так что корни соответствующего квадратного уравнения равны

$$x_{1,2} = \frac{-2y + 5d + 4 \pm (2y - 3d + 4)}{2} = \frac{d+4}{2};\ -y + 2d.$$

Поэтому выражение под последним радикалом равно

$$(-2x + d + 4)(x + y - 2d).$$

Теперь исходное уравнение можно переписать в виде:

$$\sqrt{(x - y + d)(x + y - 2d)} + \sqrt{x - y + d} \cdot \sqrt{4 - 2x + d} + \\ + \sqrt{(-2x + d + 4)(x + y - 2d)} = 4.$$

Обращая внимание на повторяющиеся блоки, введем новые переменные:

$$\begin{aligned} a &= x - y + d, \\ b &= x + y - 2d, \\ c &= 4 - 2x + d. \end{aligned}$$

Для них исходное уравнение примет вид:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{a}\sqrt{c} + \sqrt{bc} = 4. \tag{6.3}$$

Поскольку выражения a, c, ab, bc стоят под знаками арифметических квадратных корней, они неотрицательны. Если бы выражение b было отрицательным, то отсюда бы следовало, что $a = b = 0$, а тогда левая часть уравнения (6.3) равнялась бы 0. Поэтому $b \geq 0$ и, значит, выражения $\sqrt{ab}$, $\sqrt{ac}$, $\sqrt{bc}$ являются средними геометрическими чисел a и b, a и c, b и c соответственно. Применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, мы получим:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc} \leq \frac{a+b}{2} + \frac{a+c}{2} + \frac{b+c}{2} = a + b + c.$$

Сумма $a + b + c$ равна

$$(x - y + d) + (x + y - 2d) + (4 - 2x + d) = 4,$$

т.е. в точности правой части уравнения (6.3). Если хотя бы в одном из трех использованных неравенств о среднем арифметическом и среднем геометрическом стоял знак $<$, то левая часть уравнения (6.3) была бы меньше 4. Поэтому во всех трех неравенствах достигается знак равенства, что означает равенство чисел a, b, c. Поскольку их сумма равна 4, каждое из них равно $\frac{4}{3}$. Следовательно, уравнение (6.3) равносильно системе:

$$\begin{cases} x - y + d = \frac{4}{3}, \\ x + y - 2d = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3d}{2}, \\ x = \frac{3d+8}{6} \end{cases}$$

Таким образом, при каждом $d \in R$ исходное уравнение имеет единственное решение $(x; y) = \left(\frac{3d+8}{6}; \frac{3d}{2}\right)$.

Отметим, что процесс решения исходного уравнения совершенно не зависел от значения параметра d. Это, впрочем, исключительно редкий случай. Обычно, начиная с некоторого места, рассуждения начинают зависеть от параметра, что приводит к ветвлению случаев. В сложных задачах получается “дерево”, в структуре которого довольно тяжело разобраться.

Ответ: при каждом $d \in R$ уравнение имеет единственное решение $(x; y) = \left(\frac{3d+8}{6}; \frac{3d}{2}\right)$.

Задача 25 (мех-мат, 1965, №4) *Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют уравнению*

$$\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2}\sin y.$$

Решение. Поскольку уравнение содержит две неизвестные, естественно попытаться превратить его в систему из двух уравнений. Практически единственная возможность это сделать – это метод оценок, поскольку в ситуации $f(x,y) \geq C$, $g(x,y) \leq C$ (C – нижняя граница возможных значений $f(x,y)$ и верхняя граница возможных значений $g(x,y)$) он всегда превращает уравнение $f(x,y) = g(x,y)$ в систему вида

$$\begin{cases} f(x,y) = C, \\ g(x,y) = C. \end{cases}$$

Итак попробуем оценить возможные значения выражений в левой и правой частях исходного уравнения.

С правой частью все просто. Поскольку $\sin y \in [-1; 1]$, справедливо двойное неравенство

$$-11.5 \leq 12 + \frac{1}{2}\sin y \leq 12.5, \tag{6.4}$$

причем эти границы нельзя улучшить (они достигаются при некоторых y).

Взаимно обратные положительные числа $\sin^2 x$ и $\frac{1}{\sin^2 x}$, $\cos^2 x$ и $\frac{1}{\cos^2 x}$ приводят к естественному выводу: воспользоваться неравенством для суммы двух взаимно обратных положительных чисел:

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} &\geq 2, \\ \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} &\geq 2, \end{aligned}$$

так что выражение в левой части исходного уравнения (обозначим его для краткости буквой F) больше или равно 8. Сопоставляя оценку $F \geq 8$ с *точной* оценкой (6.4) правой части, мы видим, что метод оценок не сработает.

Отсюда может быть два вывода:

1. идея применить метод оценок была ошибочной;

2. оценка $F \geq 8$ очень грубая и ее можно уточнить; ясно, что для применения метода оценок нужно иметь неравенство $F \geq 12.5$ (или неравенство $F \geq C$, где $C > 12.5$ – тогда исходное уравнение вообще не имеет решений).

Общие соображения, приведенные в начале решения, показывают, что второй вывод, видимо, более разумный. Действительно, число 8 никак не может быть *точной* нижней границей значений левой части уравнения: если она достигается, то одновременно должны быть выполнены два равенства $\sin^2 x = 1$, $\cos^2 x = 1$, что невозможно в силу основного тригонометрического тождества. Причина этого связана с тем, что выражения $a = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}$ и $b = \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}$ взаимозависимы, а мы их оценивали независимо друг от друга.

Поскольку выражение F имеет вид $a^2 + b^2$, применим для его оценки неравенство о среднем квадратичном и среднем арифметическом:

$$\begin{aligned} F &= a^2 + b^2 = 2\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2 \geq 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{\sin^2 2x}\right)^2 \geq \frac{25}{2} = 12.5, \end{aligned} \tag{6.5}$$

причем эта нижняя граница возможных значений выражения F является точной, т.к. достигается при некотором значении x из области определения.

Из оценок (6.4) и (6.5) следует, что исходное уравнение равносильно системе (мы используем результат о том, когда в неравенстве о среднем квадратичном и среднем арифметическом достигается знак -"):

$$\begin{cases} 12 + \frac{1}{2}\sin y = 12.5, \\ \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}, \\ \sin^2 2x = 1. \end{cases}$$

После простых тригонометрических преобразований эта система приводится к виду:

$$\begin{cases} \sin y = 1, \\ \cos 2x = 0, \end{cases}$$

откуда немедленно следует ответ задачи.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi m\right)$, $n, m \in Z$.

Задача 26 (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2006, №4) *Решить неравенство*

$$5^{\log_x 2} \cdot \log_2 x + 5^{\log_2 x} \cdot \log_x 2 \leq 10.$$

Решение. Поскольку $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$, в задаче четыре раза повторяется один и тот же блок $\log_2 x$. Имея это в виду, введем новую неизвестную $t = \log_2 x$. Для нее неравенство примет вид:

$$5^{\frac{1}{t}} \cdot t + 5^t \cdot \frac{1}{t} \leq 10. \tag{6.6}$$

Теперь обратим внимание на наличие взаимно обратных чисел t и $\frac{1}{t}$. Это наводит на мысль оценить левую часть неравенства (6.6) с помощью неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Но сделать это можно только, если соответствующие числа – положительны. Поэтому рассмотрим два случая.

1 случай: $t > 0$. Применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, мы получим следующую оценку левой части неравенства (6.6) :

$$5^{\frac{1}{t}} \cdot t + 5^t \cdot \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{5^{\frac{1}{t}} \cdot t \cdot 5^t \cdot \frac{1}{t}} = 2\sqrt{5^{t+\frac{1}{t}}} = 2 \cdot 5^{\frac{t+\frac{1}{t}}{2}} \geq 2 \cdot 5^1 = 10.$$

При этом, если хотя бы в одном из двух использованных неравенств о среднем арифметическом и среднем геометрическом стоял знак $>$, а не $\geq$, то левая часть неравенства (6.6) будет строго больше 10. Поэтому в случае $t > 0$ неравенство (6.6) может выполняться тогда и только тогда, когда в двух использованных неравенствах о среднем арифметическом и среднем геометрическом стоит знак $=$, что, в свою очередь, равносильно тому, что

$$\left\{ \begin{array}{l} 5^{\frac{1}{t}} \cdot t = 5^t \cdot \frac{1}{t} \\ t = \frac{1}{t} \end{array} \right. \Leftrightarrow t = 1$$

(можно решить второе уравнение с учетом условия $t > 0$ и проверить, что найденное значение $t = 1$ удовлетворяет первому уравнению).

2 случай: $t < 0$. В этом случае левая часть неравенства (6.6) отрицательна, так что это неравенство заведомо выполнено при всех $t < 0$.

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим, что исходное неравенство распадается на уравнение $\log_2 x = 1$ и неравенство $\log_2 x < 0$, которые решаются без труда:

$$\begin{array}{cc} \log_2 x = 1 & \log_2 x < 0 \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ x = 2 & 0 < x < 1 \end{array}$$

Ответ: $x = 2$, $0 < x < 1$.

Задача 27 (Олимпиада мех-мат ф-та, 2002, 8 кл., №6) *Существуют ли рациональные числа x, y, u, v, удовлетворяющие уравнению*

$$(x+y\sqrt{2})^2+(u+v\sqrt{2})^2=7+5\sqrt{2}? \tag{6.7}$$

Решение. Допустим, что уравнение (6.7) имеет решение, где x, y, u, v – рациональные числа. Раскрывая скобки в левой части, перепишем уравнение (6.7) в виде:

$$x^2+2xy\sqrt{2}+2y^2+u^2+2uv\sqrt{2}+2v^2=7+5\sqrt{2}. \tag{6.8}$$

Из иррациональности числа $\sqrt{2}$ следует, что равенство $a+b\sqrt{2}=0$, где a и b – рациональные, равносильно равенствам $a=0$, $b=0$. В нашей задаче это означает, что уравнение (6.8) равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+2y^2+u^2+2v^2=7, \\ 2xy+2uv=5. \end{array}\right. \tag{6.9}$$

Итак, задача решения уравнения (6.7) свелась к решению системы (6.9). Начиная с этого места, рациональность чисел x, y, u, v уже не будет играть никакой роли.

Используя неравенство о среднем арифметическом для неотрицательных чисел x^2 и $2y^2$, u^2 и $2v^2$, оценим выражение в левой части первого равенства системы (6.9):

$$(x^2+2y^2)+(u^2+2v^2)\geq 2\sqrt{x^2\cdot 2y^2}+2\sqrt{u^2\cdot 2v^2}=\sqrt{2}\,(|2xy|+|2uv|)\geq\sqrt{2}(2xy+2uv).$$

В силу системы (6.9) первое число в этой цепочке равно 7, а последнее равно $5\sqrt{2}$. Таким образом, если система (6.9) имеет решение, то верно неравенство $7\geq 5\sqrt{2}$. Но это неравенство равносильно (после возведения в квадрат) неравенству $49\geq 50$, т.е. ложно. Полученное противоречие означает, что система (6.9) несовместна. Поскольку на множестве рациональных чисел эта система и исходное уравнение равносильны, ответ на вопрос задачи отрицательный.

Ответ: нет.

Задача 28 (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2006, №9) *Существуют ли рациональные числа x, y, u, v, удовлетворяющие уравнению*

$$(x+y\sqrt{2})^6+(u+v\sqrt{2})^6=7+5\sqrt{2}? \tag{6.10}$$

Решение. Выражения $(x+y\sqrt{2})^3$ и $(u+v\sqrt{2})^3$ после раскрытия скобок и приведения подобных могут быть записаны в виде $x' + y'\sqrt{2}$, где $x' = x^3 + 6xy^2$, $y' = 3x^2y + 2y^3$, $u' = u^3 + 6uv^2$, $v' = 3u^2v + 2v^3$. Для чисел x', y', u', v' исходное уравнение примет вид:

$$(x' + y'\sqrt{2})^2 + (u' + v'\sqrt{2})^2 = 7 + 5\sqrt{2}.$$

Если числа x, y, u, v – рациональные, то и числа x', y', u', v' – рациональные. Таким образом, если уравнение (6.10) имеет решение в рациональных числах, то и уравнение (6.7) имеет решение в рациональных числах, что, как мы установили, неверно.

Ответ: нет.

Глава 7

Применение к исследованию функций на экстремумы

Задача 29 (ВМК, 2004, устный) *Найти наименьшее значение функции*

$$y = \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1}.$$

Решение. Дробь, которая задает функцию – неправильная (степень числителя больше степени знаменателя). Делением в столбик числителя этой дроби на знаменатель выделим из дроби "целую"часть:

$$y = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

Поэтому нашу функцию можно рассматривать как суперпозицию функций $y = t + \frac{1}{t}$ и $t = x^2 + x + 1$. При изменении переменной x от $-\infty$ до $+\infty$ новая переменная t меняется от $\frac{3}{4}$ до $+\infty$. Поэтому наименьшее значение исходной функции совпадает с наименьшим значением функции $y = t + \frac{1}{t}$ на множестве $\frac{3}{4} \leq t < +\infty$. В силу неравенства для суммы двух взаимно обратных положительных чисел выражение $t + \frac{1}{t}$ больше или равно 2, причем знак равенства достигается при $t = 1$. Поскольку это значение входит в множество $\frac{3}{4} \leq t < +\infty$, 2 и будет искомым нименьшим значением.

Более того, мы можем найти, при каких значениях основной независимой переменной x достигается этот минимум. Для этого нужно решить уравнение $x^2 + x + 1 = 1$, что дает две точки: $x = -1$ и $x = 0$.

Ответ: $y_{\min} = 2$; это значение достигается при $x = -1$ и $x = 0$.

Задача 30 (ВМК, устный, 1998) *Найти при $x < 0$ наибольшее значение функции*

$$y = 4x + \frac{\pi}{x} - \cos\left(4x^2\right).$$

Решение. Функцию $y(x)$ можно рассматривать как сумму двух функций: $g(x) = 4x + \frac{\pi}{x}$ и $h(x) = -\cos(4x^2)$. Первая функция является суммой двух "почти взаимно обратных"чисел. Естественно применить для оценки возможных значений этой функции неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Однако, числа $4x$ и $\frac{\pi}{x}$ – отрицательные, так что непосредственно это сделать нельзя. Поэтому мы применим следующий прием. Запишем $g(x)$ в виде $g(x) = -\left(4 \cdot (-x) + \frac{\pi}{-x}\right)$. Числа $4 \cdot (-x)$ и $\frac{\pi}{-x}$ – положительные. Поэтому в силу неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$-g(x) \geq 2\sqrt{4 \cdot (-x) \cdot \frac{\pi}{-x}} = 2\sqrt{\pi}.$$

Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $4 \cdot (-x) = \frac{\pi}{-x}$, что равносильно $x = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (напомним, что $x < 0$). Соответственно, при всех $x < 0$ функция $g(x)$ меньше или равна $g\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$ – это наибольшее значение функции $g(x)$ на множестве $x < 0$.

Значения второго слагаемого, $h(x) = -\cos(4x^2)$, не выходят за пределы отрезка $[-1; 1]$. Значение 1 достигается в бесконечном числе точек вида $x = \pm\frac{\sqrt{(2n+1)\pi}}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Поэтому наибольшее значение функции $h(x)$ на множестве $x < 0$ равно 1.

Вообще говоря, наибольшее значение суммы двух функций, $g(x)$ и $h(x)$, не равно сумме наибольших значений слагаемых. Но если существует точка x_0, в которой как $g(x)$, так и $h(x)$ достигают наибольшего значения, то в этой же точке достигается наибольшее значение функции $y(x) = g(x) + h(x)$ (и, следовательно, оно равно сумме наибольших значений $g(x)$ и $h(x)$). В нашем случае точка $x_0 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, в которой достигается наибольшее значение функции $g(x)$, встречается и среди отрицательных чисел $x = -\frac{\sqrt{(2n+1)\pi}}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, в которых достигается наибольшее значение функции $h(x)$ (под номером $n = 0$). Поэтому наибольшее значение $y(x)$ равно $1 - 4\sqrt{\pi}$, причем оно достигается в точке $x_0 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Рассуждения, проведенные в предыдущем абзаце можно было бы упростить, просто проверив, что в точке $x_0 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ функция $h(x)$ принимает (максимально возможное для нее) значение 1.

Ответ: $y_{\max} = 1 - 4\sqrt{\pi} = y\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

Задача 31 (ВМК, 2004, устный) *Найти наибольшее значение функции*

$$y = (1-x)^5(1+2x)^2(1+x) \tag{7.1}$$

на отрезке $[-0.5; 1]$.

Решение. Данную функцию можно рассматривать как произведение восьми чисел: $a_1 = a_2 = \cdots = a_5 \equiv 1 - x$, $a_6 = a_7 = 1 + 2x$, $a_8 = 1 + x$. Если $x \in [-0.5; 1]$, все эти числа неотрицательные. Поэтому к ним можно применить неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$\sqrt[8]{a_1 \dots a_8} \le \frac{a_1 + \cdots + a_8}{8}.$$

Поскольку в рассматриваемом случае сумма $a_1 + \cdots + a_8$ равна $5(1-x) + 2(1+2x) + (1+x) = 8$, это неравенство примет вид:

$$\sqrt[8]{y} \le 1 \Leftrightarrow y \le 1.$$

Полученная верхняя граница для возможных значений функции (7.1) будет её наибольшим значением на отрезке $[-0.5; 1]$, если эта верхняя граница достигается при некотором $[-0.5; 1]$.

В использованном неравенстве о среднем арифметическом и среднем геометрическом знак равенства достигается тогда и только тогда числа $a_1, \dots, a_8$ равны между собой:

$$\begin{cases} 1 - x = 1 + 2x, \\ 1 - x = 1 + x \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Поскольку число $x = 0$ действительно лежит на отрезке $[-0.5; 1]$, можно утверждать, что

$$\max_{x \in [-0,5;1]} y = 1.$$

Ответ: $\max_{x\in[-0,5;1]} y = 1$; это значение достигается при $x = 0$.

Задача 32 (ВМК, 2004, устный) *Стоимость эксплуатации катера, плывущего со скоростью v км/час составляет $90 + 0.4v^2$ рублей в час. С какой скоростью должен плыть катер, чтобы стоимость одного километра пути была наименьшей?*

Решение. Один километр пути катер проходит за время $t = \frac{s}{v} = \frac{1}{v}$, что означает расходы в размере $C = (90+0.4v^2)\cdot t = \frac{90}{v} + 0.4v$. Величина расходов является суммой двух "почти взаимно обратных"положительных чисел. Применим поэтому неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом: $C \geq 2\sqrt{\frac{90}{v}\cdot 0.4v} = 12$. Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\frac{90}{v} = 0.4v$, что равносильно $v = 15$. Итак, при всех значениях $v > 0$ величина $C = C(v)$ больше или равна $C(15) = 12$ – это число и будет наименьшим значением функции $C(v)$ на множестве $0 < v < +\infty$.

Ответ: 15 км/час.

Задача 33 (ВМК, олимпиада ”Абитуриент-2007”, 2007, апрель, №5) *Найти максимальное значение функции*

$$y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)}.$$

Решение. Применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратичном, мы получим:

$$y \leq 2\sqrt{\frac{\sin x + \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)}{2}}.$$

Выражение под радикалом в правой части этого неравенства равно $\sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right)\cos\frac{5\pi}{12}$ и, в свою очередь, не превосходит $\cos\frac{5\pi}{12}$. Таким образом,

$$y \leq 2\sqrt{\cos\frac{5\pi}{12}},$$

причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда совместна система

$$\begin{cases} \sin x = \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right), \\ \sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)\sin\frac{5\pi}{12} = 0, \\ \sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) = 1 \end{cases}$$

Последняя система равносильна уравнению $\sin\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)=1$, множество решений которого имеет вид: $x=\frac{\pi}{12}+2\pi n$, $n\in Z$ – именно в этих точках достигается наибольшее значение нашей функции. Само наибольшее значение равно

$$\begin{aligned} y_{\max} &= 2\sqrt{\cos\frac{5\pi}{12}}=2\sqrt{\cos 75^\circ}=2\sqrt{\cos\left(45^\circ+30^\circ\right)} \\ &= 2\sqrt{\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ}=\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Задача 34 (химический ф-т МГУ, 1978, №3Н) *Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, основания которых являются квадратами, а каждая из боковых граней имеет периметр 6 см. Найти среди них параллелепипед с наибольшим объёмом и вычислить величину этого объёма.*

Решение. Пусть $x>0$ (см) – длина стороны основания параллелепипеда. Поскольку периметр боковой грани равен 6 (см), высота параллелепипеда равна $3-x$ (см). Так как высота – положительное число, параметр x должен быть меньше 3. Обратно, если x – произвольное число из интервала $(0;3)$, существует параллелепипед, удовлетворяющий условию задачи, у которого длина стороны основания равна x.

Теперь мы можем записать объём параллелепипеда (в куб.см.) как функцию $V(x)=x^2(3-x)$ от параметра x, так что наша задача примет вид:

найти наибольшее значение функции $V(x)=x^2(3-x)$ *на интервале* $0<x<3$.

Перепишем формулу, которая задаёт $V(x)$, в виде

$$V(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{x\cdot x\cdot(6-2x)}\right)^3$$

и применим к положительным числам $a_1=x$, $a_2=x$, $a_3=6-2x$ неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$V(x)\le\frac{1}{2}\left(\frac{x+x+6-2x}{3}\right)^3. \tag{7.2}$$

Правая часть неравенства (7.2) не зависит от x и равна 4, т.е. $V(x)\le 4$. Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда числа x, x, $6-2x$ равны между собой, т.е. когда $x = 6-2x \Leftrightarrow x = 2$. Поскольку значение $x = 2$ лежит на интервале $0 < x < 3$, искомое наибольшее значение функции $V(x)$ (на интервале $0 < x < 3$) равно 4 и достигается при $x = 2$. Соответственно, искомый параллелепипед с наибольшим объёмом имеет размеры $2 \times 2 \times 3$, а его объём равен 4 (куб.см.).

Как нетрудно видеть, идея решения заключается в преобразовании $V(x)$ в произведение таких положительных сомножителей, что

1. их сумма постоянна;
2. в некоторой точке x_0 эти сомножители совпадают друг с другом;
3. точка x_0 принадлежит соответствующему множеству значений переменой.

В рассмотренном примере сделать такое преобразование было несложно. Следующая задача немного труднее.

Задача 35 (мех-мат ф-т МГУ, 1977, №3Н) *Доказать, что для функции $f(x) = \cos x \sin 2x$ справедливо неравенство*

$$\min_{x\in[-\pi;\pi]} f(x) > -\frac{7}{9}.$$

Решение. Используя тождества $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ и $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, преобразуем формулу, которая задаёт функцию $f(x)$, к виду $f(x) = 2\sin x(1-\sin^2 x)$.

В этом виде нашу функцию можно рассматривать как суперпозицию функций $g(z) = 2z(1-z^2)$ и $z(x) = \sin x$. При изменении переменной x от $-\pi$ до $+\pi$ значения переменной $z(x)$ заполняют отрезок $[-1; 1]$. Поэтому наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $-\pi \le x \le \pi$ совпадает с наименьшим значением функции $g(z) = 2z(1-z^2)$ на отрезке $-1 \le z \le 1$. Функция $g(z)$ неотрицательна при $z \in [0; 1]$, неположительна при $z \in [-1; 0]$ и, кроме того, является нечётной. Поэтому её наибольшее значение M достигается в некоторой точке $x_0 > 0$ (не исключено, что таких точек несколько), а наименьшее – в точке $-x_0$; при этом $m = -M$.

Поэтому задача сводится к поиску $M = \max_{z\in[0;1]} g(z)$ и доказательству того, что $M < \frac{7}{9}$.

Функция $g(z) = 2z(1 - z^2)$ является произведением трёх сомножителей, z, $2 - 2z$, $1 + z$, которые неотрицательны на отрезке $0 \le z \le 1$. Поэтому в силу неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$g(z) \le \left(\frac{z + 2 - 2z + 1 + z}{3}\right)^3 = 1.$$

При этом знак равенства в неравенстве $g(z) \le 1$ достигается тогда и только тогда, когда одновременно выполнены два равенства: $z = 2 - 2z$, $z = 1 + z$, что, очевидно, невозможно.

Чтобы найти "правильный" способ разложения $g(z)$ в произведение трёх неотрицательных множителей, воспользуемся методом неопределённых коэффициентов. Пусть a и b – некоторые положительные числа (неопределённые коэффициенты). Запишем $g(z)$ в виде:

$$g(z) = \frac{2}{ab} z(a - az)(b + bz).$$

В силу неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом, верно неравенство

$$g(z) \le \frac{2}{ab}\left(\frac{z + a - az + b + bz}{3}\right)^3.$$

Правая часть этого неравенства не зависит от z тогда и только тогда, когда $1 - a + b = 0$ – это первое условие, которому должны удовлетворять неизвестные (пока) положительные коэффициенты a и b.

В этом случае

$$g(z) \le \frac{2}{ab}\left(\frac{a + b}{3}\right)^3. \tag{7.3}$$

При этом знак равенства в неравенстве (7.3) достигается тогда и только тогда, когда одновременно выполнены два равенства: $z = a - az$, $z = b + bz$, т.е. тогда и только тогда, когда $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1-b}$ – это второе условие, которому должны удовлетворять неизвестные положительные коэффициенты a и b.

Система

$$\begin{cases} 1 - a + b = 0 \\ \frac{a}{1+a} = \frac{b}{1-b}, \end{cases}$$

имеет единственное положительное решение: $a = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Для этих значений коэффициентов a и b неравенство (7.3) примет вид:

$$g(z) \leq \frac{4}{3\sqrt{3}}, \tag{7.4}$$

Знак равенства в неравенстве (7.4) достигается тогда и только тогда, когда $z = \frac{a}{1+a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Поскольку это значение z лежит на отрезке $[0;1]$, искомое наибольшее значение M функции $g(z)$ на отрезке $[0;1]$ равно $\frac{4}{3\sqrt{3}}$.

Для завершения решения задачи осталось доказать, что это число меньше, чем $\frac{7}{9}$:

$$\frac{4}{3\sqrt{3}} < \frac{7}{9} \Leftrightarrow 4\sqrt{3} < 7 \Leftrightarrow 48 < 49.$$

Глава 8

Задачи для самостоятельного решения

Задача 36 (ВМК, 1999, устный) *Доказать, что если x_1, x_2 и x_3 – положительные числа, то*

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}\geq\frac{3}{2}.$$

Задача 37 (психологический ф-т, 1974, №4) *Доказать, что при всех a и b имеет место неравенство*

$$\frac{5^{a+1}}{5^{2a}+25}\leq 13-5b+\frac{1}{2}b^2,$$

и определить, при каких a и b достигается равенство.

Задача 38 (ВМК, 2000+2002+2003, устный) *Доказать справеливость неравенства*

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\leq\frac{3}{2}$$

для любых действительных чисел a, b и c.

Задача 39 (ВМК, 2003, устный) *Доказать, что если положительные числа a, b и c таковы, что $a+b+c=1$, то $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$.*

Задача 40 (ВМК, 1994, устный) *Доказать, что для любых 4 положительных чисел a, b, c, d выполняется неравенство*

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq 16.$$

Задача 41 (ВМК, 2004, устный) *Пусть a, b, c – положительные числа и $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$. Доказать, что*

$$\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}\geq 4.$$

Задача 42 (ВМК, 1996, устный) *Сумма четырех чисел равна 2. Доказать, что сумма их квадратов не меньше 1.*

Задача 43 (мех-мат, 1958) *Доказать, что если $x^2+y^2=1$, то справедливо неравенство*

$$-\sqrt{2}\leq x+y\leq\sqrt{2}.$$

Задача 44 (ВМК, 2003, устный) *Положительные числа a и b таковы, что $a+b\geq 2$. Доказать, что $a^3+b^3\geq 2$.*

Задача 45 (ВМК, 1998, устный) *Доказать, что $a^4+b^4\geq\frac{1}{8}$, если $a+b\geq 1$.*

Задача 46 (мех-мат, 1963, №4) *Доказать, что при любых положительных a и b и любом натуральном n справедливо неравенство*

$$(a+b)^n<2^n(a^n+b^n).$$

Задача 47 (социологический ф-т, 2004, июль, №5) *Три числа, являющиеся длинами ребер прямоугольного параллелепипеда с диагональю 6, образуют арифметическую прогрессию. Кубы этих чисел тоже образуют арифметическую прогрессию. Найти эти числа.*

Ответ: $2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$.

Задача 48 (геологический ф-т, 2005, устный) *Сравните числа $\sqrt{2006}+\sqrt{2004}$ и $2\sqrt{2005}$.*

Ответ: первое число меньше.

Задача 49 (ВМК, устный, 2000+2003) *Что больше, $\log_{18}19$ или $\log_{19}20$?*

Ответ: $\log_{18}19$.

Задача 50 (ВМК, устный, 2001) *Сравнить два числа* $\log_3 10 + 4\lg 3$ *и* 4.

Ответ: $\log_3 10 + 4\lg 3 > 4$.

Задача 51 (ВМК, 2003, устный) *Доказать, что сумма длин медиан треугольника не менее чем в девять раз превосходит радиус вписанной в этот треугольник окружности.*

Задача 52 (ВМК, 1994, устный) *Доказать, что*

$$S \le \frac{a^2+b^2}{4},$$

где S *– площадь треугольника,* a *и* b *– любые две его стороны.*

Задача 53 (ВМК, устный, 2003) *Решить уравнение*

$$2^{x^6} + 2^{x^2} = 2^{x^4+1}.$$

Ответ: $\{-1; 0; 1\}$.

Задача 54 (ВМК, устный, 1995) *Решить уравнение*

$$2^x + 2^{\frac{1}{x}} = 4.$$

Ответ: $x = 1$.

Задача 55 (химический ф-т, 2000, май, №5) *Решить уравнение*

$$2^{2^{\sin^2 x}} + 2^{2^{\frac{\cos 2x}{2}}} = 2^{1+\sqrt[4]{2}}.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

Задача 56 (ВМК, 2000, устный) *Решить уравнение*

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \sqrt{2}(\sin x + \cos x).$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Задача 57 (ВМК, устный, 2004) *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} 2x_2 = x_1 + \frac{2}{x_1}, \\ 2x_3 = x_2 + \frac{2}{x_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2x_n = x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}, \\ 2x_1 = x_n + \frac{2}{x_n}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \dots; \sqrt{2}), (-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \dots; -\sqrt{2})\right\}$.

Задача 58 (ВМК, устный, 2005) *Найти при $x > 0$ наименьшее значение функции*

$$y = 2x + \frac{3\pi}{x} + \sin\left(x^2\right).$$

Ответ: $y_{\min} = 2\sqrt{6\pi} - 1 = y\left(\sqrt{\frac{3\pi}{2}}\right)$.

Задача 59 (ФГП, 2006, июль, №6) *Найдите минимально возможный объем прямого кругового конуса, описанного вокруг шара единичного радиуса.*

Ответ: $\frac{8\pi}{3}$.

Задача 60 (мех-мат, 2003, март, №3) *На пересечении биссектрисы AL треугольника ABC за точку A взята такая точка D, что $AD = 10$, $\angle BDE = \angle BAL = 60°$. Найти площадь трегольника ABC. Какова наименьшая площадь треугольника BDC при данных условиях?*

Ответ: $25\sqrt{3}$; $\frac{75\sqrt{3}}{4}$.