Инвариантность и задачи с параметрами *

Г.И. Фалин, А.И. Фалин
МГУ им.М.В.Ломоносова
http://mech.math.msu.su/∼ falin

1 Введение

В современной математике важную роль играет понятие *инвариантности*, т.е. неизменности математического объекта (числового множества, выражения, функции, уравнения и т.д.) относительно некоторых преобразований. Некоторые определения и результаты школьной математики (как в алгебре, так и в геометрии) фактически связаны с этим понятием, хотя сам термин инвариантность не используется. Например, чётная функция (заданная на всей числовой прямой) может быть определена как функция, которая инвариантна относительно замены x на $(-x)$.

Наличие того или иного свойства инвариантности у математического объекта позволяет установить некоторые общие качественные свойства этого объекта, что можно использовать при решении ряда задач.

В настоящей заметке мы покажем, как свойства инвариантности позволяют решать определённый класс задач с параметрами. В качестве иллюстративных примеров мы рассматриваем задачи вступительных экзаменов по математике в МГУ.

2 Уравнения

Начнем с решения следующей задачи, которая была предложена в июле 1990 года на письменном экзамене по математике на механико-математическом факультете МГУ.

*Г.И.Фалин, А.И.Фалин. Инвариантность и задачи с параметрами. Квант, 2007, №5, стр. 45-47.

Задача 1 (мех-мат, 1990, июль, №4) *Найти все значения параметра a, при которых уравнение*

$$x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0 \qquad (1)$$

имеет единственное решение.

Решение.

Неизвестная x входит в уравнение (1) через две четные функции: $y = x^2$ и $y = \cos x$. Поэтому оно не изменится, если x заменить на $(-x)$. Действительно, подстановка на место x выражения $(-x)$ приведет к уравнению

$$(-x)^2 - 2a\sin(\cos(-x)) + a^2 = 0,$$

которое в силу тождеств $(-x)^2 = x^2$, $\cos(-x) = \cos x$ идентично исходному уравнению (1).

Это свойство *инвариантности* (неизменности) уравнения (1) относительно преобразования $x \mapsto (-x)$ (стрелка "$\mapsto$"означает "заменить на") влечет, что если какое-то число x_0 является корнем уравнения (1), то и число $(-x_0)$ также будет корнем.

Поэтому множество корней уравнения (1) (назовем это множество M_a; индекс "a"указывает на зависимость от параметра) может быть

1. пустым (иначе говоря, уравнение (1) не имеет корней);

2. иметь вид $\{x_1, -x_1, x_2, -x_2, \dots\}$, где $x_1, x_2, \dots$ – различные положительные числа;

3. иметь вид $\{0, x_1, -x_1, x_2, -x_2, \dots\}$, где $x_1, x_2, \dots$ – различные положительные числа.

В двух последних случаях мы не утверждаем, что, если множество M_a бесконечно, то его элементы можно перенумеровать (такое множество называется счетным; существуют примеры бесконечных множеств, которые не являются счетными, скажем, интервал $(0; 1)$). Использованная запись лишь подчеркивает симметрию этого множества относительно $x_0 = 0$. Однако, если M_a – конечно, то во втором случае корней четное количество, а в третьем – нечетное.

Третий случай можно разбить на два подслучая:

а) когда числа $x_1, -x_1, \dots$ действительно присутствуют, так что если M_a – конечно, то оно содержит нечетное число элементов, большее 1;

б) когда числа $x_1, -x_1, \ldots$ на самом деле отсутствуют, так что если M_a – одноэлементное множество $\{0\}$ (иначе говоря, уравнение (1) имеет единственный корень $x_0 = 0$).

Поэтому уравнение (1) имеет единственный корень только в третьем случае, когда среди корней присутствует число $x_0 = 0$. При этом не исключено наличие и других корней. Но важнее то, что если среди корней нет числа 0, то множество M_a не может быть одноэлементным.

Найдем, при каких значениях параметра a число 0 является корнем уравнения (1). Для этого подставим число 0 на место неизвестной:

$$-2a \sin 1 + a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ или } 2 \sin 1.$$

Итак, уравнение (1) может иметь единственный корень только в двух случаях: $a = 0$ или $a = 2\sin 1$. При этом этим единственным корнем может быть только число 0. Еще раз подчеркнем, что это не исключает наличие и других корней; важно лишь то, что для других значений параметра уравнение (1) не может иметь единственный корень.

Для завершения решения задачи достаточно выяснить, сколько корней имеет уравнение (1) для двух "подозрительных"значений параметра: $a_1 = 0$ и $a_2 = 2\sin 1$.

1. Если $a = 0$, то уравнение (1) примет вид:

$$x^2 = 0$$

Это уравнение имеет единственный корень $x_0 = 0$. Поэтому значение $a = 0$ нужно включить в ответ задачи.

2. Если $a = 2\sin 1$, то уравнение (1) примет вид:

$$x^2 - 4\sin 1 \cdot \sin(\cos x) + 4\sin^2 1 = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) содержит совершенно разнородные члены, обычный одночлен x^2 и тригонометрическое выражение $\sin(\cos x)$ ($\sin 1$ – это просто число; так как угол в 1 радиан примерно равен $60°$, $\sin 1 \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.86$). Поэтому для его решения естественно применить графический метод или метод оценок. С этой целью перепишем уравнение (2) в виде:

$$x^2 + 4\sin^2 1 = 4\sin 1 \cdot \sin(\cos x). \tag{3}$$

Левая часть этого уравнения больше или равна $4\sin^2 1$, причем эта нижняя граница является точной – она достигается при $x = 0$. Оценить правую часть немного сложнее. Прежде всего отметим, что при изменении переменной x от $-\infty$ до $+\infty$ выражение $\cos x$ меняется от -1 до $+1$. На отрезке $-1 \le t \le 1$ функция $\sin t$ монотонно возрастает от $-\sin 1$ до $\sin 1$. Поэтому выражение $\sin(\cos x)$ меняется от $-\sin 1$ до $\sin 1$. Соответственно, правая часть уравнения (3) меняется от $-4\sin^2 1$ до $4\sin^2 1$ причем значения правой части уравнения полностью заполняют этот отрезок.

Из полученной информации относительно возможных значений левой и правой частей уравнения (3) следует, что они могут быть равны только тогда, когда одновременно равны $4\sin^2 1$. Иначе говоря, уравнение (3) равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 + 4\sin^2 1 = 4\sin^2 1, \\ 4\sin 1 \cdot \sin(\cos x) = 4\sin^2 1. \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет единственный корень $x_0 = 0$, который удовлетворяет и второму уравнению системы. Значит, система, а вместе с ней и уравнение (2) имеет единственное решение $x = 0$. Поэтому проверяемое значение параметра ($a = 2\sin 1$) нужно включить в ответ задачи.

Ответ: $a_1 = 0$, $a_2 = 2\sin 1$.

В следующей задаче также работает свойство четности соответствующей функции, но заметить его довольно тяжело.

Задача 2 (химический ф-т, 1999, июль, №6) *Найти все значения параметра a, при которых уравнение*

$$\left| \frac{x\,(2^x - 1)}{2^x + 1} + 2a \right| = a^2 + 1$$

имеет нечетное число решений.

Решение. Наше уравнение инвариантно (неизменно) при замене x на $-x$. Действительно, если мы заменим x на $-x$, то получим уравнение,

$$\left| \frac{(-x)\,(2^{-x} - 1)}{2^{-x} + 1} + 2a \right| = a^2 + 1,$$

которое после умножения числителя и знаменателя дроби в левой части на 2^x превращается в исходное:

$$\left| -\tfrac{x(1-2^x)}{1+2^x} + 2a \right| = a^2 + 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\left| \tfrac{x(2^x-1)}{2^x+1} + 2a \right| = a^2 + 1$$

Поэтому, если число x_0 является корнем исходного уравнения, то число $-x_0$ также будет его корнем. Вследствие этого, количество корней может быть нечетным только в случае, когда среди корней находится число $x_0 = 0$.

Подставляя в исходное уравнение вместо неизвестной x число 0, мы получим простое уравнение относительно a:

$$|2a| = a^2 + 1$$
$$\Updownarrow$$
$$(|a| - 1)^2 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$|a| = 1$$

Итак, число 0 является корнем исходного уравнения тогда и только тогда, когда $a = 1$ или $a = -1$. Как следует из приведенных выше рассуждений, только для этих значений параметра исходное уравнение может иметь нечетное число корней. Более того, для этих значений a множество корней исходного уравнения имеет вид (если это множество – *конечно*):

$$\{0, \pm x_1, \pm x_2, \ldots \pm x_n\},$$

где числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – положительны (не исключено, что $n = 0$, т.е. ненулевых корней нет вовсе). Поэтому число корней обязательно нечетно.

Если же корней бесконечно много, то говорить, что их число нечетно нельзя.

Итак, для завершения решения задачи достаточно выяснить, конечно или нет число корней исходного уравнения для двух "подозрительных"значений параметра, $a = 1$ и $a = -1$.

1. Если $a = 1$, то исходное уравнение примет вид:

$$\left|\frac{x\left(2^x - 1\right)}{2^x + 1} + 2\right| = 2.$$

   Оно распадается на два уравнения:

$$\tfrac{x(2^x-1)}{2^x+1} = 0 \qquad \tfrac{x(2^x-1)}{2^x+1} = -4$$

Первое уравнение, очевидно, имеет единственный корень $x = 0$.

Второе уравнение решим графически. Для этого разрешим его относительно 2^x (при этом необходимо проверить, что $x = -4$ не является его решением):

$$2^x = \frac{x-4}{x+4}.$$

Левая часть – стандартная показательная функция $y = 2^x$. Ее график монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ и проходит через точку $(0; 1)$. Правая часть – дробно-линейная функция. Ее график – гипербола, проходящая через точку $(0; -1)$, с вертикальной асимптотой $x = -4$ и горизонтальной асимптотой $y = 1$. Эта гипербола возрастает на промежутках $(-\infty; -4)$ и $(-4; +\infty)$. Изобразив эти графики на рисунке (мы оставляет это читателю), легко видеть, что они не пересекаются, так что второе уравнение не имеет корней.

Итак, в случае $a = 1$ исходное уравнение имеет ровно 1 корень.

2. Если $a = -1$, то исходное уравнение примет вид:

$$\left|\frac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1} - 2\right| = 2.$$

Оно также распадается на два уравнения:

$$\tfrac{x(2^x-1)}{2^x+1} = 0 \qquad \tfrac{x(2^x-1)}{2^x+1} = 4$$

Первое уравнение такое же, как и первое уравнение в случае $a = 1$; оно имеет единственный корень $x = 0$.

Второе уравнение, как и в случае $a = 1$, решим графически. Для этого разрешим его относительно 2^x (при этом необходимо проверить, что $x = 4$ не является его решением):

$$2^x = \frac{x+4}{x-4}.$$

Левая часть – стандартная показательная функция $y = 2^x$. Ее график монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ и проходит через точку $(0; 1)$. Правая часть – дробно-линейная функция. Ее график – гипербола, проходящая через точку $(0;-1)$, с вертикальной асимптотой $x=4$ и горизонтальной асимптотой $y=1$. Эта гипербола убывает на промежутках $(-\infty;4)$ и $(4;+\infty)$. Изобразив эти графики на рисунке (мы оставляет это читателю), легко видеть, что они пересекаются в двух точках. *Точные* значения корней второго уравнения нам совершенно не важны; впрочем, графики позволяют локализовать эти корни: $-5<x_1<-4$, $4<x_2<5$ $(x_1=-x_2)$.

Итак, в случае $a=-1$ исходное уравнение имеет ровно 3 корня.

Ответ: $a_1=1$, $a_2=-1$.

В следующей задаче появится инвариантность необычного для школьной математики вида.

Задача 3 (ВМК, 1998, апрель, №5) *Найти все значения параметра a, при которых уравнение*

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}}+a\cdot\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right)+a^2-\frac{5}{4}=0 \tag{4}$$

имеет единственное решение.

Решение. В отличие от задач 1 и 2, уравнение (4) не сохраняется при замене x на $-x$. Однако замена x на $\frac{1}{x}$ преобразует выражение $\frac{2x}{1+x^2}$ в выражение

$$\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{2x}{1+x^2},$$

а выражение $\frac{x^2-1}{x}$ в выражение

$$\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}{\left(\frac{1}{x}\right)}=-\frac{x^2-1}{x}.$$

Отсюда, очевидно, следует, что уравнение (4) не изменится при замене x на $\frac{1}{x}$. Поэтому, если x_0 – решение уравнения (4), то $\frac{1}{x_0}$ тоже решение. Следовательно, если x_0 – единственное решение, то $x_0=\frac{1}{x_0}$, т.е. x_0 может быть только 1 или -1.

Используя этот факт, можно было бы продолжить решение в духе задач 1 и 2. Но это приведет к определенным техническим трудностям на последующих этапах, так что мы применим другой прием.

Выражение $\frac{2x}{1+x^2}$ по своей структуре напоминает известную формулу из тригонометрии

$$\sin t = \frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}.$$

Поскольку функция $x = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между $x \in (-\infty; +\infty)$ и $t \in (-\pi; \pi)$, естественно применить для упрощения нашего уравнения тригонометрическую подстановку $x = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$, $t \in (-\pi; \pi)$ (или, что то же самое, ввести новую неизвестную $t = 2\operatorname{arctg} x$). Имея в виду область определения уравнения (4) ($x \neq 0$), дополнительно нужно потребовать, чтобы $t \neq 0$.

Конечно, эта тригонометрическая подстановка будет иметь смысл только если упростится выражение $\frac{x^2-1}{x}$. Это выражение после замены x на $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$ примет вид:

$$\frac{\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} = \frac{\sin^2\frac{t}{2}-\cos^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}} : \frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}} = -2\operatorname{ctg} t.$$

Теперь исходную задачу можно переформулировать следующим образом:

найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$2^{\sin t} + a \cdot \cos(2\operatorname{ctg} t) + a^2 - \frac{5}{4} = 0 \tag{5}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условию

$$-\pi < t < 0 \text{ или } 0 < t < \pi. \tag{6}$$

Уравнение (5), очевидно, инвариантно относительно замены переменной t на $t + 2\pi$, но эта замена не сохраняет неизменными условия (6): точка $t + 2\pi$ удовлетворяет условиям $\pi < t + 2\pi < 2\pi$ или $2\pi < t + 2\pi < 3\pi$.

В качестве альтернативы рассмотрим преобразование $t \mapsto \pi - t$. Оно не меняет вид уравнения (5) и в случае, когда $t \in (0; \pi)$, можно утверждать, что и $\pi - t \in (0; \pi)$. Однако, если $t \in (-\pi; 0)$, то $\pi - t \in (\pi; 2\pi)$. Поэтому в случае $t \in (-\pi; 0)$ мы рассмотрим преобразование $t \mapsto -\pi - t$. Оно, очевидно, не меняет уравнение (5) и сохраняет условие (6).

Итак, задача (5)-(6) инвариантна относительно замены t на функцию $g(t)$, которая дается формулой

$$g(t) = \begin{cases} \pi - t, & \text{если } 0 < t < \pi, \\ -\pi - t, & \text{если } -\pi < t < 0. \end{cases}$$

Отметим, что этой инвариантности соответствует инвариантность исходного уравнения (4) относительно преобразования $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Если задача (5)-(6) имеет единственное решение t_0, то должно быть выполнено равенство $t_0 = g(t_0)$. Это уравнение имеет два корня: $t_0 = \frac{\pi}{2}$ и $t_0 = -\frac{\pi}{2}$.

Число $\frac{\pi}{2}$ является корнем уравнения (5) тогда и только тогда, когда параметр a удовлетворяет соотношению

$$2 + a + a^2 - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow a^2 + a + \frac{3}{4} = 0.$$

Дискриминант этого квадратного уравнения отрицателен, так что ни при одном значении параметра число $\frac{\pi}{2}$ не будет корнем уравнения (5).

Число $-\frac{\pi}{2}$ является корнем уравнения (5) тогда и только тогда, когда параметр a удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{2} + a + a^2 - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow a^2 + a - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ или } -\frac{3}{2}.$$

Найдем теперь количество решений задачи (5)-(6) для двух "подозрительных" значений параметра a, $a = \frac{1}{2}$ и $a = -\frac{3}{2}$.

1. Если $a = \frac{1}{2}$, то уравнение (5) примет вид

$$\cos(2 \operatorname{ctg} t) = 2 - 2^{1+\sin t}. \tag{7}$$

Будем решать его графически.

Функцию $y_1(t) = \cos(2 \operatorname{ctg} t)$ можно рассматривать как суперпозицию функций $y(u) = \cos u$ и $u(t) = 2 \operatorname{ctg} t$. При изменении t от $-\pi$ до 0 функция $u(t)$ монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$. Соответственно, функция $y_1(t)$ совершает бесконечное число колебаний от -1 до $+1$; при этом $y_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Для $t \in (0; \pi)$ в силу четности функции $y_1(t)$ ситуация аналогична.

Функцию $y_2(t) = 2 - 2^{1+\sin t}$ можно рассматривать как суперпозицию функций $y(u) = 2 - 2^{1+u}$ и $u(t) = \sin t$. График функции $y(u)$ получается из графика стандартной показательной функции 2^u переносом на 1 влево, осевой симметрией относительно оси Ox, переносом на 2 вверх. Поэтому при изменении переменной t от $-\pi$ до π функция $y_2(t)$ сначала возрастает от $y_2(-\pi) = 0$ до $y_2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$, затем убывает от $y_2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$ до $y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$, и затем опять возрастает от $y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ до $y_2(\pi) = 0$.

Поэтому уравнение (7) имеет бесконечно много корней на множестве $(-\pi;0)\cup(0;\pi)$, так что проверяемое значение параметра не включается в ответ.

2. Если $a=-\frac{3}{2}$, то уравнение (5) примет вид

$$\cos(2\operatorname{ctg} t)=\frac{1}{3}\left(2+2^{1+\sin t}\right). \tag{8}$$

При $t\in(-\pi;0)\cup(0;\pi)$ функция $y=\cos(2\operatorname{ctg} t)$ принимает значения из отрезка $[-1;1]$, а функция $y=\frac{1}{3}\left(2+2^{1+\sin t}\right)$ – из множества $[1;2]\setminus\left\{\frac{4}{3}\right\}$. Поэтому уравнение (8) равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l}\cos(2\operatorname{ctg} t)=1,\\ \frac{1}{3}\left(2+2^{1+\sin t}\right)=1.\end{array}\right.$$

Второе уравнение этой системы имеет единственный корень, удовлетворяющий условию (6): $t=-\frac{\pi}{2}$. Этот корень является и корнем первого уравнения системы. Таким образом, уравнение (8) имеет единственный корень, удовлетворяющий условию (6), так что проверяемое значение параметра включается в ответ.

Ответ: $a=-\frac{3}{2}$.

3 Системы

Как и для уравнений, для систем самым распространенным случаем является инвариантность относительно изменения знака у одной или нескольких неизвестных.

Задача 4 (экономический ф-т (отд. кибернетики), 1987, №6) *Найти все значения параметра a, при каждом из которых система*

$$\left\{\begin{array}{l}3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a,\\ x^2+y^2=1.\end{array}\right. \tag{9}$$

имеет единственное решение.

Решение. Наша система инвариантна при замене x на $(-x)$. Действительно, если мы заменим x на $(-x)$ (а y оставим без изменений), то исходная система примет вид:

$$\left\{\begin{array}{l}3\cdot 2^{|-x|}+5|-x|+4=3y+5(-x)^2+3a,\\ (-x)^2+y^2=1.\end{array}\right.$$

Поскольку $|-x| = x$, $(-x)^2 = x^2$, эта система тождественна исходной. Поэтому, если (x, y) - решение системы (9), то и $(-x, y)$ тоже будет решением. Вследствие этого, если система (9) имеет единственное решение, то это решение имеет вид $(0, y)$.

Найдем, при каких значениях параметра a пара $(0, y)$ является решением системы (9). Для этого подставим вместо неизвестной x число 0:

$$\begin{cases} 3y + 3a = 7, \\ y^2 = 1. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения

$$\begin{cases} y = 1 \\ a = \frac{4}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} y = -1 \\ a = \frac{10}{3} \end{cases}$$

Значит, система (9) может иметь единственное решение только при $a = \frac{4}{3}$ или $a = \frac{10}{3}$. В первом случае этим единственным решением может быть только пара $(x; y) = (0; 1)$, во втором – пара $(x; y) = (0; -1)$. Но не исключено, что кроме отмеченного решения система имеет и другие решения. Из проведенных рассуждений ясно, что в этих двух случаях множество решений системы (9) имеет вид:

$$\{(0; y_0), (x_1; y_1), (-x_1; y_1), (x_2; y_2), (-x_2; y_2), \ldots\}, \tag{10}$$

где $y_0 = 1$ (если $a = \frac{4}{3}$), или -1 (если $a = \frac{10}{3}$), числа $x_1, x_2, \ldots$ – положительные. При этом мы не утверждаем, что множество (10) конечно или счетно. Использованная запись лишь подчеркивает симметрию этого множества относительно оси Oy.

Для завершения решения задачи нужно выяснить, сколько решений имеет исходная система (9) для двух подозрительных значений параметра, $a = \frac{4}{3}$ и $a = \frac{10}{3}$.

1. Если $a = \frac{4}{3}$, то система (9) примет вид:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| = 3y + 5x^2, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \tag{11}$$

В принципе можно попытаться решить эту систему методом исключения (из первого уравнения исключается y), но получающееся уравнение относительно неизвестной x очень громоздкое и "разнородное" (в нем будут стоять показательные члены $2^{|x|}$ и многочлены. Поэтому этот путь малоперспективен. С другой стороны, вид второго уравнения системы (11) наводит нас на мысль использовать графический метод для ее решения. Второе уравнение задает на плоскости $(x;y)$ окружность с центром в начале координат и радиусом 1. Первое уравнение задает график функции

$$f(x) = 2^{|x|} + \frac{5}{3}(|x| - x^2). \tag{12}$$

Построить этот график тяжело даже с использованием производных. Но поскольку нас интересуют лишь точки пересечения этого графика с единичной окружностью, можно обойтись следующей информацией:

1. $f(x)$ – четная функция;
2. $f(0) = 1$, $f(1) = 2$;
3. при $x \in (0;1)$

$$f(x) = 2^x + \frac{5}{3}x(1-x) > 2^x > 1.$$

Отсюда следует, что график функции (12) пересекается с единичной окружностью в единственной точке $(0;1)$. Это означает, что в случае $a = \frac{4}{3}$ система (11) имеет единственное решение и поэтому значение $a = \frac{4}{3}$ нужно включить в ответ нашей задачи.

2. Если $a = \frac{10}{3}$, то система (9) примет вид:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| = 3y + 5x^2 + 6, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Как и в предыдущем случае, будем решать эту систему графически. Главной проблемой является график функции

$$g(x) = 2^{|x|} + \frac{5}{3}(|x| - x^2) - 2,$$

причем нужно знать вид этого графика лишь для $x \in [-1;1]$ (вне этого отрезка он не может пересекаться с единичной окружностью). Непосредственно очевидны следующие свойства функции $g(x)$:

1. $g(x)$ – четная функция;
2. $g(0) = -1$, $g(1) = 0$.

Уже из них ясно, что график функции $g(x)$ пересекается с единичной окружностью по меньшей мере в трех точках: $(0;-1)$, $(1;0)$, $(-1;0)$. Конечно, возможны и другие точки пересечения, но это совершенно неважно, т.к. единственной точки пересечения нет и поэтому значение $a = \frac{10}{3}$ не включается в ответ нашей задачи.

Ответ: $a = \frac{4}{3}$.

Задача 5 (мех-мат, 1966, №5) *Найти все значения a и b, при которых система*

$$\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \tag{13}$$

имеет только одно решение (a, b, x, y, z – действительные числа).

Решение. Исходная система не меняется при одновременной перемене знаков у неизвестных x и y. Иначе говоря, она инвариантна относительно преобразования $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$. Поэтому, если тройка чисел (x_0, y_0, z_0) является решением системы (13), то и тройка $(-x_0, -y_0, z_0)$ будет решением. Отсюда следует, что если (x_0, y_0, z_0) – единственное решение системы, то $(x_0, y_0, z_0) = (-x_0, -y_0, z_0)$, откуда $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Тройка $(0, 0, z)$ – решение системы (13) тогда и только тогда, когда верны равенства

$$\begin{cases} z = a, \\ z = b, \\ z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2, \\ a = 2, \\ b = 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} z = -2, \\ a = -2, \\ b = -2 \end{cases}$$

Таким образом, система (13) может иметь единственное решение только в двух случаях:

1. $a = b = 2$. В этом случае единственным решением может быть только тройка $(x; y; z) = (0; 0; 2)$.

2. $a = b = -2$. В этом случае единственным решением может быть только тройка $(x; y; z) = (0; 0; -2)$.

Однако нельзя исключить наличие и других решений. Выяснить, единственно решение или нет (в этих двух ”подозрительных” случаях) можно, решив систему (13) для указанных конкретных значений параметров.

1. Если $a = b = 2$, то система (13) примет вид:

$$\begin{cases} xyz + z = 2, \\ xyz^2 + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе и сохраним одно из них, скажем, первое (и, разумеется, третье), чтобы преобразование было равносильным:

$$\begin{cases} xyz + z = 2, \\ xyz(1 - z) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Второе уравнение распадается на четыре уравнения: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 1$. Соответственно, вся система распадается на четыре системы (мы сразу проводим дальнейшие упрощения с помощью имеющегося конкретного значения одной неизвестной):

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = 2, \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ z = 2, \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0, \\ 0 = 2, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 1, \\ xy = 1, \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$$

Первая из этих систем имеет единственное решение $(0; 0; 2)$; вторая – единственное решение $(0; 0; 2)$; третья не имеет решений; четвертая имеет четыре решения:
$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2}; 1\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}; \frac{-\sqrt{5}+1}{2}; 1\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}; \frac{-\sqrt{5}-1}{2}; 1\right)$.

Поэтому в случае $a = b = 2$ исходная система (13) имеет пять решений, так что проверяемые значения параметров не включаются в ответ нашей задачи.

2. Анализ случая $a = b = -2$ практически не отличается от предыдущего. Система (13) примет вид:

$$\begin{cases} xyz + z = -2, \\ xyz^2 + z = -2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} xyz + z = -2, \\ xyz(1 - z) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Как и в предыдущем случае, она распадается на четыре системы:

$$\begin{array}{cccc} \begin{cases} x = 0, \\ z = -2, \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases} & \begin{cases} y = 0, \\ z = -2, \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases} & \begin{cases} z = 0, \\ 0 = -2, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} & \begin{cases} z = 1, \\ xy = -3, \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\ (0; 0; 2) & (0; 0; 2) & \emptyset & \emptyset \end{array}$$

Поэтому в случае $a = b = -2$ исходная система (13) имеет единственное решение, так что проверяемые значения параметров должны быть включены ответ задачи.

Ответ: $a = b = -2$.

В следующих двух задачах, в отличие от предыдущей, работает не только инвариантность относительно изменения знака у двух неизвестных, но и симметричность системы относительно входящих в нее неизвестных (в наших терминах речь идет об инвариантности относительно преобразования $(x, y) \mapsto (y, x)$). Однако эта симметрия (следовательно, и соответствующая инвариантность) "спрятана" с помощью замены неизвестных.

Задача 6 (мех-мат, устный, 2006) *Найти все значения параметра a, при каждом из которых система*

$$\begin{cases} 2xy - ax - 2ay + a^2 - 2 = 0, \\ 4x^2 + 4y^2 - 8ax - 4ay - 7a^2 - 20a = 0 \end{cases} \tag{14}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Поскольку исходная система выглядит довольно громоздко, прежде всего попробуем ее упростить.

В первом уравнении можно увидеть две группы похожих членов: $2xy - ax = x(2y - a)$ и $-2ay + a^2 = -a(2y - a)$, что позволяет привести это уравнение к виду $(2y - a)(x - a) = 2$.

Во втором уравнении можно увидеть "осколки" двух полных квадратов: $4x^2 - 8ax = 4(x^2 - 2a) = 4(x-a)^2 - 4a^2$ и $4y^2 - 4ay = (2y-a)^2 - a^2$, что позволяет привести это уравнение к виду $4(x-a)^2 + (2y-a)^2 = 12a^2 + 20a$.

Теперь естественно ввести новые неизвестные $u = x - a$ и $v = y - \frac{a}{2}$. Для них система (14) примет вид:

$$\begin{cases} uv = 1, \\ u^2 + v^2 = 3a^2 + 5a. \end{cases} \tag{15}$$

Поскольку между парами $(x; y)$ и $(u; v)$ имеется взаимнооднозначное соответствие, системы (14) и (15) имеют одно и то же число решений.

Система (15) не изменится, если одновременно изменить знаки у переменных u, v, а также, если их поменять местами. Поэтому, если (u_0, v_0) – решение системы (15), то решениями будут и пары $(-u_0, -v_0)$, (v_0, u_0), $(-v_0, -u_0)$. В силу первого уравнения, u_0 и v_0 отличны от 0, так что из четырех пар (u_0, v_0), $(-u_0, -v_0)$, (v_0, u_0), $(-v_0, -u_0)$ пары (u_0, v_0) и $(-u_0, -v_0)$, а также пары (v_0, u_0) и $(-v_0, -u_0)$ различны. Поэтому система (15) может иметь два решения только в случае $u_0 = v_0$.

Пара $(u; u)$ будет решением тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} u^2 = 1, \\ 2u^2 = 3a^2 + 5a, \end{cases}$$

откуда $3a^2 + 5a = 2$.

Обратно, если $3a^2 + 5a = 2$, то система (15) примет вид:

$$\begin{cases} uv = 1, \\ u^2 + v^2 = 2. \end{cases} \tag{16}$$

Эта система легко решается методом исключения: выражая из первого уравнения неизвестную v через u, $v = \frac{1}{u}$, мы сведем второе уравнение к биквадратному уравнению

$$u^4 - 2u^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (u^2 - 1)^2 = 0,$$

которое имеет два решения: $u_1 = 1$, $u_2 = -1$. Соответственно, система (16) имеет два решения: $(1; 1)$, $(-1; -1)$.

Итак, условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда параметр a удовлетворяет уравнению $3a^2 + 5a = 2$. Решая это квадратное уравнение, мы получим, что $a = \frac{1}{3}; -2$.

Ответ: $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = -2$.

Задача 7 (химический ф-т, 1986, №5) *Найти все значения a, при которых система*

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|}, \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases} \tag{17}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение. Введем новые неизвестные $u = x - 1$ и $v = 7y$. Для них система (17) примет вид:

$$\begin{cases} \sqrt{|u|} + \sqrt{|v|} = 1, \\ u^2 + v^2 = -4a. \end{cases} \tag{18}$$

Поскольку между парами $(x; y)$ и $(u; v)$ имеется взаимнооднозначное соответствие, системы (17) и (18) имеют одно и то же число решений.

Система (18) не изменится, если изменить знак у одной или обеих переменных u, v, а также, если их поменять местами. Поэтому, если (u_0, v_0) – решение системы (18), то решениями будут и пары $(-u_0, v_0)$,

$(u_0, -v_0)$, $(-u_0, -v_0)$, (v_0, u_0), $(-v_0, u_0)$, $(v_0, -u_0)$, $(-v_0, -u_0)$. Эти восемь пар различны, если одновременно выполнены три условия: $u_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0$, $u_0 \neq v_0$. Поэтому система (18) может иметь четыре решения только в трех случаях:

1. $u_0 = 0$,

2. $v_0 = 0$,

3. $u_0 = v_0$.

Пара $(0; v)$ будет решением тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \sqrt{|v|} = 1, \\ v^2 = -4a, \end{cases}$$

откуда $a = -\frac{1}{4}$.

Пара $(u; 0)$ будет решением тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \sqrt{|u|} = 1, \\ u^2 = -4a, \end{cases}$$

что приводит к тому же значению параметра: $a = -\frac{1}{4}$.

Пара $(u; u)$ будет решением тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 2\sqrt{|u|} = 1, \\ 2u^2 = -4a, \end{cases}$$

что дает еще одно "подозрительное" значение параметра: $a = -\frac{1}{32}$.

Найдем теперь, сколько решений имеет система (18) для этих двух "подозрительных" значениях параметра.

1. Если $a = -\frac{1}{4}$, то система (18) примет вид:

$$\begin{cases} \sqrt{|u|} + \sqrt{|v|} = 1, \\ u^2 + v^2 = 1. \end{cases} \tag{19}$$

Проще всего ее решить с помощью новых переменных $A = \sqrt{|u|} + \sqrt{|v|}$, $B = \sqrt{|u|} \cdot \sqrt{|v|}$:

$$\begin{cases} A = 1, \\ \left(A^2 - 2B\right)^2 - 2B^2 = 1. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения: $(A; B) = (1; 0)$ и $(A; B) = (1; 2)$. Первому решению соответствует четыре решения системы (19): $(0; 1)$, $(0; -1)$, $(1; 0)$, $(-1; 0)$. Решение $(A; B) = (1; 2)$ приводит к несовместной системе относительно неизвестных u и v. Следовательно, проверяемое значение параметра должно быть включено в ответ задачи.

1. Если $a = -\frac{1}{32}$, то система (18) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{|u|} + \sqrt{|v|} = 1, \\ u^2 + v^2 = \frac{1}{8}. \end{array} \right. \tag{20}$$

Как и систему (19), решим ее с помощью новых переменных $A = \sqrt{|u|} + \sqrt{|v|}$, $B = \sqrt{|u|} \cdot \sqrt{|v|}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 1, \\ (A^2 - 2B)^2 - 2B^2 = \frac{1}{8}. \end{array} \right.$$

Эта система имеет два решения: $(A; B) = \left(1; \frac{1}{4}\right)$ и $(A; B) = \left(1; \frac{7}{4}\right)$. Первому решению соответствует четыре решения системы (20): $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right)$. Решение $(A; B) = \left(1; \frac{7}{4}\right)$ приводит к несовместной системе относительно неизвестных u и v. Следовательно, проверяемое значение параметра должно быть включено в ответ задачи.

Ответ: $a_1 = -\frac{1}{4}$; $a_2 = -\frac{1}{32}$.

4 Неравенства

В заключение рассмотрим, как свойства инвариантности могут быть применены при решении неравенств с параметрами.

Задача 8 (ф-т психологии, 1995, июль, №5) *Найти все значения параметра a, при которых неравенство*

$$\cos x - 2\sqrt{x^2 + 9} \leq -\frac{x^2 + 9}{a + \cos x} - a \tag{21}$$

имеет единственное решение.

Решение. Неравенство (21) инвариантно относительно преобразования $x \mapsto (-x)$. Поэтому, если оно имеет единственное решение x_0, то $x_0 = 0$.

Число x_0 является решением неравенства (21) тогда и только тогда, когда параметр a удовлетворяет неравенству

$$1-2\cdot 3 \leq -\tfrac{9}{a+1}-a$$
$$\Updownarrow$$
$$\tfrac{(a-2)^2}{a+1} \leq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$a<-1 \text{ или } a=2$$

Проверим "подозрительные"значения параметра.

1. Если $a=2$, то неравенство (21) примет вид:

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \leq -\frac{x^2+9}{2+\cos x} - 2.$$

Поскольку выражение $2+\cos x$ положительно при всех x, это неравенство равносильно неравенству

$$(\cos x+2)^2 - 2\sqrt{x^2+9}(\cos x+2) + (x^2+9) \leq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(\cos x + 2 - \sqrt{x^2+9}\right)^2 \leq 0$$

которое, в свою очередь, сводится к уравнению

$$\cos x + 2 = \sqrt{x^2+9}.$$

Левая часть этого уравнения принимает значения из отрезка $[1;3]$, а правая – из промежутка $[3;+\infty)$. Поэтому равенство левой и правой частей возможно только тогда, когда они порознь равны 3:

$$\begin{cases} \cos x + 2 = 3 \\ \sqrt{x^2+9} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0,$$

так что проверяемое значение параметра нужно включить в ответ задачи.

2. Если $a<-1$, то выражение $\cos x + a < \cos x - 1$ и поэтому отрицательно при всех x. Значит, для $a<-1$ исходное неравенство (21) равносильно неравенству

$$(\cos x+a)^2 - 2\sqrt{x^2+9}(\cos x+a) + (x^2+9) \geq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(\cos x + a - \sqrt{x^2+9}\right)^2 \geq 0$$

Последнее неравенство справедливо всюду, где определено, т.е. при всех $x \in R$. Таким образом, при $a < -1$ множеством решений исходного неравенства (21) будет вся числовая прямая. Значит, ни одно из этих значений параметра не включается в ответ задачи.

Ответ: $a = 2$.

5 Задачи для самостоятельного решения

Задача 9 (ф-т почвоведения, 2001, июль, №6) *При каких значениях параметра b уравнение*

$$\operatorname{tg}|b| = \log_2(\cos x - |x|)$$

имеет ровно один корень?

Ответ: $b = \pi n,\ n \in Z$.

Задача 10 (геологический ф-т, 2003, май, №6) *При каких значениях a уравнение*

$$2\pi^2(x-1)^2 + 4a\cos(2\pi x) - 9a^3 = 0$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a_1 = 0, a_2 = -\frac{2}{3}$.

Задача 11 (экономический ф-т (отд. менеджмента), 2003, апрель, №5) *Найти все значения параметра b, при которых уравнение*

$$b^2\sin\left(\frac{\pi+2}{2} - x\right) + \sin^2\left(\frac{2x}{b+1} - \frac{2}{b+1}\right)$$
$$-b\sqrt{4x^2+8-8x} = 3 + \arcsin|1-x|$$

имеет единственное решение.

Ответ: 3.

Задача 12 (мех-мат, 1966, №5) *Найти все значения a, при которых система*

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет только одно решение (a, x, y – действительные числа).

Ответ: $a = 0$.

Задача 13 (мех-мат, 1966, №5) *Найти все значения a и b, при которых система*

$$\begin{cases} \left|\frac{x^y-1}{x^y+1}\right| = a, \\ x^2+y^2 = b \end{cases}$$

имеет только одно решение.

Ответ: $a = 0$, $0 < b \le 1$.

Задача 14 (мех-мат, 2000, март, №5) *При каких значениях параметра a уравнение*

$$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^{a-x} - \frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^a - \frac{8}{5}\right) \times \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2a-2x-3} - 4\left(\frac{3}{2}\right)^{2a-5} + 2\right) = 0$$

имеет хотя бы одно решение и каждое его решение является целым числом?

Ответ: $a = 1$, $a = \frac{5}{2}$.

Задача 15 (мех-мат, устный, 2006) *Найти все значения параметра a, при каждом из которых система*

$$\begin{cases} 3xy + 3ax - ay - a^2 - 3 = 0, \\ 9x^2 + 9y^2 - 6ax + 18ay + 7a^2 - 2a - 17 = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a = -1$, $a = \frac{1}{3}$.

Задача 16 (МШЭ, 2005, июль, №7) *Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений*

$$\begin{cases} (x^2+1)b = y + \cos 2x, \\ 2^{|\sin x|} + |y| = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $b = 2$.

Задача 17 (ВМК, устный, 1997) *При каких значениях a система*

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = a, \\ \cos(x - y) + xy \le 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a = 0$.

Задача 18 (ф-т почвоведения, 2007, июль, №7) *Найти все значения параметра a, при каждом из которых система*

$$\begin{cases} (5 - 2\sqrt{6})^2 + (5 + 2\sqrt{6})^x - 5a = y - |y| - 8, \\ x^2 - (a - 4)y = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$.

Задача 19 (экономический ф-т, 2008, №6) *Найти все значения a, при которых уравнение*

$$\frac{8}{\pi}\operatorname{arctg}\left(1 + \frac{x}{4}\right)\log_{\sqrt{17}+4}\left(x + 4 + \sqrt{x^2 + 8x + 17}\right) =$$
$$= a^2 - a\sin\left(\pi \cdot \frac{x^2 + 8x - 64}{32}\right) - 2$$

имеет единственное решение, и определить это решение.

Ответ: $a = 1$, $x = -4$.