Центральная симметрия*

Г.И. Фалин
д.ф.м.н., профессор
кафедра теории вероятностей
механико-математический факультет
МГУ им.М.В.Ломоносова

А.И. Фалин
к.ф.м.н., доцент
кафедра общей математики
факультет ВМК
МГУ им.М.В.Ломоносова

1 Введение

В школьном курсе математики понятие центральной симметрии (как, впрочем, и других видов движений плоскости и пространства) рассматривается вскользь. Средний школьник по этому поводу в лучшем случае скажет, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

Между тем, понятия движения и различных его видов (в случае планиметрии – осевая симметрия, параллельный перенос, поворот и его частный случай – центральная симметрия) играют в геометрии ключевую роль. В соответствии со знаменитой "Эрлангенской программой" Ф.Клейна классическая эвклидова геометрия – это теория о свойствах

*Г.Фалин, А.Фалин. Центральная симметрия. М., Изд-во Чистые Пруды, 2010, 32 с. (библиотечка «Первого Сентября», серия математика, вып.33). ISBN 978-5-9667-0698-2

фигур, которые не меняются при движениях, а различия между классической эвклидовой геометрией и такими современными её видами как геометрия Лобачевского, аффинная геометрия, проективная геометрия, связаны с тем, что называть "движениями".

С понятиями движения и различных его видов тесно связан ряд важных идей в технике, физике, химии, биологии и т.д., вплоть до эстетики и философии.

Отражением большой роли этих понятий являются довольно сложные задачи, предлагающиеся на олимпиадах и вступительных испытаниях (в частности, в МГУ им.М.В.Ломоносова). В настоящей брошюре мы подробно изучим центральную симметрию на плоскости и расскажем как решать типичные задачи по этой теме.

2 Основные теоретические факты

2.1 Центральная симметрия как преобразование плоскости

Напомним, что точка A' называется *симметричной* точке A относительно точки O (*центра симметрии*), если точка O является серединой отрезка AA'. Если точка A совпадает с центром симметрии O, то симметричной ей точкой считают O: $A' = O$.

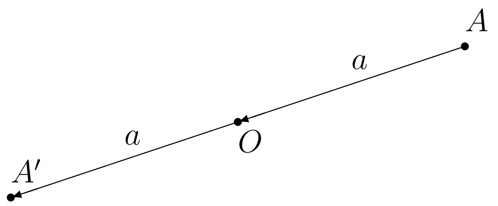
Это определение применимо как в планиметрии, так и в стереометрии. Практически все приводимые ниже общие теоретические результаты справедливы и в случае стереометрии, но для простоты изложения мы ограничимся планиметрией.

Процесс получения точки A', центрально-симметричной точке A относительно центра O, удобно представлять себе следующим образом (см. рис. 1): точка A соединяется с точкой O отрезком AO, который затем продлевается на расстояние, равное $a = AO$.

Точка A', симметричная точке A относительно центра O, может быть получена из точки A и поворотом вокруг центра O на угол 180° (безразлично, по часовой стрелке, или против).

Так как при фиксированном центре симметрии O для любой точки A существует и притом единственная точка точка A', симметричная A относительно точки O, соответствие $A \mapsto A'$ задает отображение Φ_O плоскости на себя, которое называют *центральной симметрией* относи-

Рис. 1:



тельно точки O. В математике отображение множества M в множество N, при котором область значений N является подмножеством области определения M, принято называть *преобразованием* множества M. Итак, можно сказать, что центральная симметрия – это некоторое преобразование плоскости.

В соответствии с общей терминологией теории множеств, точку A', симметричную A относительно точки O, можно назвать образом точки A при центральной симметрии Φ_O и обозначить $\Phi_O(A)$. Точка A, в свою очередь, называется прообразом точки A' при центральной симметрии Φ_O и обозначается $\Phi_O^{-1}(A')$.

Из рис. 1 ясно, что если к некоторой точке A применить центральную симметрию с центром O, а затем к полученной точке $A' = \Phi_O(A)$ вновь применить центральную симметрию с тем же центром O, то мы получим исходную точку A. Иначе говоря, последовательное применение к любой точке A два раза центральной симметрии с одним и тем же центром даёт исходную точку A.

Последовательное выполнение двух отображений, f и g, является новым отображением, которое называется композицией отображений f и g и обозначается $g \circ f$ (первым выполняется отображение f, которое стоит *справа*). Итак, по определению, для любой точки A

$$(g \circ f)(A) = g(f(A)).$$

Композиция отображений является своеобразным "произведением" отображений. Для композиции выполнено свойство ассоциативности, т.е. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, но не выполнено свойство коммутативности, т.е., вообще говоря, отображения $f \circ g$ и $g \circ f$ различны.

Если обозначить буквой ε *тождественное отображение*, т.е. отображение, которое не двигает точки (иначе говоря, $\varepsilon(A) = A$ для любой точки A), то отмеченное выше свойство центральной симметрии можно записать следующим образом:

$$\Phi_O \circ \Phi_O = \varepsilon. \tag{1}$$

Отображения, обладающие свойством (1), играют важную роль в математике; они называются *инволюциями*. Кроме центральной симметрии, этим свойством обладает и осевая симметрия (в случае плоскости, других "простых" преобразований такого рода нет).

Свойство инволютивности центральной симметрии влечёт несколько простых и почти очевидных, но очень важных следствий.

1. Для любой точки A плоскости существует точка B, образом которой при центральной симметрии Φ_O является A (отображение, обладающее этим свойством, в общей теории множеств называют *сюрвекцией*). Действительно, если взять точку $B = \Phi_O(A)$, симметричную точке A относительно центра O, то применяя к B центральную симметрию с тем же центром, мы получим A.

2. Для разных точек плоскости центрально симметричные им точки тоже различны (отображение, обладающее этим свойством, в общей теории множеств называют называют *инвекцией*):

$$A \neq B \to \Phi_O(A) \neq \Phi_O(B).$$

Действительно, если бы точки $A' = \Phi_O(A)$ и $B' = \Phi_O(B)$ совпадали, то применяя к ним центральную симметрию Φ_O мы бы получили, что $A = B$ в противоречии с предположением $A \neq B$.

Свойства 2 и 3 означают, что центральная симметрия устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми точками плоскости. Такое отображение в общей теории множеств называют называют *биекцией.* В силу общих теорем о биективных отображениях, для центральной симметрии Φ_O существует обратное отображение Ψ, т.е. такое отображение, что для любой точки плоскости верны равенства: $\Phi_O(\Psi(A)) = A$, $\Psi(\Phi_O(A)) = A$. Свойство инволютивности позволяет явно указать, каким будет отображение Ψ.

3. Точка A' симметрична точке A относительно центра O тогда и только тогда, когда A симметрична точке A' относительно центра O, т.е. точки A и A' взаимно симметричны:

$$A' = \Phi_O(A) \Leftrightarrow A = \Phi_O(A').$$

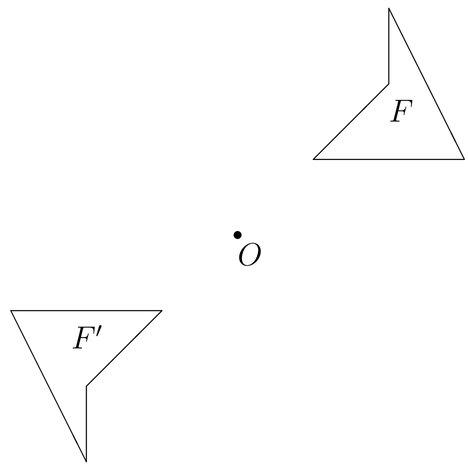
Действительно, если $A' = \Phi_O(A)$, то $\Phi_O(A') = \Phi_O\left(\Phi_O(A)\right) = A$, т.е. $A = \Phi_O(A')$. Аналогично, если $A = \Phi_O(A')$, то $\Phi_O(A) = \Phi_O\left(\Phi_O(A')\right) = A'$, т.е. $A' = \Phi_O(A)$. Доказанное свойство означает, что для центральной симметрии Φ_O обратное отображение – это та же самая центральная симметрия.

Центральная симметрия, как и всякое отображение плоскости на себя, поточечно передвигает фигуры на плоскости. Поэтому можно говорить о фигуре $F' = \Phi_O(F)$, симметричной данной фигуре F относительно центра O.

Поскольку последовательное выполнение двух одинаковых центральных симметрий сводится к тождественному отображению, фигура F' симметрична фигуре F относительно центра O тогда и только тогда, когда F симметрична фигуре F' относительно центра O, т.е. фигуры F и F' взаимно симметричны.

Пример взаимно симметричных фигур приведён на рис. 2.

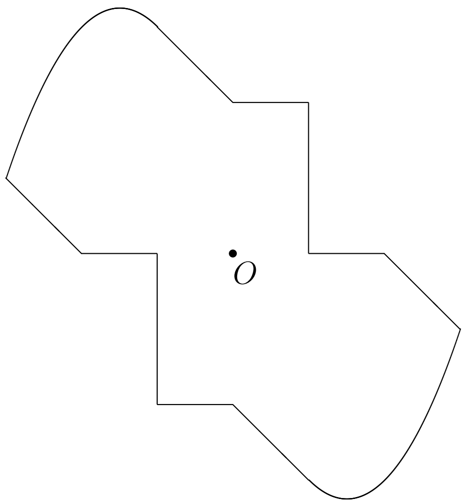
Рис. 2:



Если фигура F остается на месте при выполнении центральной симметрии относительно точки O, т.е. $\Phi_O(F) = F$, то она называется *симметричной* относительно этой точки.

Простейшим примером центрально симметричной фигуры является окружность; её центр симметрии – это центр окружности. Более интересный пример центрально симметричной фигуры приведён на рис. 3.

Рис. 3:



Классическим примером центрально симметричной фигуры является параллелограмм – его центром симметрии является точка пересечения диагоналей. Доказательство этого факта потребует доказательства нескольких простых общих свойств центральной симметрии и потому мы докажем его позже (см. ниже теорему 3).

2.2 Центральная симметрия как движение плоскости

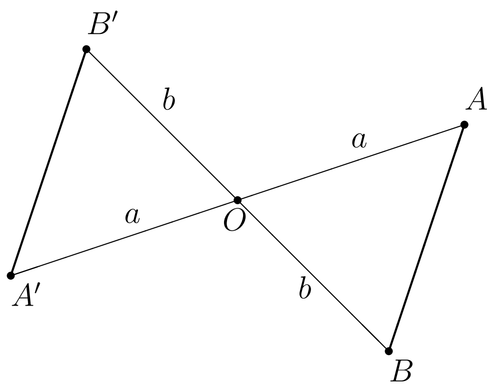
Как мы отмечали, центральная симметрия относительно некоторого центра O может рассматриваться и как поворот плоскости вокруг точки O на угол $180°$. Поэтому геометрически очевидно, что, если точки A' и B' являются образами точек A и B соответственно, то отрезок AB перейдёт в отрезок $A'B'$, так что, в частности, расстояние $A'B'$ будет равно расстоянию AB. Математики выражают последнее свойство следующей фразой: "центральная симметрия сохраняет расстояние между точками".

Преобразования плоскости, сохраняющие расстояния между точками, называются *движениями.* Движения играют ключевую роль в элементарной геометрии. Поэтому мы докажем, что центральная симметрия является движением с помощью более строгих (но и более формальных и сложных) рассуждений.

Теорема 1 *Пусть точки A' и B' симметричны точкам A и B соответственно относительно центра O. Тогда $AB = A'B'$.*

Доказательство. Предположим, что центр симметрии не лежит на прямой AB. Рассмотрим треугольники AOB и $A'OB'$ (см. рис. 4).

Рис. 4:



В этих треугольниках

1. $\angle AOB = \angle A'OB'$, т.к. эти углы вертикальные;
2. $AO = A'O$, т.к. точки A и A' симметричны отностельно точки O;
3. $BO = B'O$, т.к. точки B и B' симметричны отностельно точки O.

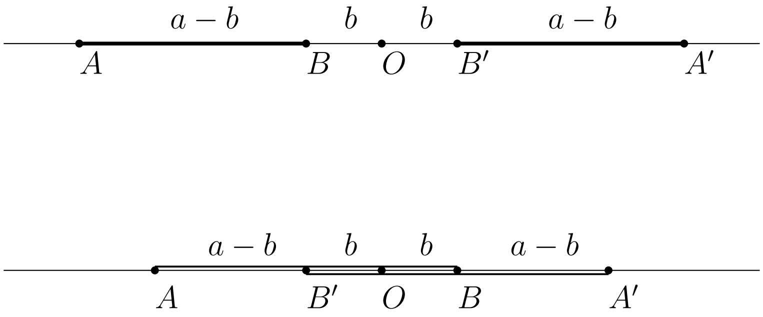
Следовательно, треугольники AOB и $A'OB'$ равны, а тогда, как и требовалось доказать, $AB = A'B'$.

Предположим теперь, что центр симметрии O лежит на прямой AB. В этой ситуации следует отдельно рассмотреть два случая (см. рис. 5):

1. точка O не лежит на отрезке AB;

2. точка O лежит на отрезке AB (возможно, совпадая с одним из его концов).

Рис. 5:



случай 1.

случай 2.

Т.к. точки A и A' симметричны относительно точки O, длины отрезков AO и $A'O$ равны; обозначим через a общее значение этих длин. Аналогично, т.к. точки B и B' симметричны относительно точки O, длины отрезков BO и $B'O$ равны; обозначим через b общее значение этих длин.

В первом случае (когда точка O не лежит на отрезке AB) возможны две ситуации:

1a: точка B лежит между A и O (см. рис. 5, случай 1). Тогда как расстояние между точками A и B, так и расстояние между точками A' и B', равно $a - b$.

1b: точка A лежит между B и O. Переобозначим точки: точку A назовём точкой B_*, а точку B – точкой A_*. Тогда точка B_* лежит между A_* и O и по ранее доказанному, $A_*B_* = A'_*B'_*$, что равносильно равенству $AB = A'B'$.

Во втором случае (когда точка O лежит на отрезке AB) возможны две ситуации:

2a: точка B' лежит между A и O (см. рис. 5, случай 2). Тогда как расстояние между точками A и B, так и расстояние между точками A' и B', равно $b + a$.

2b: точка A лежит между B' и O. Опять переобозначим точки: точку A назовём точкой B_*, а точку B – точкой A_*. Тогда точка B'_* лежит между A_* и O и по ранее доказанному, $A_*B_* = A'_*B'_*$, что равносильно равенству $AB = A'B'$.

Применяя общие теоремы о свойствах движений (их доказательство читатель найдёт в любом хорошем учебнике по элементарной планиметрии), можно утверждать, что

1. образ прямой при центральной симметрии – прямая;
2. образы параллельных прямых при центральной симметрии – параллельные прямые;
3. образ отрезка AB при центральной симметрии – отрезок $A'B'$, где A' – образ точки A, B' – образ точки B;
4. образ угла при центральной симметрии – равный ему угол;
5. образ окружности с центром C при центральной симметрии – окружность с тем же радиусом и центром в точке C', где C' – образ точки C.

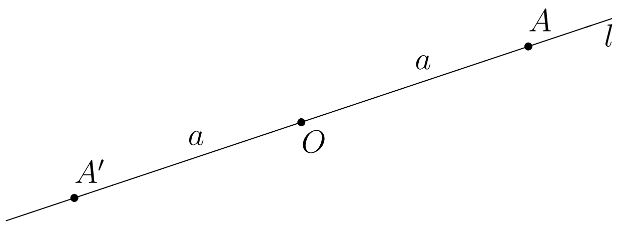
Для центральной симметрии справедливы и более специфические утверждения, которые для других движений не верны (или верны лишь частично). В качестве примера приведём следующую теорему.

Теорема 2 *Если центр симметрии O лежит на данной прямой l, то её образ l' совпадает с ней, а если центр симметрии не лежит на данной прямой, то её образ параллелен ей.*

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда данная прямая l проходит через центр симметрии O (см. рис. 6).

Возьмём на прямой l какую-нибудь точку A и отобразим её симметрично относительно центра O. Как мы отмечали, для этого нужно соединить точки A и O отрезком (что уже сделано прямой l), продлить этот отрезок за точку O (что уже сделано прямой l), отложить отрезок OA',

Рис. 6:



равный отрезку AO. Ясно, что полученный образ A' точки A окажется на прямой l.

На языке теории множеств доказанный факт можно записать следующим образом: $\Phi_O(A) \in l$ для любой точки $A \in l$. По определению, это означает, что образ $l' = \Phi_O(l)$ прямой l при центральной симметрии Φ_O является подмножеством прямой l: $\Phi_O(l) \subset l$. Вообще говоря, что на этом этапе доказательства мы ещё не можем гарантировать, что l' совпадает с l, т.к. не исключено, что l' будет лишь частью прямой l. Но поскольку (в силу общих свойств движений) мы уже знаем, что образом прямой является прямая, на самом деле такая возможность исключена.

Отметим, что верно и утверждение, обратное к только что доказанному: если при центральной симметрии с центром O образ прямой l совпадает с ней самой, то центр симметрии лежит на этой прямой: $O \in l$. Действительно, если A – произвольная точка l, то центрально симметричная ей точка A' также лежит на l. Тогда и весь отрезок AA' является частью прямой l. В частности, середина этого отрезка, т.е. центр симметрии O, лежит на l.

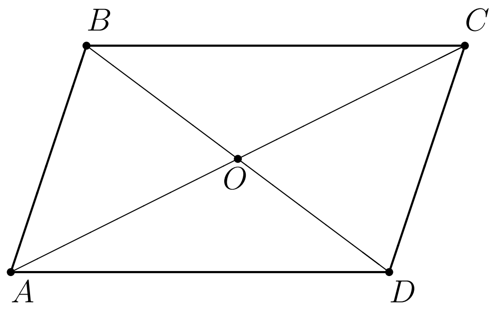
Рассмотрим теперь случай, когда центр симметрии O не лежит на данной прямой l. В силу последнего замечания, образ $l' = \Phi_O(l)$ прямой l при центральной симметрии Φ_O не совпадает с l. Допустим, что прямые l и l' пересекаются в некоторой точке A. Это значит, что $A \in l$, $A \in l'$. Возьмём точку A', симметричную точке A; она не совпадает с A (в противном случае мы бы имели $A' = A = O$). Т.к. $A \in l$, можно утверждать, что $A' \in l'$. Кроме того, т.к. $\Phi_O(l') = l$, $A \in l'$ влечёт, что $A' \in l$. Таким образом, точка A' так же как и A является общей точкой пряиых l и l', т.е. эти прямые пересекаются в двух различных точках. Следовательно, эти прямые совпадают, что противоречит выводу, сделанному в начале рассуждений.

Используя общие свойства центральной симметрии как движения плоскости, можно доказать упомянутую в разделе 2.1 теорему о центре симметрии параллелограмма.

Теорема 3 *Точка пересечения диагоналей является его центром симметрии.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ – некоторый параллелограмм, а O – точка пересечения его диагоналей AC и BD (см. рис. 7). Известно, что

Рис. 7:



диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам: $AO = OC$, $BO = OD$. Первое из этих равенств означает, что точки A и C взаимно симметричны относительно точки O. Второе равенство означает, взаимную симметричность относительно точки O точек B и D.

Поэтому при центральной симметрии относительно точки O отрезок AD перейдёт в отрезок BC, а отрезок BC – в отрезок AD. Аналогично, отрезок AB перейдёт в отрезок CD, а отрезок CD – в отрезок AB. Таким образом, при центральной симметрии относительно точки O параллелограмм $ABCD$ наложится сам на себя.

3 Центральная симметрия и метод координат

Если на плоскости введена декартова система координат, то любую точку плоскости можно отождествить с парой её координат. Соответственно всякое отображение Φ плоскости на себя определяет пару функций $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ от двух действительных переменных x, y. Функция $\varphi(x, y)$ – это абсцисса образа точки $(x; y)$ при отображении Φ, а функция $\psi(x, y)$ – это ордината образа точки $(x; y)$ при отображении Φ:

$$(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = \Phi(x, y).$$

Для центральной симметрии эти функции можно выписать в явном виде. Пусть центр симметрии O имеет координаты $(x_0; y_0)$. Тогда точка A', симметричная точке A с координатами $(x; y)$ имеет координаты

$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x, \\ y' = 2y_0 - y. \end{cases} \tag{2}$$

Действительно, известно, что координаты середины отрезка равны среднему арифметическому координат его концов. Поскольку точка $O(x_0; y_0)$ является серединой отрезка AA', верны равенства

$$\begin{cases} x_0 = \frac{x+x'}{2}, \\ y_0 = \frac{y+y'}{2}, \end{cases}$$

которые равносильны (2).

На координатной плоскости фигура F обычно задается как множество точек, координаты которых удовлетворяют определенному уравнению $F(x, y) = 0$. Поэтому естественно возникает вопрос о том, каким уравнением может быть описан образ $F' = \Phi_{(x_0;y_0)}(F)$ фигуры F при центральной симметрии с центром $(x_0; y_0)$. Для этого отметим, что точка $(x; y)$ принадлежит фигуре F' тогда и только тогда, когда точка $\Phi_{(x_0;y_0)}(x; y) = (2x_0 - x; 2y_0 - y)$ принадлежит фигуре F, т.е. верно равенство

$$F(2x_0 - x, 2y_0 - y) = 0. \tag{3}$$

Это означает, что фигура F' задаётся уравнением (3).

Уравнение (3) влечёт, что точка (x_0, y_0) является центром симметрии фигуры, задаваемой уравнением $F(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда уравнение (3) задаёт то же множество, что и уравнение $F(x, y) = 0$, т.е. когда эти уравнения равносильны:

$$F(2x_0 - x, 2y_0 - y) = 0 \Leftrightarrow F(x, y) = 0$$

В частности, начало координат $(0; 0)$ является центром симметрии фигуры, задаваемой уравнением $F(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$F(-x, -y) = 0 \Leftrightarrow F(x, y) = 0.$$

Это свойство заведомо выполнено, если уравнение $F(x, y) = 0$ не меняется при одновременном изменении знаков у переменных x и y (в таких случаях говорят, что уравнение инвариантно относительно преобразования $(x, y) \mapsto (-x, -y)$.

Соотношения (2) и (3) позволяют сильно упростить доказательства разнообразных теорем планиметрии, в которых фигурирует центральная симметрия. В качестве примера докажем теоремы 1 и 2, которые были установлены в разделе 2 чисто геометрическими рассуждениями.

Теорема 1 *Пусть точки A' и B' симметричны точкам A и B соответственно относительно центра O. Тогда $AB = A'B'$.*

Доказательство. Введём на плоскости произвольную декартову систему координат так, чтобы центр симметрии O являлся её началом. В этой системе координат координаты точки O равны $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Если $(x_1; y_1)$ – координаты точки A, $(x_2; y_2)$ – координаты точки B, то, в соответстви с (2), координаты точек A' и B' равны $(-x_1; -y_1)$ и $(-x_2; -y_2)$ соответственно.

Используя формулу для расстояния между двумя точками на координатной плоскости, мы имеем:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \\ A'B' &= \sqrt{(-x_1 - (-x_2))^2 + (-y_1 - (-y_2))^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = AB. \end{aligned}$$

Теорема 2 *Образ прямой при центральной симметрии – прямая, которая совпадает с данной, если центр симметрии лежит на данной прямой, и параллельна данной, если центр симметрии не лежит на данной прямой.*

Доказательство. Введём на плоскости систему координат так, что данная прямая l (с произвольно выбранным направлением) является осью абсцисс. Пусть в этой системе координат центр симметрии O имеет координаты $(x_0; y_0)$. Уравнение прямой l в выбранной системе координат, очевидно, имеет вид: $y = 0$.

Тогда, в соответствии с (3), фигура F', являющаяся образом прямой l при центральной симметрии с центром $(x_0; y_0)$, задаётся уравнением

$$2y_0 - y = 0 \Leftrightarrow y = 2y_0$$

Это уравнение прямой, проходящей горизонтально, т.е. параллельно оси абсцисс.

Если центр симметрии лежит на данной прямой, то $y_0 = 0$, так что уравнение образа прямой l имеет вид: $y = 0$. Это означает, что образ прямой l совпадает с ней.

Если центр симметрии не лежит на данной прямой, то $y_0 \neq 0$. Это означает, что образ прямой l проходит параллельно оси абсцисс (т.е. данной прямой l) на высоте $2y_0$.

Следует отметить, что упрощение доказательств теорем 1 и 2 при применении метода координат связано с переносом тяжести рассуждений на вывод формул метода координат. Вывод этих формул является чисто геометрическим и обычно требует рассмотрения большого числа простых случаев (как, например, первое доказательство теоремы 1). В школьных учебниках никогда не дают законченных доказательств формул метода координат и векторной алгебры. Как правило, рассматривается один случай "общего положения", а доказательство для (большого числа) простых особых случаев предлагается провести читателю. Конечно, школьники этого не делают, а принимают формулы метода координат на веру.

Если рассматривать проблему комплексно, то при решении простых задач элементарной планиметрии, имеющей дело с точками, прямыми и их взаимным расположением, метод координат по трудоёмкости равносилен стандартному геометрическому подходу. Если в элементарной планиметрии классические чисто геометрические методы приводят к результату и проще, и быстрее, то за это приходится платить более изощрёнными рассуждениями.

Другое дело – сложные кривые: парабола, гипербола и т.п. Хотя исторически они появились в ходе чисто геометрических рассуждений, метод координат существенно упростил и унифицировал их изучение, позволил установить много новых фактов, изучить новые, более сложные линии и фигуры. Чтобы проиллюстрировать это утверждение, решим следующую задачу, в которой идёт речь о так называемой лемнискате Бернулли.

Задача 1 *На плоскости даны две точки P_1 и P_2, расстояние между которыми равно $2\sqrt{2}$. Фигура F (лемниската Бернулли) образована точками M плоскости, произведение расстояний от которых до данных точек P_1 и P_2 постоянно и равно 2 (т.е. квадрату половины расстояния между точками P_1 и P_2).*

Имеет ли фигура F центр симметрии, а если имеет, то сколько?

Решение. Введём на плоскости систему координат, выбрав в качестве начала коодинат середину отрезка P_1P_2, в качестве оси абсцисс прямую P_1P_2 с положительным направлением от точки P_1 к точке P_2. В этой системе координат координаты точек P_1 и P_2 равны $(-\sqrt{2}; 0)$ и $(\sqrt{2}; 0)$ соответственно.

Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка лемнискаты Бернулли. Расстояния от точки M до данных точек P_1 и P_2 даются формулами:

$$MP_1 = \sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + y^2}, \ MP_2 = \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + y^2},$$

так что условие $MP_1 \cdot MP_2 = 2$ превратится в условие

$$\sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + y^2} = 2,$$

которое после возведения в квадрат лего преобразовать к виду:

$$(x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 - y^2) = 0. \tag{4}$$

Таким образом, на языке метода координат наша задача может быть переформулирована следующим образом: Найти центр симметрии фигуры F, заданной на координатной плоскости $(x; y)$ уравнением (4).

Поскольку как x, так и y входят в уравнение (4) только в чётных степенях, это уравнение не меняется при одновременном изменении знаков у переменных x и y. Следовательно, начало координат является центром симметрии рассматриваемой фигуры. На геометрическом языке это означает, что середина отрезка P_1P_2 является центром симметрии лемнискаты Бернулли.

Отметим, кроме того, что уравнение (4) не меняется и при изменении знака лишь у одной из переменных x и y (это означает, что фигура F обладает осевой симметрией относительно осей координат).

Немного труднее доказать, что других центров симметрии у лемнискаты Бернулли нет.

В соответствии с (3) образ $F' = \Phi_{(x_0;y_0)}(F)$ фигуры F при центральной симметрии с центром $(x_0; y_0)$ задаётся уравнением

$$((2x_0 - x)^2 + (2y_0 - y)^2)^2 - 4((2x_0 - x)^2 - (2y_0 - y)^2) = 0. \qquad (5)$$

Теперь задача нахождения центра симметрии фигуры F может быть переформулирована следующим образом: *при каких значениях параметров x_0, y_0 уравнения (4) и (5) равносильны?*

Допустим, что точка $(x_0; y_0)$ является центром симметрии фигуры F, заданной уравнением (4), т.е. уравнения (4) и (5) равносильны.

Поскольку пара $x = 0$, $y = 0$, очевидно, удовлетворяет уравнению (4), то она должна удовлетворять и уравнению (5), т.е.

$$((2x_0)^2 + (2y_0)^2)^2 - 4((2x_0)^2 - (2y_0)^2) = 0. \qquad (6)$$

Таким образом, точка $(2x_0; 2y_0)$ принадлежит фигуре F. Мы уже доказали, что F центрально-симметрична с центром $(0; 0)$. Значит, и точка $(-2x_0; -2y_0)$ принадлежит фигуре F. Поскольку пара $(-2x_0; -2y_0)$ удовлетворяет уравнению (4), то она должна удовлетворять и уравнению (5), т.е.

$$((4x_0)^2 + (4y_0)^2)^2 - 4((4x_0)^2 - (4y_0)^2) = 0. \qquad (7)$$

Уравнения (6) и (7) можно рассмотреть как систему двух уравнений с двумя неизвестными x_0, y_0. После несложных преобразований её можно записать в виде:

$$\begin{cases} (x_0^2 + y_0^2)^2 = x_0^2 - y_0^2 \\ 4(x_0^2 + y_0^2)^2 = x_0^2 - y_0^2 \end{cases}$$

Из этой системы следует, что

$$(x_0^2 + y_0^2)^2 = 4(x_0^2 + y_0^2)^2 \Leftrightarrow 3(x_0^2 + y_0^2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0; y_0 = 0$$

Таким образом, начало координат является единственным центром симметрии нашей фигуры.

Для читателя, знакомого с понятием полярных координат, отметим, что в полярных координатах $(r; \varphi)$, когда $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, уравнение (4) примет вид: $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$. Это позволяет легко нарисовать лемнискату Бернулли; она изображена на рис. 8.

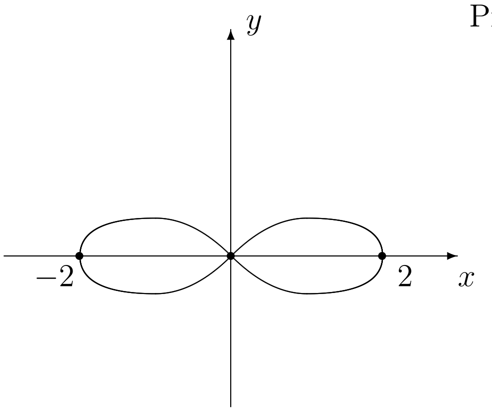


Рис. 8:

4 Центрально симметричные графики

В этом разделе мы будем применять метод координат для изучения центральной симметрии важного класса кривых, которые являются графиком некоторой функции $y = f(x)$. Он сводится к рассмотренной в разделе 3 общей схеме, если в качестве функции $F(x, y)$ взять $f(x) - y$ и поэтому образом графика функции $y = f(x)$ при центральной симметрии относительно точки $(x_0; y_0)$ будет линия, задаваемая уравнением

$$f(2x_0 - x) - (2y_0 - y) = 0,$$

т.е. график функции

$$y = 2y_0 - f(2x_0 - x). \tag{8}$$

Соответственно, точка (x_0, y_0) является центром симметрии графика функции $y = f(x)$, если функция (8) совпадает с $f(x)$, т.е. при всех x верно равенство

$$f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x).$$

Это равенство неявно предполагает, что и число x, и число $2x_0 - x$ входит в область определения функции $f(x)$.

Чтобы особо подчеркнуть это обстоятельство, дадим расширенное определение центра симметрии графика функции:

точка (x_0, y_0) является центром симметрии графика функции $y = f(x)$, если

- *область определения функции, D_f, симметрична относительно точки x_0, т.е. если точка x входит в область определения, то и* *точка* $2x_0 - x$, *симметричная* x *относительно* x_0, *также входит в область определения:*

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2x_0 - x \in D_f. \tag{9}$$

- *значения функции в точках* x *и* $2x_0 - x$ $(x \in D_f)$ *симметричны относительно* y_0, *т.е. верно равенство*

  $$f(x) - y_0 = y_0 - f(2x_0 - x).$$

  Иначе говоря, выражение

  $$A = \frac{f(x) + f(2x_0 - x)}{2} \tag{10}$$

  при всех $x \in D_f$ *не зависит от* x; *значение этого выражения – это* y_0 *(в частности, если* $x_0 \in D_f$, *то* $y_0 = f(x_0)$*).*

При решении задач иногда удобнее пользоваться слегка измененной формой этого определения: если заменить x на $x_0 + x$, то предыдущее определение примет вид:

точка (x_0, y_0) *является центром симметрии графика функции* $y = f(x)$, *если*

- *область определения функции,* D_f, *симметрична относительно точки* x_0, *т.е. если точка* $x_0 + x$ *входит в область определения, то и точка* $x_0 - x$, *симметричная* $x_0 + x$ *относительно* x_0, *также входит в область определения:*

  $$x_0 + x \in D_f \Leftrightarrow x_0 - x \in D_f. \tag{11}$$

- *значения функции в точках* $x_0 + x$ *и* $x_0 - x$ $(x_0 + x \in D_f)$ *симметричны относительно* y_0, *т.е. при всех* x *таких, что* $x_0 + x \in D_f$, *верно равенство*

  $$B = \frac{f(x_0 + x) + f(x_0 - x)}{2} \equiv y_0. \tag{12}$$

Теперь мы применим эти общие теоретические рассмотрения для решения конкретных задач; некоторые из них предлагались на вступительных экзаменах по математике в МГУ.

Задача 2 (ф-т почвоведения МГУ, 2004, июль, №7) *Доказать, что график функции*

$$f(x) = 4x + \log_2\left(\frac{x^2+5x}{x^2+3x-4}\right) \tag{13}$$

имеет центр симметрии, и найти координаты (x_0, y_0) *этого центра симметрии.*

Решение. Функция (13) определена тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\frac{x^2+5x}{x^2+3x-4} > 0.$$

Решая это неравенство методом интервалов, мы получим:

$$D_f = (-\infty; -5) \cup (-4; 0) \cup (1; +\infty).$$

Это множество имеет единственный центр симметрии: $x_0 = -2$. Поэтому, если график функции (13) имеет центр симметрии $(x_0; y_0)$, то $x_0 = -2$. Поскольку $x_0 \in D_f$, $y_0 = f(x_0) = -8$ и для завершения доказательства достаточно показать, что выражение (10) не зависит от x:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)+f(2x_0-x)}{2} &= \frac{f(x)+f(-4-x)}{2}\\ &= \frac{4x+\log_2\frac{x(x+5)}{(x+4)(x-1)} - 16 - 4x + \log_2\frac{(-4-x)(-x+1)}{(-x)(-x-5)}}{2}\\ &= -8 + \frac{\log_2\frac{x(x+5)}{(x+4)(x-1)} + \log_2\frac{(x+4)(x-1)}{x(x+5)}}{2}\\ &\equiv -8.\end{aligned}$$

Итак, данная функция действительно имеет центр симметрии, координаты которого есть $(-2; -8)$.

Задача 3 *Доказать, что график функции*

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \tag{14}$$

имеет центр симметрии.

Решение. Функция (14) определена при всех x, так что в отличие от решения задачи 2 из структуры области определения нельзя извлечь никакой информации относительно центра симметрии графика. Поэтому будем анализировать выражение (10). В данном случае оно равно

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^3+x^2+x+1+(2x_0-x)^3+(2x_0-x)^2+(2x_0-x)+1}{2} \\ &= (3x_0+1)x^2-2x_0(3x_0+1)x+(4x_0^3+2x_0^2+x_0+1). \end{aligned}$$

График нашей функции имеет центр симметрии $(x_0; y_0)$ тогда и только тогда, когда выражение A не зависит от x и равно y_0:

$$(3x_0+1)x^2-2x_0(3x_0+1)x+(4x_0^3+2x_0^2+x_0+1) \equiv y_0.$$

Известно, что два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной:

$$\begin{cases} 3x_0+1=0, \\ 2x_0(3x_0+1)=0, \\ 4x_0^3+2x_0^2+x_0+1=y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-\frac{1}{3}, \\ y_0=\frac{20}{27} \end{cases}$$

Итак, функция $f(x)=x^3+x^2+x+1$ имеет центр симметрии с координатами $x_0=-\frac{1}{3}$ и $y_0=\frac{20}{27}$.

Отметим, что для поиска центра симметрии непосредственно по определению вместо выражения (10) с равным успехом можно анализировать выражение (12). Мы сделаем это при решении следующей задачи.

Задача 4 *Доказать, что график функции*

$$f(x)=x^4+x+1 \tag{15}$$

не имеет центра симметрии.

Решение. Рассмотрим выражение (12). В данном случае оно равно

$$\begin{aligned} B &= \frac{(x_0+x)^4+(x_0+x)+1+(x_0-x)^4+(x_0-x)+1}{2} \\ &= x_0^4+6x_0^2x^2+x^4+x_0+1. \end{aligned}$$

График нашей функции имеет центр симметрии $(x_0; y_0)$ тогда и только тогда, когда выражение B не зависит от x и равно y_0:

$$x^4+6x_0^2x^2+(x_0^4+x_0+1) \equiv y_0.$$

Поскольку два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной, это равенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 1 = 0, \\ x_0^2 = 0, \\ x_0^4 + x_0 + 1 = y_0, \end{cases}$$

которая, очевидно, не имеет решений. Итак, функция $f(x) = x^4 + x + 1$ не имеет центра симметрии.

Важным примером функций, графики которых обладают свойством центральной симметрии, являются нечётные функции: из школьного курса известно, что график нечётной функции симметричен относительно начала координат $O(0;0)$. Оказывается, что в некотором смысле этими функциями исчерпываются все функции, графики которых обладают свойством центральной симметрии. Именно, справедливо следующее утверждение:

Теорема 4 *Если функция $f(x)$ имеет центр симметрии $(x_0; y_0)$, то функция $g(x) = f(x + x_0) - y_0$ является нечётной, а если некоторая функция $g(x)$ – нечётная, то, каковы бы ни были числа x_0 и y_0, функция $f(x) = g(x - x_0) + y_0$ имеет центр симметрии $(x_0; y_0)$.*

Доказательство теоремы 4 будет базироваться на следующих двух простых, но важных утверждениях.

Теорема 5 *Если функция $f(x)$ имеет центр симметрии $(x_0; y_0)$, то функция $g(x) = f(x + a) + b$ имеет центр симметрии $(x_0 - a; y_0 + b)$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что число x входит в область определения функции g тогда и только тогда, когда число $x + a$ входит в область определения функции f:

$$x \in D_g \Leftrightarrow x + a \in D_f.$$

Далее, для функции $g(x)$ выражение (10) равно (с учётом того, что теперь на роль центра симметрии претендует точка $(x_0'; y_0') = (x_0 - a; y_0 + b)$):

$$\begin{aligned} A &= \frac{g(x) + g(2x_0' - x)}{2} = \frac{f(x+a) + b + f(2x_0' - x + a) + b}{2} \\ &= \frac{f(x+a) + f(2x_0 - x - a)}{2} + b \equiv \frac{f(x') + f(2x_0 - x')}{2} + b, \end{aligned}$$

где $x' = x + a$.

Поскольку $(x_0; y_0)$ – центр симметрии функции $f(x)$, дробь $\frac{f(x')+f(2x_0-x')}{2}$ равна y_0, так что при всех $x \in D_g$ выражение A равно $y_0 + b$.

Доказанная теорема допускает простую графическую интерпретацию. График функции $g(x) = f(x + a) + b$ получается из графика функции $f(x)$ параллельным переносом на $-a$ единиц вдоль оси абсцисс и на b единиц вдоль оси ординат. Если считать, что центр симметрии связан с графиком, то он переместится в точку $(x_0 - a; y_0 + b)$. Поскольку общий вид графика при этом не изменится, передвинутый график имеет центр симметрии $(x_0 - a; y_0 + b)$.

Теорема 6 *Если функция $f(x)$ имеет центр симметрии $(x_0; y_1)$, функция $g(x)$ имеет центр симметрии $(x_0; y_2)$, то функция $h(x) = af(x) + bg(x)$ имеет центр симметрии $(x_0; ay_1 + by_2)$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что число x входит в область определения функции h тогда и только тогда, когда число x входит в и область определения функции f, и в область определения функции g:

$$x \in D_h \Leftrightarrow x \in D_f \cap D_g.$$

Далее, для функции $h(x)$ выражение (10) равно (при $x \in D_h$):

$$\begin{aligned} A &= \frac{h(x) + h(2x_0 - x)}{2} = \frac{af(x) + bg(x) + af(2x_0 - x) + bg(2x_0 - x)}{2} \\ &= a\frac{f(x) + f(2x_0 - x)}{2} + b\frac{g(x) + g(2x_0 - x)}{2} \equiv ay_1 + by_2. \end{aligned}$$

По определению это и означает, что функция $h(x) = af(x) + bg(x)$ имеет центр симметрии $(x_0; ay_1 + by_2)$.

Теперь мы можем непосредственно приступить к доказательству теоремы 4.

Доказательство теоремы 4. Допустим, что функция $f(x)$ имеет центр симметрии $(x_0; y_0)$. Тогда теорема (5) влечет, что функция $g(x) = f(x+x_0)-y_0$ имеет центр симметрии $(x_0-x_0; y_0-y_0) = (0; 0)$, т.е. является нечётной.

Если функция $g(x)$ – нечётная, то ее график симметричен относительно точки $(0; 0)$, а тогда теорема (5) влечет, что функция $f(x) = g(x - x_0) + y_0$ имеет центр симметрии $(0 + x_0; 0 + y_0) = (x_0; y_0)$.

Общая теорема 4 даёт ещё один способ решения задачи 3. В соответствии с этой теоремой, доказать, что график функции (14) имеет центр симметрии (и найти его координаты) – значит, что нужно найти нечётную функцию $g(x)$ такую, что для некоторых чисел x_0 и y_0 верно тождество $f(x) = g(x - x_0) + y_0$.

Формула, определяющая функцию $f(x)$, содержит лишь одно слагаемое, которое "портит" нечётность – это член x^2. Попробуем поэтому преобразовать формулу $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ так, чтобы квадратичный член исчез. Имея в виду тождество сокращенного умножения $(x + x_0)^3 = x^3 + 3x^2x_0 + 3xx_0^2 + x_0^3$, мы проделаем следующие преобразования:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{3} + 3x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\
&- 3x^2 \cdot \frac{1}{3} - 3x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 + x^2 + x + 1 \\
&= \left(x + \frac{1}{3}\right)^3 + \frac{2}{3}x + \frac{26}{27} \\
&= \left(x + \frac{1}{3}\right)^3 + \frac{2}{3} \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{26}{27} \\
&= \left(x + \frac{1}{3}\right)^3 + \frac{2}{3} \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{20}{27}.
\end{aligned}
$$

Поскольку функция $g(x) = x^3 + \frac{2}{3}x + \frac{20}{27}$ – нечётная, в соответствии с теоремой 4 функция $f(x) = g\left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{20}{27}$ имеет центр симметрии с координатами $x_0 = -\frac{1}{3}$, $y_0 = \frac{20}{27}$.

5 Примеры решения более сложных задач

В двух следующих задачах появляется дополнительное усложнение ситуации в виде параметров.

Задача 5 (мех-мат МГУ, 1998, устный) *При каких значениях a график функции*

$$y(x) = (x + a)(|x + 1 - a| + |x - 3|) - 2x + 4a \tag{16}$$

имеет центр симметрии?

Решение. Будем анализировать выражение (10). В нашем случае оно равно

$$\begin{aligned} A &= \frac{x+a}{2}(|x+1-a|+|x-3|) \\ &- \frac{x-2x_0-a}{2}(|x-2x_0-1+a|+|x-2x_0+3|)-2x_0+4a. \quad (17) \end{aligned}$$

При достаточно больших положительных x все выражения под знаками модулей будут положительными и поэтому выражение A примет вид:

$$A=(a+4x_0-2)x+4a-ax_0-4x_0^2,\ (x \text{ достаточно велико}).$$

Это выражение не зависит от x тогда и только тогда, когда коэффициент при x равен 0. В этом случае свободный член – это y_0:

$$\begin{aligned} &a+4x_0-2=0, \\ &y_0=4a-ax_0-4x_0^2. \end{aligned}$$

Отсюда можно выразить x_0 и y_0 через a:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{2-a}{4}, \\ y_0 &= \frac{9a-2}{2}. \end{aligned}$$

Используя эти соотношения, можно превратить равенство $y_0=y(x_0)$ в уравнение относительно a:

$$\frac{3a+2}{16}\left(|5a-6|+|a+10|\right)=0.$$

Поскольку выражения под знаками модулей в левой части этого уравнения одновременно не обращаются в 0, их сумма положительна. Значит,

$$a=-\frac{2}{3}.$$

Тогда $x_0=\frac{2}{3}$, $y_0=-4$.

Итак, если при некотором значении параметра a график нашей функции имеет центр симметрии (x_0,y_0), то $a=-\frac{2}{3}$, $x_0=\frac{2}{3}$, $y_0=-4$.

Для завершения решения достаточно убедиться, что при этих значениях a, x_0, y_0 выражение (17) тождественно равно y_0. Действительно, несложные преобразования дают:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{9}(3x-2)\left(|3x+5|+|3x-9|\right)-2x-\frac{8}{3}, \\ y(2x_0-x) &= -\frac{1}{9}(3x-2)\left(|3x+5|+|3x-9|\right)+2x-\frac{16}{3}, \end{aligned}$$

так что $A \equiv -4$.

Ответ: $a = -\frac{2}{3}$.

Задача 6 (мех-мат МГУ, устный экзамен, 2006) *График функции $g(x)$ симметричен графику функции $f(x) = 2|x-3| - 2|x| + 3x - 3$ относительно точки $(2; 2)$. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение*

$$f(x-a) = g(x+a)$$

имеет бесконечно много решений.

Решение. Прежде всего с помощью равенства (8) найдем формулу, которой может быть задана функция $g(x)$:

$$g(x) = 4 - f(4-x) = -2|x-1| + 2|x-4| + 3x - 5.$$

Для упрощения анализа уравнения $f(x-a) = g(x+a)$ введем новую неизвестную $t = x + a$. Поскольку между t и x существует взаимно однозначное соответствие, исходную задачу можно переформулировать следующим образом:

Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$f(t-2a) = g(t) \tag{18}$$

имеет бесконечно много решений.

Будем решать это уравнение графически.

Начнем с того, что нарисуем графики функций $f(t)$ и $g(t)$ (это легко сделать стандартным раскрытием модулей).

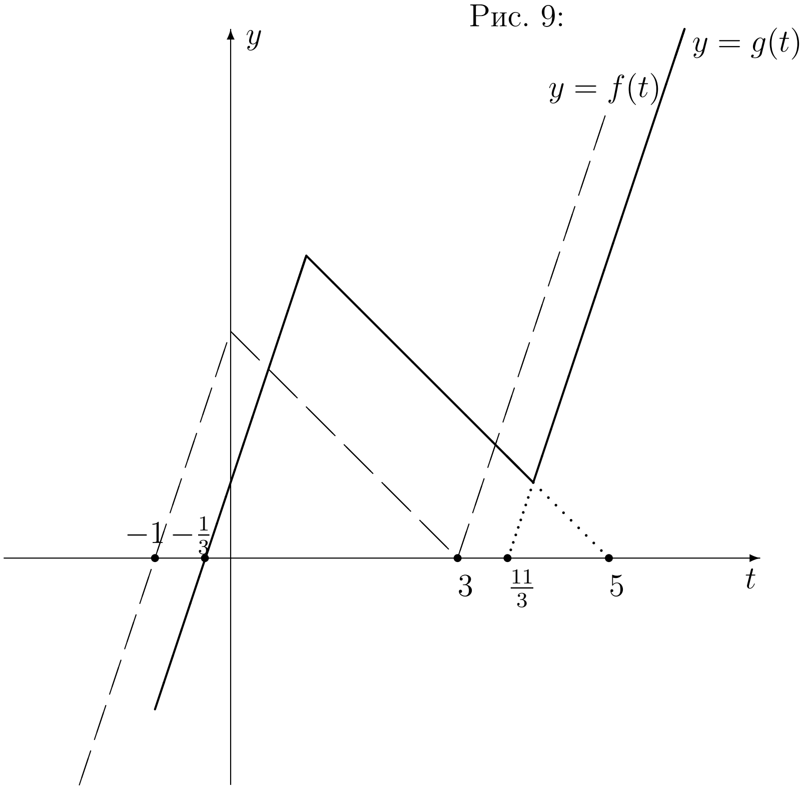
График функции $y = f(t)$ – ломаная из трех звеньев: $y = 3t + 3$ при $t \le 0$, $y = -t + 3$ при $0 \le t \le 3$, $y = 3t - 9$ при $t \ge 3$. Эти звенья пересекают ось абсцисс в точках $t_1 = -1$, $t_2 = 3$ и $t_3 = 3$ соответственно.

График функции $y = g(t)$ – ломаная из трех звеньев: $y = 3t + 1$ при $t \leq 1$, $y = -t + 5$ при $1 \leq t \leq 4$, $y = 3t - 11$ при $t \geq 4$. Эти звенья (или их продолжения) пересекают ось абсцисс в точках $t_4 = -\frac{1}{3}$, $t_5 = 5$ и $t_6 = \frac{11}{3}$ соответственно.

Для дальнейшего будет важно, что соответствующие звенья этих ломаных параллельны (на самом деле график функции $g(x)$ может быть получен из графика функции $f(x)$ параллельным переносом на $\frac{2}{3}$ вправо (вдоль оси абсцисс) и 1 вверх (вдоль оси ординат).

На рис.9 график функции $y = g(t)$ изображен сплошной линией, а график функции $y = f(t)$ – прерывистой.

Рис. 9:



Для $a = 0$ уравнение (18) примет вид $f(t) = g(t)$. Из рис.9 ясно, что оно имеет ровно два корня.

При увеличении a от 0 до $+\infty$ график функции $y = f(t - 2a)$ будет получаться из графика функции $y = f(t)$ параллельным переносом на $2a$ единиц вправо (вдоль оси абсцисс). Он пересечётся с графиком $y = g(t)$

в бесконечном числе точек когда $2a = t_4 - t_1 = t_6 - t_3 = \frac{2}{3}$ (частично наложатся левые и правые звенья графиков), $2a = t_5 - t_2 = 2$ (частично наложатся средние звенья графиков), и $2a = t_6 - t_1 = \frac{14}{3}$ (частично наложатся левое звено графика $y = f(t)$ и правое звено графика $y = g(t)$).

При уменьшении a от 0 до $-\infty$ график функции $y = f(t-2a)$ будет получаться из графика функции $y = f(t)$ параллельным переносом на $-2a$ единиц влево (вдоль оси абсцисс). Он пересечётся с графиком $y = g(t)$ в бесконечном числе точек когда $-2a = t_3 - t_4 = \frac{10}{3}$ (частично наложатся правое звено графика $y = f(t)$ и левое звено графика $y = g(t)$).

Ответ: $-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{7}{3}$.

Задача 7 (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы", 2009, №4) *Две параболы $y = x^2$ и $y = 2008 - x^2$, пересекаясь, ограничивают некоторую фигуру. Найдите уравнения всех прямых, делящих площадь этой фигуры пополам.*

Доказательство. Прежде всего найдём точки пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = 2008 - x^2$. Для абсцисс точек пересечения имеем уравнение:

$$x^2 = 2008 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1004 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1004}.$$

Таким образом, графики пересекаются в двух точках. Их ординаты совпадают и равны $\left(\pm\sqrt{1004}\right)^2 = 1004$.

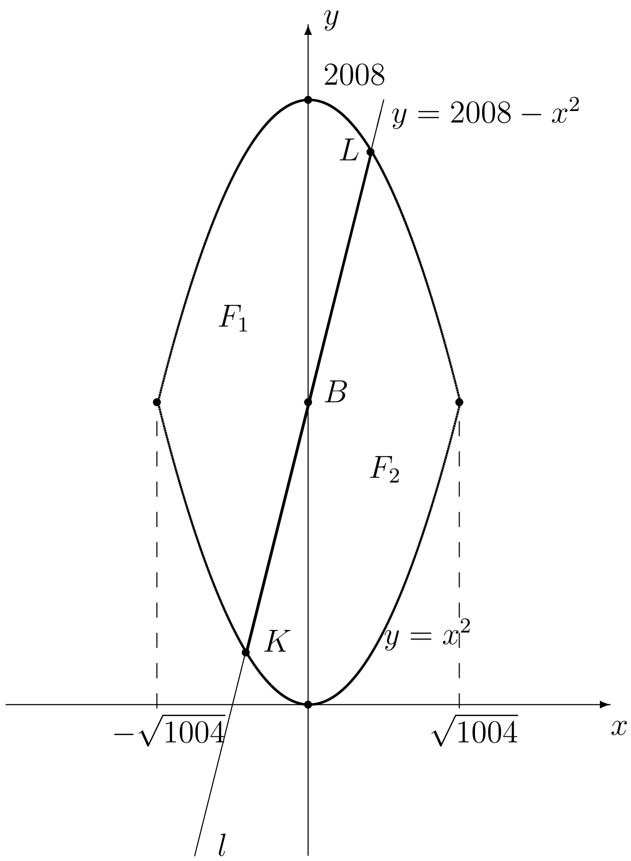
Фигура F, о которой идёт речь в задаче, изображена на рис. 10.

Докажем, что точка $K(x; x^2)$, где $x \in [-\sqrt{1004}; \sqrt{1004}]$, лежащая на нижней границе фигуры F, и точка $L(-x; 2008-x^2)$, лежащая на верхней границе фигуры F, симметричны относительно точки $B(0; 1004)$. Действительно, координаты середины отрезка KL есть:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{x+(-x)}{2} = 0, \\ y_0 = \frac{x^2+2008-x^2}{2} = 1004. \end{cases}$$

Докажем теперь, что любая прямая l, проходящая через центр симметрии B делит фигуру F на две части, равной площади. Для этого отметим, что такая прямая сама центрально симметрична относительно точки B (как, впрочем, и любой другой своей точки). Поэтому части F_1

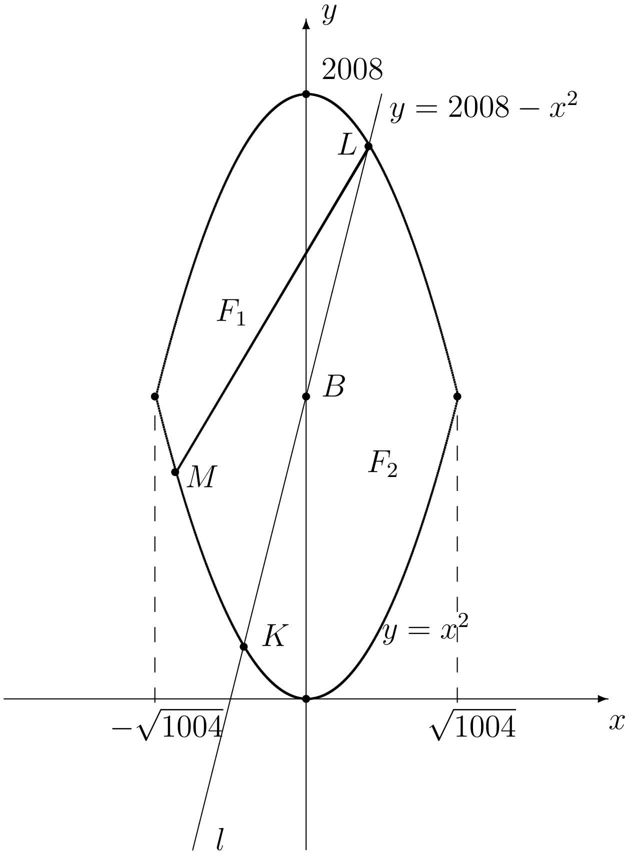
Рис. 10:



и F_2, на которые прямая l делит основную фигуру F центрально симметричны друг другу относительно точки B. Следовательно, площади этих частей равны.

Рассмотрим теперь какую-либо прямую l^*, пересекающую основную фигуру F в точках M и L, но не проходящую через центр симметрии B (см. рис. 11, где изображён случай, когда точка M лежит на графике функции $y = x^2$, а точка L – на графике функции $y = 2008 - x^2$). Проведём прямую l через точку L и центр симметрии B. Тогда (по уже доказанному) прямая l разобьёт фигуру F на части F_1 и F_2 равной площади. Одна из частей, на которые фигуру F разбивает прямая l^*, является частью либо F_1, либо F_2. Поэтому её площадь не может быть равна половине площади фигуры F.

Рис. 11:



Теперь, чтобы получить ответ задачи, достаточно отметить, что прямая l, проходящая через центр симметрии $B(0; 1004)$ имеет уравнение вида $y = kx + 1004$, где k – произвольное действительное число (если эта прямая не вертикальная), или $x = 0$ (если эта прямая вертикальная).

Ответ: $x = 0$ и $y = kx + 1004$, где k – произвольное действительное число.

6 Число центров симметрии

В задачах, которые мы рассмотрели до сих пор, функции либо не имели центра симметрии, либо имели один центр симметрии.

Однако существуют и функции, имеющие бесконечно много центров симметрии.

Простейший пример функции такого рода – это линейная функция $y = kx + b$. Ее график является прямой линией, которая при повороте на 180° вокруг любой своей точки $(x_0; kx_0+b)$, очевидно, наложится на себя. Таким образом, любая точка прямой является ее центром симметрии.

Формально этот вывод можно получить из (10) или (12):

$$\frac{f(x) + f(2x_0 - x)}{2} \equiv \frac{kx + b + k(2x_0 - x) + b}{2} \equiv kx_0 + b.$$

Более интересный пример – это нечётная периодическая функция (скажем, $\operatorname{tg} x$ или $\sin x$). Если T – её период, то любая точка с координатами $x_0 = \frac{Tn}{2}$, $y_0 = 0$, где $n \in Z$, будет ее центром симметрии. Действительно, если $x \in D_f$, то в силу нечетности точка $-x$ также лежит в D_f, а тогда периодичность влечет, что $-x + Tn \equiv 2x_0 - x \in D_f$. Таким образом, область определения симметрична относительно точки $x_0 = \frac{Tn}{2}$. Кроме того,

$$\frac{f(x) + f(2x_0 - x)}{2} = \frac{f(x) + f(Tn - x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = 0 = y_0.$$

Этот пример характерен в том смысле, что справедлива следующая теорема.

Теорема 7 *Если функция $f(x)$ является нечётной и, кроме центра симметрии $O(0;0)$, имеет на оси абсцисс еще один центр симметрии: $(x_0;0)$, то $f(x)$ периодична с периодом $T = 2x_0$ (и, следовательно, $f(x)$ имеет бесконечно много центров симметрии вида $(nx_0;0)$, где $n \in Z$).*

Доказательство. Прежде всего докажем, что область определения функции $f(x)$ выдерживает сдвиги на $\pm T \equiv \pm 2x_0$.

Если $x \in D_f$, то в силу нечётности функции $f(x)$ точка $-x$ также входит в D_f, а тогда симметричность относительно центра $(x_0;0)$ влечет, что и точка $2x_0 - (-x) \equiv T + x$ входит в D_f.

Аналогично, если $x \in D_f$, то симметричность относительно центра $(x_0; 0)$ влечет, что и точка $2x_0 - x \equiv T - x$ входит в D_f, а тогда в силу нечётности функции $f(x)$ точка $-(T - x) = x - T$ также входит в D_f.

Теперь докажем, что при всех $x \in D_f$ верно тождество $f(x+T) = f(x)$: Действительно, если $x \in D_f$, то в силу нечётности функции $f(x)$ точка $-x$ также входит в D_f, а тогда симметрия графика функции $f(x)$ относительно центра $(x_0; 0)$ влечет, что верно тождество:

$$f(-x) + f(2x_0 + x) = 0 \Leftrightarrow f(T + x) = -f(-x) \Leftrightarrow f(x + T) = f(x).$$

Еще более интересный пример функции с бесконечным числом центров симметрии – это $f(x) = 1 + 2x + \cos x$. Для нее выражение (12) равно

$$\begin{aligned} B &= \frac{1 + 2(x_0 + x) + \cos(x_0 + x) + 1 + 2(x_0 - x) + \cos(x_0 - x)}{2} \\ &= 1 + 2x_0 + \cos x_0 \cdot \cos x. \end{aligned}$$

Выражение B не зависит от x и равно y_0, тогда и только тогда, когда выполнены равенства:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + 2x_0 = y_0, \\ \cos x_0 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_0 = 1 + \pi + 2\pi n, \\ x_0 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z. \end{array} \right.$$

Появившийся в ходе решения этой системы целочисленный параметр n является своеобразным "номером" центра симметрии. Итак, функция $f(x) = 1 + 2x + \cos x$ имеет бесконечно много центров симметрии, которые можно занумеровать целыми числами; центр с номером $n \in Z$ имеет координаты $x_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $y_n = 1 + \pi + 2\pi n$. Отметим, что мы не просто показали, что наша функция имеет бесконечно много центров симметрии, но и нашли *все* центры симметрии.

Последний пример функции, имеющей бесконечно много центров симметрии, характерен в том смысле, что справедлива следующая теорема.

Теорема 8 *Если функция $f(x)$ определена на всей числовой оси и имеет два центра симметрии: $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, где $x_1 \neq x_2$, то она представима в виде*

$$f(x) = L(x) + h(x - x_1),$$

где $L(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}$ – линейная функция, а $h(x)$ – нечётная периодическая функция с периодом $T = 2(x_2 - x_1)$.

Наоборот, если функция $f(x)$ дается формулой $f(x) = L(x)+h(x+a)$, где $L(x) = kx + b$ – линейная функция, а $h(x)$ – нечетная периодическая функция с периодом T, определенная на всей оси, то $f(x)$ имеет бесконечно много центров симметрии $x_n = \frac{Tn}{2} - a$, $y_n = kx_n + b$, $n \in Z$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ имеет два центра симметрии $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. В силу теоремы 5 функция $g(x) = f(x + x_1) - y_1$ имеет два центра симметрии: $(0; 0)$ и $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, так что, в частности, $g(x)$ – нечетна.

Рассмотрим прямую, проходящую через точки $(0; 0)$ и $(x_2-x_1; y_2-y_1)$. Нетрудно показать, что она задается уравнением $y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x$. Как мы отмечали, всякая прямая симметрична относительно любой своей точки. Поэтому прямая $y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x$ симметрична относительно точек $(0; 0)$ и $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, относительно которых симметрична и функция $g(x)$. Поэтому в силу теоремы 6 функция $h(x) = g(x) - \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x$ симметрична относительно точек $(0; 0)$ и $(x_2 - x_1; 0)$. Применяя теорему 7, можно гарантировать, что функция $h(x)$ нечетна и периодична с периодом $T = 2(x_2 - x_1)$.

Теперь для завершения доказательства достаточно выразить исходную функцию $f(x)$ через $h(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x - x_1) + y_1 = h(x - x_1) + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \\ &= h(x - x_1) + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

Вторая часть теоремы очевидно следует из теорем 5 и 6 и рассуждений, проведенных в начале этого раздела.

7 Свойства центральной симметрии относительно операции композиции

Доказанные выше теоремы о свойствах функций, графики которых имеют центр симметрии, имеют более глубокие корни и связаны со свойствами центральной симметрии как преобразования плоскости относительно операции композиции отображений. Для того, чтобы компактно сформулировать и доказать соответствующие результаты, мы будем использовать введенное в разделе 2 обозначение Φ_B для центральной симметрии с центром в точке B. Кроме того, через $\Pi_{\overrightarrow{v}}$ мы будем обозначать параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{v}$.

Теорема 9 *Последовательное выполнение двух центральных симметрий с центрами B_1 и B_2 соответственно является параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{v} = 2 \cdot \overrightarrow{B_1B_2}$:*

$$\Phi_{B_2} \circ \Phi_{B_1} = \Pi_{2\cdot\overrightarrow{B_1B_2}}.$$

Для доказательства теоремы введем на плоскости декартову систему координат. Как мы отмечали в разделе 2, в этом случае любую точку плоскости можно отождествить с парой ее координат. То же самое можно сказать и о векторах.

Соответственно, образы точки $A(x;y)$ при центральных симметриях относительно точек $B_1(x_1;y_1)$ и $B_2(x_2;y_2)$ задаются функциями от двух действительных аргументов:

$$\begin{aligned} \Phi_{(x_1;y_1)}(x;y) &= (2x_1 - x; 2y_1 - y)\,, \\ \Phi_{(x_2;y_2)}(x;y) &= (2x_2 - x; 2y_2 - y)\,, \end{aligned}$$

а образ точки $A(x;y)$ при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{v} = (v_x;v_y)$ задается соотношением:

$$\Pi_{(v_x;v_y)}(x;y) = (x + v_x; y + v_y)\,.$$

Поэтому для образа $A'(x';y')$ точки $A(x;y)$ при последовательном выполнении отображений $\Phi_{(x_1;y_1)}$ и $\Phi_{(x_2;y_2)}$ мы имеем:

$$\begin{aligned} (x';y') &= \Phi_{(x_2;y_2)}\left(\Phi_{(x_1;y_1)}(x;y)\right) = \Phi_{(x_2;y_2)}\,(2x_1 - x; 2y_1 - y) \\ &= (2x_2 - (2x_1 - x); 2y_2 - (2y_1 - y)) = (2x_2 - 2x_1 + x; 2y_2 - 2y_1 + y) \\ &= \Pi_{(2x_2-2x_1;2y_2-2y_1)}(x;y) = \Pi_{2\overrightarrow{B_1B_2}}(x;y), \end{aligned}$$

что и означает справедливость нашей теоремы.

Теорема 9 позволяет легко решить следующую задачу, которая предлагалась в 1938 году на 4 Московской математической олимпиаде (мы приводим слегка изменённую формулировку).

Задача 8 (ММО, 1938) *На плоскости даны точки O_1, O_2, O_3 и точка A. Точка A симметрично отражается относительно точки O_1, полученная точка A_1 – относительно O_2, полученная точка A_2 – относительно O_3. Получаем некоторую точку A_3, которую также последовательно отражаем относительно O_1, O_2, O_3. Доказать, что последняя полученная точка совпадает с A.*

Решение. В тексте задачи идёт речь о шести последовательных центральных симметриях: Φ_{O_1}, Φ_{O_2}, Φ_{O_3}, Φ_{O_1}, Φ_{O_2}, Φ_{O_3}. Таким образом, итоговое отображение F является их композицией:

$$F = \Phi_{O_3} \circ \Phi_{O_2} \circ \Phi_{O_1} \circ \Phi_{O_3} \circ \Phi_{O_2} \circ \Phi_{O_1}.$$

В силу ассоциативности операции композиции отображений, в этом произведении можно произвольным образом расставить скобки. Сделаем это следующим образом:

$$F = (\Phi_{O_3} \circ \Phi_{O_2}) \circ (\Phi_{O_1} \circ \Phi_{O_3}) \circ (\Phi_{O_2} \circ \Phi_{O_1}).$$

Применяя теорему 9 к каждому из трёх попарных произведений, мы получим:

$$F = \Pi_{2\cdot\overrightarrow{O_2O_3}} \circ \Pi_{2\cdot\overrightarrow{O_3O_1}} \circ \Pi_{2\cdot\overrightarrow{O_1O_2}}.$$

Последовательное выполнение двух параллельных переносов, $\Pi_{\overrightarrow{v_1}}$ на вектор $\overrightarrow{v_1}$ и $\Pi_{\overrightarrow{v_2}}$ на вектор $\overrightarrow{v_2}$, будет параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$:

$$\Pi_{\overrightarrow{v_2}} \circ \Pi_{\overrightarrow{v_1}} = \Pi_{\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_1}}.$$

Поэтому

$$F = \Pi_{2\overrightarrow{O_2O_3}+2\overrightarrow{O_3O_1}+2\overrightarrow{O_1O_2}}.$$

Вектор $2\overrightarrow{O_2O_3} + 2\overrightarrow{O_3O_1} + 2\overrightarrow{O_1O_2}$ равен вектору

$$2 \cdot \left(\overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3O_1} + \overrightarrow{O_1O_2}\right) = 2 \cdot \left(\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1O_2}\right) = 2 \cdot \overrightarrow{O_2O_2} = 2 \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}.$$

Поэтому отображение F является параллельным переносом на нулевой вектор, т.е. тождественным отображением, которое оставляет все точки пространства на месте. Именно, это нам и требовалось доказать.

Теорема 10 *Последовательное выполнение параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{v}$ и центральной симметрии с центром B является центральной симметрией с центром $B' = B - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{v}$ (сумма и разность точки и вектора понимаются как откладывание соответствующего вектора от точки):*

$$\Phi_B \circ \Pi_{\overrightarrow{v}} = \Phi_{B-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{v}}, \tag{19}$$

а изменение порядка выполнения движений, т.е. последовательное выполнение центральной симметрии с центром B и параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{v}$, дает центральную симметрию с центром $B' = B + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{v}$:

$$\Pi_{\overrightarrow{v}} \circ \Phi_B = \Phi_{B+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{v}}. \tag{20}$$

Для доказательства теоремы введем на плоскости декартову систему координат и обозначим координаты вектора $\overrightarrow{v}$ через $(v_x; v_y)$, а координаты центра симметрии B через $(x_0; y_0)$.

Тогда для образа $A'(x'; y')$ точки $A(x; y)$ при последовательном выполнении отображений $\Pi_{(v_x;v_y)}$ и $\Phi_{(x_0;y_0)}$ мы имеем:

$$\begin{aligned}
(x'; y') &= \Phi_{(x_0;y_0)}\left(\Pi_{(v_x;v_y)}(x; y)\right) = \Phi_{(x_0;y_0)}\left(x + v_x; y + v_y\right) \\
&= (2x_0 - (x + v_x); 2y_0 - (y + v_y)) \\
&= \left(2\left(x_0 - \frac{1}{2}v_x\right) - x; 2\left(y_0 - \frac{1}{2}v_y\right) - y\right) \\
&= \Phi_{\left(x_0 - \frac{1}{2}v_x; y_0 - \frac{1}{2}v_y\right)}(x; y) = \Phi_{B - \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{v}}(x; y),
\end{aligned}$$

что и означает справедливость нашей теоремы.

Изменение порядка выполнения движений, сначала $\Phi_{(x_0;y_0)}$, а затем $\Pi_{(v_x;v_y)}$, для образа $A'(x'; y')$ точки $A(x; y)$ дает:

$$\begin{aligned}
(x'; y') &= \Pi_{(v_x;v_y)}\left(\Phi_{(x_0;y_0)}(x; y)\right) = \Pi_{(v_x;v_y)}\left(2x_0 - x; 2y_0 - y\right) \\
&= ((2x_0 - x) + v_x; (2y_0 - y) + v_y) \\
&= \left(2\left(x_0 + \frac{1}{2}v_x\right) - x; 2\left(y_0 + \frac{1}{2}v_y\right) - y\right) \\
&= \Phi_{\left(x_0 + \frac{1}{2}v_x; y_0 + \frac{1}{2}v_y\right)}(x; y) = \Phi_{B + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{v}}(x; y),
\end{aligned}$$

что и означает справедливость второй части нашей теоремы.

Теперь мы можем сформулировать и доказать аналоги теорем, доказанных ранее для графиков функций, для произвольных фигур.

Аналогом теоремы 5 является следующая теорема.

Теорема 11 *Если фигура F имеет центр симметрии B, то фигура $F' = \Pi_{\overrightarrow{v}}(F)$, которая получается из F параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{v}$ имеет центр симметрии $B' = B + \overrightarrow{v}$.*

Доказательство. По определению, тот факт, что фигура F имеет центр симметрии B, означает справедливость равенства:

$$\Phi_B(F) = F.$$

Применяя к обеим частям отображение $\Pi_{\overrightarrow{v}}$, мы получим:

$$\Pi_{\overrightarrow{v}}\left(\Phi_B(F)\right) = F'.$$

Левая часть этого равенства может быть преобразована с помощью формулы (20) в

$$\Phi_{B+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{v}}(F) \equiv \Phi_{(B+\overrightarrow{v})-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{v}}(F),$$

а затем с помощью формулы (19) – в

$$\Phi_{B+\overrightarrow{v}}\left(\Pi_{\overrightarrow{v}}(F)\right) \equiv \Phi_{B+\overrightarrow{v}}\left(F'\right).$$

Итак, для фигуры F' верно равенство:

$$\Phi_{B+\overrightarrow{v}}\left(F'\right) = F',$$

что, по определению, означает центральную симметрию F' относительно точки $B+\overrightarrow{v}$.

Более интересными являются утверждения о фигурах с несколькими центрами симметрии. Эти утверждения потребуют обобщения понятия периодической функции на случай произвольных фигур. Это может быть сделано, например, следующим образом.

Определение.Пусть $\overrightarrow{v}$ – вектор. Назовем фигуру F периодической с периодом $\overrightarrow{v}$, если параллельный перенос F как на вектор $\overrightarrow{v}$, так и на вектор $-\overrightarrow{v}$ оставляет F на месте:

$$\begin{aligned} \Pi_{\overrightarrow{v}}(F) &= F, \\ \Pi_{(-\overrightarrow{v})}(F) &= F. \end{aligned}$$

Очевидно, что, если фигура F – периодична с периодом $\overrightarrow{v}$, т.е. выдерживает сдвиги на $\pm\overrightarrow{v}$, то она выдерживает и последовательное применение нескольких таких сдвигов, т.е. для любого $n \in Z$ вектор $n \cdot \overrightarrow{v}$ также будет периодом фигуры F.

Допустим, что фигура F имеет центр симметрии B и кроме того, является периодической с периодом $\overrightarrow{v}$. Докажем, что в этом случае фигура F имеет бесконечно много центров симметрии вида $B_n = B + \frac{n}{2} \cdot \overrightarrow{v}$, где $n \in Z$.

По определению, тот факт, что фигура F имеет центр симметрии B_n, означает справедливость равенства:

$$\Phi_{B_n}(F) = F \Leftrightarrow \Phi_{B+\frac{1}{2}\cdot n\cdot\overrightarrow{v}}(F) = F.$$

Используя формулу (20), последнее равенство можно привести к виду:

$$\Pi_{n\cdot\overrightarrow{v}}\left(\Phi_B(F)\right) = F.$$

Поскольку $\Phi_B(F) = F$ (точка B – центр симметрии фигуры F), мы получим равенство:

$$\Pi_{n\cdot\overrightarrow{v}}(F) = F,$$

которое истинно, т.к. в сущности, выражает факт периодичности фигуры F. Аналогом теоремы 7 является следующее утверждение.

Теорема 12 *Допустим, что фигура F имеет два центра симметрии, B_0 и B_1. Тогда она является периодической с периодом $\overrightarrow{v} = 2\cdot\overrightarrow{B_0B_1}$ и, следовательно, имеет бесконечно много центров симметрии вида $B_n = B_0 + n\cdot\overrightarrow{B_0B_1}$, где $n \in Z$.*

Доказательство. По определению, тот факт, что фигура F имеет центры симметрии B_0 и B_1, означает справедливость равенств:

$$\begin{aligned} \Phi_{B_0}(F) &= F, \\ \Phi_{B_1}(F) &= F. \end{aligned}$$

Применим к обеим частям первого равенства преобразование Φ_{B_1}:

$$\Phi_{B_1}\left(\Phi_{B_0}(F)\right) = \Phi_{B_1}(F).$$

Используя второе равенство и теорему 9, мы получим:

$$\Pi_{2\cdot\overrightarrow{B_0B_1}}(F) = F. \qquad (21)$$

Если же на первом шаге применить преобразование Φ_{B_0} к равенству $\Phi_{B_1}(F) = F$, то мы получим:

$$\Phi_{B_0}\left(\Phi_{B_1}(F)\right) = \Phi_{B_0}(F) \Leftrightarrow \Pi_{2\cdot\overrightarrow{B_1B_0}}(F) = F.$$

Так как $\overrightarrow{B_1B_0} = -\overrightarrow{B_0B_1}$, верно равенство:

$$\Pi_{-2\cdot\overrightarrow{B_0B_1}}(F) = F. \qquad (22)$$

Соотношения (21) и (22) означают, что фигура F периодична с периодом $\overrightarrow{v} = 2\cdot\overrightarrow{B_0B_1}$.

Теорема 12, в частности, дает решение следующей задачи, которая предлагалась в 1948 году на Московской математической олимпиаде (2 тур, 7-8 кл.).

Задача 9 (ММО, 1948) *Может ли фигура иметь более одного, но конечное число центров симметрии?*

8 Задачи для самостоятельного решения

Задача 10 (Политехнический университет (СПб), физ.-мат. ф-т, 2005) *Найдите функцию* $y = f(x)$, *график которой симметричен графику функции* $y = \frac{1}{x}$ *относительно точки* $(-1; 1)$.

Ответ: $y = \frac{2x+5}{x+2}$.

Задача 11 (физ. ф-т МГУ, 1992, №7) *Известно, что некоторая нечётная функция при* $x > 0$ *определяется формулой*

$$f(x) = \log_3\left(\frac{x}{3}\right).$$

Найти, какой формулой определяется $f(x)$ *при* $x < 0$. *Решить уравнение* $f(x) = 3$.

Ответ: $f(x) = \log_3\left(-\frac{3}{x}\right)$, если $x < 0$; $x_1 = -\frac{1}{9}$, $x_2 = 81$.

Задача 12 *Доказать, что точка* $(1; 1)$ *является центром симметрии графика функции*

$$f(x) = \frac{4}{2 + 2^x}.$$

Задача 13 *Доказать, что график функции*

$$f(x) = \sqrt[5]{x+5} - 6$$

имеет центр симметрии.

Задача 14 *Доказать, что график функции*

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

не имеет центра симметрии.

Задача 15 (ф-т почвоведения МГУ, 2004, июль, №7) *Доказать, что график функции*

$$f(x) = 2x + \log_3\left(\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 10x + 24}\right)$$

имеет центр симметрии, и найти координаты (x_0, y_0) *этого центра симметрии.*

Ответ. $(-1;-2)$.

Задача 16 (Политехнический университет (СПб), физ.-мат. ф-т, 2005) *Найдите центр симметрии графика функции*

$$y = \log_3\left(3x - 3 + 3\sqrt{x^2 - 2x + 2}\right).$$

Ответ: $(1;1)$.

Задача 17 (мех-мат МГУ, устный экзамен, 2006) *График функции $f(x)$ симметричен графику функции $g(x) = 3|x| - 3|x-2| - 2x + 4$ относительно точки $(1;4)$. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение*

$$f(x+a) = g(x-a)$$

имеет бесконечно много решений.

Ответ. $-2; -\frac{1}{2}; 1; 4$.

Задача 18 *Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, ее график имеет два центра симметрии, $(x_1;y_1) = (2;4)$ и $(x_2;y_2) = (4;16)$, и на промежутке $0 \le x \le 2$ ее значения вычисляются по формуле $f(x) = 6x - 7 - |x-1|$. Решить уравнение*

$$f(x) = x^2.$$

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$.

Задача 19 (ВМК, устный, 2006) *Найти все значения a, при которых функция*

$$f(t) = \frac{t}{e^t - 1} + at, t \ne 0,$$

является чётной.

Ответ: $a = \frac{1}{2}$.

Задача 20 (мех-мат, устный, 2007, июль) *При каких значениях параметра a функция*

$$f(x) = (a-x)5^{x+7+4a} - (a+x)5^{a^2-x-5}$$

является нечётной?

Ответ: $a_1 = 6$, $a_2 = -2$.

Задача 21 (мех-мат, устный, 2007, июль) *При каких значениях параметра a функция*

$$f(x) = (x+a)3^{x-2+a^2} + (a-x)3^{8-x-3a}$$

является чётной?

Ответ: $a_1 = -5$, $a_2 = 2$.

Задача 22 (Московская математическая олимпиада, 1960) *Даны выпуклый многоугольник и точка O внутри его. Любая прямая, проходящая через точку O делит площадь многоугольника пополам. Доказать, чтомногоугольник центрально-симметричный и O – центр симметрии.*