

# Графический метод решения алгебраических задач ЕГЭ с параметром \*

**Г.И. Фалин**

д.ф.м.н., профессор  
кафедра теории вероятностей  
механико-математический факультет  
МГУ им.М.В.Ломоносова

**А.И. Фалин**

к.ф.м.н., доцент  
кафедра общей математики  
факультет ВМК  
МГУ им.М.В.Ломоносова

Демонстрационный вариант ЕГЭ 2009 [1] под номером В8 содержит следующую задачу.

**Задача [В8]:** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$||x| + 5 - a| = 2 \quad (1)$$

имеет ровно 3 корня.

В сборнике [2] предлагается следующий метод решения этой задачи (в [2] решение дано для аналогичной задачи из другого варианта КИМ).

*1 шаг.* Поскольку правая часть уравнения (1) является положительным числом, это уравнение распадается на два уравнения (без всякого анализа знаков выражения  $|x| + 5 - a$  под внешним знаком модуля):

$$\begin{array}{cc} |x| + 5 - a = 2 & |x| + 5 - a = -2 \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ |x| = a - 3 & |x| = a - 7 \end{array}$$

*2 шаг.* На плоскости  $(x; y)$  построим графики функций  $y = |x|$ ,  $y = a - 3$ ,  $y = a - 7$ . Уравнение (1) имеет ровно 3 корня тогда и только тогда, когда

---

\*Математика, Издательский дом "Первое сентября", 2010, №1, стр. 18-20.

прямая  $y = a - 3$  пересекает график  $y = |x|$  в двух точках, а прямая  $y = a - 7$  – в одной. Так как  $a - 3 > a - 7$ , это возможно только в случае  $|x| = a - 7 = 0$ , т.е. для  $a = 7$ .

Итак, ответом задачи является единственное значение  $a$ :  $a = 7$ .

Описанный метод решения задачи с параметром в методической литературе называется прямым методом.

Он заключается в том, что уравнение (неравенство, система) с параметром начинает решаться как обычное уравнение (неравенство, система). Обычно до некоторого места рассуждения и характер вычислений совершенно не зависят от наличия параметра (как будто вместо него стоит конкретное число). Однако, начиная с некоторого места, рассуждения начинают зависеть от параметра. В сложных задачах это приводит к логическому "дереву случаев", состоящему из достаточно большого числа причудливо переплетённых "ветвей". Разобраться в структуре этого "дерева случаев" довольно тяжело.

Рассматриваемая задача очень лёгкая, так что больших сложностей с этим анализом не возникает. Тем не менее, его нужно проводить и он требует определённой культуры и аккуратности. В описанном выше решении из [2] всё выглядит просто, т.к. этот анализ вообще не проводится. Вместо этого на шаге 2 решения произносятся какие-то слова, которые нельзя считать аккуратными рассуждениями (хотя их и можно превратить в таковые). В общем, в прямой метод решения легко ввязаться, но в действительно интересных случаях, для задач сложных, из него довольно тяжело выбраться и довести решение до ответа.

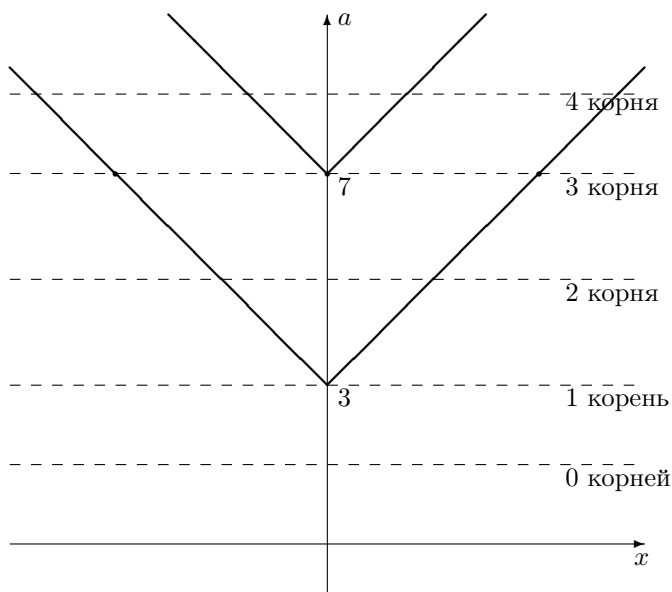
Гораздо удобнее графический метод решения. Он заключается в следующем. В уравнении (неравенстве) с параметром  $a$  и неизвестной  $x$  следует рассмотреть величины  $a$  и  $x$  не как параметр и неизвестную, а как две *равноправные переменные* величины, и нарисовать на координатной плоскости  $(a, x)$  фигуру  $\Phi$ , задаваемую данным уравнением (неравенством). Тогда при заданном значении параметра  $a$  множество решений исходного уравнения является проекцией на ось абсцисс точек пересечения горизонтальной прямой, проведенной на высоте  $a$ , с фигурой  $\Phi$ . Эту горизонтальную прямую удобно мыслить как движущуюся ось  $Ox$ . Тогда её пересечение с вышеупомянутой фигурой непосредственно даёт множество решений исходного уравнения (неравенства).

Поэтому, например, ответом задачи, в которой спрашивается, при каких  $a$  уравнение имеет три корня, будет множество значений  $a$ , при которых горизонтальная прямая, проведенная на высоте  $a$ , пересекает фигуру  $\Phi$  ровно в трёх точках. Этот метод особенно удобен, когда параметр входит в исходное уравнение линейно. В этих случаях, исходное уравнение обычно удаётся преобразовать к виду  $a = f(x)$ , т.е. свести дело к построению графика функции  $f(x)$ .

После этих общих соображений решим исходную задачу графическим методом.

Чтобы нарисовать на координатной плоскости  $(x; a)$  фигуру, задаваемую

Рис. 1:



уравнением (1), следует, конечно, раскрыть внешний модуль:

$$|x| + 5 - a = 2 \quad |x| + 5 - a = -2$$

Однако, после этого нужно записать полученные равенства в виде  $a = f(x)$  (т.е. разрешить их относительно  $a$ ):

$$a = |x| + 3 \quad a = |x| + 7$$

Таким образом, фигура  $\Phi$ , задаваемая уравнением (1), является несвязной и состоит из двух частей (графиков функций  $a = |x| + 3$  и  $a = |x| + 7$ ). Эта фигура изображена на рис. 1. Этот рисунок немедленно даёт ответ задачи: исходное уравнение имеет 3 корня тогда и только тогда, когда  $a = 7$ .

Следует особо подчеркнуть, что хотя в решении из [2] и появляются графики, сам этот метод решения, как метод решения задачи с параметром, не является графическим. Просто в использовавшемся прямом методе уравнение относительно  $x$  решалось не алгебраически, а графически.

Преимущество графического метода решения задач с параметром наиболее осязательно проявляется для сложных задач. Рассмотрим, например, задачу С4 из демоверсии ЕГЭ 2004 года.

**Задача [С4]:** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых множество решений неравенства

$$x(x - 2) \leq (a + 1)(|x - 1| - 1) \quad (2)$$

содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным  $1,7$ , и положительным знаменателем.

Перед тем, как приступить к решению задачи отметим, что фраза "множество содержит все члены некоторой ... прогрессии ..."

означает:

"существует ... прогрессия ..., все члены которой являются элементами этого множества."

Поскольку в неравенство (2) параметр входит линейно, можно нарисовать на плоскости  $(x; a)$  фигуру  $\Phi$ , задаваемую этим неравенством. Для этого, прежде всего, стандартным способом освободимся от модуля:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x(x - 2) \leq (a + 1)(x - 2) \end{cases} \quad \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x(x - 2) \leq -(a + 1)x \end{cases} \quad (3)$$

Второе неравенство первой системы (т.е. исходное неравенство (2) в случае  $x - 1 \geq 0$ ) равносильно неравенству:

$$(a + 1)(x - 2) - x(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(a - x + 1) \geq 0,$$

так что оно распадается на две системы:

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ a - x + 1 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ a - x + 1 \leq 0 \end{cases}$$

Аналогично, второе неравенство второй системы (3) (т.е. исходное неравенство (2) в случае  $x - 1 < 0$ ) равносильно неравенству:

$$(a + 1)x + x(x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow x(a + x - 1) \leq 0,$$

так что оно распадается на две системы:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ a + x - 1 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ a + x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Соответственно, исходное неравенство (2) распадается на четыре системы:

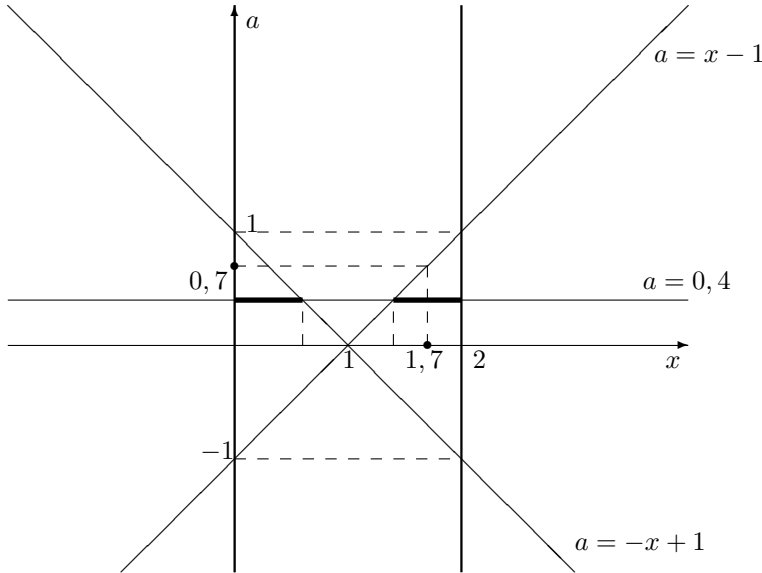
$$\begin{cases} x \geq 2 \\ a \geq x - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ a \leq x - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ a \leq -x + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ a \geq -x + 1 \end{cases}$$

Теперь не составляет никакого труда изобразить искомую фигуру  $\Phi$ ; это сделано на рис. 2.

Как мы говорили, при заданном значении параметра  $a$  множество решений исходного неравенства образуется от пересечения с фигурой  $\Phi$  числовой оси, проведенной на высоте  $a$ . В качестве примера на рис. 2 рассмотрен случай  $a = 0,4$ .

Из рис. 2 ясно, что при  $a \leq 0$  множество решений исходного неравенства – отрезок  $[0; 2]$ . Это множество содержит число  $1,7$  и, каким бы ни был знаменатель  $q \in (0; 1)$ , все остальные члены бесконечно убывающей

Рис. 2:



геометрической прогрессии с этим знаменателем (эти члены образуют последовательность, которая монотонно убывая стремится к 0).

При  $a > 0$  множество решений исходного неравенства будет состоять из двух отрезков (при  $a = 1$  они вырождаются в точки). Это множество содержит число 1,7 только для  $a \leq 0,7$ . Для этих значений параметра множество решений исходного неравенства содержит и некоторый промежуток вида  $(0; \varepsilon]$ . Поэтому, если знаменатель  $q$  настолько мал, что число  $b_2 = b_1 q$  попадёт в этот промежуток, то, тем более, и остальные члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии с этим знаменателем попадут в этот промежуток. Таким образом, все значения  $a \leq 0,7$  (и только они) удовлетворяют условию задачи.

Хотя это и не играет никакой роли для решения задачи, отметим, что, при  $0 < a < 1$  множество решений неравенства (2) является объединением отрезков  $[0; 1 - a]$  и  $[a + 1; 2]$ , так что в качестве  $\varepsilon$  можно взять число  $1 - a$ , а  $q$  должно удовлетворять неравенству  $q \leq \frac{1-a}{1,7}$ .

Более формальное решение предложено в [3], стр. 191–196. Мы рекомендуем читателю сопоставить это решение с нашим.

Более подробно о применении описанного метода (его также называют метод координатной плоскости  $(x; a)$ ) можно прочесть в [3], [4].

## Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1** При каких значениях параметра  $b$  уравнение  $||x| + b| = 2^x$  имеет три корня.

**Ответ:**  $b < -1$ ;  $\frac{1+\ln(\ln 2)}{\ln 2} < b < 1$ .

**Задача 2** (Олимпиада "Ломоносов-2005", №8) Найти все значения  $a$ , при которых уравнение  $||x + a| - 2x| - 3x = 7|x - 1|$  имеет не более одного корня.

**Ответ:**  $-6 \leq a \leq 4$ .

**Задача 3** (геологический ф-т МГУ, 2001, май, №7) При каких значениях  $y$  уравнение  $|3x + 6| + |3x - 8| = yx + 12$  имеет единственное решение  $x$ ?

**Ответ:**  $y = -\frac{3}{2}$ ;  $y = 1$ ;  $y \leq -6$ ;  $y \geq 6$ .

**Задача 4** (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы", 2006, очный тур, №3) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $x2^{ax} = 2$  не имеет решений.

**Ответ:**  $a < -\frac{1}{2e \ln 2}$ .

## Список литературы

- [1] Единый государственный экзамен по математике. Демонстрационный вариант КИМ 2009 г. Федеральный институт педагогических измерений, 2008.
- [2] Самые новые реальные задания: ЕГЭ-2009: Математика/ авт.-сост. В.И.Ипина, Л.О.Денищева, Ю.А.Глазков и др. – М.: АСТ: Астрель, 2009 (Федеральный институт педагогических измерений).
- [3] И.Н.Сергеев. ЕГЭ. Математика. Задания типа С. М.: Изд-во "Экзамен", 2009.
- [4] Г.И.Фалин, А.И.Фалин. Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ, Москва, БИНОМ, 2006.