А.Г.Фалин
Г.И.Фалин

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ ФИНАНСОВ И ИНВЕСТИЦИЙ ДЛЯ АКТУАРИЕВ

Москва 2019

А.Г. Фалин, Г.И. Фалин

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ ФИНАНСОВ И ИНВЕСТИЦИЙ ДЛЯ АКТУАРИЕВ

Учебное пособие

Издание второе,
переработанное и дополненое

МАКС ПРЕСС

Москва 2019

УДК 519.7
ББК 22.18
Ф19

Фалин А.Г., Фалин Г.И.

Ф19 **Введение в математику финансов и инвестиций для актуариев**: Учебное пособие**.** – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: МАКС Пресс, 2019 – 359 с., ил. (эл. изд.)

ISBN 978-5-317-06167-8

Книга покрывает наиболее важные разделы программы актуарного квалификационного экзамена по финансовой математике Института Актуариев и Банка России. Основные концепции иллюстрируются с помощью реальных финансовых продуктов. Каждая глава заканчивается набором задач, предлагавшихся на актуарных экзаменах в прошлые годы, с детальными решениями. В соответствии с новым учебным планом 2019 г. Института Актуариев, особое внимание уделяется использованию Microsoft Excel для решения задач по финансовой математике.

Книга предназначена для студентов, изучающих математику, экономику, финансы, которые желают получить квалификацию актуария. Хотя книга содержит достаточно материала для вводного годового курса по финансовой математике, она также может использоваться для семестрового курса.

Ключевые слова: процентные ставки, текущая стоимость, ренты, амортизационный график, уравнение ценности, облигации, доходность к погашению, кривая доходности, арбитраж, форвардные ставки, форвардная цена

УДК 519.7
ББК 22.18

Andrei Falin, Gennady Falin

An Introduction to Mathematics of Finance and Investment for Actuaries

The book covers the most important parts of the syllabus for the actuarial qualification examination in financial mathematics of the Institute of Actuaries and that of Bank of Russia. Basic concepts are illustrated by actual financial products. Each chapter is concluded with a set of problems from the past actuarial exams, all with detailed solutions. According to the new Curriculum 2019 of the Institute of Actuaries, particular attention is paid to the use of Microsoft Excel for solving problems in financial mathematics.

The book is intended for students of mathematics, economics and finance who wish to become a qualified actuary. Although the book contains enough material for an introductory one-year course in financial mathematics, it can also be used for one-semester course.

Key words: rates of interest, present value, annuities, amortization schedule, equation of value, bonds, yield to maturity, yield curve, arbitrage, forward rates, forward price

ISBN 978-5-317-06167-8

© А.Г. Фалин, Г.И.Фалин 2019
© Оформление, издательство ООО «МАКС Пресс», 2019

Оглавление

Предисловие 5

1 Элементарная теория процентных ставок 7
1.1 Договор займа и проценты 7
1.2 Эффективные ставки 11
1.3 Инфляция. Реальные процентные ставки 17
1.4 Простые и сложные проценты 21
1.5 Аннуализация ставок 25
1.6 Время в финансовых вычислениях 32
1.7 Расчёт процентов по вкладу 40
1.8 Непрерывные модели финансовой математики 42
1.9 Задачи 45

2 Оценивание денежных потоков 63
2.1 Текущая стоимость 63
2.2 Текущая стоимость денежного потока 66
2.3 Продолжительность Мако́ли 69
2.4 Ренты 71
2.5 Задачи 91

3 Расписание возврата долга 107
3.1 Общая схема долга 107
3.2 Стандартная схема займа с постоянными выплатами 113
3.3 Примеры банковских предложений по займам 118
3.4 Задачи 125

4 Доходность инвестиционных проектов 141
4.1 Введение 141
4.2 Графическое представление денежного потока 143
4.3 Чистая текущая стоимость 147
4.4 Срок окупаемости 157
4.5 Внутренняя ставка дохода 160
4.6 Эффективность денежных фондов 173
4.7 Задачи 188

5 Облигации 203
5.1 Общее описание облигаций 203
5.2 Купон 216
5.3 Цена облигации 225
5.4 Доходность к погашению 246
5.5 Приближения для доходности к погашению 251
5.6 Задачи 256

6. Зависимость процентных ставок от срока займа 265
6.1 Бескупонные облигации 265
6.2 Кривая доходности 269
6.3 Форвардные ставки 283

6.4 Реальные кривые доходности..... 293
6.5 Задачи..... 305

7. Принцип отсутствия арбитража 313
7.1 Общее описание арбитражной сделки..... 313
7.2 Примеры..... 315
7.3 Дополнительные характеристики арбитража..... 317
7.4 Принцип отсутствия арбитража..... 319
7.5 Расчёт форвардных контрактов..... 320
7.6 Задачи..... 333

Приложение 1. Программа курса CT1 341

Приложение 2. Экзамен по курсу CT1 18 апреля 2017 347

Литература 357

Об авторах 359

Предисловие

Книга посвящена основам математики финансов и инвестиций и простейшим приложениям этой теории. Изложенный материал покрывает практически всю программу профессиональных квалификационных экзаменов по финансовой математике Института и Факультета Актуариев Великобритании (экзамен CT1 «Financial Mathematics»), Общества Актуариев США (экзамен FM «Financial Mathematics») и существенно превышает уровень требований Программы актуарного квалификационного экзамена Центрального Банка РФ в части финансовой математики.

Курс CT1 Института и Факультета Актуариев Великобритании, так же как и аналогичный курс FM Общества Актуариев США, является одним из основных курсов в системе профессиональной подготовки актуария. Он даёт базовую подготовку в области финансовых расчётов: процентные ставки, оценка денежных потоков, доходность инвестиционных проектов, форвардные контракты, простейшие стохастические модели и т.д. Считается, что на изучение этого предмета уходит от 125 до 150 часов самостоятельной работы, что примерно эквивалентно годовому университетскому специальному курсу.

Квалификационные актуарные экзамены (курсы) имеет ярко выраженную практическую направленность и упор делается на выработку твёрдых практических навыков, а не абстрактное изучение теории. Соответственно задачи, предлагаемые на экзамене, непосредственно связаны с проблемами, которые реально приходится решать актуарию, а сам экзамен занимет центральное место в процессе изучения теоретического материала.

В книгу включено и большое число задач реальных квалификационных экзаменов по курсу CT1 с подробными решениями. Все эти задачи играют не просто иллюстративную роль. С их помощью излагаются дополнительные теоретические сведения, в частности, простейшие стохастические модели финансовой математики.

К сожалению, Общество Актуариев не публикует задачи по курсу FM, так что по этому курсу нам удалось найти только несколько задач. Кроме того, в Приложении 2 мы привели полный вариант недавнего (апрель 2017 года) экзамена по курсу CT1 с ответами, а в Приложении 1 – программу этого курса.

Следует отметить, что с 2019 года Институт и Факультет Актуариев вводят новую систему квалификационных экзаменов. Материал, который раньше входил в курс CT1, теперь включён в курс/экзамен «CM1 – Actuarial Mathematics», разделы «1.3 Describe how to use a generalised cashflow model to describe financial transactions» (часть раздела «1. Data and basics of modelling», который составляет 10% курса CM1), «2. Theory of interest rates» (20% курса), «3. Equation of value and its applications» (15% курса) и в курс/экзамен «CM2 – Financial Engineering and Loss Reserving», разделы «3. Stochastic interest rate of

return models» (10% курса), «4.5 Models of the term structures of interest rate» (часть раздела «4. Asset valuations», который составляет 20% курса CM2). Институт и Факультет Актуариев считают, что на изучение курса CM1 требуется 250 часов, а на изучение курса CM2 – 200 часов. Экзамены по этим курсам состоят из двух частей: обычный письменный экзамен (3 час. 15 мин.) и решение двух-трёх сложных задач с помощью Excel на компьютере (1 час. 45 мин.).

В книге мы уделяем значительное внимание реальным финансовым расчётам и, в частности, показываем, как применять для этих целей пакет Microsoft Excel (хотя на квалификационных актуарных экзаменах компьютеры запрещены – можно использовать только калькуляторы; исключение – вторые части экзаменов CM1 и CM2 новой программы Иститута и Факультета Актуариев).

Поскольку работодатели уделяют большое внимание знанию профессионального английского языка, мы приводим английские эквиваленты терминов с их транскрипцией.

При написании книги первый автор, А.Г., отвечал за разделы, посвящённые общим вопросам экономики и финансов, все реальные примеры и все расчёты, включая вычисления при решении задач и разделы, посвящённые применению Microsoft Excel. Второй автор, Г.И., отвечал за те разделы книги, которые требовали применения методов математического анализа и теории вероятностей.

Книга может служить основой годового курса по финансовой математике для студентов экономико-математических специальностей, интересующихся актуарной математикой, страхованием, финансовыми расчётами. Она также будет полезна актуариям, которые захотят повысить свой профессиональный уровень и получить общепризнанную актуарную квалификацию.

Мы были бы признательны читателям за отзывы и пожелания по поводу книги, которые просим направлять: первому автору по электронной почте *falin.ins@gmail.com*; второму автору обычной почтой по адресу: 119992 Москва, МГУ им.М.В.Ломоносова, механико-математический факультет.

А.Г.Фалин
Г.И.Фалин *27 декабря 2018 г.*

Глава 1
Элементарная теория процентных ставок

1.1 Договор займа и проценты

Элементарная финансовая математика имеет дело с займами (loan [ləun]) в той или иной форме. Простейший *договор займа* (loan agreement) можно описать следующим образом (см. рис. 1.1). В некоторый момент времени t_0 «одна сторона (займодавец) передаёт в собственность другой стороне (заёмщику) деньги…, а заёмщик обязуется возвратить займодавцу такую же сумму денег (сумму займа)…» через некоторый промежуток времени h, т.е. в момент времени $t_1 = t_0 + h$. В соответствии с общепринятой коммерческой практикой «займодавец имеет право на получение с заёмщика процентов на сумму займа…»[1].

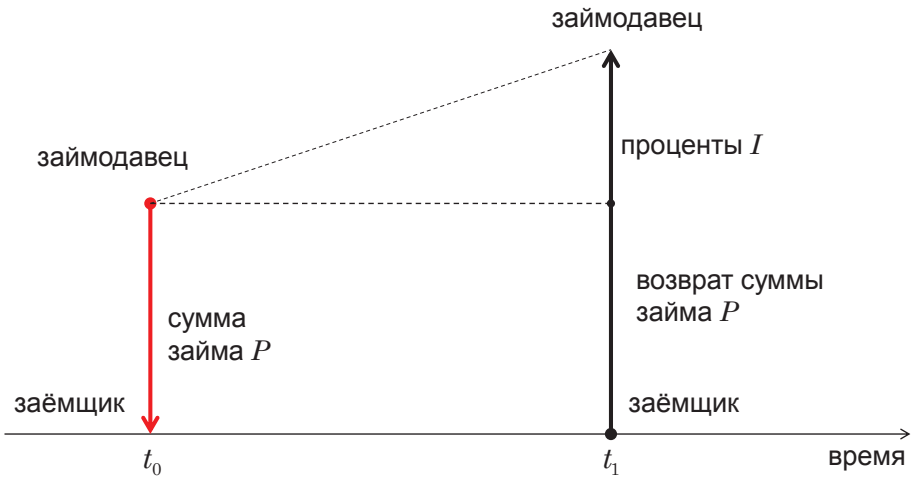


Рис. 1.1

Таким образом, *займодавец* (lender ['lendə]) (предприятие, банк и т.д), который дал *заёмщику* (borrower ['bɔrəuə]) в долг сумму P, в момент возврата долга (debt [det]) может рассчитывать не только на возврат *суммы займа* P (её называют и *основной суммой* или *капиталом* (principal ['prɪnsɪp(ə)l]), но и на

[1] В кавычках мы привели дословно текст из статей 807 (Договор займа) и 809 (Проценты по договору займа) Гражданского Кодекса Российской Федерации, часть 2, Глава 42 (Заём и кредит), § 1 (Заём).

получение дополнительной суммы I – она и называется *процентами*[2] (interest ['ɪnt(ə)rɪst]-UK, ['ɪnt(ə)rəst]-US) или *процентным доходом* (interest income ['ɪŋkʌm]). Сумму $A = P + I$, полученную при возврате займа, мы будем называть *накоплением* (accumulation [əˌkjuːmjə'leɪʃ(ə)n]).

Процентный доход I является наградой займодавцу за использование принадлежащих ему средств, а также учитывает постоянное уменьшение ценности денег из-за инфляции.

Но нельзя упускать из виду ещё одно, *исключительно* важное, обстоятельство. Пока у займодавца есть деньги, он ничем не рискует (если не считать угрозу ограбления и тому подобные ужасы). Как только он внёс деньги на свой банковский счёт, купил облигации и т.д., денег у него больше нет. У него есть только несколько листов бумаги, на которых напечатано, что заёмщик «гарантирует» возврат полученного капитала и процентов по нему. Но что означает слово «гарантирует»? Ведь заёмщик берёт в деньги в долг потому, что сейчас у него денег нет (есть только необходимость финансировать какие-то текущие расходы), но в будущем он рассчитывает получить доход и возвратить взятую в долг сумму вместе с процентами. Но полностью быть уверенным в получении средств в будущем нельзя. Кроме того, нельзя исключить разорение заёмщика или злой умысел с его стороны. Риск того, что заёмщик не сможет вернуть долг или проценты полностью, называется *кредитным риском* (credit ['kredɪt] risk) или *риском дефолта* (default [dɪ'fɔːlt] risk; от default – невыполнение обязательств). Проценты одновременно являются и платой за этот риск, причём чем выше риск, тем больше *обещанные* проценты. Соответственно, чем больше проценты, которые *обещает* выплатить заёмщик, тем выше риск для займодавца, что он не только не получит обещанные проценты, но может потерять и вложенный капитал. Иначе говоря, когда вы вкладываете деньги в проект, который *обещает* высокий доход, вы должны понимать, что это обещание *одновременно* является и предупреждением: «*есть риск потери всего*». Поэтому человек, потерявший деньги при попытке получить большой доход, не должен жаловаться – ведь его предупреждали.

Кредитный риск можно уменьшить, если договор займа как-то *гарантирует* (secure [sɪ'kjuə]) возврат основной суммы долга и процентов. Такой гарантией может служить предоставление заёмщиком *залога* (pledge [pledʒ], collateral [kə'læt(ə)r(ə)l]), на который в случае неисполнения должником обязательств по договору займа кредитор может обратить взыскание. Залогом может быть имущество (например, квартира, автомобиль), ценные бумаги и т.д. В этом случае мы говорим об *обеспеченной ссуде* (secured [sɪ'kjuəd] loan). Возврат

[2] В финансовой математике, излагаемой на русском языке, термин «проценты» используется также для обозначения процентной ставки (rate of interest – мы будем о ней говорить позже) и собственно процентов (percent-US, per cent-UK [pə(r)'sent]), т.е. сотых долей.

необеспеченного долга (unsecured [ˌʌnsɪ'kjuəd] debt) «гарантируется» только кредитоспособностью заёмщика и его общей репутацией.

Выше мы говорили о займе. Договор займа может быть оформлен выдачей простого векселя, выпуска и продажи облигаций, с помощью кредитного договора. Похожая ситуация возникает и при открытии банковского депозита, инвестировании средств в торговый или промышленный проект и т.д. При всей схожести этих инструментов (особенно с формально-математической точки зрения), юридическая суть взаимоотношений сторон меняется. Меняется и используемая терминология.

Банковский вклад. С банковскими вкладами из своего повседневного опыта знаком практически каждый человек. Глава 44 «Банковский вклад» ГК РФ описывает это понятие и связанные с ним довольно подробно. Статья 834 «Договор банковского вклада» говорит:

«По договору банковского вклада (депозита) одна сторона (банк), принявшая поступившую от другой стороны (вкладчика) или поступившую для неё денежную сумму (вклад), обязуется возвратить сумму вклада и выплатить проценты на неё на условиях и в порядке, предусмотренных договором.»

Таким образом, в случае *банковского вклада* в роли займодавца выступает вкладчик/клиент банка (depositor [dɪ'pɔzɪtə] /customer ['kʌstəmə]), в роли заёмщика – банк, сумма займа – это сумма вклада.

В нашей книге мы часто будем использовать банковские вклады, чтобы пояснять общую теорию практическими примерами. Скажем, введённые выше понятия и обозначения можно проиллюстрировать с помощью следующих рекламных предложений Сберегательного банка РФ от 31 марта 2015 года.

Предложение 1. Если 31 марта 2015 открыть вклад «Сохраняй» (по этому вкладу не разрешается пополнение или частичное снятие средств) на срок $h=30$ дней на сумму $P=100000.00$ руб., то 30 апреля 2015 вкладчик получит сумму $A=100768.49$ руб. (это накопление). Соответственно процентный доход $I=768.49$ руб.

Предложение 2 (вклад «Сохраняй» с ежемесячной капитализацией процентов). Срок вклада $h=731$ день (2 года; дата открытия вклада 31 марта 2015, дата окончания вклада 31 марта 2017), сумма вклада $P=100000.00$ руб., доход $I=18486.83$ руб., накопление $A=118486.83$ руб.

Предложение 3 (сберегательный сертификат). Срок $h=731$ день (2 года; дата оформления 31 марта 2015, дата погашения 31 марта 2017), сумма (номинал) $P=100000.00$ руб., доход $I=22530.82$ руб., накопление $A=122530.82$ руб.

Рассмотрим эти примеры банковских продуктов Сбербанка чуть подробнее. На 31 мая 2015 года вклады до 1 млн. 400 тыс. руб. в банках-участниках системы страхования вкладов гарантированы государством (которое всегда может напечатать нужное количество банкнот и выполнить свои обязательства). В этом смысле по предложениям 1 и 2 нет риска невыполнения

обязательств. Сберегательный сертификат Сбербанка – это ценная бумага, оформленная на предъявителя (Сбербанк не выпускает именные сертификаты), которая не участвует в системе страхования вкладов. Поэтому и доход по нему выше (примерно на 4 тыс. руб.), чем по аналогичному вкладу «Сохраняй». Отметим, что в этот день для некоторых других сроков и/или сумм ситуация была прямо противоположной.

Кредитный договор. Статья 819 «Кредитный договор» ГК РФ определяет кредитный договор как соглашение между банком или иной кредитной организацией (кредитором), в соответствии с которым кредитор обязуется «предоставить денежные средства (кредит) заёмщику в размере и на условиях, предусмотренных договором, а заёмщик обязуется возвратить полученную денежную сумму и уплатить проценты на неё.»

В этом случае займодавец (банк или другая кредитная организация) называется кредитором (creditor ['kredɪtə]), а сумма займа – кредитом (credit ['kredɪt]). Для потребительских кредитов сумма займа P и проценты I обычно возвращаются не единовременной выплатой суммы $A = P + I$, а серией из нескольких выплат в разные моменты времени.

Кредитам посвящена Глава 3 нашей книги.

Вексель. *Простой вексель* (promissory ['prɔmɪs(ə)rɪ] note) – это ценная бумага точно установленной формы, удостоверяющая обязательство *векселедателя* выплатить законному владельцу векселя (*векселедержателю*) в указанный срок определённую *вексельную сумму* F (*погасить* вексель). Таким образом, в случае простого векселя заёмщиком является векселедатель (maker ['meɪkə]), в роли займодавца выступает векселедержатель, сумма займа – это вексельная сумма. Векселя активно используются для оплаты за товары и услуги. Отечественные банки используют простые векселя для привлечения средств частных лиц и организаций. Важно отметить, что в отличие от вкладов, средства физических лиц, размещённые в бановские векселя, не застрахованы.

Владелец векселя может передать его другому лицу, которое становится новым векселедержателем. Для этого необходимо на обороте векселя сделать передаточную надпись; в вексельном праве она называется *индоссамент* (endorsement [ɪn'dɔːsmənt]).

Если владельцу векселя нужны деньги до срока погашения векселя, он может обратиться в банк с предложением купить вексель с тем, чтобы позже банк сам получил указанную в векселе сумму F. Покупка векселя банком (или другим лицом) называется *учётом* векселя. Очевидно, что банк за учёт векселя потребует определённую скидку D от номинала F, т.е. заплатит за вексель сумму $P = F - D$. Погашен вексель будет в установленное время по номиналу, что и принесёт банку доход в размере D. Разница $D = F - P$ между номиналом беспроцентной ценной бумаги и ценой называется *дисконт* (от английского discount ['dɪskaunt] – «уменьшение обычной цены; скидка»).

В силу большой важности векселей для международной торговли 7 июня 1930 г. в Женеве была заключена «Конвенция о Единообразном Законе о

переводном и простом векселе». Приложение 1 к Конвенции содержит «Единообразный Закон о переводном и простом векселе», который детально регулирует все вопросы, связанные с векселями. Советский Союз присоединился к Конвенции 25 ноября 1936 г. и 7 августа 1937 г. Постановлением Центрального Исполнительного Комитета и Совета Народных Комиссаров СССР №104/1341 было введено в действие «Положение о переводном и простом векселе», которое практически дословно воспроизводит «Единообразный Закон». В соответствии со Статьёй 815 «Вексель» ГК РФ и Федеральным Законом от 11 марта 1997г. №48-ФЗ «О переводном и простом векселе» это Положение действует и сейчас.

Облигация. Статья 816 «Облигация» ГК РФ устанавливает, что «…договор займа может быть заключен путем выпуска и продажи *облигаций*. Облигацией признается ценная бумага, удостоверяющая право её держателя на получение от лица, выпустившего облигацию, в предусмотренный ею срок *номинальной стоимости* облигации … Облигация предоставляет её держателю также право на получение фиксированного в ней *процента* от номинальной стоимости облигации …». В случае облигаций процентные выплаты обычно производятся через каждые 6 или 12 месяцев, до момента её погашения (когда выплачивается и номинальная стоимость облигации). Как правило, облигация может быть продана другому лицу. Поэтому, когда держателю облигации нужны наличные деньги, теоретически он без труда может их получить. Цены облигаций постоянно меняются в зависимости от рыночных условий и при перепродаже облигаций инвестор может как заработать, так и потерять.

В случае облигации (bond) займодавец – это фактически держатель облигации (bondholder ['bɔnd͵həuldə]), заёмщик – это эмитент (issuer ['ɪʃuːə], ['ɪsjuːə]), сумма займа – это номинальная стоимость облигации F (face value или par [pɑː] value). Облигациям посвящены Глава 6 и 7 нашей книги.

1.2 Эффективные ставки

1.2.1 Эффективная процентная ставка

В реальной жизни ни одна величина не может быть охарактеризована только своим *абсолютным* значением (т.е. значением, измеренным в обычных для этой величины единицах: рублях, литрах, метрах и т.д.). Важно знать и её *относительное* значение, т.е. значение по отношению к некоторой другой аналогичной величине (базе сравнения):

$$\text{относительное значение} = \frac{\text{абсолютное значение}}{\text{база сравнения}}.$$

Инвестиционный доход I выражается в денежных единицах (в зависимости от ситуации, в рублях, долларах, евро, фунтах и т.д.). Поэтому его

можно назвать *абсолютным* инвестиционным доходом. Чтобы понять, является ли он большим или нет, естественно сравнивать его с величиной основного капитала P. Относительный доход

$$i = \frac{I}{P}, \tag{1.1}$$

когда базой сравнения является размер исходных инвестиций P, называется *эффективной*[3] *процентной ставкой* (the effective [ɪ'fektɪv] rate of interest) *за рассматриваемый промежуток времени* $[t_0; t_1]$. Часто эффективную процентную ставку называют процентной ставкой или, ещё короче, процентами. В последнем случае есть опасность спутать проценты-interest с процентами-rate of interest. В английской литературе используется и термин rate of return[4] (ROR) – *ставка дохода*.

Если задана эффективная процентная ставка i, то при известном размере основного капитала P процентный доход в абсолютных единицах равен

$$I = iP. \tag{1.2}$$

Важно подчеркнуть необходимость явного указания промежутка времени, к которому относится эффективная ставка $i = \frac{I}{P}$. Если это один год, то ставку называют *годовой* (annual ['ænjuəl]; это слово происходит латинского annus ['anəs] «год»), если полугодие – *полугодовой* (semi-annual), если квартал – (*еже*)*квартальной* (quarterly ['kwɔːt(ə)lɪ]), если месяц – (*еже*)*месячной* (monthly ['mʌnθlɪ]), если один день – *дневной* или *суточной* (daily ['deɪlɪ]). Займы на один день часто размещаются в конце дня с условием возврата утром следующего рабочего дня, т.е. на ночь – overnight [ˌəuvə'naɪt]. По этой причине их называют overnight money, а соответствующую эффективную процентную ставку effective overnight rate. В отечественной банковской практике такие займы называют *депозиты овернайт*.

Для удобства сравнения эффективные ставки для всех промежутков времени приводят к годовой основе. Сделать это можно разными способами; позже мы подробно расскажем об этом. В англоязычной финансовой литературе для перехода к годовой основе используют термин annualize ['ænjʊəˌlaɪz], в отечественной – *аннуализировать*. Если переход к годовой основе не сделан, то ставку называют *неаннуализированной* (unannualized rate of return).

Термины «овернайт», «аннуализировать», «неаннуализированная» были получены простым записыванием русскими буквами соответствующих

---

[3] «Эффективной» значит «реальной», в отличие от номинальных процентных ставок, о которых мы будем говорить позже. Английское слово effective переводится как «действительный, действующий, имеющий силу».

[4] Вообще, rate означает величину, измеренную по отношению к другой величине, и в зависимости от контекста rate переводится как «скорость, интенсивность, ставка, тариф, цена». Слово return [rɪ'təːn] обычно переводится как «возвращение, возврат, возвращаться», но в экономическом контексте – как «доход».

английских терминов, причём их звучание искажено, чтобы слово походило на русское. В результате подобного «перевода» с английского в отечественной профессиональной литературе появились и многие другие финансовые и экономические термины. Это в общем-то и неудивительно, т.к. «финансовый сектор экономики» в России появился совсем недавно, причём создавался он под непосредственным влиянием (если не сказать контролем) международных финансовых институтов и продолжает на них ориентироваться. В этой ситуации разумно просто использовать английские термины; часто мы так и будем поступать.

Непосредственное применение определения приводит к записи процентной ставки в виде простой дроби. Эту дробь можно записывать и в виде десятичной дроби. Но в финансах принято записывать эти дроби в виде процентов. Важно только понимать, что $1/4$, 0.25, 25% – это три равноценных способа записи одного и того же числа. При выполнении вычислений обычно удобнее использовать десятичные дроби. Если процентная ставка выражена десятичной дробью, то она показывает доход на 1 вложенный рубль, а если процентами – то на 100 вложенных рублей (в слове percent приставка per [pɜ:] переводится как «из расчёта, в, на», так что percent = per cent буквально означает «на сотню»).

Если сравниваются процентные ставки для сходных финансовых инструментов или процентные ставки для одного инструмента в разные моменты времени, то разница между этими процентными ставками обычно очень мала. Потому её измеряют в сотых долях процента. Эту величину называют *базисным пунктом* (basis point – BPS). Если, например, годовая процентная ставка по депозитам была 7.5%, а стала 8%, то говорят, что она увеличилась на 50 базисных пунктов. Ещё одно преимущество использования этого понятия заключается в следующем. Допустим, что доходность одного проекта 20%, а второго – на 5% больше. Эту фразу можно понимать двояко:

1. доходность второго проекта равна $20\% + 5\% = 25\%$;
2. доходность второго проекта равна $20\% \cdot 1.05 = 21\%$.

Использование базисных пунктов позволяет исключить эту неопределённость. В первом случае нужно просто сказать, что у второго проекта доходность на 500 базисных пунктов больше. Если же имеется в виду второй случай, то нужно сказать, что у второго проекта доходность больше на 100 базисных пунктов.

В некоторых случаях и процентные ставки указываются в базисных пунктах (например, доходность бескупонных облигаций при расчёте кривой доходности в соответствии с «Методикой расчета Кривой бескупонной доходности по государственным ценным бумагам» Московской биржи).

В качестве иллюстрации рассчитаем эффективные процентные ставки для приведённых в разделе 1.1 примеров банковских продуктов Сбербанка.

Предложение 1: $i = \dfrac{768.49}{100000} = 0.76849\% \approx 0.77\%$

Предложение 2: $i = \dfrac{18486.83}{100000} = 18.48683\% \approx 18.49\%.$

Предложение 3: $i = \dfrac{22530.82}{100000} = 22.53082\% \approx 22.53\%.$

Несколько дополнительных примеров. Сберегательный банк РФ 31 марта 2015 года предлагал следующие эффективные процентные ставки по вкладу «Сохраняй» с капитализацией процентов на срок 1 год:

8.41% при $1 \le P < 100$ (тыс.руб.),

8.57% при $100 \le P < 400$ (тыс.руб.),

8.73% при $400 \le P < 700$ (тыс.руб.),

8.95% при $P \ge 700$ (тыс.руб.).

Таким образом, увеличении суммы вклада с 99 тыс. руб. до 100 тыс. руб. (при фиксированном сроке вклада) обеспечивало увеличение процентной ставки на 16 базисных пунктов. Если этот вклад открыт пенсионером, то независимо от суммы вклада эффективная процентная ставка равна 8.95%.

Росбанк 31 марта 2015 года предлагал аналогичный вклад под названием «150 лет надёжности». Для него при сроке вклада 1 год эффективные процентные ставки выше:

12.30% при 15 тыс.руб. $\le P <$ 1 млн.руб.,

12.40% при 1 млн.руб. $\le P <$ 4 млн.руб.,

12.50% при $P \ge$ 4 млн.руб.

Эти примеры ясно показывают, что процентные ставки зависят от многих факторов. Даже для такого относительно простого инвестиционного проекта как банковский вклад процентная ставка зависит от надёжности и репутации банка, срока вклада, суммы вклада, открыт ли вклад пенсионером, открыт ли вклад в отделении банка или через интернет/банкомат, разрешается ли пополнение вклада или частичное снятие средств, и т.д. В гл.1-5 мы, как правило, будем считать, что процентные ставки постоянны. Более сложная теория, описывающая зависимость процентных ставок от времени (term structure of interest rates), будет рассмотрена в гл.6.

Процентные ставки, которые используются в актуарной математике и при оценке инвестиционных проектов, определяются на основе консервативных предположений о доходности инвестиций в будущем. Эти ставки существенно ниже реальных ставок, предлагаемых на финансовом рынке и обычно считаются постоянными. Связано это с тем, что роль процентных ставок в актуарной математике и при оценке инвестиций заключается прежде всего в том, чтобы учесть изменение ценности денег с течением времени. Чтобы подчеркнуть этот факт, например, в актуарной математике соответствующие процентные ставки называют *техническими* или *актуарными*. На самом деле страховые компании получают гораздо бóльшие проценты от инвестиций; более того, это один из основных источников их дохода.

1.2.2 Эффективная учётная ставка

Часто ценные бумаги, удостоверяющие долг, такие как дисконтные векселя, облигации с нулевым купоном, гарантируют только выплату указанной в них суммы F (номинальной стоимости) и не предусматривают выплату процентов. Чтобы их владельцы получили доход, продаются они по цене P, которая ниже номинала F, т.е. с дисконтом $D = F - P$. Гасятся эти бумаги в установленное время по номиналу, что и приносит доход инвестору в размере D.

Ясно, что дисконт, в сущности, является процентным доходом (цена P играет роль вложенного капитала, а номинал F – накопления). Если бы мы измеряли его по отношению к цене, т.е. вычисляли бы дробь $\frac{D}{P} \equiv \frac{F-P}{P}$, то получили бы процентную ставку i.

Однако принято измерять абсолютный дисконт $D = F - P$ не по отношению к цене (как при определении процентной ставки), а по отношению к номиналу. Отношение $\frac{D}{F} = 1 - \frac{P}{F}$ называется *эффективной учётной ставкой* или учётным процентом, ставкой дисконта (discount rate) и обозначается d:

$$d = \frac{D}{F}. \tag{1.3}$$

При заданном значении учётной ставки цена актива номином F равна

$$P = F - D = F(1-d). \tag{1.4}$$

Поскольку $\frac{P}{F} = 1 - d$, $\frac{F}{P} = 1 + i$, верно равенство $(1-d)(1+i) = 1$, откуда

$$i = \frac{d}{1-d}, \qquad d = \frac{i}{1+i}. \tag{1.5}$$

1.2.3 Возможные значения процентной и учётной ставок

Поскольку инвестиционный доход I может быть любым положительным числом, бóльшим, чем сумма первоначальных инвестиций P, эффектиная процентная ставка $i = I/P$ может принимать (теоретически) любое положительное значение. Не исключено, конечно, что доход I равен 0. Соответственно, и процентная ставка равна 0. Более того, возможна и ситуация, когда «накопление» A меньше, чем P. Это означает, что вместо дохода мы потеряли деньги, или, что то же самое, получили отрицательный доход: $I < 0$. В этом случае процентная ставка будет отрицательным числом. Однако, это число не может принимать произвольное отрицательное значение. В наихудшем случае, когда проект привёл к потере всей инвестированной суммы, «накопление» $A = 0$. Соответственно, «доход» равен $-P$, а тогда процентная

ставка равна $\frac{-P}{P} = -1$ – это минимально возможное её значение. Случай $i < -1$ означает, что $A < 0$, т.е. что кредитор оказался должен человеку, которому он дал денег в долг. Конечно, такая ситуация невозможна.

Возможные значения эффективной учётной ставки понятны из соотношения $d = \frac{i}{1+i}$. График зависимости d от i показан на рис.1.2. При изменении i на промежутке $(-1;+\infty)$ эффективная учётная ставка монотонно возрастает. Положительным значениям процентной ставки соответствуют положительные значения учётной ставки, причём бесконечно большой доходности соответствует учётная ставка близкая к 1; в этом случае дисконт D практически равен номиналу F, т.е. ценная бумага приобретается практически по нулевой цене. Отрицательным значениям процентной ставки соответствуют отрицательные значения учётной ставки. В этом случае дисконт D отрицателен, т.е. ценная бумага приобретается по цене $P = F - D$, которая больше номинала. причём потере капитала ($i = -1$) соответствует учётная ставка $d = -\infty$.

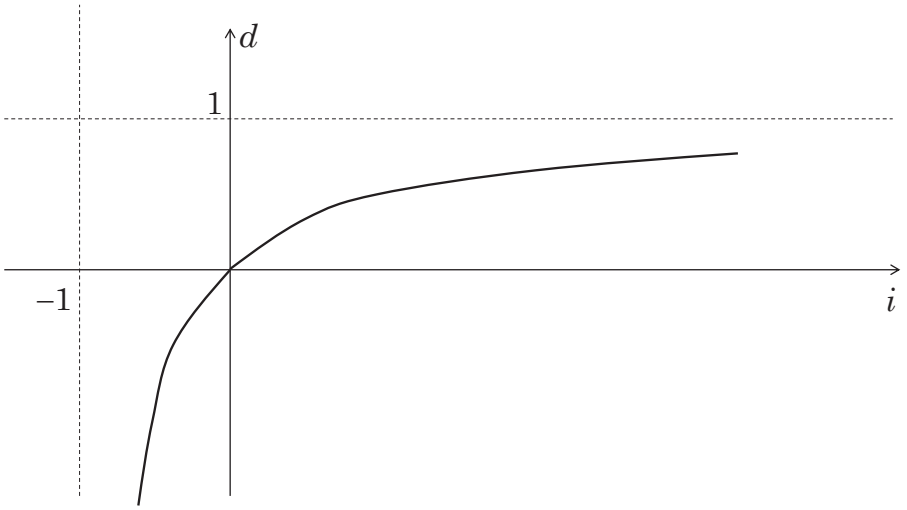


Рис. 1.2

1.2.4 Коэффициент накопления

Из (1.2) ясно, что накопление $A = P + I$, можно найти по формуле:

$$A = (1+i) \cdot P \equiv kP, \tag{1.6}$$

где $k = 1 + i$. Коэффициент k называют *коэффициентом накопления* (accumulation factor ['fæktə]). Он может принимать лишь неотрицательные значения. При этом только значения k, бóльшие 1, означают положительность процентной ставки i, т.е. доход.

1.2.5 Округление при финансовых вычислениях

Денежные суммы выражаются целым количеством копеек (центов, пенсов и т.д.). Но даже если сумма P является целым числом, а процентная ставка i – конечной десятичной дробью, размер процентов $I = iP$ и накопления $A = (1+i)P$ может и не быть целым числом. Например, если $P = 147$ рублей, $i = 3.5\%$, то $A = 152.145$ рублей, т.е. 152 рубля, 14 копеек и половина копейки, которая не существует. Более сложные финансовые вычисления могут привести к денежным суммам, которые выражаются иррациональными действительными числами.

Простейшая коммерческая практика заключается в том, что эти суммы округляют с недостачей до целых копеек, т.е. просто отбрасывают доли копеек. Банки обычно округляют по стандартному правилу – до ближайшего целого количества копеек, центов и т.п. В теоретических рассмотрениях удобно предположить, что денежные суммы могут выражаться любым действительным числом.

При выполнении вычислений в Excel округлять денежные суммы до целых копеек с недостачей можно с помощью функции ОКРУГЛВНИЗ(число,2) (в русской версии) или ROUNDDOWN(число,2) (в английской версии). При округлении до целых копеек по обычному правилу можно использовать функцию ОКРУГЛ(число,2) (в русской версии) или ROUND(число,2) (в английской версии).

В последующем мы будем затрагивать этот вопрос при изучении более сложных разделов финансовой математики.

1.3 Инфляция. Реальные процентные ставки

Инфляцией[5] называют общий рост цен на товары и услуги и связанное с этим падение покупательной способности денег. В условиях высокой инфляции реальная ценность будущих денежных потоков (процентов по займам, суммы займа в момент его погашения и т.п.) падает. Это вынуждает инвесторов повышать процентные ставки, что приводит к увеличению расходов на ведение бизнеса. Из-за высоких розничных цен потребители покупают меньше товаров и услуг, что, в свою очередь, заставляет сокращать производство и приводит к росту безработицы.

Возможна и противоположная ситуация – общее уменьшение уровня цен. В этом случае говорят о дефляции[6]. Для потребителей, имеющих деньги, дефляция выгодна, т.к. они могут купить больше товаров и услуг. Однако обычно дефляция связана со спадом в экономике и ростом безработицы. Если не

---

[5] inflation [ɪnfleɪʃ(ə)n] – буквально: «надувание, накачивание воздухом или газом».

[6] deflation [dɪ'fleɪʃ(ə)n] – буквально означает «выпускание воздуха, газа» (tire deflation – спуск шины)

вдаваться в детали, то можно сказать, что наилучшим вариантом является небольшая инфляция (около 1-2% в год).

Информацию об уровне инфляции в Российской Федерации собирает и публикует Федеральная служба государственной статистики (http://www.gks.ru, →официальная статистика→цены). В Великобритании этим занимается Управление национальной статистики (Office for National Statistics – ONS, http://www.ons.gov.uk/, →Economy, →Inflation and price indices).

Объективное численное измерение инфляции является очень сложной задачей: цены на разные товары и услуги растут в разной степени, разные группы населения потребляют разные товары и услуги и в разных пропорциях, совсем другие цены интересуют предприятия торговли и производственные компании, государство в политических целях заинтересовано в занижении инфляции. Дополнительные сложности связаны с тем, что рост цен на какой-то вид товаров или услуг может быть связан с существенным улучшением их качества и потребительских свойств, усреднять изменение цен на отдельные товары услуги для получения одного числа можно разными способами т.д. Для численного измерения инфляции, в зависимости от цели такой оценки, используют несколько разных показателей, которые называют *индексами цен* (price index/indices).

В России основным показателем уровня инфляции является индекс потребительских цен (ИПЦ). Для численного измерения инфляции в промышленности используют индекс цен производителей промышленных товаров, индекс тарифов на грузовые перевозки и т.д.

В Великобритании основным является Индекс потребительских цен (Consumer Prices Index – CPI). Он появился в январе 1996 года под именем Согласованный индекс потребительских цен (Harmonised Index of Consumer Prices – HICP). Использовавшийся многие годы (с июня 1947 года) в качестве основной официальной меры инфляции индекс розничных цен (Retail Prices Index – RPI) в 2007 году был признан не соответствующим современным стандартам для использования в качестве национальной статистики. Тем не менее ONS продолжает его рассчитывать, а правительство и частные компании в ряде случаев используют этот индекс. Кроме того, рассчитывается и публикуется большое число других индексов: CPIH (новый индекс потребительских цен, учитывающий стоимость жилья; впервые был рассчитан в 2013 году), RPIJ (улучшенный в соответствии с международными стандартами вариант RPI), House Price Index (индекс цен на жильё), Producer Price Index (PPI – индекс цен производителей) и пр.

Показывать рост цен можно двумя способами:

Цепной метод. При этом методе цены в заданный месяц и год сравниваются с ценами в предыдущий месяц (или другой момент в прошлом). Поэтому абсолютного значения индекса нет. Например, индекс потребительских цен в РФ в январе 2015 года по отношению к декабрю 2014 года был равен 103.9%. Это означает, что по сравнению с декабрём 2014 года стоимость

анализируемой корзины товаров и услуг за месяц выросла на 3.9% – это число называют уровнем инфляции за месяц (1-month inflation rate). Чтобы понять изменение цен за несколько месяцев (или за год), нужно перемножить значения индекса за соответствующие месяцы. Например, индекс цен в январе 2015 года по отношению к январю 2014 года был равен 115.0. Это означает, что по сравнению с январём 2014 года стоимость анализируемой корзины товаров и услуг за год выросла на 15% (хотя на отдельные виды товаров и услуг рост мог быть больше или меньше). Это число обычно называют годовой инфляцией или уровнем инфляции за год (12-month inflation rate, annual rate of inflation) и обозначают f.

Базисный метод. При этом методе текущие цены (цены в заданный месяц и год) сравниваются с ценами в некоторый базисный момент. Чтобы понять изменение цен за период $[t_0;t_1]$ нужно значение индекса в момент t_1 разделить на значение индекса в момент t_0. Например, в феврале 2015 года (момент t_0) британский CPI был равен $S_0 = 99.5$, а в феврале 2016 года (момент t_1) составил $S_1 = 99.8$. Поэтому за этот период стоимость анализируемой корзины товаров и услуг выросла в $\frac{S_1}{S_0} = \frac{99.8}{99.5} \approx 1.003$ раз. Иначе говоря, годовая инфляция (12-month inflation rate) $f \approx 0.3\%$. В январе 1988 года $\mathrm{CPI} = 48.4$, так что за почти 30 лет цены выросли немного больше, чем в 2 раза.

В Российской Федерации используют цепной метод, в Великобритании и других странах со стабильной экономикой – базисный. Если бы в отечественной ситуации использовался базисный метод, то значения индекса были бы астрономическими.

Базисный метод, так же как и цепной, показывает не уровень цен, а их изменение. Отличие заключается в том, что в цепном методе база сравнения постоянно меняется (обычно это предыдущий месяц или предыдущий год), а базисном фиксирована. На самом деле в базисном методе база сравнения тоже меняется, но редко. С января 2016 года для CPI в качестве базисного принят июль 2015 года $(\mathrm{CPI} = 100)$; до этого базисным был 2005 год. Поэтому, например, сейчас значение CPI для ноября 2015 года равно 100.3, хотя в опубликованном 15 декабря 2015 года статистическом бюллетене ONS в качестве значения CPI для ноября 2015 года указано число 128.3.

После этого общего описания методов измерения инфляции вернёмся к процентным ставкам. Если необходимо принять в расчёт инфляцию, то определённую выше процентную ставку называют *денежной* (money interest rate) или, реже, *номинальной* (nominal interest rate) (обычно термин «номинальная процентная ставка» употребляется в другом смысле). Процентную ставку, учитывающую инфляцию, называют *реальной* (real interest rate).

Предположим, что (реальная или прогнозируемая) инфляция за некоторый промежуток времени $[t_0;t_1]$ равна f. Это означает, что сумма S_0 в начале этого промежутка имеет ту же покупательную способность, что и сумма $S_1 = S_0(1+f)$ в его конце. Другими словами, суммы $S_1 = S_0(1+f)$ в момент t_1 и $S_0 = \dfrac{S_1}{1+f}$ в момент t_0 эквивалентны с точки зрения объёма товаров и услуг, которые на них можно приобрести (величины S_0 и S_1 можно рассматривать как индексы цен в начале и в конце рассматриваемого промежутка времени соответственно). Если в начале промежутка $[t_0,t_1]$ мы поместим в банк сумму P и по этому вкладу эффективная процентная ставка за период $[t_0,t_1]$ равна i, то в момент t_1 мы получим номинальную денежную сумму $A = P(1+i)$. С точки зрения реальной покупательной способности эта сумма равносильна сумме $\dfrac{A}{1+f}$ в момент t_0. Поэтому реальный, очищенный от инфляции, доход (в деньгах начала промежутка $[t_0,t_1]$) равен $\dfrac{A}{1+f} - P = \dfrac{P(i-f)}{1+f}$. Соответственно, реальная, очищенная от инфляции, эффективная процентная ставка за рассматриваемый промежуток времени, i_{real}, равна $\dfrac{i-f}{1+f}$. Например, если годовая инфляция составляет $f = 9\%$, а депозит приносит $i = 7\%$ годовых, то реальная доходность этого депозита равна $\dfrac{i-f}{1+f} = \dfrac{0.07-0.09}{1+0.09} \approx -1.8\%$ годовых. Если f – малое число, то число $1+f$ близко к 1 и потому $\dfrac{i-f}{1+f} \approx i-f$, т.е. для расчёта реальной процентной ставки i_{real} нужно из обычной денежной процентной ставки i вычесть ставку инфляции. В экономике формулу

$$i_{\text{real}} = \frac{i-f}{1+f} \tag{1.7}$$

часто называют формулой Фишера[7].

Если вместо уровня инфляции рассматривать индексы цен в начале и конце промежутка $[t_0,t_1]$ (так что $1+f = S_1/S_0$), то формула Фишера примет вид:

$$i_{\text{real}} = \frac{(1+i)S_0 - S_1}{S_1}. \tag{1.8}$$

Формула Фишера может применяться и в случае дефляции. В этом случае параметр *f* является отрицательным числом.

[7] Irving Fischer (27/02/1867–29/04/1947) – американский экономист.

1.4 Простые и сложные проценты

Предположим, что сумма P инвестирована на два последовательных промежутка времени: $[t_0,t_1]$ и $[t_1,t_2]$, причём заданы эффективные процентные ставки для этих промежутков, i_1 и i_2 соответственно. Пусть $k_1=1+i_1$ и $k_2=1+i_2$ – соответствующие коэффициенты накопления. Чтобы вычислить процентный доход на объединённом промежутке времени $[t_0,t_2]$, необходимо принять дополнительное соглашение о порядке начисления процентов. В финансовой практике приняты две основные схемы – принцип простых процентов и принцип сложных процентов.

1.4.1 Простые проценты

В соответствии с принципом *простых процентов* (simple interest) проценты начисляются только на основную сумму P. Поэтому рост денег будет происходить следующим образом. На первом промежутке времени $[t_0,t_1]$ будут начислен процентный доход $I_1=i_1P$. Однако начисленные проценты (accrued [ə'kru:d] interest) не добавляются к основному капиталу P и потому на втором промежутке времени проценты будут начисляться только на основной капитал P; на проценты, заработанные на первом промежутке времени, новые проценты начисляться не будут. Таким образом, процентный доход за второй промежуток времени будет равен $I_2=i_2P$, а за объединённый промежуток начисленные проценты составят сумму $I_1+I_2=Pi_1+Pi_2$. Соответственно, для объединённого промежутка процентная ставка даётся формулой:

$$i=i_1+i_2. \tag{1.9}$$

Если речь идёт о срочном банковском вкладе, то проценты $I_1=i_1P$, заработанные за первый промежуток времени обычно переводятся на текущий счёт, а не добавляются к сумме вклада (в отечественной практике говорят, что капитализация процентов не производится). Соответственно, если срочный вклад продлевается на второй промежуток времени, то сумма вклада остаётся прежней, P. Поэтому на втором промежутке времени проценты начисляются только на эту сумму.

Если сумма P инвестирована под простые проценты на n последовательных интервалов: $[t_0,t_1],[t_1,t_2],\ldots,[t_{n-1},t_n]$ и $i_1,i_2,\ldots,i_n$ – эффективные процентные ставки для этих интервалов, то к моменту t_n будут начислены проценты в размере

$$I=Pi_1+Pi_2+\ldots+Pi_n, \tag{1.10}$$

так что эффективная процентная ставка для объединённого промежутка $[t_0,t_n]$ равна сумме процентных ставок:

$$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_n, \tag{1.11}$$

а накопление за объединённый промежуток времени равно

$$A = P\left(1 + i_1 + i_2 + \ldots + i_n\right). \tag{1.12}$$

Предположим теперь, что сумма P инвестирована под простые проценты на n дней (т.е. рассмотренные в предыдущем параграфе n последовательных интервалов состоят из 1 дня каждый), а эффективные процентные ставки для всех дней равны друг другу: $i_1 = \ldots = i_n \equiv i_*$. В соответствии с формулами (1.10) и (1.12) через n дней будут начислены проценты в размере $I(n) = Pni_*$, а накопление составит сумму $A(n) = P\left(1 + ni_*\right)$.

Предположим, далее, что некоторый промежуток времени из N дней рассматривается в качестве единичного. Для банковского счёта это обычно год из $N = 365$ дней, для облигации – купонный период, в котором расположен рассматриваемый промежуток из n дней. В последнем случае N равно числу дней в этом периоде (оно меняется от периода к периоду; разница обычно составляет 1-2 дня). *Если бы* сумму P было можно инвестировать *на тех же условиях* (по ставке i_* в день, без капитализации процентов) на N дней, то по истечении этого единичного промежутка времени *были бы* начислены проценты в размере $I(N) = PNi_*$, а накопление *было бы* равно $A(N) = P\left(1 + Ni_*\right)$, т.е. эффективная процентная ставка за единичный промежуток времени *была бы* равна $i = Ni_*$. Особо подчеркнём, что часто эта эффективная процентная ставка i является *гипотетической* («*если бы…, то*»), т.е. на самом деле чисто *номинальной*[8]. Если эту процентную ставку принять в качестве основной, то $i_* = i/N$, так что формулы для начисленных процентов и накопления через n дней примут вид: $I(n) = P\dfrac{n}{N}i$ и $A(n) = P\left(1 + \dfrac{n}{N}i\right)$. Дробь $\dfrac{n}{N} \equiv h$ – это длина промежутка инвестирования, если единицей измерения длин промежутков времени является основной промежуток из N дней. Поэтому последние формулы можно переписать в виде

$$I(h) = Pih, \tag{1.13}$$

$$A(h) = P\left(1 + ih\right). \tag{1.14}$$

Соответственно эффективная процентная ставка $i_{\text{эфф}}(h)$ для промежутка длиной h (единичных промежутков) даётся формулой:

---

[8] nominal ['nɔmɪn(ə)l] – номинальный, нарицательный, т.е. существующий только по имени (на бумаге).

$$i_{\text{эфф}}(h) = ih. \tag{1.15}$$

Каждое из соотношений (1.13), (1.14), (1.15) называют *формулой простых процентов*. Этот термин можно применить и к общим формулам (1.10), (1.11), (1.12).

При реальных расчётах обычно указывают номинальную процентную ставку i, длину промежутка инвестирования h и отмечают, что проценты начисляются по правилу простых процентов. После этого по формуле (1.15) рассчитывают эффективную процентную ставку за рассматриваемый промежуток времени, а чаще – сразу сумму начисленных процентов по формуле (1.13) или накопление по формуле (1.14).

В разделе 1.5 мы ещё раз вернёмся к понятию номинальной процентной ставки, но немного с других позиций.

1.4.2 Сложные проценты

В соответствии с принципом *сложных процентов* проценты, заработанные на первом промежутке времени $[t_0, t_1]$, добавляются к первоначальной сумме P и на втором промежутке $[t_1, t_2]$ на них также начисляются проценты (для этой ситуации в отечественной практике используют термин «капитализация процентов»). Иначе говоря, на втором промежутке проценты начисляются не на сумму P, а на сумму $P' = P(1+i_1)$. Поэтому в конце второго интервала времени накопление $A = P(1+i_1)(1+i_2) = Pk_1k_2$, т.е. для коэффициента накопления за объединённый промежуток времени верно равенство:

$$k = k_1 k_2 . \tag{1.16}$$

Процентный доход к концу второго интервала времени равен $A - P = P(i_1 + i_2 + i_1 i_2)$, так что для эффективной процентной ставки за объединённый промежуток времени верно равенство: $i = i_1 + i_2 + i_1 i_2$.

Если сумма P инвестирована под сложные проценты на n последовательных интервалов $[t_0,t_1],[t_1,t_2],\ldots,[t_{n-1},t_n]$ и $i_1, i_2, \ldots, i_n$ – эффективные процентные ставки для этих интервалов, то к моменту t_n будет накоплена сумма

$$A = P(1+i_1)(1+i_2)\ldots(1+i_n). \tag{1.17}$$

Если $i_k > 0$, то на интервале $[t_{k-1}, t_k]$ деньги растут, если $i_k = 0$, то на интервале $[t_{k-1}; t_k]$ никаких изменений не происходит, а если $-1 \le i_k < 0$, то на этом интервале инвестор теряет деньги (при $i_k = -1$ он теряет всё). Получит ли в конце концов инвестор прибыль или понесёт потери, будет зависеть от того, больше или меньше 1 произведение всех коэффициентов накопления.

Предположим теперь, что сумма P инвестирована под сложные проценты на n дней (т.е. рассмотренные в предыдущем параграфе n последовательных интервалов состоят из 1 дня каждый), а эффективные процентные ставки для всех дней равны друг другу: $i_1 = \ldots = i_n \equiv i_*$. В соответствии с формулой (1.17) через n дней накопление равно $A(n) = P\left(1 + i_*\right)^n$. Предположим, далее, что некоторый промежуток времени из N дней рассматривается в качестве единичного. *Если бы* сумму P было можно инвестировать *на тех же условиях* (по ставке i_* в день с капитализацией процентов) на N дней, то по истечении этого единичного промежутка времени накопление *было бы* равно $A(N) = P\left(1 + i_*\right)^N$, т.е. эффективная процентная ставка за единичный промежуток времени *была бы* равна $i = \left(1 + i_*\right)^N - 1$. Если эту процентную ставку принять в качестве основной, то формула для накопления через n дней примет вид: $A(n) = P\left(1 + i\right)^{n/N}$. Дробь $\dfrac{n}{N} \equiv h$ – это длина промежутка инвестирования, если единицей измерения длин промежутков времени является основной промежуток из N дней. Поэтому последнюю формулу можно переписать в виде

$$A(h) = P \cdot (1 + i)^h. \tag{1.18}$$

Соответственно эффективная процентная ставка $i_{\text{эфф}}(h)$ для промежутка длиной h (единичных промежутков) даётся формулой:

$$i_{\text{эфф}}(h) = (1 + i)^h - 1. \tag{1.19}$$

Соотношение (1.18), а часто и (1.19), называют *формулой сложных процентов*. Этот термин можно применить и к общей формуле (1.17).

При расчёте возврата долга, оценке инвестиционных проектов и т.д. всегда предполагается, что средства, инвестированные на время t, растут в соответствии с (1.18). В теоретической финансовой математике, когда время является непрерывной величиной, формулу (1.18) используют при всех t.

В английском языке *сложные проценты* называют *compound* ['kɔmpaund] *interest*. Основная часть этого термина, слово «compound», в зависимости от ситуации переводится как

- «смесь, составной, сложный», т.е. как существительное или прилагательное – в этом случае ударение ставится на первом слоге: ['kɔmpaund];
- или как «смешивать, составлять», т.е. как глагол – в этом случае ударение ставится на втором слоге: [kəm'paund]).

Применительно к финансам *compounding* ['kɔmpaundɪŋ] означает «добавление начисленных процентов (accrued interest) к основному капиталу, что создаёт новую базу для начисления процентов в будущем», а *compound* ['kɔmpaund] *interest* – «проценты, начисленные на основной капитал и на ранее начисленные проценты».

1.5 Аннуализация ставок

1.5.1 Номинальные ставки

Как мы уже отмечали, обычно в финансовой математике в качестве основной единицы времени рассматривается 1 год (для облигаций основной единицей времени является длина купонного периода). Типичные значения годовых процентных ставок для банковских вкладов равны нескольким процентам (в зависимости от валюты и условий вклада от 0.1% до 10%). Конечно, вложения в ценные бумаги, инвестиционные проекты (как более рисковые) могут принести гораздо бóльшую годовую прибыль. Проценты по кредитам намного больше – в зависимости от валюты и условий кредитования от 5% до 25% годовых (и выше). Но часто инвестор имеет дело с инвестированием своих средств на более короткий промежуток времени, например, мы можем поместить деньги в банк на месячный депозит. В подобных случаях, когда длина h промежутка инвестирования мала, относительно невелика и эффективная процентная ставка $i_{\text{эфф}}(h)$ за этот промежуток (просто потому, что деньги «работают» слишком мало). Скажем, 21 мая 2013 года Сберегательный банк РФ предлагал при размещении 120 тыс. рублей на вклад «Сохраняй» на срок 31 день доход в размере 509 руб. 59 коп. Это означает эффективную процентную ставку $i_{\text{эфф}}(31\text{ день}) = i_{\text{эфф}}\left(31/365\text{ года}\right)$ около 0.4% (точнее, 0.424658%). Однако такие маленькие значения как абсолютного, так и относительного дохода не очень интересны для потенциальных вкладчиков. Поэтому, чтобы представить проект в более выгодном свете, а также для того, чтобы упростить сравнение различных финансовых проектов, в финансовой математике принято характеризовать доходность инвестиций на короткий промежуток времени h с помощью нормированной эффективной процентной ставки $i_{\text{эфф}}(h)/h$ (здесь обычно считается, что в качестве единичного промежутка выбран 1 год). Эта ставка называется *номинальной процентной ставкой* (nominal rate of interest) или *простой годовой ставкой* (annual simple rate). Мы будем обозначать её $i_{\text{ном}}$ или, если путаница невозможна, просто i:

$$i_{\text{ном}} = \frac{i_{\text{эфф}}(h)}{h}. \tag{1.20}$$

Иногда, если это важно, мы будем указывать и зависимость этой ставки от длины h рассматриваемого промежутка времени.

Прилагательное «номинальная» означает, что эта ставка является всего лишь «именем». Реальный доход от вложения средств на рассматриваемый промежуток времени непосредственно отражает эффективная процентная ставка $i_{\text{эфф}}(h) = hi_{\text{ном}}$.

Для упомянутого выше вклада «Сохраняй» на 31 день номинальная ставка равна $\frac{0.424658\%}{31/365}=5\%$. Когда рекламируют депозиты, в качестве основной информации о доходности упоминают именно номинальные годовые ставки, так что реклама могла выглядеть примерно так: «Сумма вклада 120000, срок 31 день; процентная ставка 5% годовых».

Используя ранее введённое понятие «annualize», можно сказать, что номинальная ставка $i_{\text{ном}}$ является аннуализированной версией (неаннуализированной) эффективной процентной ставки $i_{\text{эфф}}(h)$. Поэтому в англоязычной литературе $i_{\text{ном}}$ называют и annualized (annual) percentage rate (APR), или точнее, nominal APR. Следует отметить, что термин annual percentage rate (APR) используют и в совсем другом смысле, как эквивалентную годовую процентную ставку, описывающую полную стоимость кредита; подробнее мы расскажем об этом в Главе 3.

В конкретных ситуациях, возникающих в финансах, для номинальной ставки используют и другие термины; поскольку стандартов нет, нужно очень внимательно вникать в смысл документов.

Мы знаем, что эффективная процентная ставка $i_{\text{эфф}}(h)$ теоретически может принимать любое значение из промежутка $[-1;+\infty)$, причём положительные значения означают реальный процентный доход, отрицательные значения – потерю части основного капитала (значение -1 соответствует полной потере), а значение 0 – нулевой доходности. Соотношение (1.20) влечёт, что номинальная ставка обладает аналогичными свойствами, однако значению $i_{\text{эфф}}(h)=-1$ соответствует значение $i_{\text{ном}}=-\frac{1}{h}$. Это обстоятельство может в ряде случаев затруднять интерпретацию номинальной ставки.

Эффективные учётные ставки для небольших промежутков времени h так же, как и процентные ставки, выражаются очень маленькими числами. Их тоже принято нормировать и рассматривать *номинальные учётные ставки* (nominal discount rate) $d_{\text{ном}}=d_{\text{эфф}}(h)/h$. Величину $d_{\text{ном}}$ также называют *простой учётной ставкой* (simple discount rate) или *коммерческой учётной ставкой* (commercial [kə'mɜ:ʃ(ə)l] discount rate). Таким образом, если объявлена простая учётная ставка в размере d, то стоимость ценной бумаги номиналом F со сроком до погашения h равна $P=F(1-dh)$. В обычной коммерческой практике эту формулу применяют только для промежутков времени короче года, т.е. для $h<1$.

Как мы отмечали, для фиксированного промежутка времени эффективная процентная ставка и эффективная учётная ставка связаны

соотношением $(1-d_{\text{эфф}}(h))(1+i_{\text{эфф}}(h))=1$. Отсюда следует, что $(1-hd_{\text{ном}})(1+hi_{\text{ном}})=1$, и потому

$$d_{\text{ном}}=\frac{i_{\text{ном}}}{1+hi_{\text{ном}}},\ i_{\text{ном}}=\frac{d_{\text{ном}}}{1-hd_{\text{ном}}}.$$

Если основной единицей времени является один год, то наибольший интерес представляют следующие значения h: $h=1/2$ – половина года (6 месяцев), $h=1/4$ – один квартал (3 месяца), $h=1/12$ – один месяц, $h=1/52$ – одна неделя, $h=1/365$ – один день. При $h=1/p$ для упрощения записей мы будем обозначать эффективную процентную ставку символом $i_*^{(p)}$: $i_*^{(p)}\equiv i_{\text{эфф}}\left(1/p \text{ часть года}\right)$, а соответствующую номинальную процентную ставку – символом $i^{(p)}$. Величина $i^{(p)}$ называется *номинальной процентной ставкой, выплачиваемой (начисляемой) с частотой p* (the nominal rate of interest payable (convertible) *p*thly). Т.к. (по определению) $i^{(p)}=pi_*^{(p)}$, по этой номинальной процентной ставке мы можем подсчитать эффективную процентную ставку за промежуток длиной $h=1/p$: $i_*^{(p)}=i^{(p)}/p$.

Аналогично, для $h=1/p$ эффективная учётная ставка обозначается символом $d_*^{(p)}$, а соответствующая номинальная учётная ставка $pd_*^{(p)}$ – символом $d^{(p)}$; она называется *номинальной учётной ставкой, начисляемой с частотой p* (the nominal rate of discount convertible *p*thly). По этой номинальной процентной ставке мы можем подсчитать эффективную учётную ставку за промежуток $h=1/p$: $d_*^{(p)}=d^{(p)}/p$.

Из полученных выше формул следует, что $d^{(p)}=\frac{pi^{(p)}}{p+i^{(p)}}$, $i^{(p)}=\frac{pd^{(p)}}{p-d^{(p)}}$.

1.5.2 Годовая эквивалентная ставка (AER)

Предположим, что нам предлагает два инвестиционных проекта:

1. можно вложить сумму 100000 на 5 месяцев; доход равен 3000.
2. можно вложить сумму 60000 на 6 месяцев; доход равен 2100.

Какой из них выгоднее?

Абсолютный доход для первого проекта больше. Поэтому с этой точки зрения он выгоднее. С другой стороны, первый проект предполагает вложение бóльшей суммы. Поэтому было бы разумно подсчитать доход от каждого проекта в расчёте на один вложенный рубль: для первого проекта этот относительный доход (доходность) равен $\frac{3000}{100000}=3\%$, для второго – $\frac{2100}{60000}=3.5\%$. Доходности являются эффективными процентными ставками за рассматриваемые промежутки времени (в этом и заключается смысл введения процентных ставок): $i'_{\text{эфф}}=i'_{\text{эфф}}(5\text{ месяцев})=3.0\%$, $i''_{\text{эфф}}=i''_{\text{эфф}}(6\text{ месяцев})=3.5\%$.

Доходность второго проекта выше. Поэтому с этой точки зрения выгоднее он, а не первый.

Однако второй проект предполагает инвестирование средств на бóльший срок. Без учёта срока вложения средств понять, какой проект выгоднее нельзя. Чтобы учесть фактор времени, можно подсчитать проценты в расчёте на один год, т.е. разделить подсчитанные выше эффективные ставки на длины соответствующих интервалов времени в годах: $h' = 5/12$ для первого проекта, $h'' = 6/12$ для второго. Для первого проекта эта величина равна $\frac{i'_{\text{эфф}}(h')}{h'} = \frac{3.0\%}{5/12} = 7.2\%$, а для второго – $\frac{i''_{\text{эфф}}(h'')}{h''} = \frac{3.5\%}{6/12} = 7.0\%$, так что теперь нужно признать, что выгоднее первый проект. Найденные величины мы назвали раньше номинальными годовыми ставками.

Идею, которая привела к понятию годовой номинальной ставки, можно изложить в другой форме: для рассматриваемых проектов введём некоторые «эквивалентные» им *стандартные проекты*, после чего сравним эти эквивалентные стандартные проекты. Фраза «проект А эквивалентен проекту В» означает, что оба проекта приводят к одному и тому же финансовому результату. Простейшим вариантом эквивалентного проекта является банковский вклад, который

- начисляет проценты по некоторой (годовой) ставке i;
- при этом, если деньги находятся на счёте лишь часть года (т.е. $h < 1$) или больше года ($h > 1$), то доход I на вложенные средства P начисляется в соответствии с принципом простых процентов: $I = ihP$ (т.е. эффективная процентная ставка при размещении средств на промежуток времени длиной h равна ih);
- этот счёт даёт тот же финансовый результат, что и размещение средств на срок h по эффективной ставке $i_{\text{эфф}}(h)$.

Последнее условие означает, что для эквивалентной ставки i верно равенство $ihP = i_{\text{эфф}}(h)P$, откуда $i = i_{\text{эфф}}(h)/h$ – это в точности номинальная годовая процентная ставка $i_{\text{ном}}$.

Но почему в гипотетическом эквивалентном банковском вкладе мы использовали принцип простых процентов? С равным успехом можно было бы предположить, что этот вклад начисляет проценты в соответствии с принципом сложных процентов. Это означает, что если деньги находятся на счёте время h, то накопление на сумму P вычисляется по формуле $P(1+i)^h$, а процентный доход I – по формуле $I = P\left((1+i)^h - 1\right)$. Поскольку этот счёт должен давать тот же финансовый результат, что и размещение средств на срок h по эффективной ставке $i_{\text{эфф}}(h)$, ставка i находится из равенства $P(1+i)^h = P\left(1 + i_{\text{эфф}}(h)\right)$, откуда

$$i = \left(1 + i_{\text{эфф}}(h)\right)^{1/h} - 1. \qquad (1.21)$$

Ставка i, подсчитанная по формуле (1.21) называется *годовой эквивалентной ставкой* (Annual Equivalent Rate – *AER*); её называют и *годовой эффективной ставкой* (Annual Effective Rate, сокращение не меняется: *AER*). Используют и термины Effective Annual Rate (*EAR*), Annual Percentage Yield (*APY*). Хотя эта ставка является номинальной в том смысле, что она не существует в реальности, слово «номинальный» применительно к ней не употребляется. Различие между номинальной годовой процентной ставкой $i_{\text{ном}}$ и эффективной годовой ставкой *AER* заключается только в том, в каком смысле понимается эквивалентность: в смысле простых процентов или в смысле сложных процентов, т.е. каким образом происходит переход к годовой основе, аннуализация. Позже идея, которую мы использовали для определения эффективной годовой ставки, приведёт нас к понятию внутренней ставки дохода (internal rate of return – *IRR*).

Мы знаем, что эффективная процентная ставка $i_{\text{эфф}}(h)$ теоретически может принимать любое значение из промежутка $[-1;+\infty)$, причём положительные значения означают реальный процентный доход, отрицательные значения – потерю части основного капитала (значение -1 соответствует полной потере), а значение 0 – нулевой доходности. Соотношение (1.21) влечёт, что номинальная ставка обладает аналогичными свойствами, причём, в отличие от номинальной ставки, значению $i_{\text{эфф}}(h) = -1$ соответствует значение $AER = -1$ – это является дополнительным преимуществом *AER* по сравнению с номинальной ставкой.

Хотя *AER*, так же как и простая (номинальная) годовая ставка, получается в результате преобразования эффективной ставки за промежуток времени, отличный от одного года, к эквивалентной (в некотором точно определённом смысле) годовой ставке, термин «аннуализация» обычно применяют только к простой годовой ставке (причём основная неаннуализированная ставка должна относиться к промежутку времени, меньшему года).

Если мы примем этот новый принцип определения эквивалентного счёта, то для сравнения двух проектов нужно подсчитать соответствующие им значения эффективных годовых ставок, а затем сравнить их. В современной финансовой математике общепринятым является именно этот подход.

Сравним с его помощью два проекта, о которых шла речь в начале этого раздела. Для первого проекта $AER = (1+0.03)^{12/5} - 1 \approx 7.3518\%$, а для второго $AER = (1+0.035)^{12/6} - 1 \approx 7.1225\%$. В данном случае использование эффективных годовых ставок в качестве меры доходности приводит к тому же выводу, что и использование номинальных ставок – первый проект выгоднее. Однако численные значения эффективных годовых ставок и соответствующих номинальных годовых ставок различаются.

Уравнение (1.21) можно переписать в эквивалентной форме как $\ln(1+AER)=\dfrac{\ln(1+i_{\text{эфф}}(h))}{h}$, или, вводя соответствующие интенсивности процентов (подробнее об этом понятии мы будем говорить позже) $\delta_{AER}=\ln(1+AER)$, $\delta_{\text{эфф}}(h)=\ln\left(1+i_{\text{эфф}}(h)\right)$, как $\delta_{AER}=\delta_{\text{эфф}}(h)/h$. Таким образом, использование эффективной годовой ставки в качестве «эквивалентной» годовой процентной ставки означает нормализацию эффективной интенсивности процентов (за рассматриваемый промежуток времени), в то время как использование обычной номинальной процентной ставки $i_{\text{ном}}=i_{\text{эфф}}(h)/h$ означает нормализацию эффективной процентной ставки (за рассматриваемый промежуток времени).

Исключая $i_{\text{эфф}}(h)$ из уравнений $i_{\text{ном}}=i_{\text{эфф}}(h)/h$ и $AER=\left(1+i_{\text{эфф}}(h)\right)^{1/h}-1$, мы получим соотношения, связывающие номинальную годовую процентную ставку $i_{\text{ном}}$ и эффективную годовую процентную ставку *AER*:

$$AER=\left(1+hi_{\text{ном}}\right)^{1/h}-1 \Leftrightarrow i_{\text{ном}}=\frac{(1+AER)^h-1}{h}.$$

В силу неравенства Бернулли, для вклада на срок h (без приходных или расходных операций и начислением процентов в конце срока) номинальная годовая ставка больше или меньше эффективной годовой ставки в соответствии с тем, больше или меньше 1 срок вклада. Конечно, мы предполагаем, что доход по вкладу не равен 0 – в этом случае, очевидно, $i_{\text{ном}}=AER=0$. Ясно, кроме того, что при $h=1$ верно равенство $i_{\text{ном}}=AER$.

Рассмотрим вклад с капитализацией процентов, который начисляет проценты p раз в год в соответствии с номинальной процентной ставкой $i^{(p)}$. Если за время вклада будет ровно n периодов начисления процентов (т.е. срок вклада равен $h=n/p$ лет), то на счёте будет накоплена сумма $\left(1+i^{(p)}/p\right)^n$. Годовая эффективная ставка *AER* определяется из уравнения $\left(1+i^{(p)}/p\right)^n=(1+AER)^h$, откуда

$$AER=\left(1+i^{(p)}/p\right)^p-1. \qquad (1.22)$$

Обратим внимание на то, что она не зависит от срока вклада. Если известна эффективная годовая процентная ставка *AER*, то можно найти $i^{(p)}$:

$$i^{(p)}=p\left((1+AER)^{1/p}-1\right). \qquad (1.23)$$

В Microsoft Office Excel включены две стандартные функции: НОМИНАЛ и ЭФФЕКТ (NOMINAL и EFFECT в английской версии), которые позволяют упростить вычисления: $i^{(p)}=$ НОМИНАЛ(i,p), $AER=$ ЭФФЕКТ$(i^{(p)},p)$. Например, если проценты начисляются ежемесячно в соответствии с годовой

номинальной ставкой $i^{(12)} = 6.75\%$, то $AER \approx 6.9627937\%$ можно подсчитать, введя в ячейку формулу: =ЭФФЕКТ(0.0675,12).

Если $d^{(p)}$ – номинальная учётная ставка, начисляемая с частотой p, то ей соответствует номинальная процентная ставка $i^{(p)} = \dfrac{pd^{(p)}}{p - d^{(p)}}$. Для неё мы ввели понятие годовой (эквивалентной) эффективной процентной ставки. Вместо годовой процентной ставки AER можно использовать соответствующую годовую учётную ставку $d_{AER} = \dfrac{AER}{1 + AER}$. Вспоминая формулу для AER и формулу, связывающую $i^{(p)}$ и $d^{(p)}$, мы получим:

$$d_{AER} = 1 - \left(1 - \frac{d^{(p)}}{p}\right)^p. \qquad (1.24)$$

Если известна эффективная годовая учётная ставка d_{AER} или годовая эффективная процентная ставка AER, то можно найти $d^{(p)}$:

$$d^{(p)} = p\left(1 - \left(1 - d_{AER}\right)^{1/p}\right) = p\left(1 - (1 + AER)^{-1/p}\right). \qquad (1.25)$$

1.5.3 Дополнительные замечания о терминах

В Великобритании процентный доход облагается налогом. Годовая процентная ставка, которая соответствует процентному доходу до вычета налогов, называется *брутто ставкой* (gross interest rate). По этой ставке начисляют доход по счетам лиц, годовой доход которых ниже установленного законом налогового вычета (эти лица должны подать в банк налоговую декларацию по форме R85).

Годовая процентная ставка, которая соответствует процентному доходу после вычета налогов, называется *нетто ставкой* (net interest rate).

Чтобы поощрить население больше сберегать, правительство Великобритании ввело специальные виды счетов, процентный доход по которым не облагается налогом. Они называются индивидуальные сберегательные счета (cash individual savings account – cash ISA). Чтобы открыть такой счёт, нужно быть британским налогоплательщиком не моложе 16 лет, причём сумма вклада не должна превышать определённый предел (в 2013 году: £5760 для вкладчиков старше 18 лет, £3720 для вкладчиков от 16 до 18 лет). Годовая процентная ставка по таким счетам называется *ставкой, не облагаемой налогом* (tax-free rate).

В соответствии с Кодексом поведения для рекламирования счетов, начисляющих проценты[9] (Code of conduct for the advertising of interest bearing accounts) Британского союза банкиров (British Bankers' Association) в

[9] Code of conduct for the advertising of interest bearing accounts. Guidance for banks and building societies. British Bankers' Association, The Building Societies Association. March 2011

Великобритании реклама любого банковского счёта должна упоминать значение *AER* в виде процентов с двумя десятичными знаками после запятой. Поскольку некоторые виды счетов предполагают обязательные ежемесячные взносы (возможны и другие условия), определение *AER* в общем случае сложнее, чем для простого срочного вклада (в сущности *AER* – это внутрення ставка дохода для денежного потока, описывающего вклад). В Великобритании формулы для её расчёта зафиксированы в Приложении[10] к Кодексу поведения для рекламирования счетов, начисляющих проценты (Code of conduct for the advertising of interest bearing accounts) Британского союза банкиров.

Отметим, что в Сбербанке РФ под годовой эффективной ставкой понимают эквивалентную простую годовую ставку и рассчитывают её для вклада с ежемесячным начислением процентов, открытого на n месяцев, по формуле $\left(\left(1+\frac{i_{\text{ном}}^{(\text{год})}}{12}\right)^{n}-1\right)\cdot\frac{12}{n}$. Например, для $n=24$ (месяца), $i_{\text{ном}}^{(\text{год})}=7.75\%$, по этой формуле мы получим значение 8.35%, что и отражено в результатах расчёта с помощью Калькулятора на сайте банка:

Срок: 730 дней	**Сумма:** 10 000 000,00 руб.	**Доход*:** 1 670 757,10 руб.
Ставка: 7,75 %	**Доп. взносы:** нет	**Дата начала:** 25.06.2013
Эффективная ставка: 8,35 %	**Част. снятие:** нет	**Дата окончания:** 25.06.2015

Эффективная годовая ставка в нашем смысле находится из равенства $P(1+i)^2=A \Leftrightarrow 10\ 000\ 000{,}00(1+i)^2=11\ 670\ 757{,}10$, что даёт $i\approx 8.03\%$. Эта цифра, конечно, смотрится не так привлекательно, как 8.35%, так что Сбербанк можно понять.

1.6 Время в финансовых вычислениях

В теоретической финансовой математике, так же как в классической физике, считают, что время течёт непрерывно. Для графической иллюстрации время представляют непрывной прямой (осью времени), а моменты наступления событий – точками на этой прямой (см. рис.1.1).

В классической физике считается, что как момент наступления любого события, так и длина промежутка времени между двумя событиями могут быть измерены с любой точностью. Соответственно эти величины могут принимать произвольное действительное значение; единицей времени является секунда (в международной системе единиц СИ). В *теоретической* финансовой математике дело обстоит так же с единственным (непринципиальным) отличием – в качестве единицы времени обычно берётся один «год»; при этом все «годы»

[10] Calculation of the Annual Equivalent Rate (AER). Appendix to Code of Conduct for the Advertising of Interest Bearing Accounts. (31/1/07)

имеют одну длину, «месяцем» называется 1/12 часть «года», а в качестве начального момента $t_0 = 0$, как правило, рассматривается «настоящий» момент.

В реальности всё гораздо сложнее. Во-первых, что такое «настоящий момент»? За время, которое ушло на то, чтобы произнести или написать эту фразу, «настоящее» уже стало прошлым. Вторая проблема – как выразить числом момент наступления того или иного события. Хотя в ряде случаев это делается с точностью до секунды (например, на сайте www.bloomberg.com, где практически в реальном масштабе времени показывают курсы валют, цены на облигации и т.д.), в большинстве случаев фиксируется только день. Соответственно, длина промежутка времени между двумя событиями, например, моментом приобретения облигации и моментом её погашения, измеряется целым числом дней. Иначе говоря, в *реальной* финансовой математике время дискретно.

Это хорошо видно при выполнении вычислений с помощью Microsoft Excel. Эта программа хранит даты в виде последовательных чисел: 1 января 1900 г. соответствует число 1, 2 января 1900 г. – число 2 и т.д., 1 июля 2006 г. – число 38899, 1 июля 2007 г. – число 39264, 1 июля 2008 г. – число 39630, 1 января 2009 г. – число 39814. Чтобы получить число, соответствующее дате, используется стандартная функция ДАТА (DATE в английской версии) или, если дата вводится в виде текста, ДАТАЗНАЧ (DATEVALUE в английской версии), так что, например, число 39264, соответствующее 1 июля 2007 г., можно получить введя в ячейку формулу

=ДАТА(2007;7;1), =DATE(2007;7;1), =ДАТАЗНАЧ("01-07-2007"),

=DATEVALUE("1/07/2007"), =DATEVALUE("01JULY2007")

и т.д. (точный вид формулы зависит от версии Excel и используемого пользователем компьютера формата даты). Можно просто ввести в ячейку, скажем, текст 1/7/2007 и установить формат ячейки как числовой (без знаков после запятой).

В финансах основной единицей времени чаще всего является «год» (мы ставим это слово в кавычки, т.к. в разных случаях в него вкладывается разный смысл). Для облигаций, выплачивающих купон несколько раз в год, основной единицей времени является так называемый купонный период (обычно он равен «полугодию» или «кварталу», т.е. 1/2 или 1/4 доле «года», под которым понимается 2 или 4 купонных периода). Чтобы изменить в годах (или, в зависимости от ситуации, «полугодиях», «кварталах») длину промежутка времени [D1,D2], где D1 и D2 – некоторые даты, нужно образовать дробь $\frac{Days[D1, D2]}{Days_Year}$, числитель которой указывает, сколько дней пройдёт от даты D1 до даты D2, а знаменатель – количество дней в году (в случае облигаций в знаменателе стоит число дней в рассматриваемом купонном периоде). Единого,

общепринятого, способа вычислять эти величины нет. В зависимости от ситуации считают, что год содержит

- реальное число дней, т.е. обычный год состоит из 365 дней, а високосный (leap year ['li:p˛jə]) – из 366;
- всегда 365 дней;
- всегда 360 дней,

  а месяц состоит из
- реального числа дней (30 или 31, а для февраля 28 или 29);
- 30 дней (при этом действуют дополнительные соглашения).

Разные финансовые институты используют разные схемы вычисления длин временных промежутков в днях и годах, причём для разных финансовых инструментов вычисления проводятся по разным правилам. Нет даже единой терминологии: говорят о «способе подсчёта дней» – «day count basis», «договорённости о подсчёте дней» – «day count convension», «дроби для подсчёта дней» – «day count fraction»; один и тот же метод может называться по разному, а для разных методов может использоваться одно и то же имя.

Профессиональные объединения такие, как Международная ассоциация рынков капитала (International Capital Markets Association – ICMA), Международная ассоциация по свопам[11] и деривативам[12] (International Swaps and Derivatives Association – ISDA) и др., стандартизовали большое число финансовых терминов. Ниже мы кратко расскажем о некоторых методах, упомянутых в опубликованном в 2006 году справочнике «ISDA 2006 Definitions», где методам вычисления длин временных промежутков посвящён раздел 4.16(b) «Day Count Fraction» (см. также гл.3 книги Pacrick J. Brown. Bond Market Structures and Yield Calculations. International Securities Market Association, 1998).

1. Метод «*Actual/Actual*» – «*Фактический/Фактический*» (другие имена: «Actual/Actual (ISDA)», «Act/Act», «Act/Act (ISDA)») предполагает, что и месяц, и год состоят из реального числа дней.

При подсчёте количества дней в промежутке [D1,D2] считают последовательно все дни, начиная с даты D1, и до даты, непосредственно предшествующей D2 (иначе говоря, из крайних дат, D1 и D2, включают в промежуток [D1;D2] только D1). Например, от 28 февраля 2014 года до 31 мая 2014 года пройдёт: 1 день февраля + 31 день марта + 30 дней апреля + 30 дней мая = 92 дня, т.е. длина промежутка [28 февраля 2016; 31 мая 2016] равна 92 дня.

---

[11] своп (англ. swap [swɔp] – буквально значает: «менять, обменивать, обмен») – соглашение об обмене обязательствами, активами и т.п.

[12] дериватив (англ. derivative [dɪ'rɪvətɪv] – буквально значает: «производный») – ценная бумага (контракт), стоимость которой определяется ценой актива, лежащего в её основе.

Для банковских вкладов в отечественных банках Статья 839 ГК РФ «Порядок начисления процентов на вклад и их выплаты» устанавливает, что «проценты на сумму банковского вклада начисляются со дня, следующего за днем её поступления в банк, до дня ее возврата вкладчику включительно…» (иначе говоря, из крайних дат, D1 и D2, включают в промежуток [D1;D2] только D2).

Число дней в промежутке [D1;D2] не зависит от того, рассматривается ли он как [D1;D2) или как (D1;D2]. Однако, если основной единицей времени является 1 год, то при некоторых способах вычисления длин промежутков времени, это отличие становится существенным.

Если даты выражены последовательными целыми числами, то реальное количество дней в промежутке [D1,D2] можно подсчитать как разность $D2 - D1$. Таким образом, длину в днях промежутка от 28 февраля 2014 года до 31 мая 2014 года можно подсчитать в Microsoft Excel с помощью формулы

$$= \text{DATEVALUE}("31/05/2014") - \text{DATEVALUE}("28/02/2014").$$

Если мы хотим выразить длину промежутка времени от 28 февраля 2014 года до 31 мая 2014 года в годах, то нужно его длину в днях разделить на число дней в году, т.е. на 365 (т.к. 2014 год не является вмсокомным), что даст $92/365 \approx 0.252055$ года.

В Microsoft Excel этот же результат можно получить с помощью стандартной функции YEARFRAC (ДОЛЯГОДА в русской версии). Для рассматриваемого примера эту задачу решает формула

=YEARFRAC("28/02/2014","31/05/2014",1).

Здесь последний аргумент, число «1», указывает, что расчёт проводится по описанной схеме. Даты лучше вводить с помощью функции DATE (ДАТА).

Теперь рассмотрим те же даты, 28 февраля и 31 мая, но двумя годами позже, в 2016 году (который является високосным). Теперь от 28 февраля до 31 мая пройдёт: 1 дня февраля + 31 день марта + 30 дней апреля + 31 день мая = 93 дня. Соответственно, промежуток от 28 февраля 2016 года до 31 мая 2016 года составляет $93/366 \approx 0.254098$ года. Те же числовые значения дают формулы

$$= \text{DATEVALUE}("31/05/2016") - \text{DATEVALUE}("28/02/2016")$$

$$= \text{YEARFRAC}("28/02/2016","31/05/2016",1)$$

соответственно.

Особо следует описать, как вычислять длину в годах промежутка [D1;D2], если часть его лежит в обычных годах, а часть – в високосных. Рассмотрим, например, интервал от 1 ноября 2015 года до 1 мая 2016 года. В обычном 2015 году расположены: 30 дней ноября 2014 + 31 декабря 2014 = 61 день. В

високосном 2016 году расположены: 31 день января + 29 дней февраля + 31 день марта + 30 дней апреля = 121 день. Поэтому в числителе дроби $\frac{Days[D1,D2]}{Days_Year}$ нужно указать 61+121=182. Но что указывать в знаменателе? 365, 366 или, может быть какое-то среднее значение?

ISDA рекомендует следующий метод:

1. подсчитать, сколько дней из промежутка [D1;D2] расположены в обычных годах, а сколько – в високосных;

2. первое число разделить на 365, а второе – на 366;

3. сложить полученые доли.

Применим этот метод к промежутку от 1 ноября 2015 года до 1 мая 2016 года. Из этого промежутка в обычном году расположены: 30 дней ноября 2014 + 31 декабря 2014 = 61 день, что составляет $61/365 \approx 0.167123$ года. В високосном 2016 году расположены: 31 день января + 29 дней февраля + 31 день марта + 30 дней апреля = 121 день, что составляет $121/366 \approx 0.330601$ года. Значит, промежуток от 1 ноября 2015 года до 1 мая 2016 года составляет примерно 0.497724 года.

Отметим, что стандартная функция YEARFRAC пакета Microsoft Excel для этого примера даёт совсем другое значение – примерно 0.497268 (хотя метод вычисления называется «Actual/actual»). Оно соответствует числу дней в году, равному 366. В других аналогичных случаях в зависимости от дат функция YEARFRAC может брать число дней в году, равное $365\frac{1}{4}$, $365\frac{1}{3}$, $365\frac{1}{2}$. Поэтому использовать эту функцию для финансовых вычислений следует с большой осторожностью.

2. Метод «*Actual/360*» – «*Фактический/360*» (другие имена: «Act/360», «A/360») использует реальное количество дней в промежутке [D1,D2], но предполагает, что год содержит 360 дней. В стандартных функциях Microsoft Excel этот метод указывается аргументом «2».

Рассмотрим, например, промежуток от 28 февраля 2014 года до 31 мая 2014 года. Как и в схеме «Actual/actual», в схеме «Actual/360» он состоит из 92 дней, но теперь принято считать, что это составляет $92/360 \approx 0.255556$ года. Это же числовое значение можно получить с помощью Excel по формуле

$$= \text{YEARFRAC}(\text{"28/02/2014"},\text{"31/05/2014"},2).$$

Очевидный недостаток схемы «Actual/360» состоит в том, что промежуток от любой даты до той же даты следующего года, который, очевидно, имеет длину 1 год, в этой схеме имеет длину 365/360 или 366/360 (если в этот промежуток попадает 29 февраля високосного года), которая больше года. Например, формула =YEARFRAC("28/02/2014","28/02/2015",2) даёт значение

$1.013889 \approx 365/360$. Поэтому метод «Actual/360» имеет смысл использовать только для небольших промежутков времени, например, при расчётах процентов по краткосрочным займам. Рынок таких заимствований между банками и другими финансовыми институтами называется *денежным рынком* (money market ['mʌnɪˌmɑːkɪt]), в то время как *рынок капитала* (capital market) имеет дело с среднесрочными и долгосрочными кредитами. По этой причине метод «Actual/360» называют и *money market basis* – база денежного рынка.

3. Метод «*Actual/365 (Fixed)*» – «*Фактический/365 (Фиксировано)*» (другие имена: «Act/365 (Fixed)», «A/365F») использует реальное количество дней в промежутке [D1,D2], но предполагает, что год содержит 365 дней, а полугодие – 182.5 дней. Иногда этот метод называют английским, т.к. он применялся Банком Англии для расчёта накопленных процентов для британских государственных облигаций (до ноября 1998 года; затем стали использовать «Actual/actual» ICMA, который мы опишем в гл.5). В стандартных функциях Microsoft Excel этот метод указывается аргументом «3».

В соответствии с этим методом считается, например, что промежуток времени от 28 февраля 2014 года до 31 мая 2014 года (который состоит из 92 дней) составляет 92/365 года. Так как 2014 год состоит из 365 дней, в этом случае нет разницы между схемами 1 и 3. Для високосного года ситуация изменится. Длина промежутка времени от 28 февраля 2016 года до 31 мая 2016 года равна 93 дня, что при схеме «Actual/365» составляет 93/365 года, а не 93/366 как при схеме «Actual/actual».

Очевидный недостаток схемы «Actual/365» состоит в том, что промежуток от любой даты до той же даты следующего года (который, очевидно, имеет длину 1 год) в случае, если в этот промежуток попадает 29 февраля високосного года, в этой схеме имеет длину 366/365, которая больше года. Например, формула

$$= \mathrm{YEARFRAC}(\text{"28/02/2016"},\text{"28/02/2017"},3)$$

даёт значение $1.002740 \approx 366/365$. В соответствии с этой схемой длину 1 год имеет промежуток от 28 февраля 2016 года до 27 февраля 2017 года (он состоит из 365 дней).

4. Группа методов типа «*30/360*». Во всех этих методах предполагается, что: (1) год состоит из 360 дней, (2) месяц состоит из 30 дней, (3) длина (в днях) промежутка времени от даты D1=($Day1, Month1, Year1$) до даты D2=($Day2, Month2, Year2$) вычисляется по формуле:

$$Days[D1, D2] = (Day2^* - Day1^*) + 30 \cdot (Month2^* - Month1^*) + 360 \cdot (Year2^* - Year1^*),$$

где D1*=($Day1^*, Month1^*, Year1^*$) и D2*=($Day2^*, Month2^*, Year2^*$) – определённым образом пересчитанные исходные даты D1 и D2.

4.1 Метод «30E/360» (другое имя: «Eurobond Basis» – «метод для евробондов»)**.** Этот метод предполагает, что переменные *Day*1 или *Day*2, принимающие значения 31, заменяются на 30.

Вычислим в качестве примера этим методом количество дней от 28 февраля 2014 года до 30 мая 2014 года. В этом случае *Day*1=28, *Month*1=02, *Year*1=2014, а *Day*2=30, *Month*2=05, *Year*2=2014, так что

$$Days\left[D1,D2\right]=\left(30-28\right)+30\cdot\left(5-2\right)+360\cdot\left(2014-2014\right)=92,$$

в то время как на самом деле от 28 февраля 2014 года до 30 мая 2014 года на 1 день меньше: 31 день марта + 30 дней апреля + 30 дней мая = 91.

Теперь вычислим количество дней от 28 февраля 2014 года до 31 мая 2014 года. В этом случае *Day*1=28, *Month*1=02, *Year*1=2014, а *Day*2=31, *Month*2=05, *Year*2=2014. Меняя значение *Day*2 на 30, мы получим:

$$Days\left[D1,D2\right]=\left(30-28\right)+30\cdot\left(5-2\right)+360\cdot\left(2014-2014\right)=92,$$

т.е. то же значение, что и для промежутка от 28 февраля 2014 года до 30 мая 2014 года (который на 1 день короче).

Для количества дней от 28 февраля 2014 года до 31 октября 2014 года метод «30E/360» даёт:

$$Days\left[D1,D2\right]=\left(30-28\right)+30\cdot\left(10-2\right)+360\cdot\left(2014-2014\right)=242,$$

в то время как реально от 28 февраля 2014 года до 31 октября 2014 года на 3 дня больше.

При вычислениях с помощью Microsoft Excel вместо приведённой выше формулы можно использовать стандартную функцию DAYS360 (ДНЕЙ360 в русской версии). Например, для вычисления методом «30E/360» количества дней от 28 февраля 2014 года до 30 мая 2014 года можно использовать формулу

= DAYS360("28/02/2014","30/05/2014",1),

в которой последний аргумент, число «1», указывает, что расчёт проводится по описанной схеме (в Excel она называется «*European 30/360*» – «*Европейский 30/360*»).

Соответственно, в методе «30E/360» считается, что промежуток от 28 февраля 2014 года до 30 мая 2014 года составляет $92/360\approx 0.255556$ года. Это же число можно получить с помощью формулы

= YEARFRAC("28/02/2014","30/05/2014",4).

в которой последний аргумент, число «4» (не «1»!), указывает, что расчёт проводится по методу «European 30/360».

4.2 Метод «*Bond Basis*» – «*Метод для облигаций*» (другие имена: «30/360US» «30/360», «360/360»)**.** Алгоритм вычисления длины промежутка временени [D1;D2] по этому методу следующий:

(1) Если *Day*1=31, то *Day*1 заменяется на 30; в противном случае дата D1 не меняется.

(2) Если *Day2*=31, а *Day*1=30 или 31, то *Day*2 заменяется на 30; в противном случае дата D2 не меняется.

Вычислим в качестве примера этим методом количество дней от 28 февраля 2014 года до 31 мая 2014 года. В этом случае *Day*1*=28, *Month*1*=02, *Year*1*=2014, а *Day*2*=31, *Month*2*=05, *Year*2*=2014, так что

$$Days\left[D1,D2\right]=\left(31-28\right)+30\cdot\left(4-2\right)+360\cdot\left(2014-2014\right)=93,$$

что составляет 0.258333 года из 360 дней.

В некоторых вариантах метода «30/360» последний день февраля (28 или 29 для високосного года) заменяется на фиктивную дату 30 февраля.

В стандартные функции пакета Microsoft Excel включён вариант метода «30/360» под названием «US (NASD) 30/360»[13]. В функциях DAYS360 и YEARFRAC он указывается отсутствием соответствующего аргумента (или аргументом «0»). В справке для функции DAYS360 он описан так: «Если начальная дата является последним днем месяца, то она полагается равной 30-му дню того же месяца. Если конечная дата является последним днем месяца и начальная дата меньше, чем 30-е число, то конечная дата полагается равной первому дню следующего месяца, в противном случае конечная дата полагается равной 30-му дню того же месяца». Применение этой опции при вычислениях с помощью функций DAYS360 и YEARFRAC иногда даёт противоречивые результаты. Например, формула =DAYS360("28/02/2014";"31/05/2014") для длины промежутка от 28 февраля 2014г. до 31 мая 2014г. даёт значение 90, что составляет $90/360=0.25$ года из 360 дней. С другой стороны, расчёт по формуле $=\mathrm{YEARFRAC}\left("28/02/2014","31/05/2014"\right)$ говорит, что этот промежуток составляет 0.25278 года из 360 дней (это соответствует длине промежутка в 91 день). Поэтому применять для реальных финансовых расчётов эту опцию нужно с большой осторожностью.

---

[13] NASD – National Association of Securities Dealers (Национальная ассоциация дилеров по ценным бумагам США). Это объединение контролирует соблюдение правил торговли на внебиржевом рынке ценных бумаг. Хорошо известна Система автоматической котировки Национальной ассоциации дилеров по ценным бумагам (National Association of Securities Dealers Automated Quotation – NASDAQ ['næzdæk]), которая наряду с Нью-Йоркской фондовой биржей (New York Stock Exchange – NYSE) и Американской фондовой биржей (American Stock Exchange – Amex ['æmeks] или ASE) является одна из трёх основных фондовых бирж США. NASDAQ специализируется на акциях высокотехнологичных компаний.

В финансовых расчётах встречаются и другие способы определения длин промежутков времени. Поэтому при рассмотрении любого финансового документа или продукта, в котором идёт речь о длинах временных промежутков (как правило, в связи с начислением процентов) нужно *точно* понять, какой именно метод будет применяться.

1.7 Расчёт процентов по вкладу

Пример 1. 24.06.2013 был открыт вклад «Сохраняй» Сбербанка под 6.55% годовых с ежемесячной капитализацией процентов на 6 месяцев (до 24.12.2013, т.е. на 183 дня), сумма вклада $P=10$ млн.руб.

Рассчитаем накопление по этому вкладу. Прежде всего отметим, что фразу «проценты начисляются ежемесячно» следует понимать так:

- на протяжении месяца ежедневно начисляются простые проценты в соответствии с объявленной номинальной годовой процентной ставкой и в конце месяца (точнее, того же числа следующего месяца, когда был открыт вклад) эти проценты добавляются к сумме вклада, увеличивая тем самым базу для начисления процентов в следующем месяце.
- месяцы состоят из обычного числа дней: 7 месяцев состоит из 31 дня, 4 месяца – из 30 дней, 1 месяц – из 28 дней (29 дней, если год високосный);

Поэтому если количество дней в месяце равно 31 (в году 7 таких месяцев), то эффективная месячная ставка есть $i_{\text{эфф}}^{(\text{мес-31})}=\dfrac{31}{365}\cdot i_{\text{ном}}^{(\text{год})}$ (мы рассматриваем невисокосный год). Если количество дней в месяце равно 30 (в году 4 таких месяца), то эффективная месячная ставка есть $i_{\text{эфф}}^{(\text{мес-30})}=\dfrac{30}{365}\cdot i_{\text{ном}}^{(\text{год})}$. И наконец, для февраля невисокосного года эффективная месячная ставка есть $i_{\text{эфф}}^{(\text{мес-28})}=\dfrac{28}{365}\cdot i_{\text{ном}}^{(\text{год})}$.

С 24.06.2013 по 24.12.2013 пройдёт три месяца по 30 дней и три месяца по 31 дню. Поэтому доход равен

$$10\ 000\ 000\cdot\left(\left(1+\frac{31}{365}\cdot i_{\text{ном}}^{(\text{год})}\right)^3\cdot\left(1+\frac{30}{365}\cdot i_{\text{ном}}^{(\text{год})}\right)^3-1\right)=332923.47\ (\text{руб}),$$

как и говорит калькулятор Сбербанка.

Таким образом, расчёт процентов по рассматриваемому вкладу основан на общей формуле сложных процентов (1.17) при $n=6$ (число месяцев), где эффективные процентные ставки $i_1,i_2,\ldots,i_n$ для каждого месяца (промежутков $[t_0,t_1],[t_1,t_2],\ldots,[t_{n-1},t_n]$) вычислялись по формуле простых процентов.

Пример 2. 25 июня 2013 г. открыт вклад «Сохраняй» Сбербанка с капитализацией процентов. Срок вклада 81 день (до 14 сентября 2013 г.), сумма вклада $P=10$ млн.руб., проценты начисляются ежемесячно в соответствии с

простой годовой процентной ставкой $i_{\text{ном}}^{(\text{год})} = 5.75\%$. Рассчитаем доход по этому вкладу.

С 24.06.2013 по 14.09.2013 пройдёт один месяц длиной 30 дней, один месяц длиной 31 дней и 20 дней третьего месяца. Коэффициент накопления за два полных месяца равен $\left(1+\frac{31}{365}\cdot i_{\text{ном}}^{(\text{год})}\right)\cdot\left(1+\frac{30}{365}\cdot i_{\text{ном}}^{(\text{год})}\right)$, а за 20 дней третьего месяца – $1+\frac{20}{365}\cdot i_{\text{ном}}^{(\text{год})}$. Поэтому итоговый доход равен

$$10000000\cdot\left(\left(1+\frac{31}{365}\cdot i_{\text{ном}}^{(\text{год})}\right)\cdot\left(1+\frac{30}{365}\cdot i_{\text{ном}}^{(\text{год})}\right)\cdot\left(1+\frac{20}{365}\cdot i_{\text{ном}}^{(\text{год})}\right)-1\right)=128137.03(\text{руб}),$$

как и говорит калькулятор Сбербанка.

Пример 3. Рассмотрим вклад «Сохраняй Он-Лайн» Сбербанка на 1 год (365 дней) с капитализацией процентов, который был открыт 27 февраля 2013 под 9% годовых (проценты начисляются ежемесячно), сумма вклада $P = 320$ тыс.руб. Рассчитаем выплаты по этому вкладу.

27 марта 2013 года будут начислены проценты за первый месяц. Поскольку в феврале 28 дней, эффективная ставка для этого месяца $i_{\text{эфф}}^{(\text{мес-28})} = \frac{28}{365}\cdot 9\% = 0.690411\%$, так что проценты составят 2209 руб. 32 коп. и сумма на вкладе вырастет до 322209.32 руб.

27 апреля 2013 года будут начислены проценты за второй месяц. Поскольку в марте 31 день, эффективная ставка для этого месяца $i_{\text{эфф}}^{(\text{мес-31})} = \frac{31}{365}\cdot 9\% = 0.764384\%$, так что проценты составят $322209.32\ (\text{руб.})\cdot 0.00764384 = 2\ 462.92\ (\text{руб.})$ и сумма на вкладе вырастет до 324 672.24 руб.

27 мая 2013 года будут начислены проценты за третий месяц. Поскольку в апреле 30 дней, эффективная ставка для этого месяца $i_{\text{эфф}}^{(\text{мес-30})} = \frac{30}{365}\cdot 9\% = 0.739726\%$, так что проценты составят $324\ 672.24\ (\text{руб.})\cdot 0.00739726 = 2\ 401.69\ (\text{руб.})$ и сумма на вкладе вырастет до 327 073.93 руб.

Этот пример интересен тем, что показывает не только итоговый баланс, но и когда и в каком размере начисляются проценты.

Пример 4. 31 октября 2016 г. в Сбербанке был открыт вклад «Самое ценное» на 175 дней, до 24 апреля 2017 года. Сумма вклада $P = 1$ млн.руб. Пополнение и расходные операции не предусмотрены. Проценты не капитализируются и выплачиваются в конце срока в соответствии с простой годовой процентной ставкой $i_{\text{ном}}^{(\text{год})} = 8\%$. Рассчитаем доход по этому вкладу.

Напомним, что для банковских вкладов в отечественных банках Статья 839 ГК РФ «Порядок начисления процентов на вклад и их выплаты» устанавливает, что «проценты на сумму банковского вклада начисляются со дня, следующего за днем её поступления в банк, до дня ее возврата вкладчику включительно…».

С 31.10.2016 по 24.04.2017 пройдёт 175 дней, из которых 61 день (30 дней ноября 2016 и 31 день декабря 2016) расположены в високосном году, а 114 дней (31 день января 2017, 28 дней февраля 2017, 31 день марта 2017, 24 дня апреля 2017) – в обычном году. При расчёте длины промежутка времени в годах Сбербанк использует метод «Actual/Actual (ISDA)». Поэтому промежуток от 31 октября 2016 года до 24 апреля 2017 года составляет

$$\frac{61}{366}+\frac{114}{365}\approx 0.478995434 \text{ (года).}$$

Соответственно, процентный доход равен

$$1000000\cdot\frac{8}{100}\cdot 0.478995434 = 38319.63 \text{ (руб).}$$

1.8 Непрерывные модели финансовой математики

Предположим, что время меняется непрерывно, годовая эффективная процентная ставка i постоянна, а проценты за любой промежуток времени $[t;t+u]$ рассчитываются по формуле сложных процентов, так что накопление в момент t, $A(t)$, и накопление в момент $t+u$, $A(t+u)$, связаны соотношением:

$$A(t+u)=A(t)\cdot(1+i)^u.$$

Поэтому для эффективной процентной ставки для промежутка $[t;t+u]$, $i_{\text{эфф}}(t;t+u)$, которая по определению равна $\dfrac{A(t+u)-A(t)}{A(t)}$, верна формула:

$$i_{\text{эфф}}(t;t+u)=\frac{(1+i)^{t+u}-(1+i)^t}{(1+i)^t}=(1+i)^u-1.$$

Соответствующая простая (номинальная) годовая ставка $i_{\text{ном}}(t;t+u)$ равна

$$i_{\text{ном}}(t;t+u)=\frac{i_{\text{эфф}}(t;t+u)}{u}=\frac{(1+i)^u-1}{u}. \qquad (1.26)$$

При $u=1/2$ это равенство задаёт номинальную годовую ставку для вклада на половину года (начиная с момента t); при $u=1/4$ – на квартал, при $u=1/12$ – на месяц, при $u=1/52$ – на неделю, при $u=1/365$ – на день. При дальнейшем уменьшении длины u промежутка $[t;t+u]$ мы будем получать номинальную

годовую ставку для всё более короткого интервала, а в пределе, при $u \to 0$, мы получим номинальную годовую ставку, в соответствии с которой начисляются проценты на бесконечно малом промежутке $[t;t+0]$, т.е., образно говоря, в момент t.

Нетрудно видеть, что при $u \to 0$ правая часть равенства (1.26) имеет предел, равный $\ln(1+i)$ (для рассматриваемой модели этот предел не зависит от t). В соответствии со сказанным выше, величина $\delta = \ln(1+i)$ задаёт номинальную годовую ставку, в соответствии с которой начисляются проценты на бесконечно малом промежутке $[t;t+0]$. Поэтому её называют *мгновенной* (номинальной годовой) *процентной ставкой* (instantaneous [ˌɪnstənˈteɪnɪəs] rate of interest) или *непрерывно начисляемой процентной ставкой* (continuously [kən'tɪnjuəslɪ] compounded rate of interest). Часто используют и термин *интенсивность процентов* (force[14] of interest).

Следующая таблица иллюстрирует проведённые рассуждения для $i = 20\%$ (в этом случае $\ln(1+i) = 18.232\%$).

промежуток	u (лет)	$i_{\text{ном}}(t;t+u)$
полугодие	1/2	19.089%
квартал	1/4	18.654%
месяц	1/12	18.371%
неделя	1/52	18.264%
день	1/365	18.237%
мгновение	0+	18.232%

Через параметр δ можно выразить накопление $A(t)$, эффективную годовую ставку i, учётную ставку d, номинальные ставки $i^{(p)}$ и $d^{(p)}$:

$$\begin{aligned} A(t) &= e^{\delta t}, \\ i &= e^{\delta} - 1, \\ d &= 1 - e^{-\delta}, \\ i^{(p)} &= p\left(e^{\delta/p} - 1\right), \\ d^{(p)} &= p\left(1 - e^{-\delta/p}\right). \end{aligned} \qquad (1.27)$$

Для $u = 1/p$ номинальная ставка $i_{\text{ном}}(t;t+u)$ – это $i^{(p)}$. Поэтому $\delta = \lim\limits_{p\to\infty} i^{(p)}$. Соответственно, интенсивность процентов можно использовать как приближённое значение номинальной ставки $i^{(p)}$ при достаточно большой частоте начисления процентов (на самом деле уже для месячных ставок точность вполне приемлема).

---

[14] force [fɔːs] чаще всего переводится как «сила», но в математике это слово имеет ещё одно значение: «интенсивность».

Приближение $i^{(p)} \approx \delta$ можно улучшить, если разложить $i^{(p)}$ в ряд по степеням $1/p$:

$$i^{(p)} = p(e^{\delta/p} - 1) = p\left(1 + \frac{\delta}{p} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{p}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta}{p}\right)^3 + \ldots - 1\right) = \delta + \frac{\delta^2}{2p} + \frac{\delta^3}{6p^2} + \ldots$$

и взять следующий член этого асимптотического разложения. В результате мы получим следующую приближённую формулу: $i^{(p)} \approx \delta + \frac{\delta^2}{2p}$. В таблице ниже для $i = 20\%$ приведены точные значения номинальных ставок $i^{(p)}$ и их приближённые значения, подсчитанные с её помощью. Видно, что точность очень велика – приближённые значения практически совпадают с точными.

p	2	4	12	52	365
$i^{(p)}$	19.089%	18.654%	18.371%	18.264%	18.237%
$i^{(p)}_{\text{прибл.}} = \delta + \frac{\delta^2}{2p}$	19.063%	18.648%	18.371%	18.264%	18.237%

Для сложных инвестиционных проектов динамика суммы $A(t)$ с течением времени определяется не какой-то заданной процентной ставкой, а рыночными факторами. Иначе говоря, функция $A(t)$ является исходной величиной для последующего анализа. В общей ситуации, как и раньше, эффективная процентная ставка $i_{\text{эфф}}(t;t+u)$ для промежутка $(t;t+u)$ – это дробь $\frac{A(t+u)-A(t)}{A(t)}$, а соответствующая простая (номинальная) годовая ставка $i_{\text{ном}}(t;t+u) = \frac{i_{\text{эфф}}(t;t+u)}{u} = \frac{A(t+u)-A(t)}{A(t)\cdot u}$. Её предел при стремлении длины промежутка к нулю называется *мгновенной* (номинальной годовой) *процентной ставкой* или *интенсивностью процентов* в момент t и обозначается $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \lim_{u\to 0} i_{\text{ном}}(t;t+u) = \lim_{u\to 0} \frac{A(t+u)-A(t)}{A(t)\cdot u} = \frac{1}{A(t)} \lim_{u\to 0} \frac{A(t+u)-A(t)}{u} = \frac{A'(t)}{A(t)}. \quad (1.28)$$

В главе 6 мы покажем, что интенсивность процентов $\delta(t)$ можно рассматривать как мгновенную форвардную ставку F_t. График функции F_t ежедневно публикуют центральные банки всех развитых стран. Поэтому в непрерывных моделях финансовой математики обычно предполагается, что функция $\delta(t)$ известна. В этом случае равенство $\delta(t) = \frac{A'(t)}{A(t)}$ можно

рассматривать как дифференциальное уравнение для неизвестной функции $A(t)$. Поскольку $\dfrac{A'(t)}{A(t)} = \big(\ln A(t)\big)'$, это уравнение легко решается:

$$A(t) = A(0)\exp\left(\int_0^t \delta(u)du\right). \qquad (1.29)$$

Из (1.29) вытекает и более общее соотношение:

$$A(t+u) = A(t)\exp\left(\int_t^{t+u} \delta(u)du\right). \qquad (1.30)$$

1.9 Задачи

Задача 1.1 (CT1, September 2005, Problem 3) Вычислите, через сколько дней сумма £1500 вырастет до £1550, если

(a) начисляются простые проценты по ставке $i = 5\%$ годовых;

(b) начисляются сложные проценты в соответствии с интенсивностью процентов $\delta = 5\%$.

Решение. (a) Если начисляются простые проценты и годовая процентная ставка равна $i = 5\%$, то через время t (измеренное в годах) исходная сумма $P = £1500$ вырастет до $A = P(1+it) = 1500\big(1+0.05t\big)$. Нам известно, что $A = £1550$. Поэтому для вычисления t мы имеем уравнение $1550 = 1500\ (1+0.05t)$, откуда

$$t = \frac{2}{3} \text{ (года)} = 8 \text{ (месяцев)} = 243 \text{ (дня)}.$$

Здесь мы предполагаем, что год состоит из 12 месяцев или из 365 дней.

(b) Если начисляются сложные проценты и $\delta = 5\%$, то через время t (измеренное в годах) исходная сумма $P = 1500$ (фунтов) вырастет до $A = Pe^{\delta t} = 1500e^{0.05t}$. Мы знаем, что A=1550. Поэтому для вычисления t мы имеем уравнение $1550 = 1500e^{0.05t}$, откуда $t = 20\ln\dfrac{155}{150} \approx 0.655796$ (лет), т.е. примерно 7.87 месяцев или 239 дней.

Задача 1.2 (CT1, September 2006, Problem 5). (i) Через сколько дней £3,600 вырастет до £4,000, если:

(a) начисляются простые проценты по ставке 6% годовых;

(b) ежеквартально начисляются проценты с капитализацией в соответствии с номинальной годовой ставкой 6%;

(c) ежемесячно начисляются проценты с капитализацией в соответствии с номинальной годовой ставкой 6%.

(ii) Объясните, почему в случае (a) потребуется больше всего времени.

Решение. Пусть P=£3,600 – основная сумма, A=£4,000 – накопление, i=6% – номинальная годовая ставка. Искомое время (в годах) для вариантов (a), (b), (c) обозначим через t_a, t_b, t_c соответственно. Тогда верны равенства: $P\cdot(1+it_a)=A$, $P\cdot\left(1+\frac{i}{4}\right)^{4t_b}=A$, $P\cdot\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12t_c}=A$. Если обозначить эффективный коэффициент накопления A/P=10/9 через k, то

$$t_a=\frac{k-1}{i}\approx 1.851852,\ t_b=\frac{\ln k}{4\ln\left(1+\frac{i}{4}\right)}\approx 1.769146,\ t_b=\frac{\ln k}{12\ln\left(1+\frac{i}{12}\right)}\approx 1.760395.$$

(ii) В случае простых процентов на уже заработанные проценты не начисляются новые проценты. Поэтому для накопления нужной суммы потребуется больше времени. Математически это является следствием неравенства Бернулли: $(1+x)^a\ge 1+ax$, если $x>-1$, $a>1$ или $a<0$ (причём знак равенства достигается тогда и только тогда, когда x=0). В нашем случае $a\equiv 4t_b>1$. Поэтому $1+it_a=k=\left(1+\frac{i}{4}\right)^{4t_b}>1+\frac{i}{4}\cdot 4t_b$, откуда $t_a>t_b$.

Отметим, что всегда $t_b>t_c$. Действительно,

$$\left(1+\frac{i}{4}\right)^{t_b}=\sqrt[4]{k}=\left(1+\frac{i}{12}\right)^{3t_c}>\left(1+\frac{i}{4}\right)^{t_c}.$$

Известно, что неравенство Бернулли меняет знак, если показатель $a\in(0;1)$: $(1+x)^a\le 1+ax$ при $x>-1$, $0<a<1$. Поэтому если бы сумма A была достаточно малой (чтобы $12t_c<1$, т.е. t_c меньше месяца), то мы бы имели неравенства $t_a<t_c<t_b$. Например, для A=3615 мы имеем: $t_a\approx 25.34722$, $t_c\approx 25.35775$, $t_b\approx 25.4838$ (дней).

Задача 1.3 (FM, May 2005, Problem 19) Вычислите номинальную ежемесячную учётную ставку, которая эквивалентна номинальной процентной ставке 18.9% годовых с ежемесячным начислением процентов.

Решение. Номинальной процентной ставке 18.9% годовых с ежемесячным начислением процентов соответствует эффективная процентная ставка для вложения средств на 1 месяц $i_{\text{эфф}}^{(12)}=\frac{18.9\%}{12}=1.575\%$. Поэтому сумма $P=\$100$, инвестированная сейчас, через месяц заработает $I=\$1.575$, т.е. вырастет до $A=\$101.575$. Если считать, что накопление $A=\$101.575$ известно и рассматривать процентный доход $I=\$1.575$ как дисконт D при определении размера исходной суммы $P=\$100$, то $D=\$1.575$ естественно измерять по отношению к $A=\$101.575$. Отношение $\frac{D}{A}=\frac{\$1.1575}{\$101.575}\approx 1.5506\%$ – это

эффективная месячная учётная ставка $d^{(12)}_{\text{эфф}}$. Соответствующая номинальная ставка $d^{(12)}$ по определению равна $12d^{(12)}_{\text{эфф}} \approx 18.6069\%$.

Задача 1.4 (CT1, 3 October 2012, Problem 2)**.** Номинальная годовая учётная ставка для платежа через один квартал равна 8%.

(i) Вычислите эквивалентную интенсивность процентов.

(ii) Вычислите эквивалентную эффективную годовую процентную ставку.

(iii) Вычислите эквивалентную номинальную годовую учётную ставку для платежа через один месяц.

Решение. В стандартных обозначениях финансовой математики нам дано, что $d^{(4)} = 8\%$. Это означает, что, например, вексель со сроком погашения через 3 месяца и номиналом 1 будет учтён по цене $1 - d^{(4)}/4 = 1 - 0.02 = 0.98$.

(i) Если δ – эквивалентная интенсивность процентов, то верно равенство $0.98e^{\delta/4} = 1$, откуда $\delta = -4\ln 0.98 \approx 8.0811\%$.

(ii) Годовая процентная ставка i связана с интенсивностью процентов соотношением: $i = e^{\delta} - 1$. Поэтому $i = e^{-4\ln 0.98} - 1 = 0.98^{-4} - 1 \approx 8.4166\%$.

(iii) В стандартных обозначениях финансовой математики искомая величина – это $d^{(12)}$. Тогда месячный коэффициент дисконтирования равен $1 - d^{(12)}/12$, а квартальный – $\left(1 - d^{(12)}/12\right)^3$. Поэтому для вычисления $d^{(12)}$ можно использовать уравнение $\left(1 - d^{(12)}/12\right)^3 = 1 - d^{(4)}/4$, откуда

$$d^{(12)} = 12 \cdot \left(1 - \sqrt[3]{1 - d^{(4)}/4}\right) = 12 \cdot \left(1 - \sqrt[3]{0.98}\right) \approx 8.0539\%.$$

Задача 1.5 (CT1, September 2013, Problem 1) Эффективная годовая процентная ставка равна 4.5%.

(i) Вычислите:

(a) эффективную годовую учётную ставку.

(b) номинальную годовую учётную ставку, применяемую ежемесячно.

(c) номинальную годовую процентную ставку, применяемую ежеквартально.

(d) эффективную процентную ставку за пять лет.

(ii) Объясните, почему ваш ответ на вопрос (i)(b) больше, чем ответ на вопрос (i)(a).

Решение. По условию задачи мы знаем, что $i = 0.045$. Используя общие формулы, мы имеем:

(a) $d = \dfrac{i}{1+i} = \dfrac{0.045}{1.045} \approx 4.3062\%$;

(b) $d^{(12)} = 12 \cdot \left(1 - (1+i)^{-1/12}\right) = 12 \cdot \left(1 - 1.045^{-1/12}\right) \approx 4.3936\%$;

(c) $i^{(4)} = 4 \cdot \left((1+i)^{1/4} - 1\right) = 4 \cdot \left(1.045^{1/4} - 1\right) \approx 4.426\%$;

(d) эффективная процентная ставка за пять лет равна

$$(1+i)^5 - 1 = 1.045^5 - 1 \approx 24.6182\%.$$

(ii) Неравенство $d^{(p)} > d$ равносильно неравенству $p\left(1-(1-d)^{1/p}\right) > d$, которое в свою очередь равносильно неравенству $(1-d)^{1/p} < 1 - d/p$. Последнее неравенство является частным случаем общего неравенства Бернулли: $(1+t)^a < 1 + at$, если $0 < a < 1$, $t > -1$, $t \neq 0$.

Объяснить справедливость неравенства $d^{(p)} > d$ можно и следующим образом. Предположим, что в момент t=0 в долг на 1 год дана сумма P=1, а проценты должны быть выплачены немедленно, т.е. в момент t=0. Учётная ставка d показывает величину этой процентной выплаты. Если проценты начислять за каждую p-ю часть года, то величина каждой из p процентных выплат равна $(1+i)^{1/p} - 1$. Предположим, что эти проценты должны выплачиваться в начале соответствующей части года, т.е. в моменты $0, 1/p, 2/p, \ldots, (p-1)/p$. Тогда размер каждой выплаты равен $\left((1+i)^{1/p} - 1\right) \cdot (1+i)^{-1/p} = 1 - (1-d)^{1/p}$, а их общая алгебраическая сумма равна $p\left(1-(1-d)^{1/p}\right) = d^{(p)}$. Поскольку во втором случае проценты выплачиваются позже, общая алгебраическая сумма процентов должна быть больше.

Задача 1.6 (CT1, 4 April 2006, Problem 1) Вексель со сроком оплаты через 28 дней учтён в соответствии с простой учётной ставкой 4.5% годовых. Подсчитайте годовую эффективную процентную ставку.

Решение. Прежде всего отметим, что $d = 4.5\%$ – это номинальная учётная ставка. Эффективная учётная ставка равна $d_* = \dfrac{28}{365} d \approx 0.3452055\%$. Это означает, что цена покупки векселя равна $P = F(1 - d_*)$, где F – его номинал. Таким образом, сумма $P = F(1-d_*)$ через $h = 28/365$ (лет) превратилась в сумму F. Годовая эффективная процентная ставка i определяется как годовая процентная ставка по гипотетическому банковскому счёту, который при сроке вклада, отличающемся от года, начисляет проценты в соответствии с формулой сложных процентов и за рассматриваемый промежуток времени даёт тот же итоговый результат, что и наш проект. Поэтому для i верно равенство $(1-d_*)(1+i)^{28/365} = 1$, откуда $i = \left(1-d_*\right)^{-365/28} - 1 \approx 4.6109\%$.

Задача 1.7 (CT1, September 2007, Problem 1) 90-дневный правительственный вексель приобретён за £96 в момент эмиссии и продан через 45 дней другому инвестору за £97.90. Второй инвестор держит вексель до срока погашения и получает £100. Какой инвестор получил более высокую доходность?

Решение. Поскольку оба инвестора вложили деньги на один и тот же срок, можно сравнивать эффективные доходности. Для первого инвестора она

равна $i_1 = \frac{97.90 - 96}{96} \approx 1.979\%$, а для второго – $i_2 = \frac{100 - 97.90}{97.90} \approx 2.145\%$. Таким образом, второй инвестор получил бóльшую доходность.

Задача 1.8 (CT1, 27 September 2011, Problem 1) Правительство выпустило 91 дневный казначейский вексель. Инвестор приобрёл его в день выпуска с простым дисконтом, равным $d = 8\%$ годовых. Вычислите эффективную годовую доходность этой покупки для инвестора.

Решение. Время до погашения равно $h = 91/365 \approx 0.25$ года. Поэтому эффективная учётная ставка для этого промежутка времени равна $dh \approx 2\%$. Значит, за F=100 номинала цена продажи равна $P = F(1 - dh) \approx 98.01$. Эффективная доходность за период до погашения равна $i^{\text{эфф}} = \frac{F - P}{P} = \frac{dh}{1 - dh} \approx 1.99\%$. Эффективная годовая доходность i находится из равенства $(1+i)^h = 1 + i^{\text{эфф}}$, откуда $i = (1 - dh)^{-1/h} - 1 \approx 8.4163\%$.

Задача 1.9 (CT1, 3 October 2012, Problem 1) Инвестор рассматривает два проекта. Один из них – это депозит на 91 день, по которому выплачиваются проценты в соответствии с эффективной годовой ставкой 4%. Второй – казначейский вексель.

Вычислите простую годовую учётную ставку для казначейского векселя, если известно, что оба инструмента обеспечивают одну и ту же эффективную доходность.

Решение. Пусть d – искомая простая годовая учётная ставка, а F – номинал казначейского векселя. Обычно казначейский вексель правительства Великобритании размещается на 3 месяца (91 день). Поэтому эффективная учётная ставка равна $1 - d \cdot \frac{91}{365}$, так что вексель размещается по цене $P = F \cdot \left(1 - d \cdot \frac{91}{365}\right)$. Если i=0.04 – эффективная годовая доходность векселя, то верно равенство $F \cdot \left(1 - d \cdot \frac{91}{365}\right) \cdot (1+i)^{91/365} = F$, откуда

$$d = \left(1 - 1.04^{-91/365}\right) \cdot \frac{365}{91} = 3.903\% .$$

Задача 1.10 (CT1, 30 September 2009, Problem 1) В момент выпуска инвестор приобрёл за £96 182-дневный правительственный вексель с выкупной ценой £100, позже продал его другому инвестору за £97.89. Первый инвестор заработал на этой сделке 5% годовых эффективно.

(a) Вычислите, сколько дней первый инвестор держал вексель.

(b) Вычислите простую годовую доходность, полученную вторым инвестором.

Решение. (a) Пусть t – искомое время (лет). Тогда верно равенство $£96 \cdot 1.05^t = £97.89$, откуда $t = \dfrac{\ln \dfrac{97.89}{96}}{\ln 1.05} \approx 0.4$ (лет), т.е. $365 \cdot 0.4 = 146$ дней.

(b) Поскольку первый инвестор держал вексель 146 дней, а время до погашения равно 182 дня, второй инвестор держал вексель 36 дней. За это время второй инвестор заработал $£100 - £97.89 = £2.11$, что означает эффективную доходность $\dfrac{2.11}{97.89} \approx 2.1555\%$. Соответствующая номинальная годовая ставка $\dfrac{2.1555\%}{36/365} \approx 21.8542\%$ и будет искомой простой годовой доходностью, полученной вторым инвестором.

Задача 1.11 (CT1, September 2007, Problem 2) В начале года инвестор покупает акцию[15] за 769p[16]. В середине года он получает дивиденды[17], не облагаемые налогом, в размере 4p и сразу же продаёт акцию за 800p. Разница между ценой покупки и продажи акции облагается налогом на прирост капитала[18] по ставке 30%. Подсчитайте чистую годовую эффективную ставку доходности[19] этого инвестиционного проекта.

Решение. Вложенный капитал равен P=769p. Через полгода инвестор получил:

1. дивиденды: 4p;
2. деньги, вырученные от продажи акции: 800p, из которых он должен вычесть налог на прирост капитала.

Поскольку разница между ценой покупки и ценой продажи акции равна $800 - 769 = 31$ (пенсов), этот налог равен $0.3 \cdot 31 = 9.3$ (пенсов). Таким образом, в общей сложности инвестор получит 794.70p, т.е. чистый доход равен I=25.70p. Соответственно, чистая эффективная ставка доходности за 6 месяцев равна $i_* = \dfrac{25.7}{769} \approx 0.03342$.

---

[15] акция (share [ʃeə], stock [stɔk], equity ['ekwɪtɪ]) – это ценная бумага, которая даёт право на участие в управлении акционерным обществом и получение дивидендов. Буквально share значит «доля», «часть».

[16] p – сокращение от penny (денежная единица, равная 1/100 фунта стерлингов) или pence (мн.ч. от pennny – 1 penny, но 2 pence).

[17] дивиденды (часть прибыли, распределяемая ежегодно между акционерами) – dividend ['dɪvɪdend]; dividend yield — дивидендный доход (дивиденд, рассчитанный как процент от рыночной стоимости акций). В математике слово dividend перводится как «делимое» (от divide [dɪ'vaɪd] – делить).

[18] налог на прирост капитала – capital gains tax [,kæpɪtl'geɪnztæks] (CGT).

[19] net annual effective rate of return – чистая годовая эффективная ставка доходности (фактически это внутренняя норма доходности IRR)

Эквивалентная годовая ставка дохода i определяется как годовая процентная ставка по гипотетическому банковскому счёту, который при сроке вклада, отличающемся от года, начисляет проценты в соответствии с формулой сложных процентов и за рассматриваемый промежуток времени даёт тот же итоговый результат, что и наш проект. Поэтому для i верно равенство $(1+i)^{1/2} = 1+i_*$, откуда $i = (1+i_*)^2 - 1 = 2i_* + i_*^2 \approx 6.7957\%$.

Задача 1.12 (CT1, September 2006, Problem 3). Человек инвестировал сумму £10m. Через год его вклад оценивался в £11.1m. В начале этого проекта индекс цен был 112, а в конце – 120. Инвестор платит налог в размере 40% на доход от инвестиций. Вычислите:

(a) денежную годовую ставку дохода до уплаты налогов;

(b) индекс инфляции;

(c) реальную годовую доходность после уплаты налогов.

Решение. (a) За год инвестиция принесла доход I=£1.1m. Поэтому денежная годовая ставка дохода до уплаты налогов (её называют gross interest rate – брутто-ставкой) равна $i = 1.1/10 = 11\%$.

(b) По условию за 112 денежных единиц в начале года мы могли купить те же товары, за которые в конце года нужно платить 120 денежных единиц, т.е. цены выросли в $\dfrac{120}{112} \approx 1.071429$ раз или, что то же самое, примерно на 7.143% – это и будет уровень инфляции f.

(c) На доход I=£1.1m будет начислен налог в размере $0.4 \cdot 1.1 = 0.44$. Поэтому чистый доход составит I_{net}=£0.66m. Соответственно, чистая годовая ставка равна i=6.6%, а реальная, очищенная от инфляции, процентная ставка равна

$$i_{\text{real}} = \frac{i-f}{1+f} \approx \frac{6.6\% - 7.143\%}{1+0.07143} \approx -0.5068\%.$$

Задача 1.13 (CT1, September 2005, Problem 2) Портфель[20] облигаций некоторой страны за последние 10 лет приносил денежную доходность 1% годовых. На протяжении этого периода в стране наблюдалась дефляция на уровне 2% в год. Вычислите реальную годовую доходность этих облигаций.

Решение. Если i=1% – эффективная денежная доходность, $f = -2\%$ – годовая инфляция, то реальная эффективная доходность (с учётом дефляции) равна

$$i_{\text{real}} = \frac{i-f}{1+f} = \frac{0.01+0.02}{1+0.02} \approx 0.030612 = 3.0612\%.$$

[20] Портфель (портфель ценных бумаг) – portfolio [ˌpɔːt'fəulɪəu], также: investment portfolio; security portfolio.

Задача 1.14 (CT1, September 2008, Problem 1) 91-дневный правительственный вексель приобретён за £95 в момент эмиссии и погашен в срок за £100. На протяжении этих 91 дней индекс потребительских цен вырос с 220 до 222. Вычислите реальную эффективную годовую доходность.

Решение. Эффективная (денежная) доходность за 91 день, что составляет h=91/365 года, равна $i_* = (100-95)/95 \approx 5.2632\%$. С другой стороны, инфляция равна $f = \dfrac{222}{220} - 1 \approx 0.9091\%$. Поэтому реальная эффективная доходность за этот промежуток равна $i_*^{\text{real}} = \dfrac{i_* - f}{1+f} \approx 4.3148\%$, а реальная эффективная годовая ставка равна $i_{\text{real}} = \left(1 + i_*^{\text{real}}\right)^{1/h} - 1 \approx 18.4639\%$.

Задача 1.15 (CT1, 19 April 2011, Problem 1) Интенсивность процентов, $\delta(t)$, является функцией времени и, при измерении времени t годами, задаётся формулой:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0.04 + 0.003t^2, & \text{для } 0 < t \le 5, \\ 0.01 + 0.03t, & \text{для } t > 5. \end{cases}$$

(i) Сумма $P = £1000$ инвестируется в момент $t_1 = 3$. Подсчитайте величину накопления в момент $t_2 = 7$.

(ii) Предположим, что проценты начислялись бы ежемесячно в соответствии с постоянной процентной ставкой. При какой номинальной месячной учётной ставке была бы накоплена та же сумма, что и в пункте (i)?

Решение. (i) Известно, что искомое накопление A может быть подсчитано по следующей общей формуле: $A = P\exp\left\{\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt\right\}$. Поскольку функция $\delta(t)$ задаётся разными формулами на промежутках [0;5] и $(5;+\infty)$, удобно разбить интеграл $\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt = \int_3^7\delta(t)dt$ на два:

$$\int_3^7\delta(t)dt = \int_3^5\delta(t)dt + \int_5^7\delta(t)dt \equiv \int_3^5(0.04+0.003t^2)dt + \int_5^7(0.01+0.03t)dt.$$

Для первого интеграла первообразная функция равна $0.04t + 0.001t^3$, так что сам интеграл равен

$$0.04t + 0.001t^3\Big|_3^5 = 0.04\cdot(5-3) + 0.001\cdot(5^3 - 3^3) = 0.08 + 0.098 = 0.178.$$

Для второго интеграла первообразная функция равна $0.01t + 0.015t^2$, так что сам интеграл равен

$$0.01t + 0.015t^2\Big|_5^7 = 0.01\cdot(7-5) + 0.015\cdot(7^2 - 5^2) = 0.02 + 0.36 = 0.38.$$

Соответственно, $A = 1000e^{0.178+0.38} = 1000e^{0.558} = 1747.17465...$ Округляя до целых пенсов, мы получим сумму £1747.17.

(ii) Промежуток времени $3 \le t \le 7$ состоит из $4 \cdot 12 = 48$ месяцев. Если $i_*^{(12)}$ – гипотетическая постоянная месячная эффективная процентная ставка, а $\mathrm{v}_* = 1/\left(1+i_*^{(12)}\right)$ – коэффициент дисконтирования за один месяц, то $P = A\mathrm{v}_*^{48}$. Отсюда $\mathrm{v}_* = \left(P/A\right)^{1/48}$. Соответственно, эффективная месячная учётная ставка $d_*^{(12)}$ равна $1-\mathrm{v}_* = 1-\left(P/A\right)^{1/48}$, а искомая номинальная годовая учётная ставка $d^{(12)}$ равна

$$12d_*^{(12)} = 12\left(1-\left(P/A\right)^{1/48}\right) = 12\left(1-e^{-0.558/48}\right) = 0.138692... \approx 13.87\%.$$

Задача 1.16 (CT1, 6 April 2005, Problem 10) (i) За любой год годовая эффективная процентная ставка по банковскому вкладу является случайной величиной со средним значением i и стандартным отклонением s. Кроме того, она не зависит от годовых процентных ставок за предыдущие годы.

Предположим, что в момент $t = 0$ на счёт была внесена сумма 1. Пусть S_n – накопление после n лет.

(a) Покажите, что $ES_n = (1+i)^n$.

(b) Покажите, что $VarS_n = \left((1+i)^2 + s^2\right)^n - (1+i)^{2n}$.

(ii) Годовая эффективная процентная ставка может принимать только два значения, i_1 или i_2 $(i_1 > i_2)$.

(a) Получите выражения для i и s в терминах i_1 и i_2.

(b) Накопление в момент t=25 на сумму один миллион фунтов имеет среднее значение 5.5 миллионов фунтов и стандартное отклонение 0.5. Вычислите значения i_1 и i_2.

Решение. (i) Пусть i_k – эффективная годовая процентная ставка за k-й год. Тогда накопление S_n можно вычислить по формуле (1.17): $S_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+i_k\right)$. Поскольку случайные величины $i_1,\ldots,i_n$ независимы, мы имеем:

$$ES_n = E\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+i_k\right)\right) = \prod_{k=1}^{n}E\left(1+i_k\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(1+Ei_k\right) = (1+i)^n.$$

Аналогично для второго момента:

$$ES_n^2 = E\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+i_k\right)^2\right) = \prod_{k=1}^{n}E\left(1+2i_k+i_k^2\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(1+2Ei_k+Ei_k^2\right) = \left(1+2i+s^2+i^2\right)^n.$$

Поскольку $VarS_n = ES_n^2 - \left(ES_n\right)^2$, отсюда немедленно следует требуемая формула.

(ii) Поскольку $E\xi_k = i_1 \cdot P\left(\xi_k = i_1\right) + i_2 \cdot P\left(\xi_k = i_2\right)$, в случае $P(\xi_k = i_1) = \frac{1}{2}$, $P(\xi_k = i_2) = \frac{1}{2}$ мы имеем: $i \equiv E\xi_k = \frac{i_1 + i_2}{2}$.

Аналогично, $E\xi_k^2 = i_1^2 \cdot P\left(\xi_k = i_1\right) + i_2^2 \cdot P\left(\xi_k = i_2\right) = \frac{i_1^2 + i_2^2}{2}$. Поэтому

$$s^2 = Var\xi_k = E\xi_k^2 - (E\xi_k)^2 = \frac{i_1^2 + i_2^2}{2} - \left(\frac{i_1 + i_2}{2}\right)^2 = \frac{(i_1 - i_2)^2}{4},$$

так что $s = \frac{i_1 - i_2}{2}$ (напомним, что $i_1 > i_2$).

Из равенств

$$ES_{25} \equiv (1+i)^{25} = 5.5, \quad VarS_{25} \equiv \left((1+i)^2 + s^2\right)^{25} - (1+i)^{50} = 0.25,$$

легко найти i и s: $i = \sqrt[25]{5.5}$, $s = \sqrt{\sqrt[25]{30.5} - \sqrt[25]{30.25}}$. С другой стороны, соотношения $i = \frac{i_1 + i_2}{2}$, $s = \frac{i_1 - i_2}{2}$ влекут, что $i_1 = i + s$, $i_2 = i - s$. Поэтому $i_1 \approx 8.9995\%$, $i_2 \approx 5.1142\%$.

Задача 1.17 (CT1, 3 October 2012, Problem 7)**.** Человек желает вложить деньги таким образом, чтобы получить через двадцать лет £200,000. В первые десять лет с вероятностью 0.3 инвестированные средства будут приносить 4% годовых, а с вероятностью 0.7 уже 6%. Во вторые десять лет с распределение годовой процентной ставки такое же, однако процентная ставка во втором десятилетнем периоде не зависит от процентной ставки в первом десятилетнем периоде.

(i) Вычислите сумму, которую следует инвестировать, если бы человек производил расчёты, используя среднее значение годовой процентной ставки в каждом десятилетнем периоде.

(ii) Предположим, что инвестирована сумма, вычисленная в пункте (i). На сколько в среднем результат инвестиции превысит сумму £200,000.

(iii) Вычислите размах накопления, если инвестирована сумма, вычисленная в пункте (i).

Решение. (i) Пусть i_1 (i_2) – реальная годовая процентная ставка за первый (второй) десятилетний период. По условию i_1 и i_2 являются одинаково распределёнными случайными величинами с распределением: $P(i_1 = 4\%) = P(i_2 = 4\%) = 0.03$, $P(i_1 = 6\%) = P(i_2 = 6\%) = 0.07$. Поэтому среднее значение годовой процентной ставки в каждом десятилетнем периоде равно $i = 0.3 \cdot 4\% + 0.7 \cdot 6\% = 5.4\%$. Если P – искомая сумма, которую следует инвестировать, A=£200,000 – желаемое накопление, n=20 – срок инвестиции, то

по стандартной формуле сложных процентов мы имеем $A = P \cdot (1+i)^n$, откуда $P = A \cdot (1+i)^{-n} = £200000 \cdot 1.054^{-20} = £69858.26$.

(ii) Реальное накопление равно $P(1+i_1)^{10}(1+i_2)^{10}$, так что искомое превышение есть $P(1+i_1)^{10}(1+i_2)^{10} - 200000$. Его среднее значение равно $X = E\left(P(1+i_1)^{10}(1+i_2)^{10}\right) - 200000$. Поскольку случайные величины i_1 и i_2 являются независимыми, $X = P \cdot E\left((1+i_1)^{10}\right) \cdot E\left((1+i_2)^{10}\right) - 200000$. Здесь

$$E\left((1+i_1)^{10}\right) = E\left((1+i_2)^{10}\right) = 0.3 \cdot 1.04^{10} + 0.7 \cdot 1.06^{10} \approx 1.697666673.$$

Поэтому *X*=£1336.55.

(iii) Реальное накопление $P(1+i_1)^{10}(1+i_2)^{10}$ является случайной величиной, которая принимает три значения: $P \cdot 1.04^{20} < P \cdot 1.04^{10} \cdot 1.06^{10} < P \cdot 1.06^{20}$, с вероятностями 0.09, 0.42 и 0.49 соответственно. Поэтому размах накопления равен $P \cdot \left(1.06^{20} - 1.04^{20}\right) = £70976.86$.

Задача 1.18 (CT1, 15 April 2013, Problem 6) Сумма £10,000 инвестирована на 15 лет. Доходность этой инвестиции за любой год будет равна 5% с вероятностью 0.2, 7% с вероятностью 0.6 и 9% с вероятностью 0.2. Годовые доходности независимы в совокупности.

(i) Вычислите ожидаемое накопление к концу 15-го года.

(ii) Вычислите стандартное отклонение накопления к концу 15-го года.

(iii) Не проводя вычисления, скажите, изменились бы или нет и почему ответы на вопросы (i) и (ii), если бы

(a) годовая доходность принимала значения 6%, 7% и 8%, а не 5%, 7% и 9% соответственно;

(b) срок инвестирования уменьшился с 15 лет до 13 лет.

Решение. (i) Примем £10,000 в качестве новой денежной единицы и обозначим через i_k доходность за k-й год. Как мы отметили при решении предыдущей задачи, после завершения нашего проекта через 15 лет мы получим сумму $S_{15} = \prod_{k=1}^{15}(1+i_k)$. Поскольку случайные величины $i_1,\ldots,i_n$ независимы, среднее значение этой суммы равно $ES_{15} = (1+i)^{15}$, где $i = Ei_k$ – средняя доходность за один год. В нашем случае $i = 5\% \cdot 0.2 + 7\% \cdot 0.6 + 9\% \cdot 0.2 = 7\%$, так что $ES_{15} = 1.07^{15} = 2.759032$ (условных единиц), что означает £27590.32.

(ii) Далее, $Ei_k^2 = \left(5^2 \cdot 0.2 + 7^2 \cdot 0.6 + 9^2 \cdot 0.2\right) \cdot 10^{-4} = 0.00506$. Поэтому

$$ES_{15}^2 = E\left(\prod_{k=1}^{15}(1+i_k)^2\right) = \prod_{k=1}^{15}\left(1 + 2Ei_k + Ei_k^2\right) = 1.14506^{15} \approx 7.628228,$$

а стандартное отклонение равно $\sqrt{VarS_{15}} = \sqrt{ES_{15}^2 - \left(ES_{15}\right)^2} \approx 0.126384$ (условных единиц), что означает £1263.84.

(iii) (a) Если годовая доходность принимает значения 6%, 7% и 8% с вероятностями 0.2, 0.6, 0.2 соответственно, то её среднее значение равно 7%, т.е совпадает со средним значением доходности для основной ситуации. С другой стороны, при взаимной независимости годовых доходностей среднее значение итогового накопления зависит от годовых доходностей только через их средние. Поэтому ожидаемое накопление через 15 лет не изменится.

Второй момент годовой доходности в новой ситуации равен $\left(6^2 \cdot 0.2 + 7^2 \cdot 0.6 + 8^2 \cdot 0.2\right) \cdot 10^{-4} = 0.00494$, т.е. меньше, чем для исходной ситуации. Поскольку средний годовой доход в обоих случаях один и тот же, меньше будет и второй момент накопления, а, значит, и его дисперсия.

(b) Если срок инвестирования уменьшится с 15 лет до 13 лет, то среднее накопление уменьшится (деньги будут вложены на меньший срок). Поскольку $VarS_n \equiv \left((1+i)^2 + s^2\right)^n - (1+i)^{2n} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (1+i)^{2(n-k)} s^{2k}$, при фиксированных j и s дисперсия накопления монотонно возрастает вместе с n. Значит, стандартное отклонение тоже уменьшится.

Задача 1.19 (CT1, 12 April 2007, Problem 11) Сумма £80,000 размещена на банковский счёт, проценты по которому начисляются в конце каждого года. Проценты всегда снова размещаются на этот счёт. Процентная ставка определяется в начале каждого года и до начала следующего года остаётся неизменной. Годовые процентные ставки независимы в совокупности.

Для первого года эффективная годовая процентная ставка может принимать значения 4%, 6% или 8% с равными вероятностями.

Для второго года эффективная годовая процентная ставка может быть равна или 7% (с вероятностью 0.75), или 5% (с вероятностью 0.25).

Для третьего года эффективная годовая процентная ставка может быть равна или 6% (с вероятностью 0.7), или 4% (с вероятностью 0.3).

(i) Вычислите среднее значение суммы, которая будет накоплена на этом банковском счёте к концу третьего года.

(ii) Вычислите дисперсию суммы, накопленной на этом банковском счёте к концу третьего года.

(iii) Вычислите вероятность того, что сумма, накопленная к концу третьего года, больше, чем £97,000.

Решение. (i) Пусть i_k – эффективная годовая процентная ставка за k-й год, $\kappa_k = 1 + i_k$ – соответствующий коэффициент накопления. В силу формулы (1.17) накопление к концу третьего года можно вычислить по формуле: $S_3 = £80000\kappa_1\kappa_2\kappa_3$. Поскольку случайные величины $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ независимы (как и величины i_1, i_2, i_3), мы имеем:

$$ES_3 = £80000 \cdot E\kappa_1 \cdot E\kappa_2 \cdot E\kappa_3.$$

Но $E\kappa_1 = 1.04 \cdot \frac{1}{3} + 1.06 \cdot \frac{1}{3} + 1.08 \cdot \frac{1}{3} = 1.06,$ $E\kappa_2 = 1.07 \cdot 0.75 + 1.05 \cdot 0.25 = 1.065,$ $E\kappa_3 = 1.06 \cdot 0.7 + 1.04 \cdot 0.3 = 1.054$. Поэтому $ES_3 = £95188.85$.

(ii) Для дисперсии итогового коэффициента накопления $\kappa = \kappa_1\kappa_2\kappa_3$ мы имеем:

$$Var(\kappa) = E(\kappa_1\kappa_2\kappa_3)^2 - \left(E(\kappa_1\kappa_2\kappa_3)\right)^2 = E\kappa_1^2 E\kappa_2^2 E\kappa_3^2 - (E\kappa_1)^2 (E\kappa_2)^2 (E\kappa_3)^2.$$

Первые моменты величин $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ мы уже вычислили. Для вторых моментов аналогично имеем: $E\kappa_1^2 = 1.04^2 \cdot \frac{1}{3} + 1.06^2 \cdot \frac{1}{3} + 1.08^2 \cdot \frac{1}{3} \approx 1.123867,$ $E\kappa_2^2 = 1.07^2 \cdot 0.75 + 1.05^2 \cdot 0.25 = 1.1343,$ $E\kappa_3^2 = 1.06^2 \cdot 0.7 + 1.04^2 \cdot 0.3 = 1.111.$ Отсюда $Var(\kappa) \approx 5.3673 \cdot 10^{-4},$ так что $VarS_3 = 80000^2 \cdot Var(\kappa) \approx 3435072.817,$ а стандартное отклонение равно £1853.39.

(iii) Сумме £97000 соответствует коэффициент накопления $\kappa = \frac{97000}{80000} = 1.2125$. Поскольку $\max\kappa_1 = 1.08,$ $\max\kappa_2 = 1.07,$ $\max\kappa_3 = 1.06,$ наибольшее значение величины κ равно $1.08 \cdot 1.07 \cdot 1.06 = 1.224936 > 1.2125$. Следующее в порядке убывания значение величины κ равно $1.06 \cdot 1.07 \cdot 1.06 = 1.202252 < 1.2125$. Поэтому искомая вероятность равна

$$P(i_1 = 8\%, i_2 = 7\%, i_3 = 6\%) = P(i_1 = 8\%)P(i_2 = 7\%)P(i_3 = 6\%) = 0.175.$$

Задача 1.20 (CT1, 25 September 2007, Problem 9) Ожидаемая эффективная годовая доходность банковского портфеля ценных бумаг равна 6%, а стандартное отклонение равно 8%. Для разных лет эффективные годовые доходности i_t независимы в совокупности, а коэффициенты накопления $1 + i_t$ имеют логнормальное распределение. Получив все необходимые формулы, (i) вычислите ожидаемую стоимость инвестиции в размере 2 миллиона фунтов через 10 лет; (ii) вычислите вероятность того, что по истечении 10 лет накопление будет меньше 80% его ожидаемого значения.

Решение. (i) Примем £2,000,000 в качестве новой денежной единицы. Тогда накопление S_{10} через 10 лет даётся формулой $S_{10} = (1 + i_1)(1 + i_2)\ldots(1 + i_{10})$. В силу взаимной независимости и одинаковой распределённости случайных величин $i_1, \ldots, i_{10}$, его среднее значение равно $ES_{10} = (1 + Ei_k)^{10} = 1.06^{10} = 1.7908477$ (условных единиц), что означает £3,581,695.39.

(ii) Напомним, что случайная величина η имеет логнормальное распределение с параметрами a и σ^2, если $\ln\eta$ имеет нормальное распределение с теми же параметрами (таким образом, в качестве параметров нормального распределения мы рассматриваем среднее и дисперсию), т.е. $\eta = e^{a+\sigma\xi}$, где $\xi \sim N(0;1)$ – стандартная гауссовская величина. Известно, что для

логнормальной величины η с параметрами a и σ^2 среднее значение $E\eta$ и дисперсия $Var\eta$ даются формулами $E\eta = e^{a+\sigma^2/2}$, $Var\eta = e^{2a+\sigma^2}\cdot\left(e^{\sigma^2}-1\right)$ (так что коэффициент вариации $c = \dfrac{\sqrt{Var\eta}}{E\eta}$ равен $\sqrt{e^{\sigma^2}-1}$). Из этих равенств легко выразить параметры a и σ^2 логнормальной случайной величины η через её среднее значение $E\eta$ и дисперсию $Var\eta$:

$$\sigma^2 = \ln\left(1+\frac{Var\eta}{\left(E\eta\right)^2}\right),\ a = \ln\left(E\eta\right)-\frac{1}{2}\sigma^2 = \ln\left(E\eta\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{Var\eta}{\left(E\eta\right)^2}\right).$$

При решении задачи мы будем обозначать через a и σ^2 параметры логнормальной случайной величины $1+i_k$. Поскольку $E\left(1+i_k\right)=1+Ei_k=1.06$, $Var(1+i_k)=Var\left(i_k\right)=0.0064$, из приведённых выше общих равенств для логнормального распределения мы получим: $\sigma^2 = \ln\dfrac{2825}{2809}$.

Предположение о том, что годовые эффективные коэффициенты накопления $1+i_k$ независимы и имеют логнормальное распределение с параметрами a и σ^2 означает, что соответствующие интенсивности процентов $\delta_k = \ln(1+i_k)$ независимы и имеют нормальное распределение с теми же параметрами a и σ^2, т.е. $\delta_k = a+\sigma\xi_k$, где ξ_k взаимно независимые стандартные гауссовские величины. Поскольку $\ln S_n = \sum_{k=1}^{n}\ln(1+i_k) = \sum_{k=1}^{n}\delta_k$, а сумма независимых нормальных величин с параметрами $\left(a_1,\sigma_1^2\right),\ldots,\left(a_n,\sigma_n^2\right)$ также имеет нормальное распределение (с параметрами $a = a_1+\ldots+a_n$ и $\sigma^2 = \sigma_1^2+\ldots+\sigma_n^2$), накопление S_n также имеет логнормальное распределение с параметрами na и $n\sigma^2$: $S_n = e^{an+\sigma\sqrt{n}\xi}$, где ξ – стандартная гауссовская величина. В частности, $ES_n = e^{an+n\sigma^2/2}$.

Теперь для искомой вероятности $P = P\left(S_{10} < 0.8ES_{10}\right)$ мы имеем: $P = P\left(\xi < \dfrac{\ln 0.8+5\sigma^2}{\sqrt{10}\sigma}\right) \equiv \Phi\left(\dfrac{\ln 0.8+5\sigma^2}{\sqrt{10}\sigma}\right)$. Используя вычисленное ранее значение параметра σ^2, можно подсчитать аргумент функции Φ; он равен –0.8171428. С помощью таблицы для стандартного нормального распределения мы найдём искомую вероятность: $P \approx 0.2069$.

Вычисления можно существенно упростить, если воспользоваться стандартной функцией LOGNORMDIST (ЛОГНОРМ.РАСП в русской версии) пакета Microsoft Excel. Она позволяет для логнормальной величины η с параметрами a и σ^2 найти вероятность $P(\eta < x)$ набрав в ячейке формулу =

LOGNORMDIST($x;a;\sigma$). Поэтому нашу задачу можно решить следующим образом:

1. внести в ячейку A1 число 0.06 (среднее значение случайной величины i_k);
2. внести в ячейку A2 число 0.08 (значение стандартного отклонения);
3. для посчёта ES_{10} внести в ячейку A3 формулу =(1+A1)^10 – в результате мы получим число 1.7908477;
4. для посчёта σ^2 внести в ячейку A4 формулу =LN((A2/(1+A1))^2+1) – в результате мы получим число 0.00567982;
5. для подсчёта a внести в ячейку A5 формулу =–A4/2+LN(1+A1) – в результате мы получим число 0.055429;
6. и наконец, для подсчёта искомой вероятности внести в ячейку A6 формулу =LOGNORMDIST(0.8*A3;10*A5;SQRT(10*A4)) – в результате мы получим число 0.2069234.

Задача 1.21 (CT1, 19 April 2011, Problem 10) Для инвестиционного проекта A годовая доходность i является случайной величиной со средним $a = 6\%$ и стандартным отклонением $b = 3\%$. Соответствующий коэффициент накопления $\kappa = 1 + i$ распределён по логнормальному закону с параметрами μ и σ^2.

(i) Вычислите значения μ и σ^2.

Страховая компания должна выплатить сумму £15m через один год. В настоящее время она располагает суммой £14m. Эти средства можно инвестировать или в проект A, описанный выше, или в проект B, который гарантированно принесёт $r = 4\%$ годовых.

(ii) Подсчитайте (с точностью до двух знаков после запятой) вероятность того, что страховая компания не сможет выполнить свои обязательства, если:

(a) Все средства будут инвестированы в проект B;

(b) 75% средств будет инвестировано в проект A, а 25% – в проект B.

(iii) Подсчитайте стандартное отклонение дохода от инвестиций, описанных в пунктах (ii)(a) и (ii)(b).

Решение. Поскольку $E\kappa = 1 + Ei = 1.06$, $Var(\kappa) = Var(i) = 0.0009$, из приведённых выше общих формул для логнормального распределения мы имеем:

$$\sigma^2 = \ln\left(1 + \frac{Var(\kappa)}{\left(E(\kappa)\right)^2}\right) = \ln\frac{11245}{11236} \approx 0.000800676,$$

$$\mu = \ln\left(E(\kappa)\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 = \ln 1.06 - \frac{1}{2}\ln\frac{11245}{11236} \approx 0.05786857.$$

(ii) (a) Если вся сумма $P = £14\text{m}$ будет инвестирована в проект B, который гарантированно приносит $r = 4\%$ годовых, то через год страховщик

будет располагать суммой (в миллионах фунтов) $P(1+r)=14\cdot 1.04=14.56$. Поэтому вероятность того, что страховая компания не сможет выполнить свои обязательства, равна 1.

(ii) (b) Сумма, которой будет через год располагать страховщик, состоит из двух частей:

1. детерминированной суммы (в миллионах фунтов) $3.5\cdot 1.04=3.64$, которая будет получена от инвестирования 25% от суммы £14m (т.е. £3.5m) в проект B;

2. случайной суммы (в миллионах фунтов) 10.5κ, которая будет получена от инвестирования 75% от суммы £14m (т.е. £10.5m) в проект A.

Страховщик не сможет выполнить свои обязательства, если вторая сумма будет меньше, чем $15-3.64=11.36$. Вероятность этого события равна $P(10.5\kappa<11.36)=P\left(\delta<\ln\frac{1136}{1050}\right)$. Случайная величина $\delta=\ln\kappa$ имеет нормальное распределение со средним μ и дисперсией σ^2. Поэтому искомая вероятность равна $\Phi\left(\frac{\ln(1136/1150)-\mu}{\sigma}\right)\approx\Phi(0.737009563)\approx 77\%.$

(iii) (a) В случае (ii) (a) страховщик получит детерминированный доход в размере £0.56m. Поэтому стандартное отклонение равно 0.

(iii) (b) В случае (ii) (b) доход страховщика равен $3.5\cdot 0.04+10.5i$ (млн. фунтов). Дисперсия этой случайной величины равна $10.5^2 Var(i)$, так что стандартное отклонение равно $10.5\cdot 0.03=0.315$ (млн. фунтов), т.е. £315,000.

Задача 1.22 (CT1, 7 September 2005, Problem 8) Страховая компания только что заключила договоры страхования, в соответствии с которыми через пять лет она должна выплатить страхователям 1 миллион фунтов. Общая премия, уплаченная страхователями, равна 850,000 фунтов. Страховщик инвестирует половину этой премии в ценные бумаги с фиксированной доходностью 3% годовых. Вторая половина поступивших премий инвестируется в активы с негарантируемой доходностью. Доходность i_t этих активов за год t имеет среднее значение 3.5% и стандартное отклонение 3%. Коэффициенты накопления $1+i_t$ независимы в совокупности и имеют логнормальное распределение.

(i) Получив все необходимые формулы, вычислите среднее значение и стандартное отклонение накопления от премий через пять лет.

(ii) Директор компании предполагает, что инвестирование всех премий в активы с негарантируемой доходностью было бы предпочтительнее, поскольку ожидаемое накопление будут больше, чем выплаты, которые нужно сделать страхователям. Объясните, почему эта инвестиционная стратегия может быть более рискованной.

Решение. (i) Рассмотрим 1 миллион фунтов в качестве новой денежной единицы. Тогда собранная премия равна 0.85. Сумма, инвестированная в ценные бумаги с фиксированной доходностью, равна 0.425. Через пять лет она вырастет до $S_f = 0.425 \cdot 1.03^5 \approx 0.492691482$. Сумма, инвестированная в активы, доходность которых не может быть гарантирована, также равна 0.425, а через пять лет она составит $S_a = 0.425\kappa$, где $\kappa = (1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)(1+i_4)(1+i_5)$. Поскольку доходности $i_1,\dots,i_5$ являются случайными величинами, случайной величиной будет и накопление S_a. Для его среднего значения мы имеем:

$$ES_a = 0.425E\left[(1+i_1)\dots(1+i_5)\right] = 0.425\left(1+Ei_t\right)^5 = 0.425 \cdot 1.035^5 \approx 0.504766680.$$

Общее накопление от собранных премий через пять лет равно $S = S_f + S_a$, так что $ES = S_f + ES_a = 0.997458161$, или, в абсолютных единицах, £997,458.16. Это означает, в частности, что в среднем собранные премии вместе с доходом от их инвестирования не покроют обязательства страховщика.

Теперь найдём стандартное отклонение σ_S общего накопления S от собранных премий через пять лет. Прежде всего отметим, что $\sigma_S^2 = VarS = Var(S_f + S_a) = VarS_a = ES_a^2 - \left(ES_a\right)^2$. Мы уже подсчитали ES_a, а

$$\begin{aligned} ES_a^2 &= 0.425^2 \cdot E\left[(1+i_1)^2\dots(1+i_5)^2\right] = 0.425^2\left(E(1+i_t)^2\right)^5 = 0.425^2\left(1+2Ei_t+Ei_t^2\right)^5 \\ &= 0.425^2\left(1+2Ei_t+Vari_t+\left(Ei_t\right)^2\right)^5 = 0.425^2\left(1+0.07+0.0009+0.001225\right)^5 \\ &\approx 0.255861520, \end{aligned}$$

так что $VarS_a \approx 0.001072119$. Поэтому $\sigma_S \approx 0.032743226$, или, в абсолютных цифрах, $\sigma_S \approx$ £32743.23.

(ii) Инвестирование всех премий в активы с негарантируемой доходностью через пять лет даст (случайную) сумму $S' = 0.85\kappa = 2S_a$ (подчеркнём, что случайный коэффициент накопления κ тот же, что и в пункте (i) решения). Поэтому $ES' = 2 \cdot ES_a \approx 1.00953336$, или, в абсолютных цифрах, £1,009,533.36, что превышает среднее значение накопления для первоначальной стратегии (это среднее равно ES=£997,458.16). Поэтому вроде бы новое решение директора предпочтительнее.

Важно, однако, понимать, что накопление является случайной величиной и при любой стратегии через пять лет реальное накопление может оказаться как больше, так и меньше ожидаемого значения. Чем больше такая неопределённость, тем бóльший риск связан с применяемой инвестиционной стратегией. В контексте финансов колебания цены, доходности и т.д. называют волатильностью (volatility [ˌvɔləˈtɪlətɪ]). Простейшей мерой волатильности является стандартное отклонение; часто волатильностью называют и само стандартное отклонение. Чтобы учесть длину T промежутка времени, за

который анализируется рассматриваемый финансовый показатель, стандартное отклонение делят на $\sqrt{T}$.

Для исходной стратегии волатильность на пятилетнем промежутке равна $\sigma_S = \sqrt{VarS} = £32743.23$, в то время как для новой –

$$\sigma_{S'} \equiv \sqrt{VarS'} = 2\sqrt{VarS_a} = 2\sqrt{VarS} = 2\sigma_S,$$

т.е. вдвое больше. Это означает, что новая стратегия более рискована.

Большая волатильность может быть связана и со значительными отклонениями дохода от среднего значения в благоприятную сторону. По этой и ряду других причин стандартное отклонение не является хорошей мерой волатильности; фактически её можно использовать только в случае, когда анализируемая величина распределена по нормальному закону.

Более мотивированный вывод о рискованности стратегии можно сделать только на основе мер риска, которые точнее отражают характер распределения возможных значений дохода. В нашем случае проще всего сравнивать функции распределения дохода для анализируемых инвестиционных стратегий. Мы, однако, будем работать не с доходом, а с убытком страховщика (разностью между выплатами и накоплением от инвестирования премий) – это общепринято в страховании, и будем измерять рискованность стратегии вероятностью того, что убыток превысит некоторый заданный (достаточно большой) уровень z. Если применение новой стратегии увеличит эту вероятность, то мы признаем её более рискованной.

Для исходной стратегии убыток $L = 1 - S_f - S_a$ и потому

$$P(L > z) = P(S_a < 1 - z - S_f) = P(0.425\kappa < 1 - z - 0.425 \cdot 1.03^5) = F_\kappa\left(\frac{1-z}{0.425} - 1.03^5\right).$$

Для новой стратегии убыток L' даётся формулой $L' = 1 - S'$ и потому

$$P(L' > z) = P(0.85\kappa < 1 - z) = F_\kappa\left(\frac{1-z}{0.85}\right).$$

В силу монотонности функции F_κ неравенство $P(L > z) < P(L' > z)$ равносильно неравенству

$$\frac{1-z}{0.425} - 1.03^5 < \frac{1-z}{0.85} \Leftrightarrow z > 1 - 0.85 \cdot 1.03^5 \Leftrightarrow z > 0.014617037.$$

Поэтому вероятность достаточно больших потерь (в абсолютных цифрах, любых потерь, больших £14,617.04) для новой стратегии больше, чем для старой. С этой точки зрения новую стратегию следует признать более рискованной.

Глава 2
Оценивание денежных потоков

2.1 Текущая стоимость

Примем настоящий момент в качестве начального и предположим, что мы должны выплатить некоторую сумму A в момент $t > 0$ в будущем. Допустим, кроме того, что свободные средства мы всегда можем инвестировать на любой нужный нам срок и зарабатывать проценты в соответствии с эффективной годовой процентной ставкой i. Чтобы к моменту t иметь в точности сумму A, в настоящее время $t_0 = 0$ нужно располагать суммой

$$P = A \cdot (1+i)^{-t}, \tag{2.1}$$

т.к. после инвестирования на срок t сумма P превратится в сумму $P(1+i)^t = A$.

Величина P называется *текущей стоимостью* (present ['prez(ə)nt] value ['vælju:] – *PV*) суммы A, которая должна быть выплачена в момент t. Употребляются и термины *современная ценность*, *современная стоимость*, *приведённая стоимость*, *приведённая цена* и т.д. Если необходимо, добавляют уточнение: *ценность суммы P, которая должна быть выплачена в момент t, приведённая к моменту* 0. Величину A в соотношении (2.1) называют *будущей стоимостью* (future ['fju:ʧə] value – *FV*) суммы P.

Текущая стоимость PV в сущности является ценой, которую инвестор готов платить сегодня за получение суммы FV в будущем. Поэтому это понятие играет ключевую роль при количественной оценке всех инвестиционных проектов.

Величину $v = (1+i)^{-1}$ называют *коэффициентом дисконтирования* (*учёта*) (discount factor). С её помощью формулу (2.1) для приведённой стоимости можно записать в виде:

$$P = Av^t \Leftrightarrow PV = FV \cdot v^t. \tag{2.2}$$

Используя полученные ранее соотношения, связывающие годовую процентную ставку i, годовую учётную ставку d, интенсивность процентов δ, можно выписать эквивалентные варианты этого соотношения:

$$P = A(1-d)^t = Ae^{-\delta t}. \tag{2.3}$$

В терминах номинальных ставок мы имеем:

$$P = A\left(1+\frac{i^{(p)}}{p}\right)^{-pt} = A\left(1-\frac{d^{(p)}}{p}\right)^{pt}. \qquad (2.4)$$

Формулы $A = P(1+i)^t$ и $P = Av^t$ по существу означают, что ценность денег постоянно меняется с течением времени. Например, если эффективная годовая процентная ставка $i = 25\%$, то сумма A=1000 руб. в настоящий момент превратится в сумму 1000(1+i)=1250 (руб.) спустя один год. С другой стороны, сумма A=1000 руб. в настоящий момент может быть получена инвестированием $1000(1+i)^{-1} = 800$ (руб.) годом раньше. Если, например, в момент $t_1 = 1$ нам должны вернуть 1000 руб., то мы можем согласиться на возврат 800 руб. в момент $t_0 = 0$ – взяв на себя труд поместить их в банк, мы всё равно получим в момент $t_1 = 1$ сумму 1000 руб. Однако, в момент $t_2 = 2$ мы должны требовать возврата 1250 руб. – если бы в момент $t_1 = 1$ нам вернули 1000 руб., то поместив их в банк, к моменту $t_2 = 2$ мы бы имели 1250 руб. Таким образом, суммы

1. 800 руб. в момент $t_0 = 0$,
2. 1000 руб. в момент $t_1 = 1$,
3. 1250 руб. в момент $t_2 = 2$

в сущности эквивалентны (при фиксированной процентной ставке $i = 25\%$). Это и означает, что ценность денег постоянно меняется с течением времени. Отсюда следует, что сравнивать, складывать и производить любые другие операции над денежными суммами можно только, если все эти суммы рассматриваются в один и тот же момент времени. Подробнее мы расскажем об этом в следующем пункте.

Из формулы (2.1) ясно, что текущая стоимость P суммы A, которая должна быть выплачена через время t, всегда меньше, чем A. Разница $A-P$ является компенсацией инвестору за то, что:

1. капитал P будет связан время t и соответственно инвестор не сможет зарабатывать деньги, инвестируя в альтернативные проекты;
2. из-за инфляции реальная ценность номинальной суммы P с течением времени постоянно уменьшается;
3. сумма P относится к настоящему моменту и фактически имеется в наличии, в то время получение суммы A относится к будущему и потому не вполне определённо, тем более что часто инвестированным капиталом управляют другие люди (иначе говоря, доход $I = A-P$ частично включает плату за кредитный риск, который принимает на себя инвестор).

Годовая процентная ставка i, используемая при дисконтировании, учитывает в обобщённой форме все эти соображения. Она зависит от многих факторов:

1. реальных процентных ставок, предлагаемых рынком для аналогичных видов инвестиций,

2. доходности, которую может или желает получить лицо, проводящее оценку текущей стоимости,
3. склонности этого лица к риску,
4. надёжности заёмщика и т.д.

Её значение заключается в том, чтобы в усреднённой форме учесть измененение ценности денег с течением времени. Поэтому часто i называют *технической процентной ставкой*.

Текущая стоимость сильно зависит от технической процентной ставки i, используемой для дисконтирования. Из (2.1) ясно, что текущая стоимость $P = P(i)$ убывает при росте i. Например, при $i = 6\%$ текущая стоимость $P(0.06)$ суммы $A = 8000$, которая должна быть выплачена через $t = 5$ лет, равна 5978.07. Если i увеличится до 7%, то текущая стоимость уменьшится до $P(0.07)$=5703.89. Относительное изменение текущей стоимости равно $\frac{P(0.07) - P(0.06)}{P(0.06)} \approx -4.6\%$ (знак «минус» указывает на уменьшение). Если i уменьшится до 5%, то текущая стоимость увеличится до $P(0.05)$=6268.21. Относительное изменение текущей стоимости равно $\frac{P(0.05) - P(0.06)}{P(0.06)} \approx 4.9\%$.

Теперь рассмотрим задачу анализа чувствительности текущей стоимости к изменению процентной ставки в общем случае. Предположим, что сумма A должна быть выплачена спустя t лет, а сейчас мы используем для определения её текущей стоимости техническую процентную ставку i. Если вскоре после расчёта текущей стоимости $P(i) = A(1+i)^{-t}$ выяснится, что необходимо использовать процентную ставку $i + \Delta$, то новое значение текущей стоимости будет равно $P(i+\Delta) = A(1+i+\Delta)^{-t}$. Относительное изменение текущей стоимости в результате изменения технической процентной ставки, используемой для дисконтирования, будет равно

$$\frac{P(i+\Delta) - P(i)}{P(i)} \approx \frac{P'(i)}{P(i)} \cdot \Delta = \frac{-At(1+i)^{-t-1}}{A(1+i)^{-t}} \cdot \Delta = -tv\Delta.$$

Отсюда следует, что если абсолютное значение процентной ставки изменится на $|\Delta| = 1\%$, то относительное изменение текущей стоимости будет равно примерно $tv\%$ (со знаком «минус», если $\Delta > 0$, и со знаком «плюс», если $\Delta < 0$). Для $t = 5$ и $i = 6\%$ эта величина примерно равна 4.72%, что очень близко к точным значениям величины $\frac{P(i+\Delta) - P(i)}{P(i)}$, которые равны –4.6% для $\Delta = 1\%$ и 4.9% для $\Delta = -1\%$.

Если вместо процентной ставки i в качестве основного параметра использовать интенсивность процентов $\delta = \ln(1+i)$, то относительное изменение текущей стоимости в результате изменения технической интенсивности процентов, используемой для дисконтирования, будет равно

$$\frac{P(\delta+\Delta)-P(\delta)}{P(\delta)} \approx \frac{P'(\delta)}{P(\delta)}\cdot\Delta = \frac{-Ate^{-\delta t}}{Ae^{-\delta t}}\cdot\Delta = -t\Delta.$$

Отсюда следует, что если абсолютное значение интенсивности процентов изменится на $|\Delta| = 1\%$, то относительное изменение текущей стоимости будет равно примерно $t\%$ (со знаком «минус», если $\Delta > 0$, и со знаком «плюс», если $\Delta < 0$). Это относительное изменение текущей стоимости тем больше, чем больше срок до платежа. В этом смысле с отдалёнными платежами связан бóльший риск изменчивости процентных ставок.

В Главе 1 мы рассмотрели более сложную модель, когда интенсивность процентов меняется с течением времени и установили, что за счёт процентов сумма $A(0)$ в момент $t_0 = 0$ через время t, к моменту t, превратится в сумму $A(t) = A(0)\exp\left(\int_0^t \delta(u)du\right)$ (формула (1.16)). В этом равенстве $A($ 0 можно интерпретировать как текущую стоимость, а $A(t)$ – как будущую: $A(0) = PV$, $A(t) = FV$. Соответственно, формулу (1.16) можно переписать в виде:

$$PV = FV\exp\left(-\int_0^t \delta(u)du\right).$$

Эта равенство означает, что коэффициент дисконтирования для промежутка $[0;t]$ вместо v^t становится равным $v_t = \exp\left(-\int_0^t \delta(u)du\right)$. Для промежутка $[t_0;t_0+t]$ коэффициент дисконтирования, как нетрудно понять, равен $\exp\left(-\int_{t_0}^{t_0+t} \delta(u)du\right) = \frac{v_{t_0+t}}{v_{t_0}}$.

2.2 Текущая стоимость денежного потока

Предположим, что мы должны вернуть одному кредитору два долга: $a_1 = 400$ руб. через год и $a_2 = 600$ руб. через два года. Однако мы хотели бы вернуть оба долга немедленно и наш кредитор согласен пойти на это. Какую сумму мы должны выплатить в этой ситуации?

Допустим, что в течение рассматриваемого промежутка времени банки дают $i = 25\%$ годовых по депозитам. Как мы видели в предыдущем разделе, чтобы в момент $t_1 = 1$ (мы принимаем настоящий момент в качестве начального и измеряем время годами) вернуть сумму $a_1 = 400$, в момент $t_0 = 0$ мы должны иметь сумму $a_1(1+i)^{-1} = 320$ (просто поместив её на банковский счёт к моменту $t_1 = 1$ мы будем располагать суммой $320\cdot 1.25 = 400$). Для того чтобы в момент $t_2 = 2$ вернуть сумму $a_2 = 600$, в момент $t_0 = 0$ мы должны иметь сумму

$a_2(1+i)^{-2}=384$ (просто поместив её на банковский счёт к моменту $t_2=2$ мы будем располагать суммой $384\cdot 1.25^2=600$). Поэтому, если мы можем выплатить весь долг в момент $t_0=0$, то возвращать мы должны сумму $320+384=704$ (руб.) – эта сумма называется текущей стоимостью серии из двух платежей: $a_1=400$ в момент $t_1=1$ и $a_2=600$ в момент $t_2=2$.

Разобранный простой пример показывает, что если мы хотим найти текущую стоимость серии платежей, которые должны быть сделаны в разные моменты времени в будущем, то все эти платежи нужно привести к настоящему моменту $t_0=0$, после чего эти суммы следует сложить.

К этому же выводу приводит и следующий более подробный анализ.

Предположим, что нам предлагают выплатить просто сумму 400+600=1000 (руб.) и допустим, что в течение рассматриваемого промежутка времени банки дают $i=25\%$ годовых по депозитам. Если мы просто поместим 1000 руб. в банк, то через год мы будем иметь 1250 руб., из которых мы выплатим 400 руб. первого долга; оставшиеся 850 руб. через год превратятся в 1062 руб. 50 коп., из которых мы выплатим 600 руб. второго долга и будем иметь остаток в 462 руб. 50 коп. Значит, выплачивая немедленно простую алгебраическую сумму долгов, мы переплачиваем значительную часть денег.

Имея в виду эти рассуждения, попробуем определить, какую сумму x мы должны вернуть в настоящий момент, для того, чтобы эта финансовая операция была справедливой.

Через год x руб. превратится в $x\cdot(1+i)$ руб., из которых мы выплатим первый долг $a_1=400$ руб. Остаток $x\cdot(1+i)-a_1$ через год превратится в $\left(x\cdot(1+i)-a_1\right)\cdot(1+i)=x\cdot(1+i)^2-a_1\cdot(1+i)$ руб., из которых мы выплатим второй долг $a_2=600$ руб. Если остаток $x\cdot(1+i)^2-a_1\cdot(1+i)-a_2$ положителен, то эта операция несправедлива по отношению к должнику; если же остаток отрицателен, то эта операция несправедлива по отношению к кредиторам. Итак, сумма x должна определяться из условия $x\cdot(1+i)^2-a_1\cdot(1+i)-a_2=0$, что даёт:

$$x=a_1\cdot(1+i)^{-1}+a_2\cdot(1+i)^{-2}.$$

Суммы $a_1\cdot(1+i)^{-1}\equiv a_1v$ и $a_2\cdot(1+i)^{-2}\equiv a_2v^2$ являются приведёнными к настоящему моменту величинами долгов a_1,a_2, которые подлежат оплате в заданные моменты в будущем. Соответственно, сумма x называется текущей стоимостью серии из рассматриваемых двух платежей.

Итак, для того чтобы рассматриваемая финансовая операция была справедливой, мы должны сначала привести оба долга к настоящему моменту:

1. 400 руб., которые должны быть выплачены через год, сейчас имеют ценность $400(1+i)^{-1}=320$ руб.,

2. 600 руб., которые должны быть выплачены через два года, сейчас имеют ценность $600(1+i)^{-2} = 384$ руб.,

а после этого подсчитать суммарный долг: в настоящий момент он равен 320+384=704 руб. Именно эту сумму мы и должны вернуть нашим кредиторам – это будет справедливое решение проблемы.

Действительно, если кредиторы просто поместят эту сумму в банк под $i = 25\%$ годовых, то через год они будут иметь $704 \times 1.25 = 880$ (руб.). За вычетом 400 руб. в счёт погашения первого долга останется 480 руб. Через год они превратятся в $480 \times 1.25 = 600$ руб, что позволит точно погасить и второй долг.

Рассмотрим теперь общий случай определения текущей стоимости PV серии из n платежей величиной $a_1,\ldots,a_n$ соответственно, которые будут сделаны в некоторые моменты $t_1,\ldots,t_n$ в будущем. Величина PV может рассматриваться как сумма, которой нужно располагать в момент $t_0 = 0$, чтобы (с учётом процентного дохода) в будущем, в моменты $t_1,\ldots,t_n$, иметь возможность произвести выплаты величиной $a_1,\ldots,a_n$. Как следует из вышесказанного,

$$PV = a_1 v^{t_1} + \ldots + a_n v^{t_n}. \qquad (2.5)$$

Действительно, если величина $PV = x$ будет рассчитана по этой формуле, то к моменту $t_1 - 0$ мы будем располагать суммой

$$x(1+i)^{t_1} = xv^{-t_1} = a_1 + a_2 v^{t_2 - t_1} + \ldots + a_n v^{t_n - t_1}.$$

Это позволит в момент t_1 произвести первую выплату величиной a_1. Оставшаяся сумма $x_1 = a_2 v^{t_2 - t_1} + \ldots + a_n v^{t_n - t_1}$ к моменту $t_2 - 0$, т.е. спустя время $t_2 - t_1$, возрастёт до

$$x_1(1+i)^{t_2 - t_1} = x_1 v^{-t_2 + t_1} = a_2 + a_3 v^{t_3 - t_2} + \ldots + a_n v^{t_n - t_2}.$$

Это позволит в момент t_2 произвести вторую выплату величиной a_2 и т.д. После $(n-1)$-й выплаты в момент t_{n-1} мы будем располагать суммой $a_n v^{t_n - t_{n-1}}$. К моменту t_n, т.е. спустя время $t_n - t_{n-1}$ после момента t_{n-1}, эта сумма вырастет до a_n, что позволит нам успешно произвести и последнюю выплату. Оставшаяся после этого сумма будет равна нулю, что означает справедливость расчёта по формуле (2.5) как по отношению к человеку, который производит выплаты, так и по отношению к человеку, который получает эти выплаты.

Понятие текущей стоимости денежного потока позволяет решить (в простейшей постановке) важную задачу определения справедливого соотношения между взносами в пенсионный фонд и будущими пенсионными выплатами. Примем момент заключения договора между пенсионным фондом и участником в качестве начального момента $t_0 = 0$. Предположим, что участник пенсионного фонда сначала делает взносы $a_1, a_2 \ldots$ в моменты $t_1' < t_2' < \ldots$, а затем

в моменты $t_1'' < t_2'' < \ldots$ получает пенсионные выплаты в размере $b_1, b_2, \ldots$. В результате инвестиционной деятельности фонд зарабатывает проценты на вложенные в него средства. Обозначим эффективную годовую ставку дохода, гарантируемую фондом, через i, а соответствующий коэффициент дисконтирования через v. С использованием i в качестве технической процентной ставки текущая стоимость взносов в пенсионный фонд равна $\sum_k a_k v^{t_k'}$ – это обязательства участника, выраженные в текущих деньгах. Текущая стоимость всех пенсионных выплат равна $\sum_k b_k v^{t_k''}$ – это обязательства фонда, выраженные в текущих деньгах. Всякая сделка должна быть справедливой в том смысле, что обязательства сторон должны быть равны. В рассматриваемой ситуации этот *принцип эквивалентности обязательств* (the principle ['prɪnsəp(ə)l] of equivalence [ɪ'kwɪv(ə)l(ə)ns]) означает, что должно быть верно равенство

$$\sum_k a_k v^{t_k'} = \sum_k b_k v^{t_k''}. \qquad (2.6)$$

Более подробное обоснование этой формулы можно получить следующим образом. К моменту t_1'' начала пенсионных выплат взносы участника вырастут до величины $\sum_k a_k (1+i)^{t_1''-t_k'}$. Рассуждения, проведённые выше при обосновании формулы (2.5), показывают, что эта сумма должна совпадать со стоимостью потока выплат из фонда, приведённой к моменту t_1'': $\sum_k a_k (1+i)^{t_1''-t_k'} = \sum_k b_k v^{t_k''-t_1''}$. Сокращая обе части этого равенства на $(1+i)^{t_1''}$, мы получим (2.6).

2.3 Продолжительность Макóли

Как мы отмечали, текущая стоимость $PV = FV \cdot (1+i)^{-t}$ одиночной суммы *FV*, выплачиваемой спустя время *t*, сильно зависит от технической процентной ставки *i*, используемой для дисконтирования. Этот же вывод справедлив и для денежных потоков. Вернёмся к примеру, рассмотренному в начале раздела 2.2 (выплата $a_1 = 400$ руб. через год и $a_2 = 600$ руб. через два года) и предположим, что процентная ставка равна не 25%, а 10%. В этом случае текущая стоимость этого потока равна $\frac{400}{1.1} + \frac{600}{1.1^2} \approx 859.50$ (руб.), в то время как для *i*=25% текущая стоимость равна 704 руб.

Особенно интересно понять, как повлияет на текущую стоимость денежного потока небольшое изменение технической процентной ставки.

Рассмотрим серию из *n* платежей величиной $a_1, \ldots, a_n$ соответственно, которые будут сделаны в некоторые моменты $t_1, \ldots, t_n$ в будущем. Текущая

стоимость PV (в момент $t_0 = 0$) этого денежного потока вычисляется по формуле (2.5). Если вскоре после расчёта текущей стоимости $PV = PV(i)$ выяснится, что необходимо использовать процентную ставку $i + \Delta$, то новое значение текущей стоимости будет равно $PV(i + \Delta)$. Относительное изменение текущей стоимости в результате изменения технической процентной ставки, используемой для дисконтирования, будет равно

$$\frac{PV(i+\Delta) - PV(i)}{PV(i)} \approx \frac{PV'(i)}{PV(i)} \cdot \Delta = -v \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k a_k (1+i)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} a_k (1+i)^{-t_k}} \cdot \Delta.$$

Коэффициент $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} t_k a_k (1+i)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} a_k (1+i)^{-t_k}}$ можно рассматривать как взвешенное среднее значение моментов выплат $\sum_{k=1}^{n} t_k w_k$ с весами $w_k = \dfrac{a_k v^{t_k}}{\sum_{k=1}^{n} a_k v^{t_k}} = \dfrac{a_k v^{t_k}}{PV}$, которые показывают долю текущей стоимости $a_k v^{t_k}$ k-го платежа в общей текущей стоимости PV всего потока. Поэтому его называют *средним дисконтированным сроком* (mean discount term – *MDT*). Используются также термины *эффективный средний срок* (effective mean term), *продолжительность Мако́ли* (Macaulay[1] duration[2]). В отечественной экономической литературе обычно переводят термин «Macaulay duration» с английского языка на русский как «*дюрация Маколея*».

Выражение $MDT_{\text{mod}} = v \cdot MDT \equiv \dfrac{MDT}{1+i}$ называется *модифицированной продолжительностью* (modified duration).

Если все платежи одного знака, то все веса w_k положительны. Поэтому их можно рассматривать как распределение вероятностей. В этом случае средний дисконтированный срок – это среднее значение случайной величины T, которая принимает значения $t_1, \ldots, t_n$ с вероятностями: $P(T = t_1) = w_1, \ldots, P(T = t_n) = w_n$.

---

[1] Frederick R. Macaulay [məˈkɔːli] (1882 – 1970) – американский учёный, который ввёл это понятие в гл.2 своей книги *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856*, National Bureau of Economic Research, New York, 1938 при обсуждении проблемы о том, как разумным образом вычислить срок займа, предполагающего частичные выплаты (процентов и части основной суммы) до момента окончательного погашения.

[2] duration [djuəˈreɪʃ(ə)n] – the time during which something continues (Oxford Dictionary).

Если абсолютное значение процентной ставки изменится на $|\Delta| = 1\%$, то относительное изменение текущей стоимости денежного потока будет равно примерно $MDT_{\text{mod}}\%$ (со знаком «минус», если $\Delta > 0$, и со знаком «плюс», если $\Delta < 0$).

Если вместо процентной ставки i в качестве основного параметра использовать интенсивность процентов $\delta = \ln(1+i)$, то относительное изменение текущей стоимости в результате изменения технической интенсивности процентов, используемой для дисконтирования, будет равно

$$\frac{PV(\delta+\Delta)-PV(\delta)}{PV(\delta)} \approx \frac{PV'(\delta)}{PV(\delta)}\cdot\Delta = -\frac{\sum_{k=1}^{n} t_k a_k e^{-\delta t_k}}{\sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\delta t_k}}\cdot\Delta = -MDT\cdot\Delta.$$

Отсюда следует, что если абсолютное значение интенсивности процентов изменится на $|\Delta| = 1\%$, то относительное изменение текущей стоимости денежного потока будет равно примерно $MDT\%$ (со знаком «минус», если $\Delta > 0$, и со знаком «плюс», если $\Delta < 0$). Это относительное изменение текущей стоимости тем больше, чем больше срок до платежа. В этом смысле денежный поток с бóльшим значением MDT имеет бóльший риск изменчивости процентных ставок.

2.4 Ренты

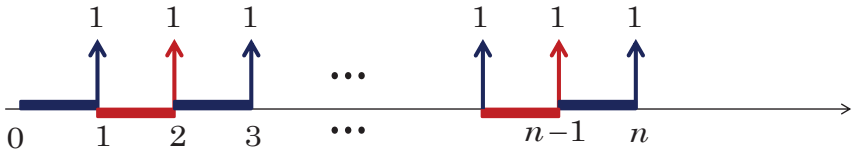
Встречающиеся на практике денежные потоки, как правило, обладают той или иной формой регулярности как по величине платежей, так и по моментам их поступления. Для таких потоков общая формула (2.5) может быть упрощена.

2.4.1 Немедленные постоянные ренты

Особо важным является случай серии платежей фиксированной величины, которые производятся через равные промежутки времени фиксированное число раз. Такие серии платежей обычно называют *постоянными рентами* (level ['lev(ə)l] annuity [ə'n(j)uːɪtɪ]). Часто, если нет опасности путаницы с терминами, слово «постоянные» опускают.

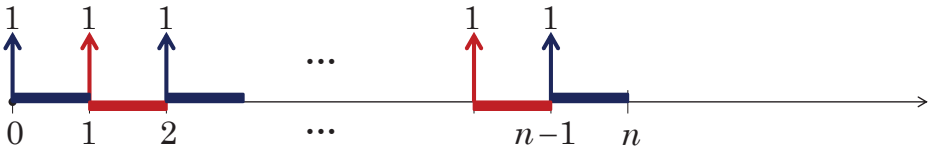
Рассмотрим n последовательных единичных промежутков времени $[0,1],\ldots,[n-1,n]$. Под моментом $t_0 = 0$ мы обычно будем подразумевать настоящий момент, а в качестве единичного промежутка времени будем рассматривать один год (этот выбор, конечно, условен, так что приводимые ниже формулы можно применять и в случае, если в качестве единичного промежутка времени выбрана одна неделя, один месяц, одни квартал и т.д.).

Серия из n выплат, каждая величиной 1, сделанных в конце этих промежутков, т.е. в моменты $t_1 = 1, t_2 = 2, \ldots, t_n = n$ называется *запаздывающей рентой* (annuity payable in arrear или immediate [ɪ'mi:dɪət] annuity). Этот денежный поток изображён на следующем рисунке.



При буквальном переводе «*immediate* annuity» означает «*немедленная* рента», хотя начинает она выплачивается не сразу, а конце первого промежутка времени. Дело в том, что исторически этот вид рент противопоставлялся отложенным рентам (о них мы будем говорить позже). Прилагательное «немедленная» было добавлено, чтобы подчеркнуть это обстоятельство.

Серия из n выплат, каждая величиной 1, сделанных в начале этих промежутков, т.е. в моменты $t'_1 = 0, t'_2 = 1, \ldots, t'_n = n-1$ называется *упреждающей рентой* (annuity payable in advance [əd'vɑ:ns] или annuity-due от due [dju:] – подлежащий выплате). Этот денежный поток изображён на следующем рисунке.



Различие между запаздывающей рентой и упреждающей рентой условное и связано с выбором начала отсчета. Ясно, что если в качестве начального момента выбрать момент $t = 1$, то запаздывающая рента может рассматриваться как упреждающая.

Приведённая ценность запаздывающей (упреждающей) ренты в момент $t_0 = 0$ в финансовой математике обозначается $a_{\overline{n}|}$ (соответственно, $\ddot{a}_{\overline{n}|}$). Иными словами, $a_{\overline{n}|}$ (соответственно, $\ddot{a}_{\overline{n}|}$) – это ценность серии из n платежей величины 1, производимых через единичные интервалы, на единицу времени раньше, чем момент первого платежа (соответственно, в момент первого платежа).

Чтобы подсчитать эти величины, нужно привести каждый из n платежей к начальному моменту времени $t_0 = 0$, а затем сложить полученные значения:

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|} &= v + v^2 + \ldots + v^n, \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} &= 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Суммируя геометрические прогрессии в правых частях, мы получим (предполагая, что $v \neq 1$, т.е. $i \neq 0$):

$$a_{\overline{n}|} = \frac{v}{1-v} \cdot \left(1 - v^n\right) = \frac{1-v^n}{i}, \tag{2.8}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d}. \tag{2.9}$$

В тривиальном случае $i = 0$, очевидно, $a_{\overline{n}|} = n$, $\ddot{a}_{\overline{n}|} = n$. Чтобы избежать постоянных оговорок такого рода, ниже мы всегда будем считать, что $i \neq 0$.

Формулы (2.8) и (2.9) можно получить и следующими «финансовыми» рассуждениями. Величины $a_{\overline{n}|}$ и $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ оценивают одну и ту же серию платежей, но в разные моменты времени. Поэтому между ними немедленно может быть установлена простая связь (очевидная из (2.7)):

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|} &= v\ddot{a}_{\overline{n}|}, \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} &= a_{\overline{n}|} + 1 - v^n. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Первое из равенств (2.10) говорит, что стоимость в момент 0 потока из единиц в моменты $1,\ldots,n$ можно найти в два шага: сначала вычислить его стоимость в момент 1 (она равна $\ddot{a}_{\overline{n}|}$), а затем дисконтировать найденное значение на одну единицу времени влево (к моменту 0 – это достигается множителем v). Интуитивный смысл второго из равенств (2.10) следующий. Чтобы получить денежный поток, описываемый $\ddot{a}_{\overline{n}|}$, нужно из денежного потока, описываемого $a_{\overline{n}|}$, убрать выплату суммы 1 в момент n и добавить выплату суммы 1 в момент 0. Однако, поскольку все выплаты приводятся к моменту 0, первая операция приводит к появлению (со знаком «минус») члена v^n, который даёт стоимость в момент 0 суммы 1 в момент n.

Рассматривая (2.10) как систему двух уравнений с двумя неизвестными и предполагая, что $v \neq 1$, мы немедленно получим формулы (2.8) и (2.9).

Величины $a_{\overline{n}|}$ и $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ позволяют подсчитать сумму, которую нужно инвестировать в данный момент для того, чтобы получать фиксированный регулярный доход в будущем. С их помощью также можно определить величину регулярной выплаты в случае, когда долг возвращается не одним платежом, а периодической серией одинаковых платежей.

Часто полезно знать ценность ренты не в начальный момент времени, а в конце последнего периода платежей. Эту ценность можно интерпретировать как общую сумму, накопленную на банковском счёте после серии регулярных взносов. Её обозначают так же, как и соответствующую текущую стоимость, но с

заменой буквы a на букву s. Итак, $s_{\overline{n}|}$ – это приведённая ценность запаздывающей ренты в момент $t_n = n$ последнего платежа, а $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ – это приведённая ценность упреждающей ренты в момент $t_n = n$, т.е. спустя единицу времени после последнего платежа. Формулы для накоплений $s_{\overline{n}|}$ и $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ можно получить на основе общего принципа, т.е. приводя каждый из n платежей к моменту $t_n = n$ и затем складывая полученные значения. При $i \neq 0$ это даст:

$$s_{\overline{n}|} = (1+i)^{n-1} + \ldots + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \tag{2.11}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i)^n + \ldots + (1+i) = \frac{(1+i)^n - 1}{d}. \tag{2.12}$$

Эти же формулы можно получить, приводя к моменту $t_n = n$ текущую стоимость (в момент $t_0 = 0$) сответствующей ренты:

$$s_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^n = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^n = \frac{1-(1+i)^{-n}}{d} \cdot (1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{d}.$$

Введённые выше величины связаны между собой разнообразными тождествами. Простейшие из них уже появились раньше. Более интересными являются следующие формулы:

$$ia_{\overline{n}|} + v^n = 1, \tag{2.13}$$

$$d\ddot{a}_{\overline{n}|} + v^n = 1, \tag{2.14}$$

$$is_{\overline{n}|} + 1 = (1+i)^n, \tag{2.15}$$

$$d\ddot{s}_{\overline{n}|} + 1 = (1+i)^n. \tag{2.16}$$

Они тривиально доказываются алгебраическими преобразованиями. Например, для первой формулы имеем:

$$ia_{\overline{n}|} + v^n = i\frac{1-v^n}{i} + v^n = 1 - v^n + v^n = 1.$$

Гораздо более интересной является их интерпретация на языке рент. Например, для формулы (2.13) эта интерпретация выглядит следующим образом. Поместим в момент $t_0 = 0$ на счёт сумму $P = 1$. В момент $t_1 = 1$ мы получим в виде процентов сумму i и неизменный исходный капитал $P = 1$. Снимем сумму i со счёта, а капитал инвестируем еще на один промежуток времени и т.д. В момент $t_n = n$ снимем со счёта проценты i и исходный капитал $P = 1$. Таким образом, капитал $P = 1$, инвестированный в момент $t_0 = 0$ производит:

(1) серию из n платежей, величиной i каждый, в конце каждого единичного периода, т.е. запаздывающую ренту; её ценность в момент $t_0 = 0$ равна $ia_{\overline{n}|}$;

(2) выплату суммы $P = 1$ в момент $t_n = n$; её ценность, приведённая к моменту $t_0 = 0$, равна $1 \cdot v^n = v^n$.

Поэтому формула (2.13) выражает равенство в момент $t_0 = 0$ произведённых расходов и полученных доходов.

Рента с бесконечным сроком выплат ($n = \infty$) называется *бессрочной рентой* (perpetuity [pə:(r)pɪ`tju:ɪti]). Формулы для текущей стоимости запаздывающей и упреждающей бессрочных рент получаются из (2.8) и (2.9) предельным переходом $n \to \infty$:

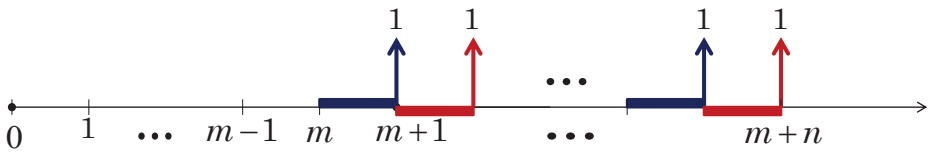
$$a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i},\ \ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d} = \frac{1+i}{i}.$$

Бессрочные ренты играют определённую роль в теории. В качестве реального примера бессрочной ренты обычно приводят британские консолидированные ренты (consolidated annuities или, кратко, consols**),** выпущенные в 1751 специальным актом британского парламента. Они заменили все существующие на то время правительственные ренты, которые выпускались с момента основания Банка Англии в 1693 году под названием stocks. Консолидированные ренты не имеют срока погашения и существуют до сих пор. Вначале эти ренты выплачивали 3.5% годовых, но с течением времени эта ставка менялась. В целом ставка уменьшалась, но для некоторых выпусков доходила до 5% (скажем, выпуск 6 июля 1785 года). В настоящее время эта ставка равна 2.5%, а проценты выплачиваются 4 раза в год.

2.4.2 Отложенные постоянные ренты

Рассмотренные выше рентные платежи начинались на первом же промежутке (0,1) (в начале его, т.е. в момент $t_0 = 0$, для упреждающей ренты и в конце, т.е. в момент $t_1 = 1$, для запаздывающей ренты). Для приложений важны также так называемые *отсроченные* (или *отложенные*) *ренты* (deferred [dɪ'fə:d] annuities). Чтобы их определить, рассмотрим последовательные единичные промежутки времени $[0,1],[1,2],\ldots,[m-1,m],[m,m+1],\ldots,[m+n-1,m+n]$. Как и раньше, под моментом $t_0 = 0$ мы будем подразумевать текущий момент.

Серия из n выплат, каждая величиной 1, сделанных в конце промежутков $[m,m+1],\ldots,[m+n-1,m+n]$, т.е. в моменты $t_1'' = m+1,\ldots,t_n'' = m+n$, называется *запаздывающей отсроченной рентой* (deferred immediate annuity). Этот денежный поток изображён на следующем рисунке.



Текущая стоимость этой запаздывающей отложенной ренты обозначается ${}_{m|}a_{\overline{n}|}$. Чтобы подсчитать эту величину, приведём каждый из n платежей в моменты $m+1,\ldots,m+n$ к начальному моменту времени, а затем сложим полученные значения: ${}_{m|}a_{\overline{n}|} = v^{m+1}+\ldots+v^{m+n}$. Если вынести за скобку общий множитель v^m, то мы получим:

$$ {}_{m|}a_{\overline{n}|} = v^m\left(v+\ldots+v^n\right) = v^m a_{\overline{n}|}. $$

Эта формула утверждает, что для вычисления текущей стоимости (в момент $t_0=0$) серии отложенных платежей в моменты $m+1,\ldots,m+n$ можно:

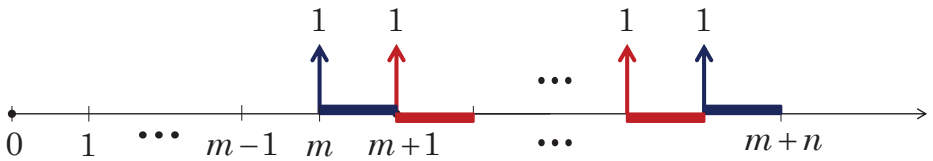
(1) сначала найти стоимость этого потока в момент m. Так как это начальная точка первого интервала из серии $[m,m+1],\ldots,[m+n-1,m+n]$, наш поток является обычной запаздывающей рентой с приведённой стоимостью в новый начальный момент, равной $a_{\overline{n}|}$.

(2) затем дисконтировать полученную сумму на m единиц времени левее, т.е. к моменту 0.

Ещё одна полезная формула получится, если дополнить сумму, задающую текущую стоимость отложенной ренты, начальными слагаемыми до суммы, задающей текущую стоимость немедленной ренты:

$$ {}_{m|}a_{\overline{n}|} = (v+\ldots+v^m+v^{m+1}+\ldots+v^{m+n})-(v+\ldots+v^m) = a_{\overline{m+n}|}-a_{\overline{m}|}. $$

Серия из n выплат, каждая величиной 1, сделанных в начале промежутков $[m,m+1],\ldots,[m+n-1,m+n]$, т.е. в моменты $t'_1=m,\ldots,t'_n=m+n-1$, называется *упреждающей отсроченной рентой* (deferred annuity-due). Этот денежный поток изображён на следующем рисунке.



Текущая стоимость этой упреждающей отложенной ренты обозначается ${}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}$. Чтобы подсчитать эту величину, приведём каждый из n платежей в моменты $m,\ldots,m+n-1$ к начальному моменту времени, а затем сложим полученные значения: ${}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}=v^m+\ldots+v^{m+n-1}$. Если вынести за скобку общий множитель v^m, то мы получим:

$$ {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}=v^m\left(1+\ldots+v^{n-1}\right)=v^m\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}. $$

Эта формула утверждает, что для вычисления текущей стоимости (в момент $t_0=0$) серии отложенных платежей в моменты $m,\ldots,m+n-1$ можно:

(1) сначала найти стоимость этого потока в момент m. Так как это начальная точка первого интервала из серии $[m,m+1],\ldots,[m+n-1,m+n]$, наш поток является обычной упреждающей рентой с приведённой стоимостью в новый начальный момент, равной $\ddot{a}_{\overline{n}|}$.

(2) затем дисконтировать полученную сумму на m единиц времени левее, т.е. к моменту 0.

Ещё одна полезная формула получится, если дополнить сумму, задающую текущую стоимость отложенной ренты, начальными слагаемыми до суммы, задающей текущую стоимость немедленной ренты:

$$ {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}=(1+v+\ldots+v^{m-1}+v^m+\ldots+v^{m+n-1})-(1+v+\ldots+v^{m-1})=\ddot{a}_{\overline{m+n}|}-\ddot{a}_{\overline{n}|}. $$

Для отсроченных рент специальные обозначения для накоплений не нужны, т.к. с точки зрения последнего промежутка времени отсроченная рента не отличается от соответствующей обычной. Иными словами, допустим, что мы решим обозначить через ${}_{m|}s_{\overline{n}|}$ значение отсроченной запаздывающей ренты в конце последнего периода (т.е. в момент $m+n$). Приводя n единичных платежей в моменты $m+1,\ldots,m+n$ к моменту $m+n$, мы бы имели ${}_{m|}s_{\overline{n}|}=(1+i)^{n-1}+\ldots+1=s_{\overline{n}|}$.

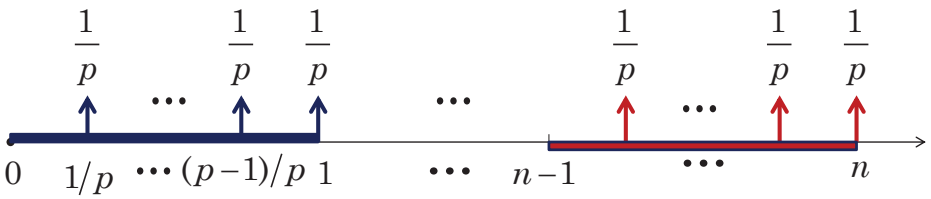
2.4.3 Постоянные ренты, выплачиваемые с частотой p

Рассмотрим n последовательных единичных промежутков времени $[0,1],[1,2],\ldots,[n-1,n]$. Под моментом $t_0=0$ мы, как обычно, будем подразумевать настоящий момент, а в качестве единичного промежутка времени будем рассматривать один год. Разобьем каждый из n единичных интервалов на p равных частей (подинтервалов), длиной $1/p$ каждая. Если, как мы отмечали, в качестве единицы времени принят один год, то наиболее интересными являются случаи: $p=365$ (подинтервал соответствует одному дню), $p=12$ (подинтервал соответствует одному месяцу), $p=4$ (подинтервал соответствует одному кварталу), $p=2$ (подинтервал соответствует одному полугодию).

Серия из np выплат, каждая величиной $1/p$, сделанных в конце этих подинтервалов, т.е. в моменты

$$\underbrace{\frac{1}{p},\frac{2}{p},\ldots,\frac{p}{p}=1}_{\text{первый год}};\ \underbrace{1+\frac{1}{p},1+\frac{2}{p},\ldots,1+\frac{p}{p}=2}_{\text{второй год}};\ \ldots;\ \underbrace{n-1+\frac{1}{p},n-1+\frac{2}{p},\ldots,n-1+\frac{p}{p}=n}_{n\text{-й год}},$$

называется *запаздывающей рентой, выплачиваемой с частотой p* (annuity payable *p*thly in arrear [ə'rɪə] или immediate [ɪ'mi:dɪət] annuity payable *p*thly). Этот денежный поток изображён на следующем рисунке.



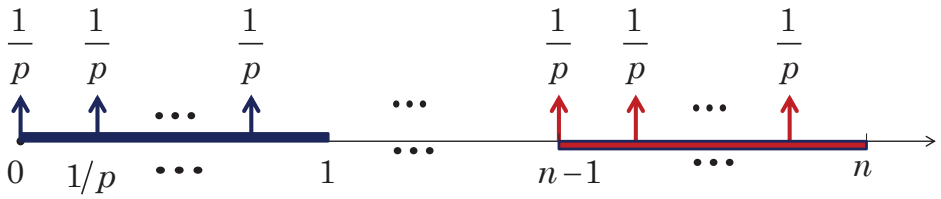
Его текущая стоимость (в настоящий момент $t_0=0$) обозначается $a_{\overline{n}|}^{(p)}$, а ценность в момент $t_n=n$ последнего платёжного периода называется накоплением и обозначается $s_{\overline{n}|}^{(p)}$.

Обратим внимание читателя на то, что каждая выплата имеет величину $1/p$, так что в качестве единицы измерения денежных сумм рассматривается *алгебраическая* сумма всех выплат за единичный промежуток времени (в типичном случае – за год).

Серия из *np* выплат, каждая величиной $1/p$, сделанных в начале этих подинтервалов, т.е. в моменты

$$\underbrace{0,\frac{1}{p},\ldots,\frac{p-1}{p}}_{\text{первый год}};\ \underbrace{1,1+\frac{1}{p},\ldots,1+\frac{p-1}{p}}_{\text{второй год}};\ \ldots;\ \underbrace{n-1,n-1+\frac{1}{p},\ldots,n-1+\frac{p-1}{p}}_{n\text{-й год}},$$

называется *упреждающей рентой, выплачиваемой с частотой p* (annuity payable *p*thly in advance или *p*thly annuity-due). Этот денежный поток изображён на следующем рисунке.



Его текущая стоимость (в настоящий момент $t_0=0$) обозначается $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)}$, а ценность в момент $t_n=n$ окончания последнего платёжного периода называется

накоплением и обозначается $\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|}$. Величины $a^{(p)}_{\overline{n}|}$, $s^{(p)}_{\overline{n}|}$, $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$, $\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|}$ оценивают одну и ту же серию платежей, но в разные моменты времени. Поэтому между ними немедленно может быть установлена простая связь:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = s^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot v^n, \tag{2.17}$$

$$s^{(p)}_{\overline{n}|} = a^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^n \tag{2.18}$$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot v^n, \tag{2.19}$$

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^n. \tag{2.20}$$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = a^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^{1/p}, \tag{2.21}$$

Кроме того,

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = a^{(p)}_{\overline{n}|} - \frac{1}{p} v^n + \frac{1}{p}. \tag{2.22}$$

Действительно, чтобы получить денежный поток, описываемый $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$, нужно из денежного потока, описываемого $a^{(p)}_{\overline{n}|}$, убрать сумму $1/p$ в момент n и добавить сумму $1/p$ в момент 0. Однако, поскольку все выплаты приводятся к моменту 0, первая операция приводит к появлению члена $\frac{1}{p} v^n$, который даёт стоимость в момент 0 суммы $1/p$ в момент n.

Рассматривая равенства (2.21) и (2.22) как систему двух уравнений с двумя неизвестными $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$ и $a^{(p)}_{\overline{n}|}$, мы получим:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{p\left(1-(1+i)^{-1/p}\right)}, \tag{2.23}$$

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{p\left((1+i)^{1/p}-1\right)}. \tag{2.24}$$

Вспоминая определения номинальных ставок, мы можем переписать эти формулы в виде:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d^{(p)}}, \tag{2.25}$$

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i^{(p)}}. \tag{2.26}$$

И наконец, вспоминая (2.8) и (2.9), мы получим ещё один вариант этих формул:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{d}{d^{(p)}} \ddot{a}_{\overline{n}|}, \tag{2.27}$$

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{i}{i^{(p)}} a_{\overline{n}|}. \qquad (2.28)$$

Эти формулы можно получить и другим методом. В качестве примера выведем формулу для $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$. С этой целью рассмотрим в качестве единичного отрезка времени p-ю долю первоначального единичного отрезка (например, если $p=12$ и исходный единичный промежуток времени – один год, то новым единичным отрезком времени будет один месяц). Эффективная процентная ставка для этого нового единичного отрезка равна $i^{(p)}_* = \frac{i^{(p)}}{p}$, где $i^{(p)}$ – номинальная процентная ставка для основного единичного промежутка, начисляемая с частотой p. Соответственно, новая учётная ставка равна $d^{(p)}_* = \frac{d^{(p)}}{p}$, а новое значение коэффициента дисконтирования есть $v^{(p)}_* = v^{1/p}$.

Теперь на упреждающую ренту, выплачиваемую с частотой p на промежутке $(0,n)$, можно смотреть как на обычную упреждающую ренту, выплачиваемую на промежутке $(0,np)$. Поскольку каждая выплата равна $1/p$, мы имеем: $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|@i} = \frac{1}{p} \cdot \ddot{a}_{\overline{np}|@i^{(p)}/p}$, где символ $@i$ указывает эффективную процентную ставку на промежутке, который рассматривается в качестве единичного. Используя равенство (2.9), мы получим: $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|@i} = \frac{1-v^n}{d^{(p)}} = \frac{d}{d^{(p)}} \ddot{a}_{\overline{n}|}$.

Основные формулы (2.27), (2.28) можно получить и с помощью замены одной серии платежей другой, базируясь на понимании финансовой природы процентов. Предположим, что на банковский счёт в момент $t_0 = 0$ внесена сумма 1. За время $1/p$ этот счёт заработает сумму $i^{(p)}/p$ в качестве процентов (по определению процентной ставки $i^{(p)}$). Мы можем в момент $1/p$ снять эту сумму со счёта и иметь остаток 1, равный первоначальному взносу. К моменту $2/p$ счёт опять заработает сумму $i^{(p)}/p$ в качестве процентов. Мы можем в момент $2/p$ снять эту сумму со счёта и иметь остаток 1, равный первоначальному взносу, и т.д. Следовательно, сумма 1, которая внесена на счёт в момент $t_0 = 0$, произведёт серию платежей величиной $i^{(p)}/p$ в моменты $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, \frac{p-1}{p}, \frac{p}{p} = 1$ и при этом в момент $t = 1$ мы будем иметь на счёте исходную сумму 1. Из соображений пропорциональности сумма $1/i^{(p)}$, внесённая в момент $t_0 = 0$, произведёт серию выплат величиной $1/p$ в моменты $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, \frac{p-1}{p}, \frac{p}{p} = 1$ (т.е. запаздывающую ренту, выплачиваемую с частотой p на промежутке [0;1]) и при этом в момент $t = 1$ мы будем иметь на счёте исходную сумму $1/i^{(p)}$. Иначе говоря, сумма $1/i^{(p)}$ в момент $t_0 = 0$ равносильна запаздывающей ренте,

выплачиваемой с частотой p на промежутке [0;1], и сумме $1/i^{(p)}$ в момент $t=1$. Значит, текущие стоимости этих двух потоков равны: $\frac{1}{i^{(p)}}=a_{\overline{1}|}^{(p)}+\frac{1}{i^{(p)}}v$, откуда: $a_{\overline{1}|}^{(p)}=\frac{d}{i^{(p)}}$. Таким образом, запаздывающая рента, выплачиваемая с частотой p на промежутке [0;1], равносильна одному платежу величиной $\frac{d}{i^{(p)}}$ в момент $t_0=0$. В свою очередь, этот платёж в момент $t=1$ имеет ценность $\frac{d}{i^{(p)}}(1+i)=\frac{i}{i^{(p)}}$. Итак, мы можем заменить запаздывающую ренту, выплачиваемую с частотой p на промежутке [0;1], одиночной выплатой суммы $\frac{i}{i^{(p)}}$ в момент $t=1$. Соответственно, запаздывающая рента, выплачиваемая с частотой p на промежутке $[0,n]$, может быть заменена серией выплат величиной $\frac{i}{i^{(p)}}$ каждая в моменты $1,2,\ldots,n$. Эта серия по определению является обычной запаздывающей рентой, выплачиваемой раз в год, и поэтому её текущая стоимость равна $\frac{i}{i^{(p)}}a_{\overline{n}|}$, как и утверждает формула (2.28). Подобным же способом можно установить и справедливость соотношения (2.27).

Мы определили величины $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)}$ и $a_{\overline{n}|}^{(p)}$ только для целых значений n. Но приём с введением новой единицы времени позволяет естественно определить $\ddot{a}_{\overline{t}|}^{(p)}$ и $a_{\overline{t}|}^{(p)}$ в случае, когда $t=n+\frac{k}{p}$, $0\le k\le n-1$. Именно, по определению мы будем считать, что $\ddot{a}_{\overline{t}|}^{(p)}$ (подсчитанная для процентной ставки i) – это $\frac{1}{p}\cdot\ddot{a}_{\overline{np+k}|}$, подсчитанная для процентной ставки $i_*^{(p)}=\frac{i^{(p)}}{p}$: $\ddot{a}_{\overline{t}|@i}^{(p)}=\frac{1}{p}\cdot\ddot{a}_{\overline{np+k}|@i^{(p)}/p}$. Поэтому:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{t}|@i}^{(p)}&=\frac{1}{p}\cdot\frac{1-(v_*^{(p)})^{np+k}}{d_*^{(p)}}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1-(1-d^{(p)}/p)^{np+k}}{d^{(p)}/p}=\frac{1-(1-d^{(p)}/p)^{np+k}}{d^{(p)}}\\&=\frac{1-((1-d)^{1/p})^{np+k}}{d^{(p)}}=\frac{1-(1-d)^{n+k/p}}{d^{(p)}}=\frac{1-v^t}{d^{(p)}}.\end{aligned}\qquad(2.29)$$

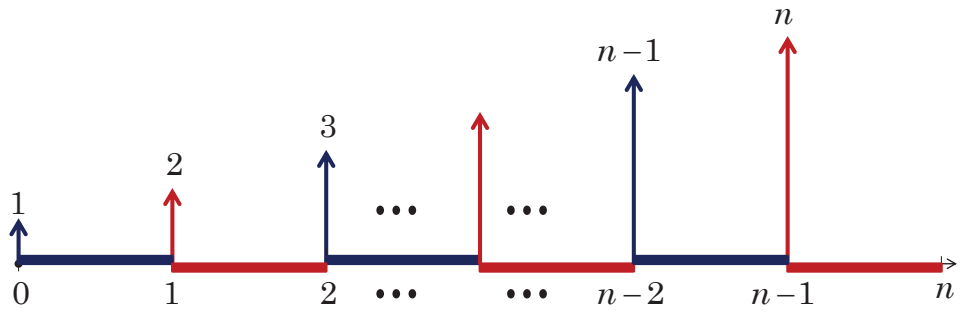
Аналогично,

$$\ddot{a}_{\overline{t}|@i}^{(p)}=\frac{1-v^t}{i^{(p)}}.\qquad(2.30)$$

2.4.4 Возрастающие ренты

Рассмотрим n последовательных единичных промежутков времени $[0,1],[1,2],\ldots,[n-1,n]$. Серия из n выплат величиной $C_1=1,C_2=2,\ldots,C_n=n$, сделанных в начале этих промежутков, т.е. в моменты $t_1'=0,t_2'=1,\ldots,t_n'=n-1$,

называется *упреждающей возрастающей рентой* (increasing annuity-due). Этот денежный поток изображён на следующем рисунке.



Его текущая стоимость (в момент $t_0 = 0$) в финансовой математике обозначается $(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$. Для подсчёта этой величины нужно все платежи привести к начальному моменту, а затем сложить:

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = 1 + 2v + \ldots + nv^{n-1}. \qquad (2.31)$$

Сумму в правой части можно найти разными способами. Самый простой – отметить, что она является производной суммы стандартной геометрической прогрессии:

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \left(v + v^2 + \ldots + v^n\right)' = \left(\frac{v - v^{n+1}}{1-v}\right)' = \frac{1-(n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2}. \qquad (2.32)$$

Можно повторить приём, используемый при выводе формулы для суммы геометрической прогрессии. Умножим обе части (2.31) на v и вычтем получившееся равенство из уравнения (2.31):

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} - v(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} kv^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} kv^k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)v^k - \sum_{k=0}^{n-1} kv^k - nv^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^k - nv^n = \ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n,$$

откуда:

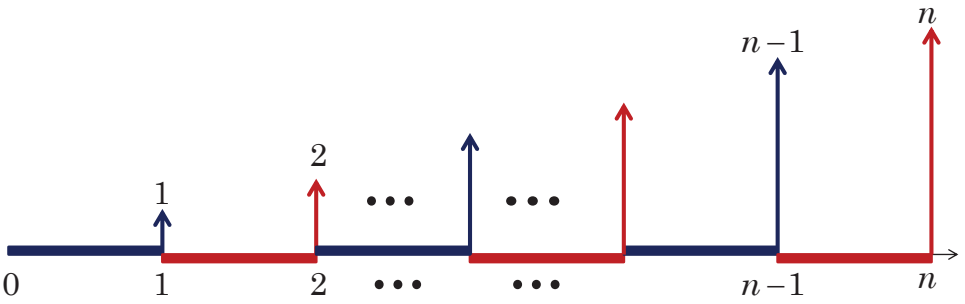
$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{d}. \qquad (2.33)$$

Хотя с помощью (2.8) это соотношение можно преобразовать к (2.32), оно интересно и само по себе, т.к. сводит возрастающую ренту к соответствующей постоянной. Поскольку $d = iv$, соотношение (2.33) можно переписать и в виде:

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^{n-1}}{i}. \qquad (2.34)$$

Рассмотрим те же n последовательных единичных промежутков времени $[0,1],[1,2],\ldots,[n-1,n]$. Серия из n выплат величиной $C_1 = 1, C_2 = 2, \ldots, C_n = n$,

сделанных в конце этих промежутков, т.е. в моменты $t_1 = 1, t_2 = 2, \ldots, t_n = n$, называется *запаздывающей возрастающей рентой* (increasing immediate annuity). Этот денежный поток изображён на следующем рисунке.



Его текущая стоимость (в момент $t_0 = 0$) в финансовой математике обозначается $(Ia)_{\overline{n}|}$. Для подсчёта этой величины нужно все платежи привести к начальному моменту, а затем сложить:

$$(Ia)_{\overline{n}|} = v + 2v^2 + \ldots + nv^n. \tag{2.35}$$

Поскольку $(Ia)_{\overline{n}|} = v \cdot (I\ddot{a})_{\overline{n}|}$, из (2.32), (2.33), (2.34) и (2.10) мы немедленно имеем:

$$\begin{aligned}(Ia)_{\overline{n}|} &= \frac{1-(1+nd)v^n}{id} = \frac{a_{\overline{n}|} - nv^{n+1}}{d} = \frac{1 + a_{\overline{n}|} - (n+1)v^n}{i} \\ &= \left(n + 1 + \frac{1}{i}\right) a_{\overline{n}|} - \frac{n}{i}.\end{aligned} \tag{2.36}$$

Если упомятутое выше соотношение $(Ia)_{\overline{n}|} = v \cdot (I\ddot{a})_{\overline{n}|}$ дополнить очевидным соотношением $(I\ddot{a})_{\overline{n}|} - (Ia)_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n$, то их можно рассматривать как систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $(Ia)_{\overline{n}|}$ и $(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$. Это даёт ещё один способ вывода формул для величин $(Ia)_{\overline{n}|}$ и $(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$.

С помощью возрастающих рент можно получить компактные формулы для средних дисконтированных сроков выплаты как для стандартных постоянных рент, так и для более сложных финансовых инструментов.

Например, для запаздывающей постоянной ренты текущее значение как функция δ даётся формулой: $a_{\overline{n}|}(\delta) = \sum_{k=1}^{n} e^{-\delta k}$. Поэтому

$$\begin{aligned}MDT_{\overline{n}|} &= -\frac{a'_{\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} k e^{-\delta k}}{a_{\overline{n}|}} = \frac{(Ia)_{\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}} = \frac{(1+i)a_{\overline{n}|} - nv^n}{ia_{\overline{n}|}} \\ &= 1 + \frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}.\end{aligned} \tag{2.37}$$

Для упреждающей ренты зависимость текущего значения от δ даётся формулой: $\ddot{a}_{\overline{n}|}(\delta)=\sum_{k=0}^{n-1}e^{-\delta k}$. Поэтому средний дисконтированный срок платежа равен

$$M\ddot{D}T_{\overline{n}|}=-\frac{\ddot{a}'_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}ke^{-\delta k}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}=\frac{(I\ddot{a})_{\overline{n}|}-\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}=\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}-nv^n}{d\ddot{a}_{\overline{n}|}}-1=\frac{1}{i}-\frac{n}{(1+i)^n-1}. \qquad (2.38)$$

Для рассмотренных выше возрастающих рент выплаты начинались на первом же промежутке [0,1] (в начале его, т.е. в момент 0, для упреждающей ренты и в конце, т.е. в момент 1, для запаздывающей ренты). Для приложений важны также *отсроченные возрастающие ренты* (deferred increasing annuity). Отложенная на время m возрастающая упреждающая (соответственно, запаздывающая) рента – это денежный поток из n выплат величиной $C_1=1,C_2=2,\ldots,C_n=n$, сделанных в начале (соответственно, конце) промежутков времени $[m,m+1],\ldots,[m+n-1,m+n]$, т.е. в моменты $t'_1=m,\ldots,t'_n=m+n-1$ (соответственно, $t''_1=m+1,\ldots,t''_n=m+n$). Её текущая стоимость обозначается ${}_{m|}(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$ (соответственно, ${}_{m|}(Ia)_{\overline{n}|}$). Как и для постоянных рент, эти величины легко подсчитать в два приёма: сначала определить стоимость ренты в момент m начала периода платежей, а затем привести эту стоимость к моменту 0:

$${}_{m|}(I\ddot{a})_{\overline{n}|}=v^m\cdot(I\ddot{a})_{\overline{n}|}, \qquad {}_{m|}(Ia)_{\overline{n}|}=v^m\cdot(Ia)_{\overline{n}|}. \qquad (2.39)$$

Стоимость возрастающей запаздывающей (упреждающей) ренты в конце последнего периода платежей, т.е. в момент n, называется накоплением и обозначается $(Is)_{\overline{n}|}$ (соответственно, $(I\ddot{s})_{\overline{n}|}$), т.е. так же, как и соответствующая текущая стоимость (в начальный момент 0), но с заменой буквы a на букву s. Эти величины можно интерпретировать как общую сумму, накопленную на банковском счёте после серии регулярно увеличивающихся взносов. Формулы для накоплений можно получить, приводя к моменту n стоимость соответствующей ренты в момент 0, т.е. просто умножая эту стоимость на $(1+i)^n$:

$$(I\ddot{s})_{\overline{n}|}=(1+i)^n(I\ddot{a})_{\overline{n}|}=\frac{\ddot{s}_{\overline{n}|}-n}{d}, \qquad (Is)_{\overline{n}|}=(1+i)^n(Ia)_{\overline{n}|}=\frac{s_{\overline{n}|}}{d}-\frac{n}{i}. \qquad (2.40)$$

Для отсроченных возрастающих рент, так же как и для отсроченных постоянных рент, специальные обозначения для накоплений не нужны, т.к. с точки зрения последнего промежутка времени отсроченная рента не отличается от соответствующей обычной.

2.4.5 Убывающие ренты

Рассмотрим опять n последовательных единичных промежутков времени $[0,1],[1,2],...,[n-1,n]$. Серия из n выплат величиной $n,n-1,\ldots,1$, сделанных в конце этих промежутков, т.е. в моменты $t_1=1,t_2=2,...,t_n=n$, называется *запаздывающей убывающей рентой* (decreasing immediate annuity). Её текущая стоимость (в момент $t_0=0$) обозначается $(Da)_{\overline{n}|}$.

Серия из n выплат величиной $n,n-1,\ldots,1$, сделанных в начале этих промежутков, т.е. в моменты $t'_1=0,t'_2=1,...,t'_n=n-1$, называется *упреждающей убывающей рентой* (decreasing annuity due). Её текущая стоимость (в момент $t_0=0$) обозначается $(D\ddot{a})_{\overline{n}|}$.

Базовый принцип (2.5) расчёта текущей стоимости денежного потока даёт: $(Da)_{\overline{n}|}=nv+(n-1)v^2+\ldots+v^n$, $(D\ddot{a})_{\overline{n}|}=n+(n-1)v+\ldots+v^{n-1}$. Но вместо того, чтобы упрощать эти суммы, лучше рассмотреть объединение убывающей ренты и соответствующей (т.е. запаздывающей или упреждающей) возрастающей ренты. Нетрудно видеть, что в результате получится соответствующая (т.е. запаздывающая или упреждающая) постоянная рента с величиной выплат $n+1$. Поэтому $(Da)_{\overline{n}|}+(Ia)_{\overline{n}|}=(n+1)a_{\overline{n}|}$, $(D\ddot{a})_{\overline{n}|}+(I\ddot{a})_{\overline{n}|}=(n+1)\ddot{a}_{\overline{n}|}$, что позволяет мгновенно получить формулы для убывающих рент из полученных ранее формул для постоянных и возрастающих рент:

$$(Da)_{\overline{n}|}=\frac{(ni-1)a_{\overline{n}|}+nv^n}{i},\qquad (D\ddot{a})_{\overline{n}|}=\frac{(ni-1)\ddot{a}_{\overline{n}|}+nv^{n-1}}{i}. \tag{2.41}$$

Стоимость запаздывающей (упреждающей) убывающей ренты в конце последнего периода выплат, т.е. в момент n, обозначают $(Ds)_{\overline{n}|}$ (соответственно, $(D\ddot{s})_{\overline{n}|}$). Эти величины можно интерпретировать как общую сумму, накопленную на банковском счёте после серии регулярно уменьшающихся взносов. Формулы для накоплений, как обычно, можно получить, приводя к моменту n текущее значение соответствующей ренты в момент 0:

$$(Ds)_{\overline{n}|}=(1+i)^n(Da)_{\overline{n}|}=\frac{(ni-1)s_{\overline{n}|}+n}{i}=\frac{(ni-1)(1+i)^n+1}{i^2},$$

$$(D\ddot{s})_{\overline{n}|}=(1+i)^n(D\ddot{a})_{\overline{n}|}=\frac{(ni-1)\ddot{s}_{\overline{n}|}+n(1+i)}{i}=\frac{(ni-1)(1+i)^n+1}{id}.$$

Применённый приём позволяет определить стоимость рент, в которых величина выплат возрастает в соответствии с произвольной арифметической прогрессией. Рассмотрим, например, упреждающую ренту. Предположим, что выплаты производятся в моменты $t_0=0,t_1=1,...,t_{n-1}=n-1$ и k-я выплата (т.е. выплата в момент $t_k=k$) равна $b_k=\alpha+\beta k=(\alpha-\beta)+\beta(k+1)$, $k=0,1,...,n-1$. На такую переменную ренту можно смотреть как на объединение двух рент – постоянной упреждающей ренты с величиной выплат $\alpha-\beta$ и возрастающей

упреждающей ренты с единицей измерения сумм β. Поэтому текущая стоимость рассматриваемой ренты есть $(\alpha-\beta)\ddot{a}_{\overline{n}|}+\beta(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$, а накопление к моменту $t_n=n$ есть $(\alpha-\beta)\ddot{s}_{\overline{n}|}+\beta(I\ddot{s})_{\overline{n}|}$.

2.4.6 Непрерывные ренты

Рассмотрим упреждающую и запаздывающую ренты, которые выплачиваются с частотой p на промежутке $[0,n]$, и предположим, что $p\to\infty$. Мы знаем, что тогда номинальная процентная ставка $i^{(p)}$ и номинальная учётная ставка $d^{(p)}$ имеют предел, равный интенсивности процентов δ. Используя формулы (2.27), (2.28), мы имеем:

$$\lim_{p\to\infty}\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}=\frac{d}{\delta}\ddot{a}_{\overline{n}|}=\frac{1-v^n}{\delta}, \tag{2.42}$$

$$\lim_{p\to\infty}a^{(p)}_{\overline{n}|}=\frac{d}{\delta}a_{\overline{n}|}=\frac{1-v^n}{\delta}. \tag{2.43}$$

Тот факт, что пределы (2.42) и (2.43) совпадают, легко объяснить интуитивно. Если $p\to\infty$, то мы имеем дело с большим числом малых платежей (величиной $1/p$ каждый), совершаемых через малые промежутки времени $1/p$. В пределе при $p\to\infty$ можно рассматривать поступление средств как непрерывный процесс, подобный течению жидкости. При этом в пределе различие между платежами в начале и в конце промежутков исчезнет, т.е. пределы (2.42) и (2.43) обязаны совпадать.

Рассматривая поступление средств в предельном случае $p=\infty$ как непрерывный поток жидкости, легко непосредственно определить величину этих пределов.

Прежде всего подсчитаем скорость поступления средств в момент t, которую мы определяем как предел $\rho(t)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{S(t,t+\Delta)}{\Delta}$, где $S(t,t+\Delta)$ – общая сумма, поступившая на интервале $(t,t+\Delta)$. Рассмотрим произвольный малый промежуток времени длиной Δ. Он состоит примерно из $p\Delta$ промежутков длиной $1/p$ и поэтому на этом промежутке поступит сумма, примерно равная $\dfrac{1}{p}\cdot p\Delta=\Delta$. Таким образом, скорость поступления средств в этой непрерывной модели постоянна и равна 1.

Для подсчёта текущей стоимости (в момент $t_0=0$) поступивших средств, разобьём промежуток $[0,n]$ точками $t_0=0<t_1<t_2<\ldots<t_k=n$ на большое число k малых промежутков (t_j,t_{j+1}); длину j-го промежутка обозначим Δ_j. На промежутке (t_j,t_{j+1}) поступит сумма, примерно равная Δ_j. Её текущая стоимость примерно равна $\Delta_j v^{t_j}$. Поэтому текущая стоимость всего непрерывного денежного потока примерно равна

$$\sum_{j=1}^{k}\Delta_j v^{t_j}, \tag{2.44}$$

причём точность этого приближения увеличивается с уменьшением Δ_j, т.е. в пределе при $\max\Delta_j \to 0$ сумма (2.44) даст *точное* значение текущей стоимости нашего непрерывного денежного потока. Однако эта сумма – это не что иное, как интегральная сумма для интеграла $\int_0^n v^t dt$. Поэтому точное значение текущей стоимости рассматриваемого непрерывного денежного потока, которое обозначается $\bar{a}_{\overline{n}|}$, равно

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t dt = \int_0^n e^{-\delta t} dt = -\frac{1}{\delta} e^{-\delta t}\Big|_0^n = \frac{1-v^n}{\delta}. \tag{2.45}$$

Нетрудно сообразить, что проведённое рассуждение вовсе не предполагало, что число n является целым. Поэтому формула (2.45) верна для любого n. Появившийся в этом рассуждении непрерывный денежный поток называется *непрерывно выплачиваемой рентой* (continuously payable annuity).

Формула (2.45) получена в предположении, что скорость поступления средств $\rho(t)$ постоянна и равна 1. Можно ввести и произвольную непрерывную ренту на промежутке $[0,t]$, которая характеризуется произвольной скоростью $\rho(t)$ поступления средств в момент t. Рассуждения, которые мы провели в предыдущем абзаце, можно дословно повторить и для такой ренты. На промежутке (u_j,u_{j+1}) поступит сумма, примерно равная $\rho(u_j)\Delta_j$. Её текущая стоимость примерно равна $\rho(u_j)\Delta_j v^{u_j}$. Поэтому текущая стоимость всего непрерывного денежного потока примерно равна

$$\sum_{j=1}^{k}\rho(u_j)v^{u_j}\Delta_j, \tag{2.46}$$

причём точность этого приближения увеличивается с уменьшением Δ_j, т.е. в пределе при $\max\Delta_j \to 0$ сумма (2.46) даст *точное* значение текущей стоимости нашего непрерывного денежного потока. Однако эта сумма – это не что иное, как интегральная сумма для интеграла $\int_0^t \rho(u)v^u du$. Поэтому точное значение текущей стоимости рассматриваемого непрерывного денежного потока даётся формулой

$$\bar{a}_{\overline{t}|} = \int_0^t \rho(u)e^{-\delta u} du. \tag{2.47}$$

Чтобы не загромождать изложение, мы использовали для текущей стоимости произвольного непрерывного потока тот же символ, что и для непрерывного потока с единичной скоростью поступления средств.

Этот же результат можно получить и с помощью дифференциального уравнения для $f(t) = \bar{a}_{\overline{t}|}$. Рассмотрим разность $f(t+\Delta) - f(t)$. При $\Delta \to 0$ её

значение равно (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) $\rho(t)\cdot\Delta\cdot v^t$, так что $\dfrac{f(t+\Delta)-f(t)}{\Delta}=\rho(t)v^t+o(1)$. Переходя к пределу при $\Delta\to 0$, мы получим: $f'(t)=\rho(t)v^t$. Таким образом, $\rho(t)v^t$ является первообразной для $f(t)=\bar{a}_{\overline{t}|}$. Поскольку $f(0)=0$, мы немедленно получаем соотношение (2.47).

Пределы (2.42) и (2.43) вместе с соотношением (2.45) позволяют записать приближённые равенства: $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}\approx\bar{a}_{\overline{n}|}$, $a^{(p)}_{\overline{n}|}\approx\bar{a}_{\overline{n}|}$. Используя асимптотические разложения для $i^{(p)}$ и $d^{(p)}$ по степеням $1/p$, можно получить и более точные формулы:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}=\frac{1-v^n}{d^{(p)}}=\frac{1-v^n}{\delta}\cdot\frac{\delta}{d^{(p)}}=\bar{a}_{\overline{n}|}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\delta}{2p}+o\left(\dfrac{1}{p}\right)}=\bar{a}_{\overline{n}|}\cdot\left(1+\frac{\delta}{2p}\right)+o\left(\frac{1}{p}\right),\qquad(2.48)$$

$$a^{(p)}_{\overline{n}|}=\frac{1-v^n}{i^{(p)}}=\frac{1-v^n}{\delta}\cdot\frac{\delta}{i^{(p)}}=\bar{a}_{\overline{n}|}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{\delta}{2p}+o\left(\dfrac{1}{p}\right)}=\bar{a}_{\overline{n}|}\cdot\left(1-\frac{\delta}{2p}\right)+o\left(\frac{1}{p}\right).\qquad(2.49)$$

Сумма, накопленная к моменту t при непрерывном поступлении средств со скоростью $\rho(t)\equiv 1$, обозначается $\bar{s}_{\overline{t}|}$. Она может быть подсчитана приведением суммы $\bar{a}_{\overline{t}|}$ к моменту t:

$$\bar{s}_{\overline{t}|}=\bar{a}_{\overline{t}|}\cdot(1+i)^t=\frac{(1+i)^t-1}{\delta}.\qquad(2.50)$$

Отметим ещё один интересный результат, который является непосредственным следствием полученных формул для текущих стоимостей разных рент:

$$\delta\bar{a}_{\overline{n}|}=d^{(p)}\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}=i^{(p)}a^{(p)}_{\overline{n}|}=1-v^n.$$

Это соотношение означает, что непрерывная выплата процентов со скоростью δ, выплата процентов величиной $d^{(p)}/p$ в начале каждого промежутка длиной $1/p$ и выплата процентов величиной $i^{(p)}/p$ в конце каждого промежутка длиной $1/p$ равносильны. Этот результат следует также и из того, что при инвестировании суммы 1 в момент $t_0=0$ непрерывная выплата процентов со скоростью δ на промежутке длиной $1/p$, выплата процентов величиной $d^{(p)}/p$ в начале этого промежутка и выплата процентов величиной $i^{(p)}/p$ в конце этого промежутка приводят к остатку на счёте, равному 1.

Изучим теперь чувствительность текущей стоимости денежного потока к изменению процентной ставки в общем случае. Рассмотрим денежный поток, который поступает со скоростью $\rho(u)$ на промежутке $0\le u\le t$. Текущая

стоимость a (в момент $t_0 = 0$) этого денежного потока вычисляется по формуле (2.47). Если вскоре после расчёта текущей стоимости $a = a(i)$ выяснится, что необходимо использовать процентную ставку $i + \Delta$, то новое значение текущей стоимости будет равно $a(i + \Delta)$. Относительное изменение текущей стоимости в результате изменения технической процентной ставки, используемой для дисконтирования, будет равно

$$\frac{a(i+\Delta) - a(i)}{a(i)} \approx \frac{a'(i)}{a(i)} \cdot \Delta = -v \frac{\int_0^t u\rho(u)(1+i)^{-u} du}{\int_0^t \rho(u)(1+i)^{-u} du} \cdot \Delta.$$

Коэффициент $MDT = \dfrac{\int_0^t u\rho(u)(1+i)^{-u} du}{\int_0^t \rho(u)(1+i)^{-u} du}$ можно рассматривать как взвешенное среднее значение моментов выплат $\int_0^t uw(u)du$ с весами $w(u) = \dfrac{\rho(u)(1+i)^{-u}}{\int_0^t \rho(u)(1+i)^{-u} du}$.

Как и в случае дискретного денежного потока, его называют *средним дисконтированным сроком* (mean discount term). Если абсолютное значение процентной ставки изменится на $|\Delta| = 1\%$, то относительное изменение текущей стоимости денежного потока будет равно примерно $MDT \cdot v\%$ (со знаком «–», если $\Delta > 0$, и со знаком «+», если $\Delta < 0$).

Если вместо процентной ставки i в качестве основного параметра использовать интенсивность процентов $\delta = \ln(1+i)$, то относительное изменение текущей стоимости в результате изменения технической интенсивности процентов, используемой для дисконтирования, будет равно

$$\frac{a(\delta+\Delta) - a(\delta)}{a(\delta)} \approx \frac{a'(\delta)}{a(\delta)} \cdot \Delta = -\frac{\int_0^t u\rho(u)e^{-\delta u} du}{\int_0^t \rho(u)e^{-\delta u} du} \cdot \Delta = -MDT \cdot \Delta.$$

Если абсолютное значение интенсивности процентов изменится на $|\Delta| = 1\%$, то относительное изменение текущей стоимости денежного потока будет равно примерно $MDT\%$ (со знаком «–», если $\Delta > 0,$ и со знаком «+», если $\Delta < 0$). Это относительное изменение текущей стоимости тем больше, чем больше срок до платежа. В этом смысле денежный поток с бóльшим значением MDT имеет бóльший риск изменчивости процентных ставок.

Если скорость поступления средств не меняет знак, то весовая функция $w(u)$ неотрицательна и потому её можно рассматривать как плотность некоторой случайной величины τ. Тогда средний дисконтированный срок – не что иное, как среднее значение этой случайной величины.

2.4.7 Несколько замечаний о терминах

В современной отечественной экономической литературе, которая появилась в результате перевода или интерпретации западной (бóльшей частью англоязычной литературы) английский термин annuity чаще всего «переводится» как *аннуитет* (это просто записанное русскими буквами немецкое слово *annuität*).

В отечественной «имперской» (как дореволюционной, так и советской) справочной литературе встречаются оба термина (рента и аннуитет). Так, Ф.А.Брокгаузъ и И.А.Ефронъ. «Энциклопедический словарь», С.-Петербургъ, 1890-1907, говорит:

Пожизненная рента – Ещё в средние века возник обычай отдавать капитал в пользование лицу или учреждению не за известные проценты, а с тем, чтобы лицу, передающему капитал, уплачивалась ежегодно определённая сумма денег в виде периодических платежей (ренты)…

Аннюитет (annuity) — так называют обыкновенно сумму, вносимую ежегодно по предварительному условию для погашения долга или процентов. В специально принимаемом смысле А. противополагается постоянной и пожизненной ренте как рента срочная, а именно под А. разумеют определенный взнос на известное число лет, который совокупно с процентами заключает в себе и часть капитала, так чтобы к концу назначенного срока погашен был и весь долг. Такой способ применяется и к государственным займам и преимущественно в Англии, где заключённые на 49 (краткосрочные аннюитеты) или же заключённые на 99 лет (долгосрочные аннюитеты) займы погашаются таким же образом.

Советский Энциклопедический Словарь. М.: Советская энциклопедия, 1980, говорит:

Аннтуитеты (от позднелат. annuitas – ежегодный платёж), вид распространённых в 17-19 вв. гос. займов, по которым кредитор получал доход (ренту), включавший погашение суммы долга и выплату процентов по нему. Разделялись на срочные и пожизненные.

Рента (нем. Rente), доход, не связанный с предпринимательской деятельностью и регулярно получаемый рантье в форме процента с предоставляемого в ссуду капитала, землевладельцем в форме зем. ренты с сдаваемого в аренду земельного участка.

Классические русские учебники по актуарной математике, например, широко известная книга С.Е.Савича[3], называют регулярные денежные потоки рентами. Такой же перевод дают и классические словари, например, В.К.Мюллер. Англо-русский словарь. М.: Русский язык, 1992: annuity – ежегодная рента.

---

[3] С.Е.Савич. *Элементарная теория страхования жизни и трудоспособности*. 1-е изд. Типография Императорской Академии Наук, СанктПетербургъ, 1900 (3-е изд. М: Янус-К, 2003).

В одном из первых нормативных документов по страхованию жизни после начала рыночных реформ в России, Приказе Росстрахнадзора от 28.06.96 №02-02/18 «О методике расчёта страховых тарифов по видам страхования, относящимся к страхованию жизни», говорится:

2.2.9. **Рента** – последовательные выплаты, производимые в сроки, установленные договором страхования, например, ежегодно, раз в полугодие, квартал, месяц или с другой периодичностью…

2.2.17. **Аннуитет** – в страховании жизни – ожидаемая дисконтированная (приведённая на определённый момент действия договора страхования) стоимость последовательных страховых взносов или выплат. Аннуитеты используются в актуарных расчётах для оценки современной или наращенной стоимости ренты (пенсии), а также и в качестве коэффициентов рассрочки при определении годичных, полугодовых, квартальных, месячных тарифных ставок, если условиями договора страхования предусмотрена уплата страховых взносов в рассрочку.

В упомянутой выше книге С.Е.Савича *упреждающая рента* (annuity-due) называлась *рентой, уплачиваемой вперёд*, а *запаздывающая рента* (immediate annuity) – *рентой, уплачиваемой за истекшее время*. В скобках С.Е.Савич указал соответствующие термины на немецком языке: *pränumerando* и *postnumerando* соответственно. Во многих современных учебниках по экономике и даже в нормативных документах эти слова записали русскими буквами и называют *упреждающую ренту* (annuity-due) *рентой пренумерандо* или *аннутетом пренумерандо*, а *запаздывающую ренту* (immediate annuity) – *рентой постнумерандо* или *аннутетом постнумерандо*.

2.5 Задачи

Задача 2.1 (CT1, 7 September 2005, Problem 5)

(i) Вычислите текущую стоимость £100, которые будут выплачены через десять лет, если дисконтирование производится в соответствии с

(a) годовой процентной ставкой 5%, применяемой ежемесячно;

(b) годовой учётной ставкой 5%, применяемой ежемесячно;

(c) интенсивностью процентов 5% в год.

(ii) 91-дневный казначейский вексель куплен за \$98.91, а погашен за \$100. Вычислите эффективную годовую ставку для дохода, полученного от этой операции.

Решение. (a) Номинальной годовой процентной ставке $i^{(12)} = 5\%$ соответствует месячная эффективная ставка $i_*^{(12)} = \frac{5}{12}\%$. Поскольку 10 лет состоят из 120 месяцев, искомая текущая стоимость равна $£100 \cdot \left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{-120} = £60.72$.

(b) Номинальной годовой учётной ставке $d^{(12)}=5\%$ соответствует эффективная учётная ставка за месяц $d_*^{(12)}=\frac{5}{12}\%$. Поскольку 10 лет состоят из 120 месяцев, искомая текущая стоимость равна $£100\cdot\left(1-\frac{0.05}{12}\right)^{120}=£60.59$.

(c) Искомая текущая стоимость равна $£100\cdot e^{-0.05\cdot 10}=£60.65$.

(ii) Искомая эффективная годовая ставка i находится из равенства $\$98.91\cdot(1+i)^{\frac{91}{365}}=\$100$, так что $i=\left(\frac{100}{98.91}\right)^{\frac{365}{91}}-1\approx 4.494\%$.

Задача 2.2 (CT1, 6 April 2005, Problem 5) Студент университета получает трёхлетний грант. Выплаты по этому гранту составят:

1. первый год – всего £5,000, выплачиваемых непрерывно;
2. второй год – всего £5,000, выплачиваемых равными долями в начале каждого месяца;
3. третий год – всего £5,000, выплачиваемых равными долями в начале каждого полугодия.

Вычислите общую стоимость всех этих выплат, приведённую к началу первого года, используя техническую процентную ставку 8% годовых, начисляемых ежеквартально.

Решение. Эффективная годовая ставка i, соответствующая номинальной годовой ставке $i^{(4)}=0.08$, находится из равенства $1+i=\left(1+\frac{i^{(4)}}{4}\right)^4$. Поэтому $i=1.02^4-1\approx 0.082432$.

Если выплаты первого года привести к моменту $t_0=0$ начала этого года, то мы получим сумму $PV_1=£5000\bar{a}_{\overline{1}|}=£5000\cdot\frac{1-v}{\delta}$, где $v=\frac{1}{1+i}=1.02^{-4}$, $\delta=\ln(1+i)=4\ln 1.02$. Поэтому $PV_1=£4807.10$.

Если выплаты второго года привести к моменту $t_1=1$ начала этого года, то мы получим сумму $£5000\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(12)}=£5000\cdot\frac{1-v}{d^{(12)}}$, где $d^{(12)}$ – номинальная месячная учётная ставка. Эту ставку удобно найти из соотношения $\left(1-\frac{d^{(12)}}{12}\right)^3\cdot\left(1+\frac{i^{(4)}}{4}\right)=1$, так что $d^{(12)}=12\cdot\left(1-1.02^{-1/3}\right)\approx 0.07894965$. Чтобы привести эту величину к моменту $t_0=0$, её нужно умножить на v. Поэтому приведённая стоимость в момент $t_0=0$ начала первого года выплат второго года равна $PV_2=£5000\cdot\frac{v(1-v)}{d^{(12)}}=£4455.69$.

Если выплаты третьего года привести к моменту $t_2 = 2$ начала этого года, то мы получим сумму $£5000\ddot{a}^{(2)}_{\overline{1}|} = £5000 \cdot \dfrac{1-v}{d^{(2)}}$, где $d^{(2)}$ – номинальная полугодовая учётная ставка. Эту ставку удобно найти из соотношения $\left(1-\dfrac{d^{(2)}}{2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{i^{(4)}}{4}\right)^2 = 1$, так что $d^{(2)} = 2\cdot\left(1-1.02^{-2}\right) \approx 0.07766244$. Чтобы привести эту величину к моменту $t_0 = 0$, её нужно умножить на v^2. Поэтому приведённая стоимость в момент $t_0 = 0$ начала первого года выплат третьего года равна $PV_3 = £5000 \cdot \dfrac{v^2(1-v)}{d^{(2)}} = £4184.60$.

Таким образом, искомая величина равна £13,447.39.

Для решения задачи можно использовать приём с введением новой единицы времени, который мы применяли в теории номинальных процентных ставок и рент, выплачиваемых с частотой p. Выберем в качестве новой единицы времени один месяц. Алгебраическая сумма выплат за эту единицу времени равна $\dfrac{£5000}{12}$. Эффективная процентная ставка для одного месяца $i_* \equiv i^{(12)}_*$ находится из равенства $\left(1+i_*\right)^3 = 1+\dfrac{i^{(4)}}{4}$, так что $i_* = 1.02^{1/3} - 1 \approx 0.662271\%$. Тогда:

(1) $PV_1 = \dfrac{£5000}{12}\,\bar{a}_{\overline{12}|} = £5000 \cdot \dfrac{1-v_*^{12}}{12\delta_*}$, где $v_* = \dfrac{1}{1+i_*}$, $\delta_* = \ln(1+i_*)$, так что, как и раньше, $PV_1 = £4807.10$,

(2) $PV_2 = \dfrac{£5000}{12}\cdot v_*^{12}\ddot{a}_{\overline{12}|} = £5000 \cdot \dfrac{v_*^{12}\left(1-v_*^{12}\right)}{12d_*} = £4184.60$,

(3) $PV_3 = £2500 \cdot v_*^{24}\left(1+v_*^6\right) = £4184.60$ (за полугодие выплачивается £2500).

Задача 2.3 (CT1, 12 September 2006, Problem 2) Человек инвестирует £4m в первом году, £6m – во втором и £8m – в третьем. Инвестиции производятся непрерывно на протяжении каждого года. Вычислите накопление от этих инвестиций к концу третьего года, если эффективная годовая процентная ставка равна 4%.

Решение. В миллионах фунтов искомое накопление равно $4\bar{s}_{\overline{1}|}\cdot(1+i)^2 + 6\bar{s}_{\overline{1}|}\cdot(1+i) + 8\bar{s}_{\overline{1}|} = \dfrac{i}{\delta}\cdot\left(18+14i+4i^2\right) \approx 18.93530077$.

Задача 2.4 (CT1, 30 September 2009, Problem 7) Участник пенсионной схемы на протяжении 20 лет инвестирует по £1,200 в год равными долями в начале каждого месяца. Первый взнос был произведён в день, когда ему исполнилось 25 лет. Начиная с возраста 45 лет он увеличивает свои взносы до £2,400 в годовом выражении, в каждый следующий день рождения увеличивает

эту сумму ещё на £100 и продолжает делать взносы в начале каждого месяца вплоть до своего 65-летия.

(i) Вычислите сумму, которую накопит этот человек, когда ему исполнится 65 лет, если средства, вложенные в пенсионный фонд, зарабатывают 6% годовых.

В возрасте 65 лет этот участник пенсионной схемы использует свои накопления, чтобы купить 20-летнюю ренту с выплатой фиксированной суммы в конце каждого полугодия.

(ii) Вычислите эту сумму, исходя из 5% годовых, начисляемых раз в полугодие.

(iii) Вычислите дисконтированный средний срок ренты в момент её покупки.

Решение. (i) Взносы от 25-го до 45-го дня рождения образуют стандартную упреждающую ренту, выплачиваемую 12 раз в год. К 45-му дню рождения её накопление равно $1200\ddot{s}^{(12)}_{\overline{20}|} = 1200\dfrac{(1+i)^{20}-1}{d^{(12)}}$, где $d^{(12)} = 12\left(1-(1+i)^{-1/12}\right)$. К 65-му дню рождения эта сумма вырастет ещё в $(1+i)^{20}$ раз и составит £146,131.77.

Теперь займёмся взносами от 45-го до 65-го дня рождения. Этот промежуток состоит из 20 лет, которые мы последовательно перенумеруем от 1 до 20. В k-й год делается 12 взносов постоянного размера в начале каждого месяца, а алгебраическая сумма этих взносов равна (в фунтах стерлингов) $2300+100k$. Поэтому стоимость этих взносов, приведённая к началу года, равна $(2300+100k)\ddot{a}^{(12)}_{\overline{1}|} = (2300+100k)\cdot\dfrac{d}{d^{(12)}}$. Заменяя 12 взносов в начале месяца взносом одной этой суммы в начале года, мы получим 20-летнюю ренту с выплатой суммы $(2300+100k)\cdot\dfrac{d}{d^{(12)}}$ в начале k-го года. Её стоимость в 65-й день рождения участника равна $\left(2300\cdot\ddot{s}_{\overline{20}|}+100\cdot\left(I\ddot{s}\right)_{\overline{20}|}\right)\cdot\dfrac{d}{d^{(12)}} = 120{,}006.26$.

Таким образом, общая сумма, накопленная участником пенсионной схемы к своему 65-летию, равна £266,138.03. Отметим, что $\ddot{s}_{\overline{20}|} = \dfrac{(1+i)^{20}-1}{d} \approx 38.99272668$, $(I\ddot{s})_{\overline{20}|} = \dfrac{\ddot{s}_{\overline{20}|}-20}{d} \approx 335.5381713$.

(ii) Пусть x – искомая полугодовая выплата. Будем измерять время полугодиями. Тогда рента, приобретённая участником в свой 65 день рождения, является стандартной запаздывающей рентой с $n=40$ выплатами. Техническая процентная ставка, используемая для её оценки, равна $i'=2.5\%$. Следовательно, её стоимость в день покупки равна $xa_{\overline{40}|} = x\cdot\dfrac{1-1.025^{-40}}{0.025} \approx 25.1027751$. С другой стороны, она равна сумме, накопленной участником, т.е. £266,138.03. Поэтому $x = £10{,}601.94$.

(iii) Продолжая рассматривать полугодие в качестве единицы времени (так что эффективная процентная ставка равна $i' = 2.5\%$), из формулы (2.37)для дисконтированного среднего срока ренты в момент её покупки имеем:

$$MDT_{\overline{40}|} = 1 + \frac{1}{i'} - \frac{40}{(1+i')^{40} - 1} \approx 17.262,$$

т.е. примерно 8.631 лет.

Задача 2.5 (CT1, 4 April 2006, Problem 2) Рента с выплатой £150 в конце каждого квартала должна быть заменена рентой с таким же сроком выплат, но с выплатами в начале каждого месяца. Рассчитайте величину пересмотренных выплат при годовой интенсивности процентов 10%.

Решение. Для исходной ренты алгебраическая сумма всех выплат за год равна £600. Поэтому её текущая стоимость равна $600 \cdot a_{\overline{n}|}^{(4)} = 600 \cdot \frac{1 - v^n}{i^{(4)}}$, где n – срок ренты (в годах), $v = e^{-\delta}$, $i^{(4)} = 4 \cdot \left(e^{\delta/4} - 1\right)$.

Если X – величина ежемесячных выплат для новой ренты, то алгебраическая сумма всех выплат за год равна $12X$. Поэтому текущая стоимость новой ренты равна $12X \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(12)} = 12X \frac{1 - v^n}{d^{(12)}}$, где $d^{(12)} = 12 \cdot \left(1 - e^{-\delta/12}\right)$.

Поскольку текущие стоимости рент должны совпадать,

$$X = 50 \frac{d^{(12)}}{i^{(4)}} = 150 \frac{1 - e^{-\delta/12}}{e^{\delta/4} - 1} = 49.17.$$

Задача 2.6 (CT1, 25 September 2007, Problem 3) Страховая компания предлагает страхователю два варианта оплаты полиса стоимостью £456. Первый вариант предполагает 24 выплаты по £20 в начале каждого месяца с немедленным началом выплат. Второй вариант предполагает 24 выплаты по £20.50 в конце каждого месяца с немедленным началом выплат. Страхователь готов принять график платежей, если для него эффективная годовая процентная ставка меньше 5%. Определите, какой из вариантов примет страхователь (если вообще хоть один из них удовлетворяет этому требованию).

Решение. Первый вариант предполагает выплату стандартной упреждающей ренты на протяжении $n = 2$ лет $p = 12$ раз в год. Алгебраическая сумма платежей за один год равна $£20 \times 12 = £240$. Для $i = 5\%$ текущая стоимость первого варианта равна

$$240\ddot{a}_{\overline{2}|}^{(12)} = 240 \cdot \frac{1 - v^2}{d^{(12)}} = 240 \cdot \frac{1 - v^2}{12 \cdot \left(1 - v^{1/12}\right)} = 458.25 > 456,$$

так что он страхователя не устраивает.

Второй вариант предполагает выплату стандартной запаздывающей ренты на протяжении $n = 2$ лет $p = 12$ раз в год. Алгебраическая сумма

платежей за один год равна $£20.50\times 12 = £246$. Для $i = 5\%$ текущая стоимость второго варианта равна

$$246a_{\overline{2}|}^{(12)} = 246\cdot\frac{1-v^2}{i^{(12)}} = 246\cdot\frac{1-v^2}{12\cdot\left((1+i)^{1/12}-1\right)} = 467.81 > 456,$$

так что он тоже не устраивает страхователя.

Задача 2.7 (CT1, 12 April 2007, Problem 1) На протяжении 25 лет, в начале каждого полугодия, инвестор будет вносить £400 в программу сбережений. На протяжении первых 15 лет процентная ставка составляет 6% годовых, начисляемых ежемесячно, а на протяжении последующих 10 лет процентная ставка будет равна 6% годовых, начисляемых раз в полугодие. Какую сумму накопит инвестор?

Решение. Примем полугодие в качестве новой единицы времени и рассмотрим первые 15 лет. Эффективная процентная ставка i' для полугодия находится из равенства $1+i' = \left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^6$, так что $i' = 1.005^6 - 1$. Средства, вносимые на протяжении первых 15 лет, образуют стандартную упреждающую ренту. Поэтому накопление к концу этого периода равно

$$400\ddot{s}_{\overline{30}|@i'} = 400\cdot\frac{1+i'}{i'}\cdot\left((1+i')^{30}-1\right) = 19728.61282.$$

Для последних 10 лет эффективная процентная ставка за полугодие равна $i'' = \frac{6\%}{2} = 0.03$. Поэтому через 10 лет найденное накопление вырастет до $19728.61282\cdot 1.03^{20} = 35632.07$.

Средства, вносимые на протяжении последних 10 лет, также образуют стандартную упреждающую ренту. Поэтому накопление к концу этого периода равно

$$400\ddot{s}_{\overline{20}|@i''} = 400\cdot\frac{1+i''}{i''}\cdot\left((1+i'')^{20}-1\right) = 11070.59.$$

Общее накопление равно £46702.66.

Задача 2.8 (CT1, 27 September 2011, Problem 3) Человек намеревается выйти на пенсию в свой 65 день рождения, который наступит ровно через четыре года. По достижении 68 лет правительство будет платить ему пенсию в начале каждого месяца из расчёта £5,000 в год. Этот человек хотел бы приобрести ренту с тем, чтобы с 65 до 78 лет его доход, включая правительственную пенсию, был бы £8,000 в год, выплачиваемых равными долями в начале каждого месяца. Он покупает ренту серией равных платежей, вносимых на протяжении четырёх лет в начале каждого квартала, начиная с текущего момента. Используя техническую эффективную годовую процентную ставку $i = 5\%$ годовых, вычислите этот квартальный платёж. Смертность игнорируйте.

Решение. Примем текущий момент в качестве начального и обозначим через x искомую сумму ежеквартального взноса за ренту. Серия платежей за ренту является постоянной рентой, выплачиваемой четыре раза в год с запаздыванием на протяжении четырёх лет. Поскольку алгебраическая сумма выплат за год равна $4x$, текущая стоимость этой ренты, a_{C}, равна $4x\ddot{a}^{(4)}_{\overline{4}|} = 4x\dfrac{1-v^4}{d^{(4)}}$.

Рента, которую приобретает человек, должна выплачивать в начале каждого месяца сумму $\dfrac{£8000}{12}$ на промежутке [4;7) и сумму $\dfrac{£3000}{12}$ на промежутке [7;17). Текущие стоимости этих отсроченных рент равны

$$8000\,{}_{4|}\ddot{a}^{(12)}_{\overline{3}|} = 8000v^4\ddot{a}^{(12)}_{\overline{3}|} = 8000v^4\frac{1-v^3}{d^{(12)}}$$

и

$$3000\,{}_{7|}\ddot{a}^{(12)}_{\overline{10}|} = 3000v^7\ddot{a}^{(12)}_{\overline{10}|} = 3000v^7\frac{1-v^{10}}{d^{(12)}}$$

соответственно. Общая стоимость, a_{B}, равна $8000v^4\dfrac{1-v^3}{d^{(12)}} + 3000v^7\dfrac{1-v^{10}}{d^{(12)}}$.

Принцип эквивалентности утверждает, что $a_{\text{C}} = a_{\text{B}}$, откуда

$$x = £1000\frac{1-v^{\frac{1}{4}}}{12\left(1-v^{\frac{1}{12}}\right)}\cdot\frac{8v^4-5v^7-3v^{17}}{1-v^4} = £2,414.52.$$

Задача 2.9 (CT1, April 2006, Problem 9) Интенсивность процентов $\delta(t)$ является функцией времени и, при измерении времени t годами, задаётся формулой:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0.04, & \text{если} \quad 0 \le t \le 5, \\ 0.008t, & \text{если} \quad 5 < t \le 10, \\ 0.005t + 0.0003t^2, & \text{если} \quad t > 10. \end{cases}$$

(i) Вычислите текущую стоимость единичной денежной суммы, которая должна быть выплачена в момент t=12.

(ii) Вычислите эффективную годовую процентную ставку за 12 лет.

(iii) Вычислите приведённую стоимость в момент $t = 0$ непрерывного денежного потока, который поступает со скоростью $\rho(t) = e^{-0.05t}$ в единицу времени между моментами $t = 2$ и $t = 5$.

Решение. (i) Текущая стоимость (в момент $t_0 = 0$) единичной суммы, которая должна быть выплачена в момент $t = 12$ есть: $PV = \exp\left\{-\int_0^{12}\delta(t)dt\right\}$.

Поскольку функция $\delta(t)$ задана разными формулами на разных промежутках времени, удобно записать интеграл $\int_0^{12}\delta(t)dt$ как сумму:

$$\int_0^{12}\delta(t)dt=\int_0^{5}\delta(t)dt+\int_5^{10}\delta(t)dt+\int_{10}^{12}\delta(t)dt$$
$$=\int_0^{5}0.04dt+\int_5^{10}0.008tdt+\int_{10}^{12}\left(0.005t+0.0003t^2\right)dt.$$

Все интегралы в правой части легко подсчитать:

$$\int_0^{5}0.04dt=0.04\cdot(5-0)=0.2,$$

$$\int_5^{10}0.008tdt=0.004t^2\Big|_5^{10}=0.3,\ \int_{10}^{12}\left(0.005t+0.0003t^2\right)dt=0.0025t^2+0.0001t^3\Big|_{10}^{12}=0.1828,$$

так что $PV=\exp(-0.6828)\approx 0.5052$.

(ii) Пусть i – искомая эффективная годовая процентная ставка. По определению она находится из равенства $PV=(1+i)^{-12}$. Поэтому

$$i=\frac{1}{\sqrt[12]{PV}}-1\approx 5.855\%.$$

(iii) В соответствии с общей формулой, $PV=\int_0^{5}\rho(t)v_t dt$, где $v_t\equiv\exp\left(-\int_0^{t}\delta(u)du\right)$. Если деньги поступают только между моментами $t=2$ и $t=5$, то $\rho(t)=0$ для $t\notin[2,5]$, так что $PV=\int_2^{5}\rho(t)v_t dt.$ Кроме того, на промежутке [0,5] интенсивность процентов постоянна: $\delta(t)=0.04$. Поэтому для $t\in[0,5]$ верно равенство: $v_t=e^{-0.04t}$. Тогда:

$$PV=\int_2^{5}\rho(t)v_t dt=\int_2^{5}e^{-0.05t}e^{-0.04t}dt=\int_2^{5}e^{-0.09t}dt=\frac{1}{-0.09}e^{-0.09t}\Big|_2^{5}$$
$$=\frac{e^{-0.18}-e^{-0.45}}{0.09}\approx 2.196023.$$

Задача 2.10 (CT1, 15 April 2008, Problem 9) Интенсивность процентов, $\delta(t)$, является функцией времени и при измерении времени t годами задаётся формулой:

$$\delta(t)=\begin{cases}0.06, & \text{если}\quad 0\le t\le 4,\\ 0.10-0.01t, & \text{если}\quad 4<t\le 7,\\ 0.01t-0.04, & \text{если}\quad t>7.\end{cases}$$

(i) Вычислите стоимость в момент $t=5$ суммы £1000, которая должна быть выплачена в момент $t=10$.

(ii) Вычислите постоянную годовую процентную ставку, начисляемую ежемесячно, которая приводит к результату, полученному в пункте (i).

(iii) Для денежного потока, поступающего непрерывно со скоростью $\rho(t)=100e^{0.02t}$ между моментами $t=0$ и $t=4$, вычислите сумму, накопленную к моменту $t=12$.

Решение. Известно, что стоимость PV в момент t_1 суммы C, которая должна быть выплачена в момент t_2 даётся формулой:

$$PV = C\exp\left\{-\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt\right\}.$$

В нашем случае $\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt \equiv \int_{5}^{10}\delta(t)dt$. Этот интеграл удобно рассматривать как площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу осью абсцисс, сверху – графиком функции $\delta(t)$, слева – вертикальной прямой, проходящей через точку 5, справа – вертикальной прямой, проходящей через точку 10. График функции $\delta(t)$ изображён на рис.2.1 (отметим, что $\delta(5)=0.05$, $\delta(7)=0.03$, $\delta(10)=0.06$).

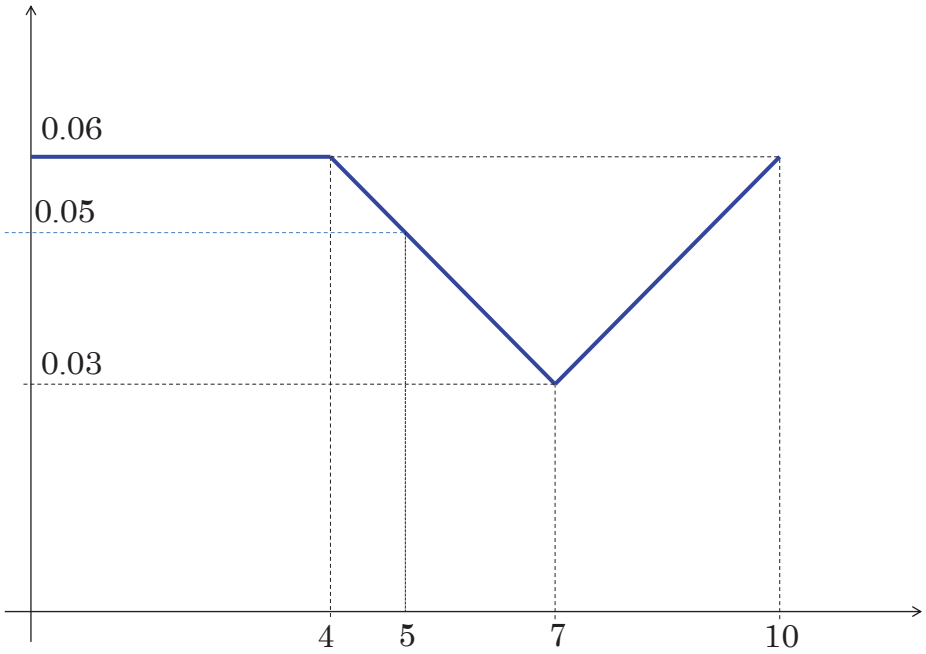


Рис.2.1

Поэтому искомый интеграл равен сумме площадей двух трапеций:

$$\int_{5}^{10}\delta(t)dt = \frac{0.05+0.03}{2}\cdot 2 + \frac{0.03+0.06}{2}\cdot 3 = 0.215,$$

так что $PV = 1000\cdot e^{-0.215} = 806.54$.

(ii) Пусть $i^{(12)}$ – искомая номинальная годовая процентная ставка, соответствующая ежемесячному начислению процентов. Тогда верно равенство: $PV = 1000\left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{-60}$, откуда $i^{(12)} = 12\left(\left(\frac{1000}{PV}\right)^{1/60}-1\right)\approx 4.3077\%$.

(iii) В соответствии с общей формулой, искомое накопление A равно $\int_0^{12}\rho(t)\exp\left(\int_t^{12}\delta(u)du\right)dt$. Так как платежи поступают только для $0\le t\le 4$, $\rho(t)=0$

для $t \notin [0,4]$. Поэтому $A = \int_0^4 \rho(t) \exp\left(\int_t^{12} \delta(u)du\right)dt$. Далее, для $t \in [0;4]$ интеграл $\int_t^{12} \delta(u)du$ равен

$$\int_t^4 \delta(u)du + \int_4^7 \delta(u)du + \int_7^{12} \delta(u)du$$
$$= (4-t)\cdot 0.06 + \frac{0.06+0.03}{2}\cdot 3 + \frac{0.03+0.08}{2}\cdot 5 = 0.6 - 0.06t.$$

Поэтому

$$A = 100e^{0.6}\int_0^4 e^{-0.04t}dt = \frac{100e^{0.6}}{-0.04}e^{-0.04t}\Big|_0^4 = 2500\left(e^{0.6} - e^{0.44}\right) \approx 673.529.$$

Задача 2.11 (CT1, 3 October 2012, Problem 8) Интенсивность процентов**,** $\delta(t)$, является функцией времени (измеряемого годами) и в момент t, даётся формулой

$$\delta(t) = \begin{cases} 0.03 + 0.01t, & \text{для } 0 \le t \le 9, \\ 0.06, & \text{для } t > 9. \end{cases}$$

(i) Получите и упростите насколько это возможно выражение для $v(t)$, где $v(t)$ – текущая стоимость единичной денежной суммы, которая должна быть выплачена в момент t.

(ii) (a) Вычислите текущую стоимость суммы £5000, которая подлежит выплате в конце пятнадцатого года.

(b) Вычислите постоянную интенсивность процентов, соответствующую этой операции.

Между моментами $t = 11$ и $t = 15$ поступает непрерывный поток платежей со скоростью $\rho(t) = 100 \cdot e^{-0.02t}$ (денежных единиц в год).

(iii) Вычислите текущую стоимость этого потока платежей.

Решение. (i) В соответствии с общей теоретической формулой, $v(t) = \exp\left(-\int_0^t \delta(u)du\right)$. Поскольку зависимость δ от t описывается разными формулами на промежутках $0 \le t \le 9$ и $t > 9$, будем отдельно рассматривать случаи $0 \le t \le 9$ и $t > 9$.

Если $0 \le t \le 9$, то

$$\int_0^t \delta(u)du = \int_0^t (0.03 + 0.01u)du = 0.03u + 0.01\frac{u^2}{2}\Big|_0^t = 0.03t + 0.005t^2.$$

Соответственно, $v(t) = \exp\left(-0.03t - 0.005t^2\right)$.

Если $t > 9$, то нужно для вычисления интеграла $\int_0^t \delta(u)du$ его нужно разбить на сумму двух интегралов: $\int_0^9 \delta(u)du + \int_9^t \delta(u)du$. Первый интеграл можно подсчитать по только что полученной формуле для $0 \le t \le 9$; он равен

0.675. Второй интеграл, очевидно, равен $0.06(t-9)$. Таким образом, $\int_0^t \delta(u)du = 0.135 + 0.06t$. Соответственно, $v(t) = \exp\left(-0.135 - 0.06t\right)$.

Отметим, что интеграл $\int_0^t \delta(u)du$ можно вычислить и с помощью геометрического смысла определённого интеграла как площади криволинейной трапеции, ограниченной снизу осью абсцисс, сверху – графиком функции $\delta(t)$, слева – осью ординат, справа – вертикальной прямой, проведённой через точку t на оси абсцисс.

(ii) (a) Коэффициент дисконтирования для рассматриваемого момента времени равен $v_{15} = e^{-1.035} \approx 0.355226$. Поэтому искомая величина равна $£5000 \cdot e^{-1.035} = £1776.13$.

(b) Пусть $\delta_{\text{экв}}$ – искомая постоянная интенсивность процентов. Тогда коэффициент дисконтирования для рассматриваемых моментов времени равен $e^{-15\delta_{\text{экв}}}$. Поэтому для вычисления $\delta_{\text{экв}}$ мы имеем уравнение $e^{-15\delta_{\text{экв}}} = e^{-1.035}$, откуда $\delta_{\text{экв}} = 0.069$.

(iii) Текущая стоимость непрерывного потока платежей, поступающих на промежутке $\left[t_1; t_2\right]$ со скоростью $\rho(t)$, даётся формулой: $PV = \int_{t_1}^{t_2} \rho(t) v_t dt$. Поэтому искомая величина равна

$$PV = 100e^{-0.135} \int_{11}^{15} e^{-0.08t} dt = 100e^{-0.135} \cdot \frac{e^{-0.08t}}{-0.08}\Bigg|_{11}^{15} = 100e^{-0.135} \cdot \frac{e^{-0.88} - e^{-1.2}}{0.08}$$
$$= 1250 \cdot \left(e^{-1.015} - e^{-1.335}\right) \approx 124.0553.$$

Задача 2.12 (CT1, 23 September 2013, Problem 6) Пенсионному фонду предложили инвестировать £2m в только что построенную платную дорогу в обмен на 1% от сумм, которые будут платиться за проезд по этой дороге. Предполагается, что в первый год по дороге будет проезжать 40,000 автомобилей в сутки, а плата за проезд будет равна £1. За второй год по дороге будет проезжать 50,000 автомобилей в сутки, а плата за проезд будет равна £1.10. В третий и последующие годы количество проезжающих за сутки автомобилей и плата за проезд будут увеличиваться на 1% в год. В конце 20-го года дорога будет закрыта на полную реконструкцию и выплаты пенсионному фонду прекратятся. Предполагая, что деньги за проезд по дороге поступают непрерывно, а год состоит из 365 дней, вычислите текущую стоимость этого проекта для пенсионного фонда при эффективной годовой технической процентной ставке $i = 8\%$.

Решение. За первый год общая сумма, собранная за проезд по дороге, составит

40,000 (автомобилей в сутки) × £1 (за автомобиль) × 365 (дней в году).

Доля пенсионного фонда, S_1, будет равна 1% от этой суммы, т.е. $S_1 = £146{,}000$. Т.к. деньги за проезд по дороге поступают непрерывно, текущая стоимость этого денежного потока на начало первого года равна $£146{,}000\bar{a}_{\overline{1}|}$, где $\bar{a}_{\overline{1}|} = \dfrac{1-v}{\delta} \approx 0.96248794$.

За k-й год, $k = 2,\ldots,20$, общая сумма, собранная за проезд по дороге, составит

$$50{,}000 \cdot 1.01^{k-2} \times £1.1 \cdot 1.01^{k-2} \times 365.$$

Доля пенсионного фонда, S_k, будет равна 1% от этой суммы, т.е. $S_k = £200{,}750 \cdot 1.01^{2k-4}$. Т.к. деньги за проезд по дороге поступают непрерывно, стоимость этого денежного потока на начало k-го года равна $£200{,}750\bar{a}_{\overline{1}|} \cdot 1.01^{2k-4}$, а текущая (на начало первого года) – $£200{,}750\bar{a}_{\overline{1}|} \cdot 1.01^{2k-4} \cdot 1.08^{-(k-1)}$.

Общая текущая стоимость поступлений от рассматриваемого проекта для пенсионного фонда равна

$$146000\bar{a}_{\overline{1}|} + \sum_{k=2}^{20} 200750\bar{a}_{\overline{1}|} \cdot 1.01^{2k-4} \cdot 1.08^{-(k-1)}$$

$$= \left(146000 + 200750 \cdot \frac{1.08^{-1} - 1.01^{38} \cdot 1.08^{-20}}{1 - 1.01^2/1.08}\right)\bar{a}_{\overline{1}|} = 2275323.80.$$

Вычитая из этой суммы 2 миллиона фунтов, вложенных в проект, мы получим чистую текущую стоимость проекта для пенсионного фонда: £275,323.80.

Задача 2.13 (CT1, 4 April 2006, Problem 6) Студент актуарной группы разработал модель процентных ставок, в соответствии с которой предполагается, что на протяжении следующих 10 лет эффективная годовая процентная ставка не будет меняться, но её значение может быть 2%, 4% или 7% с вероятностями 0.25, 0.55, 0.2 соответственно.

(a) Вычислите ожидаемое накопление для 10-летней детерминированной ренты, которая будет выплачиваться в начале каждого года в размере £800.

(b) Вычислите вероятность того, что это накопление будет больше, чем £10,000.

Решение. (a) Накопление для 10-летней детерминированной ренты, которая будет выплачиваться в начале каждого года в размере £800 равно $£800\ddot{s}_{\overline{n}|} = £800\left(1 + \dfrac{1}{i}\right)\left((1+i)^n - 1\right)$, где i – эффективная годовая процентная ставка. Если $i = 2\%$ (вероятность этого события равна 0.25), то это накопление равно $£800 \cdot \left(1 + \dfrac{1}{0.02}\right)\left(1.02^{10} - 1\right) \approx 8934.97$. Если $i = 4\%$ (вероятность этого события равна 0.55), то это накопление равно

£800$\cdot\left(1+\frac{1}{0.04}\right)\left(1.04^{10}-1\right)\approx 9989.08$. Если $i=7\%$ (вероятность этого события равна 0.2), то это накопление равно £800$\cdot\left(1+\frac{1}{0.07}\right)\left(1.07^{10}-1\right)\approx 11826.88$. Поэтому среднее значение этого накопления равно £10093.11.

(b) Из приведённых значений накопления для разных значений i видно, что накопление превышает £10,000 только для $i=7\%$. По условию вероятность события $\{i=7\%\}$ равна 0.2 – это и будет ответ на вопрос (b).

Задача 2.14 (CT1, 21 April 2009, Problem 11) Человек желает через 10 лет от настоящего момента на протяжении 15 лет получать ренту. Выплаты должны производиться в конце каждого месяца и в течение каждого года ежемесячные выплаты должны быть равны. За первый год общая сумма всех выплат должна составить £12,000, а затем сумма ежегодных выплат должна увеличиваться на 3% в год. Этот человек хотел бы купить ренту, заплатив разовую премию через 10 лет от настоящего момента.

(i) Вычислите эту разовую премию, исходя из технической процентной ставки 6% годовых.

Чтобы накопить эту сумму, человек хочет немедленно вложить определённую сумму в инвестиционный проект. Пусть i_t – годовая доходность этого проекта за год t. Величины i_t являются являются случайными; они независимы в совокупности и одинаково распределены со средним 6% и стандартным отклонением 15%. Соответствующие коэффициенты накопления $1+i_t$ имеют логнормальное распределение.

(ii) Вычислите, какую сумму должен инвестировать человек сейчас, чтобы с вероятностью 0.98 иметь возможность через 10 лет лет купить описанную ренту. Прокомментируйте результат.

Решение. (i) За год t, $1\le t\le 15$, алгебраическая сумма всех ежемесячных выплат равна £$12000\cdot 1.03^{t-1}$. Поскольку в течение каждого года ежемесячные выплаты должны быть равны, поток выплат за каждый год является стандартной запаздывающей постоянной рентой, выплачиваемой с частотой $p=12$. Его стоимость на начало года равна £$12000\cdot 1.03^{t-1}\cdot a_{\overline{1}|}^{(12)}$, где $a_{\overline{1}|}^{(12)}=\frac{i}{12\left((1+i)^{1/12}-1\right)(1+i)}\approx 0.969067$. Если для каждого из 15 лет выплаты ренты заменить 12 месячных выплат выплатой одной суммы в начале этого года, то мы получим поток из 15 выплат в моменты $t=0,\ldots,14$ ($t=0$ – это начало первого года) в размере £$12000\cdot 1.03^{t}\cdot a_{\overline{1}|}^{(12)}$ соответственно. Стоимость этого денежного потока на начало первого года равна

$$p = £12{,}000 \cdot a_{\overline{15}|}^{(12)} \sum_{t=0}^{14} \left(\frac{1.03}{1.06}\right)^t = £12{,}000 \cdot a_{\overline{15}|}^{(12)} \cdot \frac{1-\left(\frac{1.03}{1.06}\right)^{15}}{1-\frac{1.03}{1.06}} \approx £143{,}774.42.$$

В соответствии с принципом эквивалентности обязательств вычисленная сумма и равна искомой премии.

(ii) Прежде всего вычислим параметры a и σ^2 логнормальной величины $\kappa_t = 1 + i_t$. Её моменты равны: $E(\kappa_t) = 1 + E(i_t) = 1.06$, $Var(\kappa_t) = Var(i_t) = 0.15^2$. Теперь из общих формул для логнормального распределения мы имеем:

$$\sigma^2 = \ln\left(1 + \frac{Var(\kappa_t)}{\left(E(\kappa_t)\right)^2}\right) = \ln\frac{11461}{11236} \approx 0.01982706,$$

$$a = \ln\left(E(\kappa_t)\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 = \ln 1.06 - \frac{1}{2}\ln\frac{11461}{11236} \approx 0.04835538.$$

Если человек немедленно инвестирует сумму S, то через 10 лет он будет располагать суммой $S\prod_{t=1}^{10}\kappa_t$. Итоговый коэффициент накопления $\kappa = \prod_{t=1}^{10}\kappa_t$ также имеет логнормальное распределение с параметрами $10a$ и $10\sigma^2$, т.е. $\frac{\ln\kappa - 10a}{\sqrt{10}\sigma}$ является стандартной нормальной величиной. Поэтому вероятность $P(S\kappa \ge p)$ того, что человек сможет купить ренту, равна

$$P\left(\ln\kappa \ge \ln\frac{p}{S}\right) = P\left(\frac{\ln\kappa - 10a}{\sqrt{10}\sigma} \ge \frac{\ln\frac{p}{S} - 10a}{\sqrt{10}\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln\frac{p}{S} - 10a}{\sqrt{10}\sigma}\right).$$

По условию эта величина должна быть равна 0.98. Значит, дробь $\frac{\ln\frac{p}{S} - 10a}{\sqrt{10}\sigma}$ должна быть равна $z_{0.02} \equiv \Phi^{-1}(0.02) \approx -2.05374891$. Отсюда: $S = p\exp\left\{-10a - \sqrt{10}\sigma z_{0.02}\right\} \approx £221{,}224.174$. Эта сумма почти на 50% больше, чем премия, за которую через 10 лет будет приобретена рента. Поэтому инвестиция, о которой идёт речь, совершенно абсурдна. Причина этого – большое стандартное отклонение (15%) ежегодной доходности i_t от его среднего значения (6%). Поэтому в отдельные годы инвестиция может давать значительную отрицательную доходность, т.е. фактически человек будет не накапливать, а терять средства.

Задача 2.15 (CT1, 27 April 2010, Problem 6) Годовые доходности i_t, которые обеспечивает инвестиционный фонд, независимы в совокупности и одинаково распределены, причём величины $\kappa_t = 1 + i_t$ имеют логнормальное распределение с параметрами $\mu = 0.05$ и $\sigma^2 = 0.004$.

(i) Вычислите ожидаемое накопление через 25 лет, если в начале каждого из 25 последующих лет в фонд инвестируется сумма £3,000.

(ii) Вычислите вероятность того, что для разовой инвестиции в размере £1 на срок 20 лет накопление будет больше своего среднего значения.

Решение. (i) Предположим, что в начале каждого из $n = 25$ лет в фонд вносится единичная сумма. Сумма, накопленная к концу последнего из этих $n = 25$ лет, складывается из $n = 25$ сумм: накопления $\kappa_1 \ldots \kappa_n$ от суммы 1, инвестированной в момент $t = 0$, накопления $\kappa_2 \ldots \kappa_n$ от суммы 1, инвестированной в момент $t = 1$, и т.д. Поэтому общее накопление будет равно $\kappa_1 \ldots \kappa_n + \kappa_2 \ldots \kappa_n + \ldots + \kappa_{n-1}\kappa_n + \kappa_n$. Его среднее значение равно $a = E(\kappa_1 \ldots \kappa_n) + E(\kappa_2 \ldots \kappa_n) + \ldots + E(\kappa_{n-1}\kappa_n) + E(\kappa_n)$. В силу независимости и одинаковой распределённости годовых доходностей независимы и одинаково распределены и коэффициенты накопления, причём $k \equiv E(\kappa_t) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} = e^{0.052} \approx 1.0533757$. Поэтому

$$a = k^n + k^{n-1} + \ldots + k^2 + k = k\frac{k^n - 1}{k - 1} \approx 52.67884299.$$

Соответственно, для суммы £3,000 ожидаемое накопление равно $£3{,}000a \approx £158{,}036.53$.

(ii) Для разовой инвестиции в размере £1 на срок 20 лет накопление будет равно $\kappa = \kappa_1 \ldots \kappa_{20}$. Его среднее значение равно $E(\kappa) = E(\kappa_1 \ldots \kappa_{20}) = k^{20} = e^{1.04}$. Случайная величина κ имеет логнормальное распределение с параметрами $20\mu = 1$ и $20\sigma^2 = 0.08$. Поэтому искомая вероятность $P(\kappa > E\kappa)$ равна

$$P(\ln\kappa > \ln E(\kappa)) = P(\ln\kappa > 1.04) = P\left(\frac{\ln\kappa - 1}{\sqrt{0.08}} > \frac{0.04}{\sqrt{0.08}}\right) = 1 - \Phi\left(0.1\sqrt{2}\right) \approx 0.4438.$$

Глава 3
Расписание возврата долга

3.1 Общая схема долга

Начнём со следующего простого примера. Предположим, что в момент $t_0 = 0$ займодавец дал заёмщику в долг сумму $L_0 = 5000$ (каких-то денежных единиц) и в соответствии с договором займа:

1. этот долг должен быть погашен (paid off, repaid) через три года;
2. на невыплаченную часть долга (loan outstanding) начисляются проценты в соответствии с эффективной годовой процентной ставкой $i = 10\%$;
3. выплаты (repayment) в счёт погашения долга должны производиться в конце каждого из этих трёх лет, т.е. в моменты $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$;
4. заёмщик сам может выбирать, какую сумму P_k он будет выплачивать в момент $t_k = k$;
5. после последней, третьей, выплаты долг должен быть полностью погашен.

Рассмотрим, как будет развиваться ситуация с течением времени.

За первый год, к моменту $t_1 = 1$, на исходную сумму займа будут начислены проценты в размере $I_1 = iL_0 = 500$, так что долг вырастет до величины $L_0 + I_1 = (1+i)L_0 = 5500$. Предположим, что в этот момент заёмщик решил выплатить в счёт погашения сумму $P_1 = 1250$. Тогда в момент $t_1 + 0$ долг уменьшится до величины $L_1 = (1+i)L_0 - P_1 = 4250$. Обратим внимание на то, что, хотя была выплачена четверть исходной суммы займа, долг уменьшился лишь на $750/5000 = 15\%$. Дело в том, что из суммы $P_1 = 1250$ часть ($I_1 = 500$) пошла на погашение начисленных процентов и лишь остаток $\Delta L_1 = L_0 - L_1 = P_1 - I_1 = 750$ пошёл на уменьшение основной суммы займа.

За второй год, к моменту $t_2 = 2$, на невыплаченную часть долга (в момент $t_1 + 0$) будут начислены проценты в размере $I_2 = iL_1 = 425$, так что долг вырастет до величины $L_1 + I_2 = (1+i)L_1 = 4675$. Предположим, что в этот момент заёмщик решил выплатить в счёт погашения сумму $P_2 = 2200$. Тогда в момент $t_2 + 0$ долг уменьшится до величины $L_2 = (1+i)L_1 - P_2 = 2475$. Из суммы $P_2 = 2200$ часть $I_2 = 425$ пошла на погашение начисленных процентов, а остаток $\Delta L_2 = L_1 - L_2 = P_2 - I_2 = 1775$ – на уменьшение основной суммы займа.

За третий год, к моменту $t_3 = 3$ на невыплаченную часть долга (в момент $t_2 + 0$) будут начислены проценты в размере $I_3 = iL_2 = 247.50$, так что долг

вырастет до величины $L_2 + I_3 = (1+i)L_2 = 2722.50$. Чтобы полностью погасить долг в конце третьего года, заёмщик должен выплатить сумму $P_3 = 2722.50$. Из этой суммы часть $I_3 = 247.50$ пошла на погашение начисленных процентов, а остаток $\Delta L_3 = L_2 - L_3 = P_3 - I_3 = 2475$ – на уменьшение основной суммы займа до нуля.

Таким образом, чтобы погасить долг в размере $L_0 = 5000$ заёмщик в общей сложности выплатил сумму $P_1 + P_2 + P_3 = 6172.50$. Проценты за три года составили $I_1 + I_2 + I_3 = 1172.50$, т.е. 23.45% от суммы займа. В среднем за один год в виде процентов выплачивалась сумма $1172.50/3 \approx 390.83$, т.е около 7.82% от суммы займа (отметим, что проценты на невыплаченную часть долга начислялись из расчёта 10% годовых).

Эта процентная ставка называется *flat rate of interest*, что в данном контексте можно перевести как *усреднённая процентная ставка*. Обратим внимание на то, что она намного ниже той ставки (в нашем случае 10% годовых), в соответствии с которой начислялись проценты на невыплаченную часть долга. Последняя ставка называется *применяемой ставкой* (*applied rate*).

Для понимания того, под какие проценты в реальности даются деньги в долг, важно учитывать, что получение, обслуживание и погашение займа предполагает много дополнительных расходов со стороны заёмщика:

1. комиссии банка за рассмотрение заявки на получение кредита, за открытие и ведение банковского счета и т.д.,
2. премии страховой компании по договорам страхования жизни и здоровья заёмщика, страхования залога по кредиту,
3. плата за перевод денег в счёт выплат по кредиту из других банков или отделений связи и т.д.

Годовая эффективная ставка по займу с учётом всех расходов, связанных с заключением договора называется *annual percentage* [pə'sentɪʤ] *rate of charge* [ʧɑ:ʤ] или, сокращённо, APR, что можно перевести как «годовая процентная ставка с учётом расходов»[1]. С помощью APR можно легко сравнивать условия различных договоров займа. В Европейском Союзе сам этот термин и формула для его расчёта зафиксированы в Директиве 98/7/ЕС Европейского Парламента и Совета от 16 февраля 1998 года.

В Российской Федерации Федеральный закон 353-ФЗ «О потребительском кредите (займе)» от 21 декабря 2013 года ввёл понятие, аналогичное APR, *полную стоимость кредита* (ПСК). В соответствии со Статьёй 6 этого закона

«В расчет полной стоимости потребительского кредита (займа) включаются … следующие платежи заёмщика:

[1] Точнее говоря, APR – это внутренняя ставка дохода (IRR) для денежного потока, описывающего заём, т.е. годовая процентная ставка для некоторого эквивалентного банковского счёта. Подробно о IRR мы расскажем в Главе 4, а сейчас отметим только, что эта величина определяется как корень некоторого уравнения.

1) по погашению основной суммы долга по договору потребительского кредита (займа);

2) по уплате процентов по договору потребительского кредита (займа);

3) платежи заемщика в пользу кредитора, если обязанность заёмщика по таким платежам следует из условий договора потребительского кредита (займа) и (или) если выдача потребительского кредита (займа) поставлена в зависимость от совершения таких платежей;

4) плата за выпуск и обслуживание электронного средства платежа при заключении и исполнении договора потребительского кредита (займа);

5) платежи в пользу третьих лиц, если обязанность заёмщика по уплате таких платежей следует из условий договора потребительского кредита (займа), в котором определены такие третьи лица, и (или) если выдача потребительского кредита (займа) поставлена в зависимость от заключения договора с третьим лицом;

6) сумма страховой премии по договору страхования в случае, если выгодоприобретателем по такому договору не является заёмщик или лицо, признаваемое его близким родственником;

7) сумма страховой премии по договору добровольного страхования в случае, если в зависимости от заключения заёмщиком договора добровольного страхования кредитором предлагаются разные условия договора потребительского кредита (займа), в том числе в части срока возврата потребительского кредита (займа) и (или) полной стоимости кредита (займа) в части процентной ставки и иных платежей.»

Эта же статья содержит формулу для расчёта полной стоимости кредита. Уравнения, определяющие APR и ПСК, похожи, но немного отличаются в используемом методе дисконтирования.

Теперь рассмотрим общую ситуацию (см. рис. 3.1). Предположим, что в момент $t_0 = 0$ займодавец даёт заёмщику в долг сумму L_0. Долг должен быть выплачен n платежами, величиной $P_1, P_2, \ldots, P_n$, в моменты $t_1, t_2, \ldots t_n$ соответственно. В соответствии с условиями займа на невыплаченную часть долга начисляются проценты; на промежутке $(t_{k-1}; t_k)$ эффективная процентная ставка равна i_k, $1 \le k \le n$.

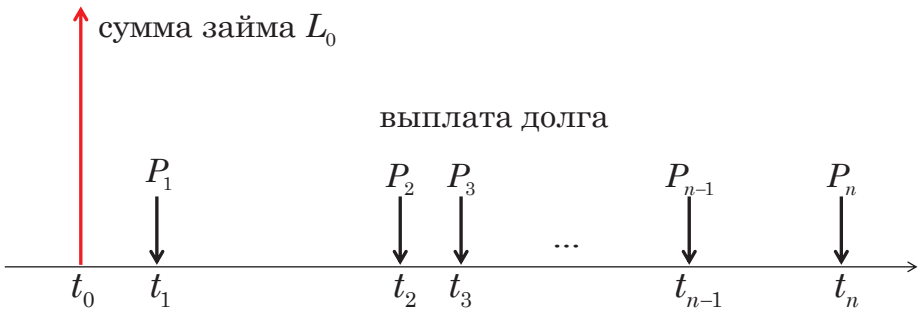


Рис. 3.1

Пусть L_k – сумма невыплаченного долга в момент $t_k + 0$, т.е. непосредственно после k-й выплаты, $1 \le k \le n$. Рассмотрим, как развивается ситуация на промежутке $(t_{k-1}; t_k)$, $1 \le k \le n$. В начале этого промежутка невыплаченный долг равен L_{k-1}, а к его концу на сумму L_{k-1} будут начислены проценты в размере $I_k = i_k L_{k-1}$, так что за счёт процентов долг вырастет до $(1 + i_k)L_{k-1}$. После выплаты в момент t_k суммы P_k долг уменьшится до величины $L_k = (1 + i_k)L_{k-1} - P_k$ (см. рис. 3.2).

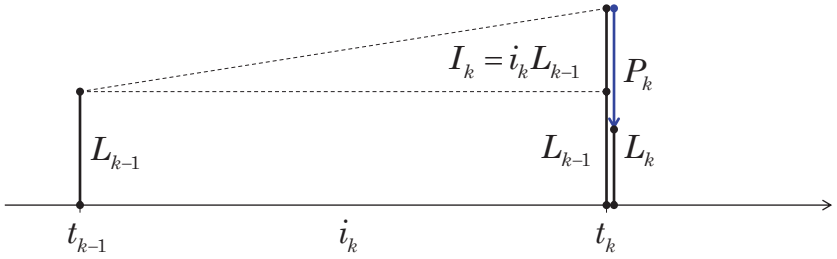


Рис. 3.2

Таким образом, для последовательности $L_0, L_1, \ldots, L_n$ верно рекуррентное соотношение:

$$L_k = L_{k-1}(1 + i_k) - P_k, \quad 1 \le k \le n, \tag{3.1}$$

или, подробнее,

$$L_1 = L_0(1 + i_1) - P_1,\ L_2 = L_1(1 + i_2) - P_2,\ \ldots,\ L_n = L_{n-1}(1 + i_n) - P_n.$$

Кроме того, поскольку после последней выплаты долг должен быть полностью погашен, справедливо граничное условие: $L_n = 0$.

Сумма P_k естественно делится на две части. Первая часть в размере $I_k = i_k L_{k-1} = L_k + P_k - L_{k-1}$ идёт на погашение процентов, начисленных на промежутке $(t_{k-1}; t_k)$ на невыплаченную сумму долга, а вторая часть в размере $\Delta L_k = L_{k-1} - L_k = P_k - I_k$ оплачивает основную сумму займа и показывает, насколько уменьшился долг после k-го платежа.

Для анализа разнообразных ситуаций, связанных с возвратом долга, полезны некоторые дополнительные соотношения, вытекающие из (3.1). Чтобы их получить, введём коэффициенты дисконтирования $v^{(k)} = (1 + i_1)^{-1} \cdot \ldots \cdot (1 + i_k)^{-1}$ для промежутков $[t_0; t_k]$ (произведение пустого множества сомножителей, в соответствии с обычным соглашением, равно 1, так что $v^{(0)} = 1$) и новую последовательность $x_k = L_k v^{(k)}$ (отметим, что $x_0 = L_0$ и $x_n = 0$). Для этой последовательности рекуррентное соотношение (3.1) примет вид:

$$x_k = x_{k-1} - P_k v^{(k)}, 1 \le k \le n.$$

Отсюда последовательно имеем:

$$x_k = L_0 - \sum_{j=1}^{k} P_j v^{(j)}, \tag{3.2}$$

что равносильно

$$L_k = (1+i_1)\cdot\ldots\cdot(1+i_k)L_0 - \sum_{j=1}^{k}\left(P_j \cdot (1+i_{j+1})\cdot\ldots\cdot(1+i_k)\right). \tag{3.3}$$

Поскольку $x_n = 0$, справедливо следующее соотношение:

$$L_0 = \sum_{j=1}^{n} P_j v^{(j)}, \tag{3.4}$$

что позволяет переписать (3.2) в виде:

$$x_k = \sum_{j=k+1}^{n} P_j v^{(j)}, \tag{3.5}$$

а (3.3) – в виде:

$$L_k = \sum_{j=k+1}^{n}\left(P_j \cdot (1+i_{k+1})^{-1}\cdot\ldots\cdot(1+i_j)^{-1}\right). \tag{3.6}$$

Эти соотношения можно получить не только формальными математическими преобразованиями, но и помощью «финансовых» рассуждений, основанных на принципе эквивалентности. Как мы уже отмечали, этот принцип означает, что в любой сделке обе стороны должны иметь равноценные обязательства. В договоре займа обязательства займодавца заключаются в том, что в момент $t_0 = 0$ он передаёт заёмщику сумму L_0. Обязательства заёмщика заключаются в том, что в моменты $t_1,\ldots,t_n$ он выплачивает заёмщику суммы $P_1,\ldots,P_n$ соответственно.

Мы не можем выразить эквивалентность обязательств займодавца и заёмщика просто приравняв сумму займа, L_0, и общую сумму всех выплат, $\sum_{k=1}^{n} P_k$ – эти платежи относятся к разным моментам времени. В соответствии с фундаментальной идеей о зависимости ценности денег от момента времени, в который рассматривается соответствующая сумма, мы должны сначала привести все суммы к одному моменту. Обычно в качестве этого момента берётся момент $t_0 = 0$ заключения договора. Иными словами, нужно рассматривать текущие (или приведённые к какому-либо другому моменту времени) значения всех сумм.

Ясно, что современная стоимость обязательств займодавца равна L_0 (ведь эта сумма передаётся заёмщику именно в момент $t_0 = 0$). Обязательства заёмщика заключаются в том, что в моменты $t_1,\ldots,t_n$ он выплачивает займодавцу суммы $P_1,\ldots,P_n$ соответственно. Текущая ценность суммы P_j равна

$P_j v^{(j)}$. Поэтому текущее значение всех обязательств заёмщика равно $\sum_{j=1}^{n} P_j v^{(j)}$. Принцип эквивалентности обязательств означает, что эта сумма должна быть равна L_0: $\sum_{j=1}^{n} P_j v^{(j)} = L_0$ – это в точности соотношение (3.4).

Далее, величина L_k невыплаченного долга непосредственно после k-го платежа может рассматриваться как финансовые обязательства заёмщика в момент $t_k + 0$. Соответственно, величина $x_k = L_k v^{(k)}$ – это текущее (в момент $t_0 = 0$) значение финансовых обязательств заёмщика в момент $t_k + 0$. С другой стороны, эти обязательства заключаются в выплате сумм $P_{k+1},\ldots,P_n$ в моменты $t_{k+1},\ldots,t_n$. Текущая ценность суммы P_j равна $P_j \cdot v^{(j)}$. Поэтому значение указанных обязательств заёмщика в момент $t_0 = 0$ равно $\sum_{j=k+1}^{n} P_j v^{(j)}$, что даёт равенство (3.5). Если суммы $P_{k+1},\ldots,P_n$ приводить не к моменту $t_0 = 0$, а к моменту t_k, то мы получим соотношение (3.6). Метод расчёта невыплаченного долга, описанный выше, основан на анализе будущего (по отношению к моменту $t_k + 0$) развития событий. Поэтому его называют *проспективным методом* (prospective [prə'spektɪv] method). Проспективная формула (3.6) говорит, что размер невыплаченного долга в момент $t_k + 0$ равен сумме приведённых к этому моменту времени всех будущих выплат в счёт погашения долга.

Сумму L_k можно рассчитать и другим методом. Рассмотрим опять обязательства сторон в момент $t_0 = 0$ заключения договора. Как мы отмечали, текущая стоимость обязательств займодавца равна L_0. Поэтому в этот момент и обязательства заёмщика составляют ту же сумму. После выплаты займодавцу сумм $P_1,\ldots,P_k$ в моменты $t_1,\ldots,t_k$ соответственно заёмщик уменьшит свои обязательства на сумму, значение которой в момент $t_0 = 0$ равно $\sum_{j=1}^{k} P_j v^{(j)}$. Поэтому величина обязательств заёмщика в момент $t_k + 0$, приведённая к моменту $t_0 = 0$, т.е. x_k, равна $L_0 - \sum_{j=1}^{k} P_j v^{(j)}$ – это в точности соотношение (3.2). Описанный метод расчёта невыплаченного долга основан на анализе прошлого, ретроспективного (по отношению к моменту $t_k + 0$) развития событий. Поэтому его называют *ретроспективным методом* (retrospective [ˌretrə'spektɪv] method). Ретроспективная формула (3.3) говорит, что размер невыплаченного долга в момент $t_k + 0$ равен накоплению к этому моменту суммы займа за вычетом накопления к этому моменту от всех уже произведённых выплат в счёт погашения долга.

Теперь предположим, что в рассмотренной выше общей ситуации выбрана некоторая основная единица времени (год, месяц и т.д.) и проценты на невыплаченную часть долга начисляются в соответствии с неизменной эффективной процентной ставкой i. Тогда эффективная ставка i_k для промежутка $[t_{k-1};t_k]$ равна $(1+i)^{t_k-t_{k-1}}$, а коэффициент дисконтирования $v^{(k)}$ для промежутка $[t_0;t_k]$ равен $(1+i)^{-t_k} \equiv v^{t_k}$ (как обычно, $v=1/(1+i)$ – коэффициент дисконтирования, соответствующий ставке i). Для этой ситуации полученные выше общие формулы примут вид:

$$L_k = L_{k-1}(1+i)^{t_k-t_{k-1}} - P_k, \tag{3.7}$$

$$x_k = L_0 - \sum_{j=1}^{k} P_j (1+i)^{-t_j}, \tag{3.8}$$

$$L_k = (1+i)^{t_k} L_0 - \sum_{j=1}^{k} P_j (1+i)^{t_k-t_j}. \tag{3.9}$$

$$L_0 = \sum_{j=1}^{n} P_j (1+i)^{-t_j} \tag{3.10}$$

$$x_k = \sum_{j=k+1}^{n} P_j (1+i)^{-t_j}, \tag{3.11}$$

$$L_k = \sum_{j=k+1}^{n} P_j (1+i)^{t_k-t_j}. \tag{3.12}$$

3.2 Стандартная схема займа с постоянными выплатами

Число разнообразных задач, связанных с выплатой долга, безгранично и их невозможно полностью сформулировать и решить в рамках одной модели. Поэтому мы подробно рассмотрим только важный частный случай, когда все платежи должны быть равны (level), т.е. $P_k \equiv P$, и $t_1 = 1, t_2 = 2, \ldots, t_n = n$, т.е. равные выплаты (instalment[2] [ɪn'stɔ:lmənt]) должны производиться (в зависимости от выбранной единицы времени) в конце года, месяца и т.п. Подходы и методы, которые мы изложим для этой специфической ситуации, позволяют проанализировать и многие другие, гораздо более сложные схемы займа. Мы рассмотрим их в конце главы в ходе решения задач квалификационных экзаменов Института и Факультета Актуариев. Для этой схемы основными являются следующие задачи:

---

[2] Хотя (в соответствии с Oxford Dictionary) instalment означает «a sum of money due as one of several equal payments for something, spread over an agreed period of time», в задачах Института Актуариев этот термин применяется и для неравных выплат.

1. найти «справедливую» зависимость размера регулярных выплат P от суммы займа L_0;
2. рассчитать расписание (schedule ['ʃedju:l], ['skedʒu:l]) выплат, которое бы показывало, какая часть очередной выплаты является процентами на невыплаченную часть займа, а какая – очередной выплатой части долга.

Формулы, полученные в предыдущем разделе, позволяют мгновенно получить ответы на эти вопросы.

Основное рекуррентное соотношение (3.7) в рассматриваемом регулярном случае примет вид:

$$L_k = L_{k-1}(1+i) - P, 1 \le k \le n. \tag{3.13}$$

Хотя для дальнейшего анализа ситуации можно использовать уже полученные общие формулы, можно предложить ещё один способ решения функционального уравнения (3.13). С этой целью введём новую последовательность Y_k по формуле $Y_k = L_k - y \Leftrightarrow L_k = Y_k + y,$ где параметр y мы определим позже. Для этой новой последовательности рекуррентное соотношение (3.13) примет вид $Y_k + y = \left(Y_{k-1} + y\right)(1+i) - P, 1 \le k \le n$, или, что то же самое

$$Y_k = Y_{k-1}(1+i) + yi - P, \quad 1 \le k \le n. \tag{3.14}$$

Если мы выберем y таким, что $yi - P = 0$, т.е. $y = P/i$, то уравнение (3.14) примет вид:

$$Y_k = Y_{k-1}(1+i), \quad 1 \le k \le n. \tag{3.15}$$

Это уравнение в точности совпадает с равенством, определяющим геометрическую прогрессию (члены которой занумерованы с 0) со знаменателем $q = 1+i$, и потому $Y_k = Y_0(1+i)^k$, $0 \le k \le n.$ Для основной последовательности L_k этот результат даёт:

$$L_k - \frac{P}{i} = \left(L_0 - \frac{P}{i}\right)(1+i)^k, 0 \le k \le n,$$

так что

$$L_k = L_0(1+i)^k - P\frac{(1+i)^k - 1}{i}, 0 \le k \le n. \tag{3.16}$$

Это в точности ретроспективная формула (3.9) для величины задолженности сразу после k-й выплаты (после суммирования геометрической прогрессии $\sum_{j=1}^{k}(1+i)^{k-j}$). Принимая во внимание граничное условие $L_n = 0$, мы сможем найти размер регулярного платежа P:

$$P = L_0 \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}. \tag{3.17}$$

С помощью (3.17) соотношение (3.16) можно переписать в виде (это в точности равенство (3.12)):

$$L_k = P\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}, \quad 0 \le k \le n, \tag{3.18}$$

или в виде:

$$L_k = L_0\frac{(1+i)^n-(1+i)^k}{(1+i)^n-1}, \quad 0 \le k \le n. \tag{3.19}$$

В момент k-го платежа из суммы P на выплату основной суммы займа идёт сумма

$$\Delta L_k = L_0\frac{i}{(1+i)^n-1}\cdot(1+i)^{k-1} = P\cdot(1+i)^{-(n-k+1)}, \tag{3.20}$$

а на выплату процентов – сумма

$$I_k = P-\Delta L_k = P\cdot\left(1-(1+i)^{-(n-k+1)}\right). \tag{3.21}$$

Таким образом, с течением времени сумма, которая идёт на погашение долга, экспоненциально увеличивается, а сумма, которая гасит набежавшие проценты, уменьшается.

Например, если сумма займа $L_0 = 100000$, он выдан под $i = 12\%$ годовых и должен быть возвращён через $n = 10$ лет равными выплатами в конце каждого года, то по формуле (3.17) мы получим: $P = 17698.42$. Из этой суммы, например, для $k = 7$ на выплату долга идёт сумма $\Delta L_7 = 11247.66$, а на выплату процентов – сумма $I_7 = 6450.75$.

Отметим, что в Microsoft Office Excel имеется стандартная функция ПЛТ (PMT в английской версии), которая позволяет сразу найти величину P периодического платежа: $P = -\text{ПЛТ}(i,n,L_0)$ (мы поставили знак «минус», т.к. функция ПЛТ возвращает отрицательное число). В нашем примере $-\text{ПЛТ}(0.12,10,100000) = 17698.42$. Значение ΔL_k можно вычислить с помощью стандартной функции ОСПЛТ (PPMT в английской версии): $\Delta L_k = -\text{ОСПЛТ}(i,k,n,L_0)$ (мы поставили знак «минус», т.к. функция ОСПЛТ возвращает отрицательное число). В нашем примере $-\text{ОСПЛТ}(0.12,7,10,100000) = 11247.66$. Значение I_k можно вычислить с помощью стандартной функции ПРПЛТ (IPMT в английской версии): $\Delta L_k = -\text{ПЛТ}(i,k,n,L_0)$ (мы поставили знак «минус», т.к. функция ПРПЛТ возвращает отрицательное число). В нашем примере $-\text{ПРПЛТ}(0.12,7,10,100000) = 6450.75$.

Расписание выплат, которое даёт размер оставшегося долга после очередной выплаты, а также показывает, какая часть очередной выплаты является процентами на невыплаченную часть займа, а какая – очередной выплатой части долга, приведено в Таблице 3.1.

Таблица 3.1

k	L_k	I_k	ΔL_k	k	L_k	I_k	ΔL_k
1	94301.58	12000.00	5698.42	6	53756.27	7655.86	10042.56
2	87919.36	11316.19	6382.23	7	42508.61	6450.75	11247.66
3	80771.26	10550.32	7148.09	8	29911.23	5101.03	12597.38
4	72765.40	9692.55	8005.86	9	15802.16	3589.35	14109.07
5	63798.83	8731.85	8966.57	10	0.00	1896.26	15802.16

В этом примере общая алгебраическая (без учёта дисконтирования) сумма всех выплат равна 176984.16 (небольшое отличие по сравнению с $10P$ связано с округлением суммы P до сотых долей денежной единицы). Общая сумма выплаченных процентов за 10 лет равна 76984.16, так что на один год приходится примерно 7698.42, что составляет около 7.7% от суммы займа. Как обычно, эта *усреднённая процентная ставка* намного ниже размера реальных процентов (в нашем случае 12% годовых), под которые выдаётся заём.

Общая сумма всех выплаченных процентов может быть найдена по формуле: $nP - L_0 = L_0 \cdot \left(\dfrac{in}{1-(1+i)^{-n}} - 1 \right)$. Отметим, что в Microsoft Office Excel имеется стандартная функция ОБЩПЛАТ (CUMIPMT в английской версии), которая позволяет сразу найти общую сумму всех выплаченных процентов: $= -\text{ОБЩПЛАТ}(i, n, L_0, 1, n, 0)$ (мы поставили знак «минус», т.к. функция ОБЩПЛАТ возвращает отрицательное число). В нашем примере $-\text{ОБЩПЛАТ}(0.12, 10, 100000, 1, 10, 0) = 76984.16$.

Теперь немного изменим разобранный пример, предположив, что заём в размере $L_0 = 100000$ выдан под $i = 12\%$ годовых и должен быть возвращён через $T = 10$ лет равными выплатами в конце каждого месяца. В подобных формулировках 12% обычно понимается как номинальная годовая ставка, начисляемая ежемесячно, т.е. как $i^{(12)}$. Соответствующая эффективная месячная ставка $i_*^{(12)}$ равна 1%. Принимая один месяц в качестве основной единицы измерения времени, мы получим, что общее число выплат n равно 120. Теперь для расчёта регулярной ежемесячной выплаты можно применить формулу (3.17): $P = 1434.71$. Применение Excel даёт тот же результат: $P = -\text{ПЛТ}(0.01, 120, 100000) = 1434.71$.

Рассмотрим теперь общий случай займа на сумму L_0, который должен быть возвращён через T лет регулярными равными выплатами m раз в год. Проценты на невыплаченную часть долга начисляются в соответствии с постоянной годовой процентной ставкой $i^{(m)}$, применяемой m раз в год. Пусть $P^{(m)}$ – суммарная годовая выплата, так что размер одного платежа по займу равен $\dfrac{P^{(m)}}{m}$.

Чтобы применить полученные выше формулы, введём новую единицу времени, равную $\frac{1}{m}$-й части года. Для этого промежутка эффективная процентная ставка даётся формулой $i_*^{(m)} = \frac{i^{(m)}}{m}$, общее число выплат равно $n = Tm$. Поэтому из формулы (3.17) для суммарной годовой выплаты мы немедленно имеем:

$$P^{(m)} = L_0 \frac{i^{(m)}}{1 - \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-n}}. \tag{3.22}$$

Для суммы $L_k^{(m)}$ невыплаченного долга немедленно после k-го платежа формулы (3.18) и (3.19) дают:

$$L_k^{(m)} = P^{(m)} \frac{1 - \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-(n-k)}}{i^{(m)}}, \tag{3.23}$$

$$L_k^{(m)} = L_0 \frac{\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{n} - \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{k}}{\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{n} - 1}. \tag{3.24}$$

Соответственно, в k-м платеже сумма

$$\Delta L_k = \frac{P^{(m)}}{m} - I_k = L_0 \frac{\frac{i^{(m)}}{m}}{\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{n} - 1} \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{k-1} = \frac{P^{(m)}}{m} \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-(n-k+1)} \tag{3.25}$$

оплачивает очередную часть основной суммы займа, а сумма

$$\begin{aligned} I_k = L_{k-1}^{(m)} \cdot \frac{i^{(m)}}{m} &= L_0 \frac{\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{n} - \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{k-1}}{\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{n} - 1} \cdot \frac{i^{(m)}}{m} \\ &= \frac{P^{(m)}}{m} \left(1 - \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-(n-k+1)}\right) \end{aligned} \tag{3.26}$$

идёт на оплату процентов.

В рассматриваемом случае k-я выплата производится в момент $t = k/m$. Поэтому величину $L_k^{(m)}$ можно обозначить как $L^{(m)}(t)$. Тогда формулы (3.23) и (3.24) примут вид:

$$L^{(m)}(t) = P^{(m)} \frac{1 - (1+i)^{-(T-t)}}{i^{(m)}}, \tag{3.27}$$

$$L^{(m)}(t) = L_0 \frac{(1+i)^T - (1+i)^t}{(1+i)^T - 1}, \tag{3.28}$$

где $i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$ – эффективная годовая ставка по займу. С использованием этих обозначений упростится и формула (3.22):

$$P^{(m)} = L_0 \frac{i^{(m)}}{1 - (1+i)^{-T}}. \tag{3.29}$$

Во втором примере общая алгебраическая (без учёта дисконтирования) сумма всех выплат равна 172165.14 (небольшое отличие по сравнению с $120P$ связано с округлением суммы P до сотых долей денежной единицы). Общая сумма выплаченных процентов за 10 лет равна 72165.14 (в то время как в первом примере общая сумма выплаченных процентов за 10 лет равна 76984.16), так что на один год приходится примерно 7216.51, что составляет около 7.2% от суммы займа. Иначе говоря, усреднённая процентная ставка равна 7.2%, что ещё ниже, чем в первом примере. Поэтому на первый взгляд заём под 12% годовых с ежемесячными выплатами выгоднее, чем заём под 12% годовых с ежегодными выплатами. Но на самом деле это не так. Дело в том, что эффективная годовая процентная ставка во втором примере равна $i_{\text{эфф}}^{(\text{год})} = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1 = 1.01^{12} - 1 \approx 12.68\%$. Если бы во втором примере заёмщик не выплачивал сумму $P = 1434.71$ в конце каждого месяца, а размещал эти деньги на банковский депозит под, скажем, 9% годовых с ежемесячным начислением процентов, то к концу года накопление составило бы сумму $1434.71 \cdot s_{\overline{12}|@0.75\%} = 17944.76$, что больше суммы 17698.42, которая требуется в конце года для выплаты в первом примере (чтобы получить в точности сумму 17698.42 депозит должен давать чуть больше 6% годовых).

3.3 Примеры банковских предложений по займам

Выше мы рассматривали только числовые параметры займа: сумму займа, срок, процентную ставку. Соответственно, основное внимание было уделено выводу формул для расчёта суммы регулярного платежа, детального расписания выплат с указанием невыплаченной части долга и т.д.

При всей важности математических расчётов нужно хорошо понимать, что они не дают полного представления о займе. Заключение реального договора займа предполагает анализ цели займа, платёжеспособности заёмщика, обеспечения по кредиту и т.д. Числовые параметры займа (сумма займа, срок, процентная ставка) зависят от вида кредита и выполнения большого числа дополнительных требований к заёмщику. Детальную информацию такого рода

можно найти на сайте любого банка. Как правило, эти сайты содержат встроенные калькуляторы, которые позволяют рассчитать сумму выплат, а часто и расписание выплат по займу.

Посетим, например, сайт Сберегательного банка РФ (его адрес: http://sberbank.ru/moscow/ru/person/credits/). Отсюда мы можем узнать, что Сбербанк предлагает физическим лицам потребительские кредиты (потребительский кредит используется заёмщиком для покупки товаров или услуг непроизводственного характера), жилищные кредиты, автокредиты, кредитные карты.

Каждый вид кредитов состоит из ряда кредитных программ:

1. потребительские кредиты:
    a. потребительские кредиты без обеспечения;
    b. потребительские кредиты под поручительство физических лиц;
    c. потребительские кредиты под залог объектов недвижимости;
    d. образовательные кредиты;
    e. образовательные кредиты с государственным субсидированием;
2. жилищные кредиты:
    a. кредиты на приобретение готового жилья под залог кредитуемого или иного жилого помещения;
    b. кредиты на инвестирование строительства жилья под залог кредитуемого или иного жилого помещения;
    c. кредиты на строительство жилого дома под залог кредитуемого жилого дома или иного жилого помещения;
    d. кредиты на погашение кредита, полученного в другом банке на приобретение или строительство квартиры или жилого дома;
    e. кредиты на приобретение загородной недвижимости (за исключением жилого дома) под различное обеспечение, одобренное Банком;
    f. кредиты на приобретение или строительство гаража или машино-места под различное обеспечение, одобренное Банком;
3. автокредиты:
    a. кредиты на покупку новых или подержанных автомобилей, в том числе без подтверждения дохода и занятости;
    b. кредиты по программе льготного автокредитования. (государственной программе субсидирования);
    c. совместные кредитные программы с ведущими автопроизводителями;
4. кредитные карты:
    a. золотые карты;
    b. карты мгновенной выдачи;
    c. классические карты;
    d. карты, связанные с программами благотворительности или программами лояльности компаний «Аэрофлот» и «МТС», и т.д.

Условия выдачи кредита, процентные ставки, сроки, валюты и т.д. сильно различаются для разных кредитных программ. Рассмотрим подробнее,

например, образовательный кредит. Он предоставляется на оплату обучения на дневном, вечернем или заочном отделении образовательного учреждения, зарегистрированного на территории Российской Федерации, по одной из программ профессионального образования (начального, среднего, высшего или дополнительного). Этот кредит выдаётся в рублях под 12% годовых. Срок займа не может превышать 11 лет. Самостоятельным заёмщиком может быть только учащийся старше 18 лет, имеющий источник дохода. В противном случае учащийся может быть только созаёмщиком со своими родителями или другими представителями. Сумма кредита не может быть быть меньше 45 тысяч рублей и не должна превышать 90% стоимости обучения (точное значение максимальной суммы кредита зависит от платежеспособности заёмщика). Деньги по кредиту не выдаются учащемуся, а перечисляются образовательному учреждению в соответствии с условиями договора на обучение. В качестве обеспечения по кредиту выступает поручительство физических лиц, залог имущества. При этом передаваемое в залог имущество должно быть застраховано от рисков утраты, гибели, повреждения в пользу банка на весь срок действия кредитного договора. Комиссия за выдачу кредита не взымается.

Погашение кредита может производиться равными платежами в соответствии с графиком платежей или дифференцированными платежами (сумма, подлежащая выплате, рассчитывается каждый месяц по размеру задолженности на день платежа). На время обучения может быть предоставлена отсрочка в погашении основного долга; в этом случае срок возврата долга после окончания учебы не может превышать 5 лет.

Ежемесячные выплаты по кредиту должны производиться со счёта, открытого в Сбербанке. Пополнять этот счёт можно переводом части заработной платы, просто оформив поручение в бухгалтерии по месту работы, переводами из других банков, внесением наличных на счёт в отделении Сбербанка и т.д.

На странице сайта Сбербанка, посвящённой этому виду кредитов, имеется калькулятор, который позволяет рассчитать график платежей по кредиту. В Таблице 3.2 представлен график платежей по гипотетическому кредиту на срок 12 месяцев, сумма кредита 100 тыс. руб., ставка 12%, полученный с помощью этого калькулятора.

Посмотрим, какие результаты дадут полученные нами формулы. Применяя (3.22) при $L_0 = 100000$, $T = 1$, $m = 12$, $i^{(m)} \equiv i^{(12)} = 0.12$, для общей суммы выплат за год мы получим: $P^{(12)} = 100000 \dfrac{0.12}{1 - 1.01^{-12}} = 106618.5464...$ Округление по обычному правилу даёт значение 106618 руб. 55 коп., что совпадает со значением, которое даёт калькулятор Сбербанка.

Ежемесячный платёж $P^{(12)}/12$ равен 8884.8788…, если использовать точное значение $P^{(12)} = 106618.5464...$ и 8884.8791…, если использовать приближённое значение $P^{(12)} = 106618.55$. В любом случае округление по обычному правилу даёт для ежемесячного платежа значение 8884 руб. 88 коп. Однако если мы

сложим все месячные платежи, то получим $8884.88 \times 12 = 106618.56$, что на 1 копейку больше вычисленного ранее значения $P^{(12)} = 106618.55$. Поэтому в расписании платежей Сбербанка последний, 12-й, платёж, равен 8884 руб. 87 коп., а не 8884 руб. 88 коп.

Таблица 3.2

Месяц	Платёж по основному долгу	Платёж по процентам	Остаток основного долга	Общая сумма выплаты
1	7 884.88	1 000.00	92 115.12	8 884.88
2	7 963.73	921.15	84 151.39	8 884.88
3	8 043.37	841.51	76 108.02	8 884.88
4	8 123.80	761.08	67 984.22	8 884.88
5	8 205.04	679.84	59 779.18	8 884.88
6	8 287.09	597.79	51 492.09	8 884.88
7	8 369.96	514.92	43 122.13	8 884.88
8	8 453.66	431.22	34 668.47	8 884.88
9	8 538.20	346.68	26 130.27	8 884.88
10	8 623.58	261.30	17 506.69	8 884.88
11	8 709.81	175.07	8 796.88	8 884.88
12	8 796.88	87.99	0.00	8 884.87
Итого:	100 000.00	6 618.55		106 618.55

Теперь рассчитаем по формулам (3.24) и любой из формул (3.25), (3.26) остаток основного долга $L_k^{(12)}$ после k-го платежа, а также составные части этого платежа (погашение капитала ΔL_k и проценты I_k). Результаты, округлённые до пятого знака после запятой («точные значения»), приведены в Таблице 3.3.

Если бы мы производили округление до целых копеек, то появилось бы различие (в 1-3 копейки) с результатами Таблицы 3.2. Эти ячейки выделены жирным шрифтом. В чём же причина этого расхождения?

Всё дело в округлении. Калькулятор Сбербанка использует следующий алгоритм.

1. Подсчитывается точное значение суммарных выплат за год и затем оно округляется до целых копеек. Одновременно подсчитывается общая сумма процентов по долгу как разница между суммарными выплатами и суммой займа.
2. Подсчитывается ежемесячный платёж и, если нужно, последняя выплата меняется так, чтобы суммарная выплата совпадала со значением, вычисленным в п.1.

3. Для каждого месяца по формуле $I_k = L_{k-1} \cdot \frac{i^{(m)}}{m} = 0.01 L_{k-1}$ подсчитываются проценты на остаток суммы займа (начальное условие: $L_0 = 100000$) и найденное значение округляется до целых копеек. Для последнего месяца проценты рассчитываются как разность между точной суммой процентов за весь срок займа и суммой уже выплаченных процентов.
4. Рассчитывается сумма ΔL_k в счёт погашения основной суммы займа как разность между уже вычисленным в п.2 ежемесячным платежом и суммой процентов, вычисленной в п.3.
5. Рассчитывается остаток долга на начало следующего месяца как разность $L_{k-1} - \Delta L_k$.

Таблица 3.3

Месяц	Платёж по основному долгу	Платёж по процентам	Остаток основного долга
1	7884.87887	1000.00000	92115.12113
2	7963.72766	921.15121	84151.39348
3	**8043.36493**	841.51393	**76108.02854**
4	8123.79858	761.08029	**67984.22996**
5	8205.03657	679.84230	**59779.19339**
6	8287.08693	597.79193	**51492.10646**
7	8369.95780	514.92106	**43122.14865**
8	8453.65738	431.22149	**34668.49127**
9	**8538.19396**	346.68491	**26130.29732**
10	8623.57589	261.30297	**17506.72142**
11	8709.81165	175.06721	**8796.90977**
12	**8796.90977**	**87.96910**	0.0000000
Итого:	100000.00000	6618.54641	

Чтобы понять, как предлагают займы западные банки, посетим веб-узел одного из крупнейших британских банков LloydsTSB (http://www.lloydstsb.com/loans.asp). Прежде всего следует отметить, что в английском языке различаются заём вообще (*loan*) и заём на покупку недвижимости (ипотека – *mortgage* ['mɔ:gɪʤ]). Кредитные карты выделяются в отдельную группу продуктов.

К обычным займам относятся, например, личные займы (personal loan), которые выдаются для приобретения автомобиля, ремонта дома, реструктурирования других долгов и т.п., студенческие займы (student loan), которые выдаются под очень низкие проценты (в 2013 году – 1.5% годовых) для оплаты обучения (student loan for tuition fees) или для оплаты расходов на

проживание, таких, например, как аренда жилья (student loan for maintenance), и т.п.

Расскажем немного подробнее о личных займах. Они предоставляются только жителям Соединённого Королевства старше 18 лет, которые являются клиентами банка (т.е. имеют текущий счёт) больше трёх месяцев. Срок личного займа может быть от 1 до 7 лет, сумма займа от £1000 до £25000. Процентная ставка по займу устанавливается индивидуально для каждого заёмщика в зависимости от суммы займа, его срока, кредитной истории, истории операций по текущему счёту и прочих факторов, связанных с личностью заёмщика. Например, если сумма равна £5000, а срок займа – 3 года, то для типичного заёмщика («типичными» должны быть две трети заёмщиков) общая сумма выплат равна £6114.48, т.е. £169.85 в месяц, что соответствует годовой процентной ставке 13.57%. При увеличении суммы займа до £10000 годовая процентная ставка уменьшается до 7.21% (общая сумма выплат равна £11149.56, т.е. £309.71 в месяц). Проценты на невыплаченную часть займа вычисляются ежедневно и прибавляются к сумме долга в конце месяца. В случае непредвиденных затруднений у заёмщика банк может отменить очередной платёж (предоставить «выходной по платежам» – repayment holiday) с соответствующим увеличением срока займа. Конечно, банк продолжает начислять проценты. Такой «выходной» может предоставляться не больше двух раз в год. Интересно отметить, что выплаты по студенческим займам могут быть отложены не только до окончания университета, а и до тех пор, пока заёмщик не начнёт зарабатывать по меньшей мере £21,000 в год.

Теперь поговорим об ипотечных займах. Одно из важнейших их отличий от обычных займов заключается в том, что в случае ипотеки право собственности на приобретаемый объект недвижимости принадлежит банку и передаётся заёмщику при полном погашении ипотечного кредита в установленный срок. При неуплате взносов недвижимость может быть изъята банком. В Великобритании кроме банков ипотечные кредиты выдают *строительные общества* (building society) – финансово-кредитные учреждения, которые для этого привлекают вклады населения.

Ипотечные кредиты предоставляются на длительный срок, в среднем 25 лет. Условия ипотечного займа сильно зависят от того, является ли заёмщик клиентом банка, покупает ли заёмщик свою первую недвижимость (first-time buyer mortgage) или он уже приобретал недвижимость, приобретается ли недвижимость для проживания или для последующей сдачи в аренду (buy-to-let mortgage), какую часть стоимости недвижимости он оплачивает сам и т.д. Выдача и поддержание ипотечного кредита предполагает оплату заёмщиком различных комиссий (под разными названиями).

Процентная ставка по ипотечному кредиту может

1. быть фиксирована на какой-то срок, обычно от 2 до 5 лет (fixed-rate mortgage);

2. меняться в зависимости от некоторой внешней процентной ставки, например, базовой ставки Банка Англии (tracker mortgage – ипотечный кредит с плавающей процентной ставкой; tracker буквально означает «следующий за кем-то»);
3. меняться банком в произвольный момент в зависимости от общих экономических условий или общего изменения процентных ставок (стандартная переменая ипотечная ставка – standard variable mortgage rate); однако, эта ставка не может превышать больше, чем на 2% базовую ставку Банка Англии;
4. быть ограниченной (capped-rate mortgage), т.е. уменьшаться банком до standard variable mortgage rate на протяжении определённого периода, если standard variable mortgage rate меньше некоторого уровня. Если же standard variable mortgage rate больше этой предельной ставки, то применяется предельная ставка;

и т.д.

Например, 1 августа 2013 года в банке LloydsTSB стандартная переменная ипотечная ставка была равна 2.50% (ставка Банка Англии равна 0.5%) для периода выплат, который начался до 1 июня 2010 года. В противном случае применяется ставка 3.99% (в банке её называют homeowner variable rate – переменная ставка для домовладельца). Если заём был взят для покупки недвижимости, которая будет сдаваться а аренду, то применяется ставка 4.84%.

Чтобы привлечь новых заёмщиков, банки и строительные общества устанавливают низкие процентные ставки на какой-то небольшой начальный период времени. Например, летом 2013 года Leeds Building Society впервые в истории Великобритании выдавало ипотечные займы под «нулевой» процент. На самом деле, нулевая процентная ставка устанавливалась только на 3-6 месяцев. Кроме того, заёмщик должен был оплачивать комиссии, связанные с выдачей займа. После этого периода на следующие 3 года процентная ставка увеличивалась до 3.79%, если «нулевой» период длился 3 месяца, и до 4.20%, если «нулевой» период длился 6 месяцев. Для сравнения, Yorkshire Building Society предлагало на три года фиксированную ставку 2.59% (плюс комиссия в размере £975).

Оплата ипотечного кредита может производиться

1. регулярными ежемесячными платежами, включающими полную оплату процентов по займу и погашение части основной суммы займа (repayment mortgage),
2. ежемесячной выплатой только процентов и единовременной выплатой основной суммы займа в конце срока займа (interest-only mortgages),
3. комбинацией этих методов.

3.4 Задачи

Задача 3.1 (FM, May 2005, Problem 8) Заём должен быть погашен 25 ежегодными платежами размером 300 каждый. В 10-м платеже заёмщик выплатил на 1000 больше, чем следовало, после чего погасил долг за 10 лет, выплачивая в конце каждого года одну и ту же сумму. Найдите её, если эффективная годовая процентная ставка по займу равна 8%.

Решение. Примем момент 10-го платежа в качестве начального и будем измерять время годами. В соответствии с первоначальными условиями погашения долга поток выплат с 11 по 25 образует стандартную запаздывающую ренту, приведённая стоимость которой в момент 0 равна $300a_{\overline{15}|} = 300\dfrac{1-v^{15}}{i}$, где $i = 0.08$, $v = 1/(1+i) = 1/1.08$. Эта приведённая стоимость равна величине L_{10} непогашенного долга непосредственно после 10-й выплаты при первоначальном расписании его погашения. Именно эта сумма, за вычетом 1000, внесённой вместе с 10-м платежём, должна быть погашена 10 пересмотренными ежегодными выплатами.

Если x – размер пересмотренной ежегодной выплаты, то приведённая стоимость в момент 0 потока пересмотренных выплат равна $xa_{\overline{10}|} = x\dfrac{1-v^{10}}{i}$. Принцип эквивалентности обязательств даёт:

$$300a_{\overline{15}|} - 1000 = xa_{\overline{10}|} \quad \Leftrightarrow \quad 300\frac{1-v^{15}}{i} - 1000 = x\frac{1-v^{10}}{i},$$

откуда $x = \dfrac{300\left(1-v^{15}\right)-1000i}{1-v^{10}} \approx 233.65$.

Задача 3.2 (FM, May 2005, Problem 21) Магазин электроники опубликовал следующее рекламное объявление: «Мы не предлагаем вам сбивающие с толку процентные ставки. Мы просто разделим стоимость купленного вами товара на 10 и вы можете платить нам эту сумму раз в месяц на протяжении года». Дополнительно магазин уточнил, что первый платёж должен быть сделан в день покупки, а последующие – в начале каждого из 11 следующих месяцев. Вычислите годовую эффективную ставку для покупателей, которые воспользуются этой формой займа.

Решение. Возьмём месяц в качестве единицы времени, а размер ежемесячного платежа в качестве единицы измерения денежных сумм. Тогда стоимость покупки равна 10. Поскольку первый платёж должен быть сделан в день покупки, магазин фактически даёт взаймы сумму $L_0 = 9$; этот долг должен быть погашен $n = 11$ платежами величиной $P = 1$ в моменты 1,…,11. Принцип эквивалентности даёт (ниже i – эффективная ежемесячная процентная ставка

по займу): $\frac{1-(1+i)^{-11}}{i}=9$. Функция $f(i)=\frac{1-(1+i)^{-11}}{i}$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0 на промежутке $-1<i<+\infty$. Поэтому при $i>-1$ уравнение $f(i)=9$ имеет единственный корень i_0. С помощью Microsoft Excel легко найти, что $i_0\approx 0.035031298$. Соответствующая годовая эффективная ставка равна $(1+i_0)^{12}-1\approx 0.51161707\approx 51.2\%$.

Задача 3.3 (CT1, 21 April 2009, Problem 3) Двадцатилетний долг под 7% годовых выплачивается в конце каждого года. Первая выплата равна £300, а каждая последующая больше предыдущей на £30. Найдите:

(i) сумму займа;

(ii) невыплаченный долг немедленно после пятой выплаты;

(iii) сколько из последнего платежа идёт на погашение основной суммы займа, а сколько – на выплату процентов, набежавших за прошедший год.

Решение. Примем момент заключения договора займа в качестве начального и будем измерять время годами.

(i) В силу принципа эквивалентности сумма займа L_0 совпадает с текущей стоимостью потока выплат (в момент $t_0=0$ заключения договора займа); эта приведённая стоимость оценивается с помощью технической процентной ставки i=0.07. Суммы выплат образуют арифметическую прогрессию с первым членом $P_1=300$ и разностью 30. Поэтому величина k-й выплаты (в конце k-го года) даётся формулой $P_k=270+30k$. Это позволяет рассматривать поток выплат как объединение двух запаздывающих 20-летних рент: постоянной с ежегодной выплатой суммы 270 и возрастающей с единичной суммой 30. Поэтому

$$L_0=270a_{\overline{20|}}+30(Ia)_{\overline{20|}}=270\cdot\frac{1-v^{20}}{i}+30\cdot\frac{1+\frac{1-v^{20}}{i}-21v^{20}}{i}.$$
$$=\frac{(300i+30)-(900i+30)v^{20}}{i^2}\approx 5503.48.$$

(ii) Невыплаченный долг L_5 немедленно после пятой выплаты в момент $t_5=5$, т.е. обязательства заёмщика в начале шестого года, можно найти как проспективным, так и ретроспективным методом.

Если исходить из будущего развития событий, то обязательства заёмщика заключаются в выплате 15 сумм, $P_6=450,\ldots,P_{20}=870$, в моменты $t_6=6,\ldots,t_{20}=20$. В момент $t_5=5$ этот денежный поток можно рассматривать как объединение двух запаздывающих 15-летних рент: постоянной с ежегодной выплатой суммы 420 и возрастающей с единичной суммой 30. Поэтому

$$L_5 = 420a_{\overline{15}|} + 30(Ia)_{\overline{15}|} = 420 \cdot \frac{1-v^{15}}{i} + 30 \cdot \frac{1+\frac{1-v^{15}}{i} - 16v^{15}}{i}.$$
$$= \frac{(450i+30)-(900i+30)v^{15}}{i^2} \approx 5671.94.$$

Если исходить из прошлого развития событий, то размер невыплаченного долга в момент $t_5 + 0 = 5 + 0$ равен накоплению к этому моменту суммы займа за вычетом накопления к этому моменту от пяти уже произведённых выплат в счёт погашения долга:

$$L_5 = L_0 \cdot (1+i)^5 - \left(300 \cdot (1+i)^4 + 330 \cdot (1+i)^3 + 360 \cdot (1+i)^2 + 390 \cdot (1+i) + 420\right)$$
$$\approx 5671.94.$$

(iii) Невыплаченный долг L_{19} немедленно после 19-й выплаты к моменту $t_{20} = 20$ вырастет до величины $L_{19} \cdot (1+i)$ и будет полностью погашен в этот момент последней, 20-й, выплатой в размере $P_{20} = 870$. Поэтому $L_{19} \cdot (1+i) = P_{20}$, откуда $L_{19} = \frac{870}{1.07} \approx 813.08$ – именно эта сумма идёт на погашение основной суммы займа. Соответственно, на выплату процентов идёт сумма $P_{20} - L_{19} \approx 56.92$. Проценты можно вычислить и как $iL_{19} = \frac{870 \cdot 0.07}{1.07} \approx 56.92$.

Задача 3.4 (CT1, 27 April 2010, Problem 8) Заём погашается ежегодными платежами на протяжении 20 лет. Первая выплата равна £4,650, а каждая последующая больше предыдущей на £150. Используя эффективную годовую техническую ставку 9%, вычислите следующие величины:

(i) сумму займа;

(ii) для десятой выплаты – сумму, которая пошла на уменьшение основной суммы займа;

(iii) для последней выплаты – сумму начисленных процентов;

(iv) общую сумму процентов, выплаченных на протяжении 20-летнего периода.

Решение. (i) Сумма займа L_0 равна стоимости потока выплат, приведённой к моменту выдачи займа. Поскольку k-я выплата равна $P_k = 4500 + 150k$, поток выплат можно рассматривать как объединение двух денежных потоков: стандартной постоянной запаздывающей 20-летней ренты с величиной выплаты £4500 и стандартной возрастающей 20-летней ренты с единичной суммой £150. Значит,

$$L_0 = £4500a_{\overline{20}|} + £150(Ia)_{\overline{20}|} = £4500\frac{1-v^{20}}{i} + £150\frac{1-21v^{20}+20v^{21}}{id} \approx £51714.28.$$

(ii) Сначала найдём проспективным методом сумму L_9 невыплаченного долга после 9-го платежа. Если этот момент принять в качестве начального, то

для погашения долга нужно произвести 11 выплат, причём k-я выплата равна $P'_k = P_{k+9} = 5850 + 150k$ (фунтов) и производится в момент $t = k$. Поэтому

$$L_9 = £5850 a_{\overline{11}|} + £150 (Ia)_{\overline{11}|} = £5850 \frac{1 - v^{11}}{i} + £150 \frac{1 - 12v^{11} + 11v^{12}}{id} \approx £45068.36.$$

К концу 10-го года на эту сумму будут начислены проценты в размере $I_{10} = iL_9 \approx £4056.15$. Десятая выплата равна $P_{10} = £6000$. Поэтому на уменьшение основной суммы займа пойдёт £1943.85.

(iii) Сначала найдём проспективным методом сумму L_{19} невыплаченного долга после предпоследнего, 19-го, платежа: $L_{19} = vP_{20} = £7500 / 1.09 \approx £6880.73$. К концу 20-го года на эту сумму будут начислены проценты в размере $I_{20} = iL_{19} \approx £619.27$.

(iv) За 20 лет будет заёмщик выплатит сумму $\sum_{k=1}^{20} P_k = \sum_{k=1}^{20} (4500 + 150k) = \frac{4650 + 7500}{2} \cdot 20 = 121500$ (фунтов). Вычитая из неё сумму займа, мы найдем общую сумму процентов, выплаченных на протяжении 20-летнего периода: $121500 - 51714.28 = 69785.72$ (фунтов).

Задача 3.5 (CT1, 19 April 2011, Problem 7) 1 июля 1998 года был выдан заём в размере £60,000. Он должен быть погашен на протяжении 20 лет ежеквартальными платежами. Эти выплаты постоянны на протяжении каждого четырёхлетнего периода, но каждые четыре года увеличиваются на £100. Выплаты рассчитываются исходя из годовой процентной ставки 8%, начисляемой ежеквартально.

(i) Вычислите размер ежеквартальной выплаты для первого четырёхлетнего периода.

(ii) Вычислите, какая сумма была выплачена 1 января 1999 года в счёт погашения основной суммы долга.

(iii) Вычислите размер невыплаченного долга сразу после того, как была произведена очередная выплата 1 июля 2011 года.

Решение. Примем момент выдачи ссуды в качестве начального, а один квартал в качестве основной единицы времени. Для этого промежутка эффективная процентная ставка равна $i \equiv i_*^{(4)} = \frac{8\%}{4} = 2\%$.

(i) Пусть x – искомый размер ежеквартальной выплаты для первого четырёхлетнего периода. Тогда для второго четырёхлетнего периода ежеквартальные выплаты равны $x + 100$, для третьего – $x + 200$, для четвёртого – $x + 300$, для пятого – $x + 400$. Выплаты на протяжении каждого из пяти четырёхлетних периодов образуют стандартную постоянную ренту и их стоимости на начало соответствующих четырёхлетних периодов (в моменты 0, 16, 32, 48, 64 – напомним, что единицей времени является квартал) равны $xa_{\overline{16}|}$,

$(x+100)a_{\overline{16}|}$, $(x+200)a_{\overline{16}|}$, $(x+300)a_{\overline{16}|}$, $(x+400)a_{\overline{16}|}$ соответственно. Поэтому стоимость потока выплат на 1 июля 1998 года равна

$$xa_{\overline{16}|}+v^{16}(x+100)a_{\overline{16}|}+v^{32}(x+200)a_{\overline{16}|}+v^{48}(x+300)a_{\overline{16}|}+v^{64}(x+400)a_{\overline{16}|}$$
$$=x\frac{1-v^{80}}{i}+\frac{100v^{16}}{i}\frac{1-5v^{64}+4v^{80}}{1-v^{16}},$$

где $v=\frac{1}{1+i}=\frac{1}{1.02}$, $a_{\overline{16}|}=\frac{1-v^{16}}{i}=50\cdot\left(1-1.02^{-16}\right)$. Используя принцип эквивалентности обязательств, мы имеем:

$$x=\frac{60000i-100v^{16}\dfrac{1-5v^{64}+4v^{80}}{1-v^{16}}}{1-v^{80}}\approx 1370.41.$$

(ii) В выбранной системе измерения времени 1 января 1999 года – это момент $t=2$.

За первый квартал, к моменту $t_1=1$, на исходную сумму займа $L_0=60000$ будут начислены проценты в размере $I_1=iL_0=1200$, так что долг вырастет до величины $L_0+I_1=(1+i)L_0=61200$. В этот момент $t_1=1$ заёмщик выплатит в счёт погашения сумму $x=1370.41$, что приведёт к уменьшению долга в момент t_1+0 до величины $L_1=(1+i)L_0-x=59829.59$.

За второй квартал, к моменту $t_2=2$, на остаток долга $L_1=(1+i)L_0-x$ будут начислены проценты в размере $I_2=iL_1\approx 1196.59$. Поэтому во второй выплате в счёт погашения долга (её размер – $x=1370.41$) на погашение основной суммы долга пойдёт сумма $x-i\left((1+i)L_0-x\right)=(1+i)x-(1+i)iL_0\approx 173.82$.

(iii) 1 июля 2011 года – это конец первого года из 4-го четырёхлетнего периода и после того, как в этот день была произведена очередная выплата (в размере $x+300$), до полного погашения долга осталось произвести 12 выплат в размере $x+300$ каждая на 4-м четырёхлетнем периоде и 16 выплат в размере $x+400$ каждая на 5-м четырёхлетнем периоде.

Размер невыплаченного долга сразу после того, как была произведена очередная выплата 1 июля 2011 года, равен стоимости этого денежного потока на 1 июля 2011 года, т.е. $(x+300)a_{\overline{12}|}+(x+400)a_{\overline{16}|}v^{12}\approx 36619.03$.

Задача 3.6 (CT1, 23 September 2008, Problem 5) Банк предлагает два варианта возврата долга, который должен быть выплачен за 10 лет. Первый требует от заёмщика выплачивать ежегодно £1,200 равными долями в начале каждого квартала, а второй – производить выплаты в конце каждого второго года, исходя из суммы £1,260 в год. Определите, какие условия выгоднее для заёмщика, если для сравнения используется техническая годовая процентная ставка 4%.

Решение. Разделим рассматриваемый десятилетний промежуток на пять промежутков: [0;2], [2;4], [4;6], [6;8], [8;10]. В соответствии с первой

альтернативой за каждый из этих двухлетних промежутков (в начале каждого из 8 кварталов) заёмщик произведёт 8 выплат по £300 каждая. Если мы рассмотрим один квартал в качестве новой единицы времени, то этот денежный поток является стандартной упреждающей рентой; соответствующая эффективная процентная ставка равна $i_*^{(4)} = (1+i)^{\frac{1}{4}} - 1$, где i=0.04 – основная техническая процентная ставка. Накопленное значение этой ренты к концу двухлетнего промежутка равно

$$S = 300\ddot{s}_{\overline{8}|} = 300\frac{\left(1+i_*^{(4)}\right)^8 - 1}{i_*^{(4)}} = 300\frac{2i+i^2}{\sqrt[4]{1+i}-1} \approx 2484.42.$$

Теперь мы можем заменить 8 выплат по £300 каждая в начале каждого квартала одной выплатой суммы £2484.42 в конце этого двухлетнего промежутка. Таким образом, первый вариант равносилен 5 платежам по £2484.42 в конце каждого двухлетнего промежутка, в то время как второй вариант предполагает 5 выплат по £2520 в те же моменты времени. Значит, первый вариант выгоднее для заёмщика.

Следует отметить, что этот вывод зависит от используемой технической процентной ставки i. Если, например, i=6%, то S=£2526.94, так что теперь для заёмщика выгоднее второй вариант. Если i=5.67404795%, то S=£2520 и потому оба варианта равноценны.

Задача 3.7 (CT1, 3 October 2012, Problem 6) Заём выдан под i=6% годовых на 10 лет. Он должен быть возвращён ежегодными выплатами возрастающего размера. Выплаты должны производиться раз в год, в конце года. Первая выплата должна составлять £200, затем выплаты каждый год будут увеличиваться на £100.

(i) Вычислите сумму займа.

(ii) (a) Вычислите, какую сумму в седьмой выплате составляют проценты. (b) Вычислите, какая сумма в седьмой выплате выплачивается в счёт погашения основной суммы займа.

(iii) Немедленно после седьмой выплаты заёмщик просит увеличить срок возврата займа до 15 лет и хочет возвращать невыплаченную сумму займа одинаковыми ежегодными платежами. Займодавец соглашается, но в момент изменения условий договора займа меняет процентную ставку на 8% годовых. Вычислите размер пересмотренных ежегодных выплат.

Решение. Примем момент заключения договора займа в качестве начального и будем измерять время годами.

(i) В силу принципа эквивалентности сумма займа L_0 совпадает с текущей стоимостью потока выплат (в момент $t_0 = 0$ заключения договора займа); эта приведённая стоимость оценивается с помощью технической процентной ставки i=0.06. Суммы выплат в фунтах образуют арифметическую прогрессию с первым членом $P_1 = 200$ и разностью 100. Поэтому величина k-й выплаты (в конце k-го

года) даётся формулой $P_k = 100 + 100k$. Это позволяет рассматривать поток выплат как объединение двух запаздывающих 10-летних рент: постоянной с ежегодной выплатой суммы 100 и возрастающей с единичной суммой 100. Поэтому $L_0 = 100a_{\overline{10}|} + 100(Ia)_{\overline{10}|} \approx 736.0087 + 3696.24084 \approx 4432.25$.

(ii) (a) Рассмотрим ситуацию немедленно после шестого платежа. Для полного погашения долга нужно произвести ещё 4 платежа в моменты 7, 8, 9, 10 в размере £800, £900, £1000, £1100 соответственно. Приведённая стоимость этого денежного потока в момент t=6 равна $800v + 900v^2 + 1000v^3 + 1100v^4 \approx 3266.64$ (фунтов) – это невыплаченная часть долга немедленно после шестого платежа. На эту сумму к моменту t=7 будут начислены проценты в размере $3266.64 \times 0.06 = 196.00$ (фунтов). Именно эту сумму в седьмой выплате составляют проценты.

(b) Соответственно, в седьмой выплате сумма $800 - 196 = 604.00$ (фунтов) выплачивается в счёт погашения основной суммы займа.

(iii) Пусть x – сумма, которая должна выплачиваться ежегодно после изменения условий договора. Всего необходимо произвести 8 выплат в моменты t=8,…,15. Стоимость этого потока, приведённая к моменту t=7, в стандартных обозначениях может быть записана как $xa_{\overline{8}|}$ (причём, в отличие от пункта (i) решения, сейчас i=8%). Величина $a_{\overline{8}|}$ равна $v + v^2 + \ldots + v^8 = \left(1 - v^8\right)/i$. Для i=8% её численное значение приближённо равно 5.7466389. С другой стороны, расчёты, проведённые в пункте (ii), показывают, что немедленно после седьмой выплаты в момент t=7 невыплаченной осталась сумма $3266.64 - 604.00 = 2662.64$. В соответствии с принципом эквивалентности обязательств, должно быть верно равенство $xa_{\overline{8}|} = 2662.64$, откуда x=£463.34.

Задача 3.8 (CT1, 15 April 2013, Problem 10) Долг должен быть выплачен за 20 лет ежегодными платежами в конце каждого года. Первый платёж равен £5,000, а каждый последующий уменьшается на £200. На протяжении всего срока применяется эффективная годовая ставка 4%.

(i) Вычислите сумму займа.

(ii) Вычислите, какая часть 12-го платежа идёт на погашение основной суммы займа.

После 12-й выплаты заёмщик и займодавец согласились реструктурировать долг на следующих условиях. Ежегодное уменьшение выплат на £200 прекращается, так что будущие выплаты будут равны двенадцатой, но при этом сокращается оставшийся срок долга. Последний платёж, если нужно, будет уменьшен, чтобы полностью погасить долг.

(iii) (a) Вычислите, через какое время будет погашен долг на пересмотренных условиях.

(b) Вычислите размер последего платежа по долгу.

(c) Вычислите общую сумму процентов, выплаченных за всё время долга.

Решение. Примем момент заключения договора займа в качестве начального и будем измерять время годами.

(i) В силу принципа эквивалентности сумма займа L_0 совпадает с текущей стоимостью потока выплат (в момент $t_0 = 0$ заключения договора займа); эта приведённая стоимость оценивается с помощью технической процентной ставки i=0.04. Суммы выплат образуют арифметическую прогрессию с первым членом $P_1 = 5000$ и разностью -200. Поэтому величина k-й выплаты (в конце k-го года) даётся формулой $P_k = 5200 - 200k$. Это позволяет рассматривать поток выплат как разность двух запаздывающих 20-летних рент: постоянной с ежегодной выплатой суммы 5200 и возрастающей с единичной суммой 200. Поэтому

$$L_0 = 5200a_{\overline{20}|} - 200(Ia)_{\overline{20}|} = 5200 \cdot \frac{1-v^{20}}{i} - 200 \cdot \frac{1+\frac{1-v^{20}}{i} - 21v^{20}}{i}.$$
$$= 200 \cdot \frac{(25i-1)+(1-5i)v^{20}}{i^2} = 45638.69.$$

(ii) Сначала найдём невыплаченный долг L_{11} немедленно после 11-й выплаты в момент $t_{11} = 11$. Если исходить из будущего развития событий, то обязательства заёмщика заключаются в выплате 9 сумм, $P_{12} = 2800, \ldots, P_{20} = 1200$, в моменты $t_{12} = 12, \ldots, t_{20} = 20$. В момент $t_{11} = 11$ этот денежный поток можно рассматривать как разность двух запаздывающих 9-летних рент: постоянной с ежегодной выплатой суммы 3000 и возрастающей с единичной суммой 200. Поэтому

$$L_{11} = 3000a_{\overline{9}|} - 200(Ia)_{\overline{9}|} = 3000 \cdot \frac{1-v^{9}}{i} - 200 \cdot \frac{1+\frac{1-v^{9}}{i} - 10v^{9}}{i}.$$
$$= 200 \cdot \frac{(14i-1)+(1-5i)v^{9}}{i^2} \approx 15258.67.$$

За 12-й год на эту сумму будут начислены проценты в размере $I_{12} = iL_{11} \approx 610.35$. Поскольку размер 12-го платежа равен $P_{12} = 2800$, на погашение основной суммы займа идёт $\Delta L_{12} = P_{12} - I_{12} \approx 2189.65$.

После 12-й выплаты невыплаченный долг будет равен $L_{12} = L_{11} - \Delta L_{12} \approx 13069.02$. В соответствии с пересмотренными условиями займа теперь ежегодные выплаты будут равны 2800 (за исключением, возможно, последней выплаты). Дальнейшие расчёты удобно оформить в виде расписания выплаты займа.

Год, k	Долг на начало года, L_{k-1}	Проценты, $I_k = iL_{k-1}$	Размер выплаты, P_k	Уменьшение долга, $\Delta L_k = P_k - I_k$
13	13069.02	522.76	2800	2277.24
14	10791.78	431.67	2800	2368.33
15	8423.45	336.94	2800	2463.06
16	5960.39	238.42	2800	2561.58
17	3398.81	135.95	2800	2664.05
18	734.76	29.39	764.15	

На начало 18-го года невыплаченный долг равен 734.76. За 18-й год на него будут начислены проценты в размере 29.39, так что на конец года долг составит сумму 764.15. Именно эта сумма будет выплачена последней, а не 2800, как в предыдущие годы – это даёт ответ на пункт (b). Сам долг будет погашен к концу 18-го года, т.е. через 6 лет после пересмотра условий – это даёт ответ на пункт (a).

За первые 12 лет заёмщик выплатил $5000 + 4800 + \ldots + 2800 = 46800$, за последующие 5 лет – сумму $2800 \cdot 5 = 14000$, а за последний год – сумму 764.15. Поэтому в общей сложности он выплатил 61564.15. Вычитая отсюда сумму займа, т.е. 45638.69, мы найдём общую сумму процентов, выплаченных за всё время долга: 15925.46.

Задача 3.9 (CT1, 6 April 2005, Problem 11) (i) Заём должен быть выплачен за 20 лет равными платежами в размере £1,000 в конце каждого года. На протяжении первых 10 лет эффективная процентная ставка по займу равна 5% годовых, а на протяжении оставшегося срока увеличивается до 7% годовых. Покажите, что сумма займа равна £12,033.60.

(ii) Ниже приведён фрагмент расписания выплаты займа:

Год, k	Долг на начало года, L_{k-1}	Выплата в конце года	
		Проценты, $I_k = iL_{k-1}$	Капитал, $\Delta L_k = P_k - I_k$
x	£8,790.48	£439.52	£560.48

Определите значение x.

(iii) В начале 11-го года было достигнуто соглашение, что процентная ставка по займу не будет увеличиваться, т.е. она останется равной 5% годовых для оставшегося срока займа. Размер ежегодных выплат не меняется, так что, возможно, сократится срок займа, а последняя выплата будет меньше.

(a) Вычислите, на сколько лет уменьшится срок выплат (если он вообще уменьшится).

(b) Вычислите размер последего платежа по долгу.

(c) Вычислите, на сколько уменьшится общая сумма процентов, выплаченных за всё время долга.

Решение. Примем момент заключения договора займа в качестве начального и будем измерять время годами.

(i) В силу принципа эквивалентности сумма займа L_0 совпадает с текущей стоимостью потока выплат (в момент $t_0 = 0$ заключения договора займа); для первых 10 лет используется ежегодный коэффициент дисконтирования $v_1 = 0.05^{-1}$, а для оставшихся 10 лет используется ежегодный коэффициент дисконтирования $v_2 = 0.07^{-1}$. Первые 10 выплат образуют постоянную запаздывающую ренту и её текущая стоимость равна $1000 a_{\overline{10}|@5\%} = 1000 \cdot \frac{1-1.05^{-10}}{0.05} \approx 7721.7349$. Последние 10 выплат образуют постоянную отложенную запаздывающую ренту. Её стоимость в момент $t_{10} = 10$ равна $1000 \cdot a_{\overline{10}|@7\%} = 1000 \cdot \frac{1-1.07^{-10}}{0.07}$. Для вычисления стоимости в момент $t_0 = 0$ эту величину нужно умножить на 1.05^{-10}. Таким образом, текущая стоимость последних 10 выплат равна $1000 \cdot 1.05^{-10} \cdot a_{\overline{10}|@7\%} = 10001.05^{-10} \cdot \frac{1-1.07^{-10}}{0.07} \approx 4311.8698$. Складывая эти два числа, мы получим сумму займа: $L_0 = 12033.60$.

(ii) Поскольку долг на начало искомого года равен £8,790.48, а за этот год начислены проценты £439.52, процентная ставка для этого года равна $\frac{439.52}{8790.48} = 0.05$. Значит, речь идёт об одном из первых 10 лет. Применяя ретроспективный метод (он удобен, т.к. процентная ставка на протяжении первых 10 лет не меняется), мы имеем: $L_{k-1} = L_0(1+i)^{k-1} - P\frac{(1+i)^{k-1}-1}{i}$, так что $k = 1 + \frac{\ln\left((P - iL_{k-1})/(P - iL_0\right)}{\ln(1+i)} = 8.$

(iii) (a) Если на протяжении всего срока выплат по займу применяется одна и та же процентная ставка, то сумма займа L_0 и размер регулярных выплат P связаны сооношением: $P = L_0 \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$. Если бы выплаты всё время составляли £1,000, то потребовалось бы $n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{iL_0}{P}\right)}{\ln(1+i)} = -\frac{\ln(1 - 0.05 \cdot 12.03360)}{\ln 1.05} \approx 18.86$ выплат. Значит, на самом деле для погашения займа нужно 18 выплат по £1,000 и одна выплата уменьшенного размера: $P_{19} < 1000$. Таким образом, срок займа уменьшится на 1 год.

(b) Текущая стоимость потока выплат на пересмотренных условиях равна $1000a_{\overline{18}|} + P_{19}v^{19}$. С другой стороны она равна сумме займа. Поэтому $P_{19} = \dfrac{L_0 - 1000a_{\overline{18}|}}{v^{19}} \approx 869.30.$

(c) При изменении условий займа выплаты уменьшатся на $2000 - 969.30 = 1130.70$. Поскольку сумма займа не менялась, на столько же уменьшится и общая сумма процентов, выплаченных за всё время долга.

Задача 3.10 (CT1, 4 April 2006, Problem 11) Студент актуарной группы взял две ссуды.

Заём A: пятилетний заём для покупки автомобиля на сумму £10,000, который должен быть возвращён равными выплатами в конце каждого месяца. Усреднённая процентная ставка равна 10.715% годовых.

Заём B: пятилетний банковский заём на сумму £15,000, который должен быть возвращён равными выплатами в конце каждого месяца. Эффективная годовая процентная ставка по займу равна 12% на протяжении двух первых лет и 10% после этого.

Располагаемый месячный доход студента после оплаты всех расходов на проживание равен £600. Именно из этих денег он должен производить выплаты по займам.

Компания Доступный Заём для всех сроков займа от 3 до 10 лет предлагает ссуды под одну и ту же эффективную процентную ставку. Через два года со студентом связался представитель этой компании и предложил студенту 10-летний заём на невыплаченную сумму займов с выплатой равными частями в конце каждого месяца. Этот новый заём должен погасить первоначальные займы, а выплаты по нему составляют только половину выплат по старым займам.

(i) Вычислите располагаемый месячный доход студента после того, как произведены выплаты по займам.

(ii) Вычислите, какую сумму в счёт погашения основных сумм займов выплатил студент в первый месяц третьего года (предполагая, что он продолжает выплаты по старым займам).

(iii) Предполагая, что студент взял новый заём, вычислите, какую сумму в счёт погашения основной суммы займа выплатил студент в первый месяц третьего года.

(iv) Следует ли студенту принимать предложение компании Доступный Заём?

Решение. (i) Усреднённая процентная ставка по займу равна отношению общей суммы выплаченных процентов к произведению суммы займа и его продолжительности. Поэтому по займу A студент должен выплатить процентов на сумму $£10{,}000 \cdot 0.10715 \cdot 5 = £5357.50$. Общая сумма выплат равна сумме

выплаченных процентов и осеовной суммы займа, т.е. £15357.50. Поскольку общее число выплат равно 60, одна выплата по займу A равна $P_A \approx$ £255.96.

Теперь найдём сумму P_B ежемесячных выплат по займу B. Для этого применим принцип эквивалентности: сумма займа равна текущей стоимости потока выплат по займу, причём эта текущая стоимость должна оцениваться с помощью технической процентной ставки $i_1 = 12\%$ на протяжении двух первых лет и ставки $i_2 = 10\%$ на протяжении трёх последних лет. Текущая стоимость выплат за два первых года равна

$$12P_B a^{(12)}_{\overline{2}|@i_1} = P_B \frac{1-(1+i_1)^{-2}}{(1+i_1)^{1/12}-1} \approx 21.37323P_B.$$

Стоимость выплат за три последних года, приведённая к началу третьего года, равна

$$12P_B a^{(12)}_{\overline{3}|@i_2} = P_B \frac{1-(1+i_2)^{-3}}{(1+i_2)^{1/12}-1} \approx 31.18646P_B.$$

Чтобы получить значение этой суммы в момент заключения договоров займа, её нужно умножить на $(1+i_1)^{-2} = 1.12^{-2}$, что даст $24.86165P_B$. Таким образом, текущая стоимость потока выплат по займу равна $46.23488P_B$, так что $P_B = \dfrac{£15000}{46.23488} \approx £324.43$.

Общая сумма ежемесячных выплат по двум займам равна $P_A + P_B =$ £255.96+£324.43=580.39, так что у студента остаётся только £19.61.

(ii) Прежде всего найдём процентную ставку i по займу A. Для этого воспользуемся равенством

$$12P_A a^{(12)}_{\overline{5}|} = 10000 \Leftrightarrow 255.96 \cdot \frac{1-(1+i)^{-5}}{(1+i)^{1/12}-1} = 10000.$$

Решая численно это уравнение, мы получим: i=20%. Теперь можно вычислить невыплаченный долг в начале третьего года; он равен

$$12P_A a^{(12)}_{\overline{3}|} = 255.96 \cdot \frac{1-(1+i)^{-3}}{(1+i)^{1/12}-1} = 10000 \cdot \frac{1-(1+i)^{-3}}{1-(1+i)^{-5}} \approx 7043.65.$$

В первый месяц третьего года на эту сумму будут начислены проценты в размере $\left(1.2^{1/12}-1\right)\cdot 7043.65 \approx 107.83$. Поэтому из ежемесячной выплаты $P_A \approx$ £255.96 в счёт погашения основной суммы займа A студент выплатит £148.13.

Для займа B невыплаченный долг в начале третьего года равен

$$12P_B a^{(12)}_{\overline{3}|@10\%} = 324.43 \cdot \frac{1-1.1^{-3}}{1.1^{1/12}-1} \approx 10117.82.$$

В первый месяц третьего года на эту сумму будут начислены проценты в размере $\left(1.1^{1/12}-1\right)\cdot 10117.82 \approx 80.68$. Поэтому из ежемесячной выплаты

$P_B \approx$ £324.43 в счёт погашения основной суммы займа A студент выплатит £243.75.

Общая сумма, выплаченная студентом в первый месяц третьего года в счёт погашения основных сумм займов, равна £391.88.

(iii) Для займа A сумма невыплаченного долга в начале третьего года равна £7043.65, а для займа B – £10117.82. Поскольку новый заём делается для погашения долга по займам A и B, сумма этого займа равна $L_0 =$ £17161.47. По условию, ежемесячные выплаты P по новому займу составляют ровно половину выплат по старым займам, т.е. $P = \dfrac{P_A + P_B}{2} =$ £290.20. Теперь из равенства

$$Pa_{\overline{120}|} = L_0 \Leftrightarrow P \cdot \frac{1-(1+i)^{-120}}{i} = L_0$$

можно численно определить, какие проценты i ежемесячно берёт компания Доступный Заём: $i \approx 1.3545\%$ (годовая эффективная ставка по новому займу равна $(1+i)^{12} - 1 \approx 17.52\%$). Поэтому за первый месяц нового займа компания начислит проценты в размере £17161.47 · 0.013545 ≈ £232.45, так что в этом месяце в счёт погашения основной суммы займа студент выплатит £57.75.

(iv) Процентная ставка по новому займу довольно высокая и вряд ли разумно брать деньги в долг на 10 лет под 17.52% годовых. Студенту лучше попробовать реструктурировать только заём A (который выдан под 20% годовых), но брать новый заём не на 10 лет, а на меньший срок. На самом деле, при столь низком (для Великобритании) чистом доходе как £600 в месяц вообще не стоило влезать в долги.

Задача 3.11 (CT1, 23 September 2008, Problem 12) Человек берёт 25-летний заём в банке на сумму £300,000 для покупки дома. На протяжении первых 15 лет этот человек будет выплачивать в конце каждого месяца только проценты по займу и немедленно после этого погасит половину суммы займа одним платежом. На протяжении оставшихся 10 лет он также будет выплачивать только проценты, но не ежемесячно, а ежеквартально, и в конце срока займа выплатит вторую половину суммы займа одним платежом.

(i) Предполагая, что проценты по займу начисляются в соответствии с эффективной годовой ставкой 8½%, вычислите общую сумму процентов, выплаченных заёмщиком.

(ii) Заёмщик уверен, что может разместить средства на сберегательный счёт, по которому каждые полгода начисляются проценты по ставке 9% годовых. Вычислите, какую постоянную сумму он должен вносить в начале каждого месяца на этот счёт, чтобы выплатить половину суммы займа через 15 лет.

(iii) Заёмщик ежемесячно вносит на этот счёт сумму, вычисленную в пункте (ii). В реальности оказалось, что на протяжении первых 15 лет эффективная годовая процентная ставка по этому счёту равна 10% годовых. Заёмщик использовал накопленные средства, чтобы выплатить по займу максимально

возможную сумму, и решил выплачивать оставшуюся часть займа постоянными выплатами в конце каждого месяца. Вычислите размер этого ежемесячного платежа, если после первых 15 лет эффективная процентная ставка по займу снизилась до 7% годовых.

Решение. (i) На протяжении первых 15 лет после каждой выплаты сумма долга остаётся равной £300,000, эффективная ежемесячная ставка равна $i_*^{(12)} = (1+i)^{1/12} - 1 = 1.085^{1/12} - 1 \approx 0.68215\%$. Поэтому каждый месяц начисляются и выплачиваются проценты в размере $£300{,}000 \cdot 0.0068215 = £2046.45$. Всего за первые $15 \cdot 12 = 180$ месяцев будут начислены и выплачены проценты в размере $£2046.45 \cdot 180 = £368361$. На протяжении последних 10 лет после каждой выплаты сумма долга остаётся равной £150,000, эффективная ежемесячная ставка равна $i_*^{(4)} = (1+i)^{1/4} - 1 = 1.085^{1/4} - 1 \approx 2.06044\%$. Поэтому каждый квартал начисляются и выплачиваются проценты в размере $£150{,}000 \cdot 0.0206044 = £3090.66$. Всего за последние $10 \cdot 4 = 40$ кварталов будут начислены и выплачены проценты в размере $£3090.66 \cdot 40 = £123626.40$. Поэтому общая сумма процентов, выплаченных заёмщиком, равна £491,987.40.

Отметим, что точный расчёт по формуле $300000 \cdot (1.085^{1/12} - 1) \cdot 15 \cdot 12 + 150000 \cdot (1.085^{1/4} - 1) \cdot 10 \cdot 4$ даёт чуть меньшую сумму: £491,987.02.

(ii) Регулярные ежемесячные взносы заёмщика (обозначим их размер через x) на сберегательный счёт образуют 15-летнию ренту с выплатой суммы x p=12 раз в год. Накопление к концу 15-летнего периода равно

$$12x\ddot{s}_{\overline{15}|}^{(12)} = 12x\frac{(1+i)^{15}-1}{d^{(12)}}.$$

Эффективная годовая техническая процентная ставка i, которая используется при оценке изменения ценности денег с течением времени, находится из равенства $1+i = \left(1+\frac{0.09}{2}\right)^2$, так что $i = 9.2025\%$. По условию должно быть выполнено равенство $12x\frac{(1+i)^{15}-1}{d^{(12)}} = £150000$, где $d^{(12)} = 12\left(1-(1+i)^{-\frac{1}{12}}\right) \approx 8.771164\%$. Отсюда $x \approx £399.37$.

(iii) Реальное накопление по сберегательному счёту через 15 лет составит

$$12x\ddot{s}_{\overline{15}|@10\%}^{(12)} = 399.37 \cdot \frac{1.1^{15}-1}{1-1.1^{-1/12}} \approx 160395.47.$$

После выплаты этой суммы размер невыплаченного долга составит £139604.53. Теперь искомую сумму y ежемесячных выплат по долгу на протяжении последних 10 лет можно найти из равенства: $12y a_{\overline{10}|@7\%}^{(12)} = 139604.53$, откуда:

$$y = 139604.53 \cdot \frac{1.07^{1/12}-1}{1-1.07^{-10}} \approx 1605.50.$$

Задача 3.12 (CT1, 24 April 2012, Problem 3) Компания заняла в банке £500,000 на 10 лет под 9% годовых. Этот заём должен быть погашен выплатами постоянного размера в конце каждого года.

(i) Вычислите:

(a) размер ежегодных выплат;

(b) общую сумму процентов, выплаченных за 10 лет.

(ii) В начале восьмого года, сразу после седьмого платежа, компания попросила реструктурировать долг и увеличить оставшийся до полного погашения займа период с трёх до четырёх лет. Банк согласен пойти на это, но при условии, что проценты будут начисляться в соответствии с эффективной годовой ставкой 12%, а выплаты будут производиться в конце каждого квартала.

(a) Вычислите размер этих ежеквартальных выплат;

(b) Вычислите размер процентов во втором платеже по пересмотренному графику возврата долга.

Решение. (i) Поток выплат образует стандартную постоянную ежегодную запаздывающую ренту. Его стоимость в момент t=0 заключения договора займа равна $xa_{\overline{10}|@9\%}$, где x – искомый размер ежегодных выплат. В силу принципа эквивалентности обязательств $xa_{\overline{10}|@9\%} = £500{,}000$, откуда:

$$x = £500{,}000 \frac{i}{1-v^{10}}\bigg|_{i=9\%} \approx £77{,}910.04.$$

(b) За 10 лет компания должна выплать сумму $10x = £779{,}100.45$, что превышает сумму займа на £279,100.45 – это и будет общая сумма процентов, выплаченных за 10 лет.

(ii) (a) В момент $t = 7+0$ (начало восьмого года, сразу после седьмого платежа) обязательства компании заключаются в трёх выплатах одной и той же суммы x в моменты 8, 9, 10. Стоимость этого потока в момент $t = 7+0$ равна $xa_{\overline{3}|@9\%}$ – в силу принципа эквивалентности обязательств это размер невыплаченного долга в этот момент.

Если y – размер ежеквартальных платежей по пересмотренному графику, то обязательства компании заключаются в выплате четырёхлетней ренты с частотой p=4 (с запаздыванием и величиной ежегодных выплат $4y$). Стоимость этого потока в момент $t = 7+0$ равна $4ya^{(4)}_{\overline{4}|@12\%}$. В силу принципа эквивалентности обязательств справедливо равенство: $4ya^{(4)}_{\overline{4}|@12\%} = xa_{\overline{3}|@9\%}$. Поэтому

$$y = x\frac{a_{\overline{3}|@9\%}}{4a^{(4)}_{\overline{4}|@12\%}} = x\frac{\left(1.12^{1/4}-1\right)\left(1-1.09^{-3}\right)}{0.09\left(1-1.12^{-4}\right)} \approx £15{,}549.16.$$

(ii) (b) Мы знаем, что для стандартной схемы займа с постоянными выплатами величиной P в момент k-го платежа на выплату процентов идёт сумма $I_k = P\left(1-(1+i)^{-(n-k+1)}\right)$, где n – общее число выплат, а i –эффективная процентная ставка для единичного промежутка. В нашем случае k=2, n=16, $P = y$, $i = 1.12^{1/4} - 1$. Поэтому $I_2 = y\left(1-1.12^{-15/4}\right) \approx$ £5,383.41.

Глава 4
Доходность инвестиционных проектов

4.1 Введение

Цель этой главы – рассказать о простейших моделях и методах, которые бы позволили потенциальному инвестору принять мотивированное решение, стоит ли вкладывать деньги в проект, а при наличии нескольких возможностей для инвестирования – решить, какой проект предпочтительнее.

В качестве основной характеристики инвестиционного проекта мы будем рассматривать его «доходность» в самом широком смысле, игнорируя другие показатели, которые часто намного важнее финансовой прибыли, которую может получить инвестор. Например, при реализации проекта строительства жилого здания в историческом центре города необходимо учитывать исторический облик соседних зданий и района застройки в целом, транспортную доступность для будущих жителей, наличие мест для парковки, магазинов, загруженность близлежащих школ, детских садов, поликлиник, возможность доставки строительных материалов, размер строительной площадки, ограничения на технологии строительства, инженерно-геологические свойства грунта и т.д. Для решения этих проблем нужно привлекать историков, инженеров по строительству, геологов и т.д.

В идеале было бы найти такую числовую характеристику, значение которой позволило бы инвестору сразу сказать, насколько выгоден для него проект. Однако, с самого начала нужно отчётливо понимать, что нет и не может быть одной, «наилучшей», меры доходности проекта. Разные меры доходности, о которых мы будем говорить позже, оценивают проект с разных сторон. Принять разумное решение инвестор может только анализируя все эти показатели в совокупности, а также учитывая разнообразные «нечисловые» соображения (которые нельзя формализовать в рамках какой-то математической модели). Эта идея совершенно очевидна и в реальной жизни, например, никто не будет характеризовать уровень физического развития человека лишь его ростом, весом, частотой пульса, давлением крови, временем, за которое он пробегает 3000 метров, или каким-то ещё *одним* числовым параметром.

Ещё одно важное общее соображение связано с тем, что при оценке инвестиционного проекта речь идёт о будущем развитии событий. В очень редких случаях финансовые показатели проекта можно предсказать абсолютно

точно, да и то эта точность относительна. Например, для банковского депозита уже в момент размещения средств мы совершенно точно знаем сумму вклада, срок вклада, даты получения процентов и их размер. Но кто гарантирует, что инвестор действительно получит эти деньги и реальную ценность этих денег? Банк? Государство? Вспомнив недавнюю историю, мы получим ясный ответ на этот вопрос: в полной мере – никто. Поэтому при оценке инвестиционных проектов важно понимать, что исходные данные для используемых моделей фактически являются лишь нашими оценками будущей ситуации. Поэтому нужно проводить расчёты для нескольких сценариев: «среднего», «оптимистического», «пессимистического». Ещё важнее заранее продумать свои действия на случай непредвиденного развития событий. Поскольку точность исходных данных очень сомнительна, чрезмерная точность в финансовых расчётах при оценке доходности не имеет смысла (в то время как в предыдущих главах ошибка в 1 копейку считалась недопустимой). В частности, платежи, которые поступают достаточно часто, например, ежедневно, моделируются непрерывными потоками.

Поскольку мы будем характеризовать реальный процесс инвестирования только с точки зрения финансов, в нашей теории инвестиционный проект – это сделка, в которой инвестор в некоторые моменты времени $t'_1, t'_2, \ldots$ вкладывает средства в размере $a_1, a_2, \ldots$ соответственно, а затем в моменты $t''_1, t''_2, \ldots$ получает доход в размере $b_1, b_2, \ldots$ соответственно. Моменты $t'_1, t'_2, \ldots$, когда инвестор вкладывает средства, не обязаны предшествовать моментам $t''_1, t''_2, \ldots$, когда он получает доход (хотя во многих случаях, например, в страховании, это обычно имеет место), а могут чередоваться. Для упрощения теоретических рассуждений удобно рассматривать объединённую последовательность моментов времени $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ и считать, что если $t_k = t''_i$, то в момент t_k проект приносит прибыль в размере $c_k = b_i$, а если $t_k = t'_j$, то в момент t_k проект приносит отрицательный «доход» в размере $c_k = -a_j$. Последовательность $(t_0, c_0), \ldots, (t_n, c_n)$ называется *чистым денежным потоком* (net cash flow). Если не оговорено противное, мы будем считать, что $t_0 = 0$ – это текущий момент времени, а $c_0 < 0$ (в момент начала проекта инвестор должен вложить средства). Часто $c_n > 0$ (в момент t_n окончания проекта инвестор в последний раз получает прибыль от проекта), но иногда $c_n < 0$ – скажем, при разработке месторождения полезных ископаемых для закрытия проекта нужно потратить значительные средства на рекультивацию земель.

4.2 Графическое представление денежного потока

Для наглядности чистый денежный поток принято представлять графически. Есть несколько способов сделать это.

Схема денежного потока (cash flow diagram) является уточнением графического представления простейших денежных потоков в виде стрелок, идущих вверх и вниз, которое мы использовали ранее. Если в момент t инвестор вкладывает в проект сумму a, то на схеме денежного потока в точке t оси времени рисуется стрелка длиной a (в выбранном масштабе), идущая вниз, в отрицательную полуплоскость. Если есть возможность, эту стрелку изображают красной. Если в момент t инвестор получает сумму b, то в точке t оси времени рисуется стрелка длиной b (в выбранном масштабе), идущая вверх, в положительную полуплоскость.

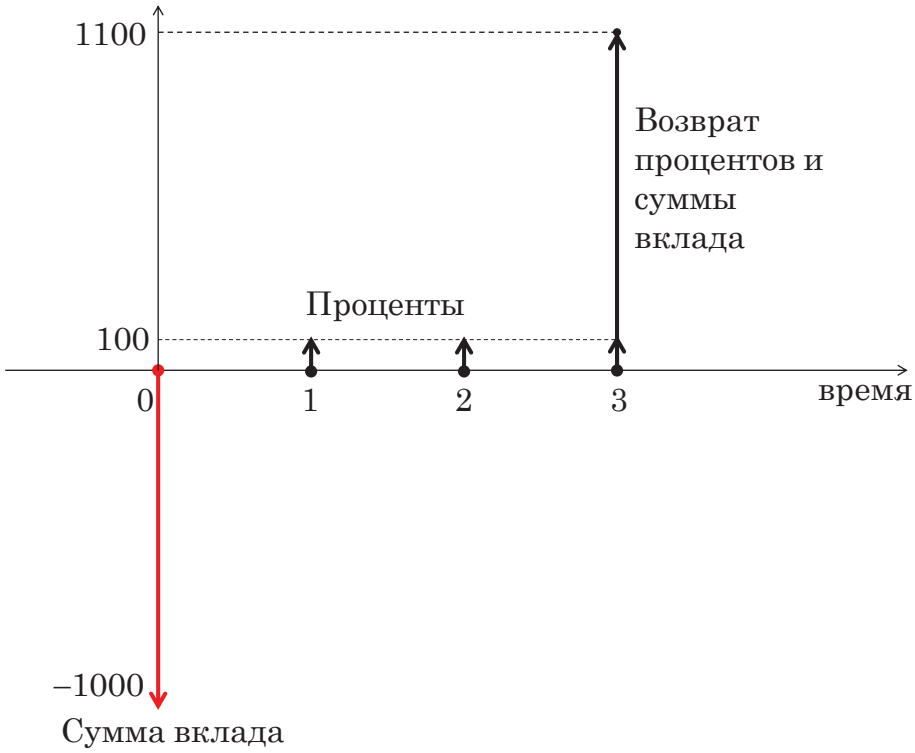


Рис. 4.1

На рис. 4.1 показана диаграмма денежного потока для банковского вклада без капитализации процентов на три года под 10% годовых с выплатой процентов в конце года, сумма вклада равна 1000 ($t_0 = 0$ – момент открытия счёта, единица времени – один год). Ниже мы на будем ссылаться на этот пример как на ***Проект 1***.

Если на каком-то промежутке времени инвестор получает (или вкладывает) деньги непрерывно со скоростью $\rho(t)$, то схема дополняется

графиком функции $y = \rho(t)$ (или $y = -\rho(t)$, если инвестор вкладывает средства) на соответствующем промежутке времени. Чтобы не было путаницы, часто соответствующую криволинейную трапецию покрывают штриховкой. Для иллюстрации рассмотрим

Проект 2. Чтобы открыть магазин, нужно потратить 60 тыс. (например, долларов) на закупку товара и 10 тыс. в качестве арендной платы за первый и последний месяцы. После этого ежедневно магазин будет давать выручку в размере 1 тыс. (30 тыс. в месяц, считая для простоты, что каждый месяц состоит из 30 дней). В конце каждого месяца нужно вносить арендную плату за следующий месяц в размере 5 тыс., выплачивать зарплату сотрудникам в размере 5 тыс. и закупать товар на сумму 15 тыс. (всего 25 тыс.). Поступление денег от продажи товара естественно рассматривать как непрерывный процесс со скоростью $\rho(t) = 30$ (тыс. в месяц).

Для этого проекта схема денежного потока на промежутке $0 \le t \le 3$ показана на рис. 4.2 ($t_0 = 0$ – момент открытия магазина, единица времени – один месяц).

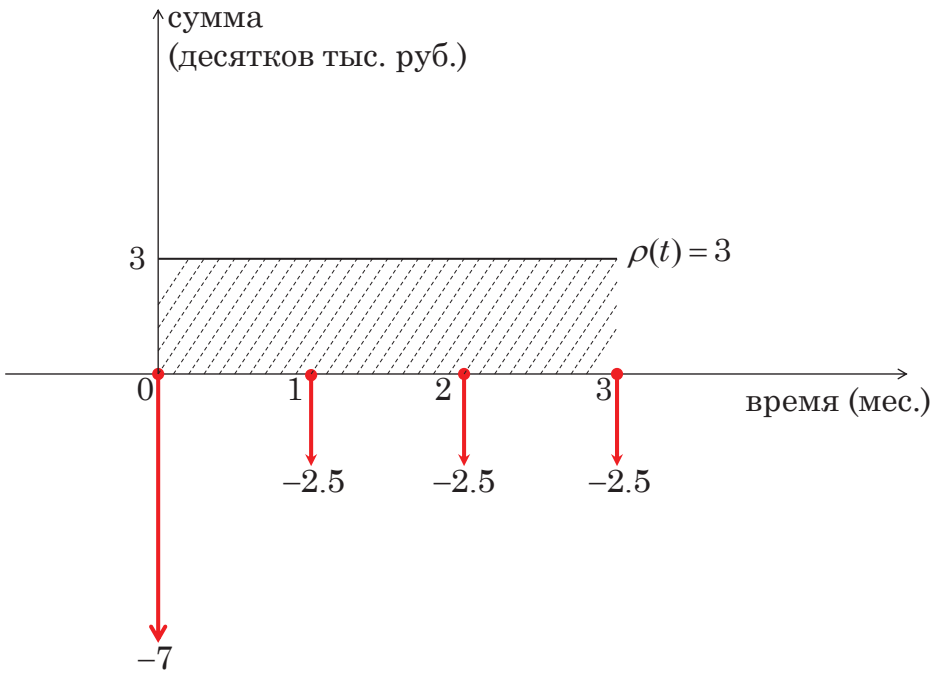


Рис. 4.2

Ещё один способ графического представления денежного потока основан на понятии функции распределения потока, которую мы определяем как алгебраическую сумму $S(t)$ всех денег, полученных или выплаченных инвестором вплоть до момента t (включая и этот момент).

Нетрудно сообразить, что если на каком-то промежутке времени инвестор не вкладывает средства в проект и не получает денег от проекта, то на этом промежутке функция $S(t)$ сохраняет постоянное значение. Если в момент t

инвестор вкладывает в проект сумму a, то в точке t функция распределения совершает скачок вниз на величину a. Если же в момент t инвестор получает в результате реализации проекта сумму b, то в точке t функция распределения совершает скачок вверх на величину b.

Рассмотрим, например, денежный поток, схема которого приведена на рис. 4.1. Для него функция распределения показана на рис. 4.3.

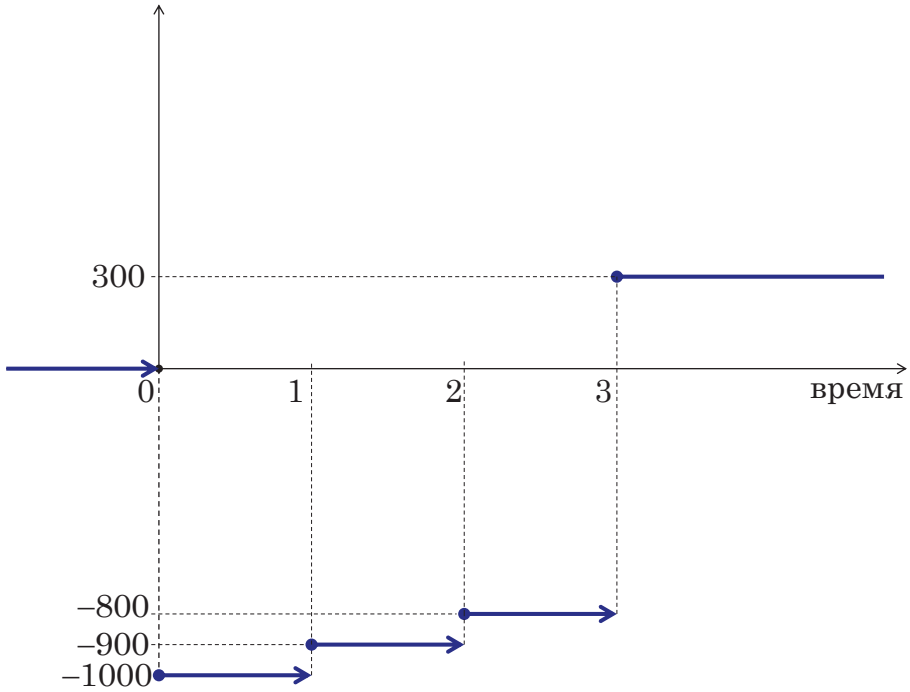


Рис. 4.3

Из рис. 4.3 видно, что функция распределения непрерывна справа; этот вывод, очевидно, справедлив и в общем случае.

Для дискретного денежного потока функцию распределения можно задать следующей формулой:

$$S(t) = \sum_{k:t_k \le t} c_k \,. \qquad (4.1)$$

Если рассматриваемый денежный поток имеет непрерывную компоненту, т.е. на каких-то промежутках времени инвестор получает (или вкладывает) деньги непрерывно, то на этих промежутках график функции $S(t)$ является непрерывным (если только в отдельных точках промежутка не было поступления/выплаты разовых сумм) со скоростью роста $S'(t) = \rho(t)$ (или $S'(t) = -\rho(t)$, если инвестор вкладывает средства).

Например, для денежного потока, схема которого приведена на рис. 4.2 (Проект 2), функция распределения изображена на рис. 4.4.

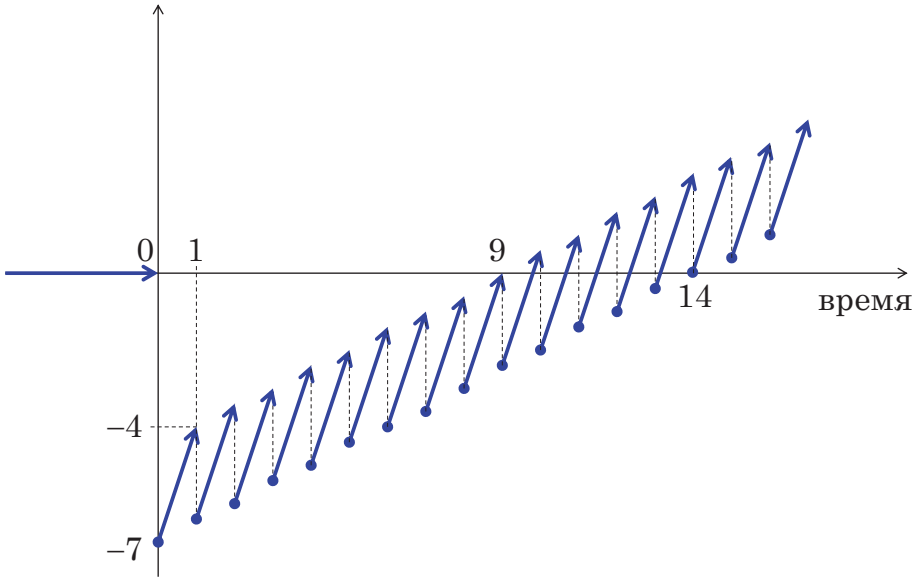


Рис. 4.4

Для денежного потока с непрерывной компонентой удобно обозначить через $\rho(t)$ чистую скорость поступления средств в момент t от всех непрерывных потоков. Если на каком-то промежутке времени непрерывных потоков нет, то будем считать, что на этом промежутке $\rho(t) \equiv 0$. Для такого потока функцию распределения можно задать формулой

$$S(t) = \sum_{k:t_k \le t} c_k + \int_0^t \rho(u)du. \qquad (4.2)$$

При расчётах обычно рассматривают отдельно дискретную и непрерывную компоненты денежного потока, т.е., как это сделано в (4.2), записывают $S(t)$ в виде $S(t) = S_{\text{д}}(t) + S_{\text{н}}(t)$, где

$$S_{\text{д}}(t) = \sum_{k:t_k \le t} c_k, \qquad S_{\text{н}}(t) = \int_0^t \rho(u)du. \qquad (4.3)$$

Скажем, для Проекта 2 $S_{\text{д}}(t) = 7 + 2.5[t]$, $S_{\text{н}}(t) = 3t$.

Иногда удобно рассматривать отдельно функцию распределения для потока вложений в проект (её мы обозначим $S_{-}(t)$) и функцию распределения для потока поступлений от проекта (её мы обозначим $S_{+}(t)$), так что $S(t) = S_{+}(t) - S_{-}(t)$. Например, для денежного потока, схема которого приведена

на рис. 4.2 (Проект 2), эти функции даются формулами: $S_{-}(t)=7+2.5[t]$ и $S_{+}(t)=3t$. Совпадение функций $S_{-}(t)$, $S_{+}(t)$ с функциями $S_{\text{д}}(t)$, $S_{\text{н}}(t)$ соответственно, конечно, случайно.

4.3 Чистая текущая стоимость

4.3.1 Определение чистой текущей стоимости (NPV)

В любом инвестиционном проекте инвестор даёт деньги и взамен получает деньги. Если он получает больше, чем инвестировал, проект выгоден для него; если же меньше, то убыточен. Инвестировать имеет смысл только в проекты, приносящие какую-то (желательно большую) прибыль. При всей своей очевидности это соображение нуждается в уточнении.

Рассмотрим дискретный инвестиционный проект, который требует от инвестора вложения сумм $a_1,a_2,\ldots$ в некоторые моменты времени $t_1',t_2',\ldots$ соответственно, а взамен обещает получение дохода в размере $b_1,b_2,\ldots$ в моменты $t_1'',t_2'',\ldots$ соответственно. Пусть $(c_k,t_k)_{0\le k\le n}$ – чистый денежный поток. В общей сложности инвестор должен инвестировать сумму $a=\sum_k a_k$, а рассчитывает получить сумму $b=\sum_k b_k$. Поэтому самый простой ответ: прибыль – это разность $b-a=\sum_{k=1}^{n} c_k$. Но все упомянутые выше денежные суммы относятся к разным моментам времени, а ключевая идея финансовой математики об изменении ценности денег с течением времени говорит, что сравнивать, складывать и производить любые другие операции над денежными суммами можно только, если все эти суммы рассматриваются в один и тот же момент времени. Поэтому нужно выбрать некоторую техническую процентную ставку i и привести все суммы к одному и тому же моменту времени. Разумно выбрать в качестве этого момента либо момент $t_0=0$ начала проекта, либо момент T окончания проекта. Будем все суммы приводить к моменту $t_0=0$ начала проекта, т.е. рассматривать их текущие значения. Пусть, как обычно, $v=1/(1+i)$ – коэффициент дисконтировния, $\delta=\ln(1+i)$ – интенсивность процентов, соответствующие технической процентной ставке i. Тогда *в текущих деньгах* нужно инвестировать сумму $\sum_k a_k v^{t_k'}$, а получим мы сумму $\sum_k b_k v^{t_k''}$. Поэтому в текущих деньгах прибыль – это разность $\sum_k b_k v^{t_k''}-\sum_k a_k v^{t_k'}=\sum_{k=0}^{n} c_k v^{t_k}$. Она называется *чистой текущей стоимостью* проекта (net present value – *NPV*):

$$NPV = \sum_{k=0}^{n} c_k v^{t_k} \equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{(1+i)^{t_k}} \equiv \sum_{k=0}^{n} c_k e^{-\delta t_k}. \qquad (4.4)$$

Если денежный поток имеет непрерывную компоненту, то для вычисления чистой текущей стоимости нужно добавить слагаемое $\int_a^b \rho(t) e^{-\delta t} dt$, где $\rho(t)$ – скорость поступления средств (со знаком «минус», если инвестор вкладывает средства), а $(a;b)$ – промежуток, на котором средства поступают с этой скоростью. Формулу, которая объединяла бы как дискретные, так и непрерывные компоненты чистого денежного потока, обычно записывают в виде

$$NPV = \sum_{k=0}^{n} c_k e^{-\delta t_k} + \int_0^T \rho(t) e^{-\delta t} dt, \qquad (4.5)$$

считая, что $t_0 = 0$ – момент начала проекта, T – момент его окончания, а $\rho(t) = 0$ на тех промежутках, где непрывные потоки отсутствуют.

Эту формулу можно записать и компактнее как интеграл Стилтьеса от функции $e^{-\delta t}$ по функции распределения потока:

$$NPV = \int_0^T e^{-\delta t} dS(t). \qquad (4.6)$$

Если все суммы приводить к моменту T окончания проекта, то мы получим чистый доход от реализации проекта. Для его вычисления можно просто умножить NPV на $(1+i)^T$.

Чтобы проиллюстрировать понятие *NPV*, рассмотрим следующий инвестиционный проект.

Проект 3. Этот проект требует немедленного (в момент $t_0 = 0$) вложения суммы £1000, дополнительного вложения суммы £800 в момент 2, а взамен обещает получение суммы £500 в момент 1 и суммы £1500 в момент 3. Диаграмма денежного потока для этого проекта показана на рис. 4.5.

Предположим, например, что техническая процентная ставка i, используемая для дисконтирования, равна 8%. Тогда сумма £500 (которую инвестор получит в момент 1) после приведения к моменту $t_0 = 0$ превратится в сумму $\frac{£500}{1.08} = £462.96$, сумма £800 (которую инвестор должен инвестировать в момент 2) – в сумму $\frac{£800}{1.08^2} = £685.87$, сумма £1500 (которую инвестор получит в момент 3) – в сумму $\frac{£1500}{1.08^3} = £1190.75$. Поэтому текущее значение реального «дохода» от Проекта 3, т.е. его чистая текущая стоимость, есть –£32.16, т.е. на

самом деле уже в момент рассмотрения вопроса о вхождении в этот проект следует признать, что он убыточен.

Нетрудно проверить, что если же все суммы приводить к моменту окончания проекта, то мы получим для «дохода» отрицательное значение –£40.51.

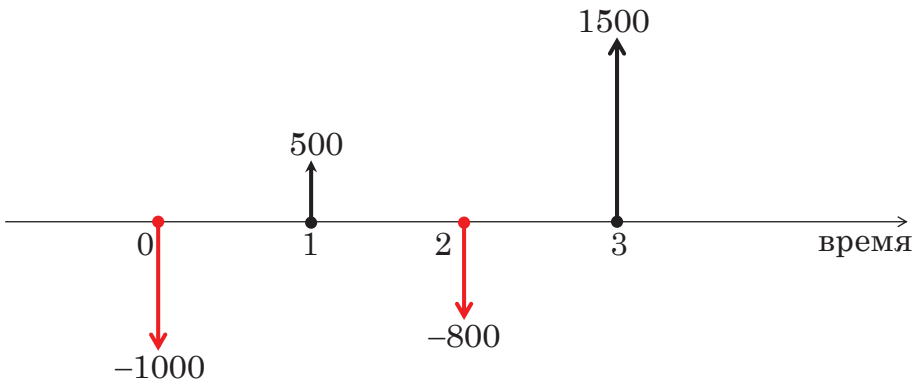


Рис. 4.5

Теперь изменим значение технической процентной ставки и проведём те же расчёты, что и выше, но при $i = 5\%$. Сумма £500 (которую инвестор получит в момент 1) после приведения к моменту $t_0 = 0$ превратится в сумму $£500/1.05 = £476.19$, сумма £800 (которую инвестор должен инвестировать в момент 2) – в сумму $£800/1.05^2 = £725.62$, сумма £1500 (которую инвестор получит в момент 3) – в сумму $£1500/1.05^3 = £1295.76$. Поэтому баланс по проекту в текущих деньгах равен £46.32 (£46.33, если производить округление в промежуточных вычислениях). Если же все суммы приводить к моменту окончания проекта, то мы получим значение £53.62. Поэтому, если для оценки проекта используется техническая процентная ставка $i = 5\%$, то проект следует признать выгодным для инвестора.

И проведённые выше вычисления, и замечания, которые мы делали в Разделе 2.2 Главы 2, ясно показывают, что чистая текущая стоимость проекта сильно зависит от технической процентной ставки i, используемой для дисконтирования.

Чтобы ещё раз подчеркнуть это важное обстоятельство, подсчитаем для Проекта 3 $NPV(i)$ для разных значений технической процентной ставки i. Формула для расчёта выглядит следуюшим образом:

$$NPV(i) = -1000 + 500(1+i)^{-1} - 800(1+i)^{-2} + 1500(1+i)^{-3}.$$

Дифференцированием легко показать, что функция $NPV(i)$ на промежутке $-1 < i < +\infty$ монотонно убывает, причём $\lim\limits_{i \to -1-0} NPV(i) = +\infty$, $\lim\limits_{i \to +\infty} NPV(i) = -1000$. Численные значения $NPV(i)$ для i от 0 до 19.5% с шагом 0.5% приведены в Таблице 4.1.

Таблица 4.1

i	*NPV(i)*	*i*	*NPV(i)*	*i*	*NPV(i)*	*i*	*NPV(i)*
0.0%	£200.00	5.0%	£46.32	10.0%	-£79.64	15.0%	-£183.86
0.5%	£183.18	5.5%	£32.59	10.5%	-£90.96	15.5%	-£193.27
1.0%	£166.70	6.0%	£19.13	11.0%	-£102.06	16.0%	-£202.51
1.5%	£150.56	6.5%	£5.93	11.5%	-£112.96	16.5%	-£211.59
2.0%	£134.74	7.0%	-£7.01	12.0%	-£123.66	17.0%	-£220.50
2.5%	£119.25	7.5%	-£19.71	12.5%	-£134.16	17.5%	-£229.27
3.0%	£104.07	8.0%	-£32.16	13.0%	-£144.46	18.0%	-£237.87
3.5%	£89.20	8.5%	-£44.37	13.5%	-£154.58	18.5%	-£246.33
4.0%	£74.62	9.0%	-£56.35	14.0%	-£164.52	19.0%	-£254.64
4.5%	£60.33	9.5%	-£68.11	14.5%	-£174.28	19.5%	-£262.81

Построенный на основе этих данных график функции $NPV(i)$ приведён на рис. 4.6.

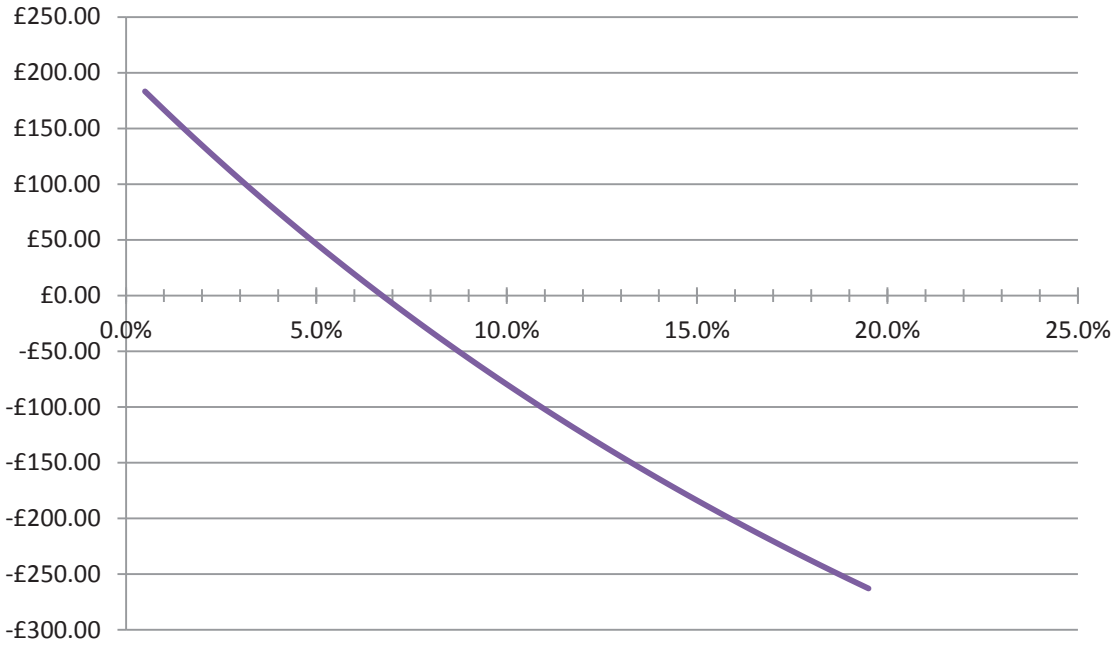


Рис. 4.6

Из Таблицы 4.1 и графика на рис. 4.6 мы видим, что если деньги не меняют свою ценность с течением времени, то чистый доход от проекта в момент 0 равен £200. По мере роста ставки i будущие поступления от проекта (как, впрочем, и будущие инвестиции в проект) имеют всё меньшую текущую стоимость и этот чистый доход уменьшается, пока при $i \approx 6.727836\%$ не станет

равным нулю. Для бóльших значений i чистая текущая стоимость проекта становится отрицательной.

Для некоторых специальных видов проектов общую формулу для чистой текущей стоимости можно упростить. Рассмотрим, например, стандартную схему займа, изученную в Разделе 3.2, когда сумма займа L_0 возвращается серией постоянных выплат, величиной P каждая, в моменты $1,\ldots,n$. В этом случае

$$NPV(i) = -L_0 + P\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{-k}.$$

Суммируя геометрическую прогрессию (или применяя готовую формулу (2.9) для текущей стоимости стандарной запаздывающей ренты), мы получим:

$$NPV(i) = -L_0 + Pa_{\overline{n}|} = -L_0 + P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Как мы уже отмечали, выбор «правильной» технической годовой процентной ставки i, используемой при дисконтировании – очень неформальный процесс, требующий много опыта и здравого смысла. Эта ставка зависит от многих факторов – реальных процентных ставок, предлагаемых рынком для аналогичных видов инвестиций и займов, доходности, которую может или желает получить лицо, проводящее оценку текущей стоимости, склонности этого лица к риску и т.д. Определить «правильное» значение i очень трудно и поэтому сильная зависимость NPV от i является одним из основных недостатков этой меры доходности.

4.3.2 Использование Microsoft Office Excel для расчёта NPV

В рассматренном только что примере NPV вычислялась по формуле (для $i = 8\%$)

$$NPV = -1000 + \frac{500}{1.08} - \frac{800}{1.08^2} + \frac{1500}{1.08^3}.$$

В Microsoft Office Excel мы можем просто ввести эту формулу в ячейку и сразу получить значение $-32.15973175 \approx -32.16$. С равным успехом можно использовать стандартную функцию ЧПС (NPV в английской версии), которая позволяет сразу найти величину вида $\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{(1+i)^k}$, т.е. текущее значение (в момент 0) денежного потока $(c_1,1),\ldots,(c_n,n)$. Поскольку в нашем примере первый взнос (в размере 1000) делается в момент 0, его нужно прибавить (со знаком «минус») к результату вычисления по формуле =ЧПС(0.08,500,–800,1500): $NPV = -1000 + \text{ЧПС}\big(0.08,500,-800,1500\big)$.

Так как $\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{(1+i)^k}=(1+i)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{c_{k-1}}{(1+i)^k}$, в этом примере (и в подобных ему) для вычисления NPV можно использовать и формулу $NPV=1.08*\text{ЧПС}(0.08,-1000,500,-800,1500)$.

Для расчёта *NPV* в случае произвольных моментов платежей следует использовать функцию ЧИСТНЗ (XNPV в английской версии). Её синтаксис: ЧИСТНЗ(ставка, значения, даты). Эта функция производит расчёт *NPV* по формуле $NPV=\sum_{k=1}^{n}c_k(1+i)^{\frac{t_1-t_k}{365}}$, где t_k – дата k-го платежа в формате Microsoft Excel. Таким образом, при использовании этой функции предполагается, что время измеряется днями, а год состоит из 365 или 366 (если год високосный) дней. Если мы захотим использовать функцию ЧИСТНЗ для расчёта *NPV* в рассматриваемом примере (Проект 3), то нужно указать даты поступления/выплаты денег. Предположим, например, что проект начинается 1 января 2014 года (инвестируем £1000), 1 января 2015 проект приносит £500, 1 января 2016 мы инвестируем ещё £800, а 1 января 2017 проект завершается и приносит нам £1500. Для расчётов введём значения денежных сумм $-1000,500,-800,1500$, например, в ячейки C1:C4, даты 01/01/2014, 01/01/2015, 01/01/2016, 01/01/2017 – в ячейки D1:D4. Используя формулу =ЧИСТНЗ(0.08,C1:C4,D1:D4) мы получим значение -32.410777. Обратим внимание на то, что предыдущие вычисления давали для *NPV* немного бóльшее значение: -32.15973175.

Если же в качестве начального момента проекта мы рассмотрим 1 января 2012 года (начальная инвестиция в размере £1000) с поступлением £500 1 января 2013, инвестированием £800 1 января 2014, поступлением £1500 1 января 2015, то расчёт *NPV* с помощью функции ЧИСТНЗ даст значение -32.36378145.

В чём же причина этих расхождений? Дело в том, что, как мы уже отмечали, перед выполнением вычислений Microsoft Excel преобразует даты в числовой формат: 1 января 2012 года имеет номер 40909, 1 января 2013 – 41275, 1 января 2014 – 41640, 1 января 2015 – 42005. Если 1 января 2012 года принять в качестве момента $t_0=0$ и измерять время годами, считая, что год состоит из 365 дней, то (поскольку 2012 год – високосный) 1 января 2013 – это момент $t_1=1\frac{1}{365}$, 1 января 2014 – $t_2=2\frac{1}{365}$, 1 января 2015 – $t_3=3\frac{1}{365}$.

Если рассчитывать *NPV* по формуле

$$NPV=-1000+500\cdot 1.08^{-t_1}-800\cdot 1.08^{-t_2}+1500\cdot 1.08^{-t_3}$$

с $t_1=1\frac{1}{365}$, $t_2=2\frac{1}{365}$, $t_3=3\frac{1}{365}$, то мы получим в точности то значение, которое даёт функция ЧИСТНЗ.

Если бы все платежи по проекту проходили не 1 января (2012, 2013, 2014, 2015 года), а 1 марта, то промежутки между платежами имели бы длину 365 дней и функция ЧИСТНЗ дала бы для *NPV* значение –32.15973175.

4.3.3 Интерпретация NPV

Чистая приведённая стоимость проекта допускает простую и интуитивно понятную интерпретацию. Мы рассмотрим этот вопрос на примере Проекта 3.

Отрицательное значение NPV(i)

Как мы вычислили, для Проекта 3 при $i = 8\%$ $NPV = -£32.16$, а значение «дохода», приведённое к моменту окончания проекта, равно –£40.51. Эти числа можно интерпретировать следующим образом. Предположим, что мы располагаем средствами для инвестирования (т.е. суммой £1000 в момент 0 и будем иметь сумму £800 в момент 2), но можем зарабатывать на имеющиеся у нас средства 8% годовых за счёт какого-то альтернативного проекта – депозита, облигаций и т.д. Мы знаем, что нам принесёт анализируемый Проект 3: £500 в момент 1 и £1500 в момент 3. Посмотрим, сможем ли мы получить такой же денежный поток от вложения имеющихся у нас средств в альтернативный проект. После вложения в альтернативный проект £1000 в момент 0 в момент 1 мы будем иметь $£1000 \cdot 1.08 = £1080$. Из этой суммы мы можем получить £500 (именно эту сумму нам обещает Проект 3), а остаток, £580, к моменту 2 вырастет до $£580 \cdot 1.08 = £626.40$. В этот момент мы добавим, как предполагалось, £800. Итоговая сумма £1426.40 к моменту 3 вырастет до $£1426.40 \cdot 1.08 = £1540.51$. Из этой суммы мы не только можем получить £1500 (именно эту сумму нам обещает Проект 3), но и получим дополнительную сумму £40.51. Это в точности приведённое значение стоимости проекта в момент $T = 3$ его окончания, но взятое с обратным знаком.

Итак, *если мы располагаем средствами для реализации анализируемого проекта и можем зарабатывать на них проценты по ставке i за счёт вложения средств в альтернативный проект, то при NPV(i)<0 лучше входить не в анализируемый проект, а в альтернативный – в момент его окончания мы дополнительно получим сумму* $-NPV(i)$ *(в текущих деньгах).*

Возможна и другая интерпретация. Допустим, что мы не располагаем средствами, но можем взять их в долг под 8% годовых; долг погашается по мере поступления средств от проекта. Чтобы войти в Проект 3, в момент 0 мы должны взять в долг сумму £1000. К моменту 1 наш долг вырастет до £1080; иначе говоря, мы «располагаем» суммой –£1080. В момент 1 проект принесёт нам £500, и мы сможем уменьшить долг до £580; иначе говоря, наш баланс составит –£580. К моменту 2 долг вырастет до £626.40 (наш баланс составит –£626.40). В этот момент мы должны инвестировать ещё £800, так что долг увеличится до £1426.40, а к моменту 3 вырастет до £1540.51. В этот момент проект принесёт £1500, что позволит погасить часть долга, так что наш окончательный баланс

будет –£40.51. Это в точности приведённое значение стоимости проекта в момент $T = 3$ его окончания.

Итак, *если мы должны брать кредит для финансирования проекта и i – эффективная годовая процентная ставка по кредиту, то $NPV(i) \times (1+i)^T$ – это сумма, которой мы будем располагать в конце проекта, а NPV(i) – текущее значение этой суммы. Поэтому при NPV(i)<0 лучше не входить в анализируемый проект, т.к. в итоге мы будем должны кредитору сумму $NPV(i)$ (в текущих деньгах).*

Положительное значение NPV(i)

Как мы вычислили, для Проекта 3 при $i = 5\%$ чистая текущая стоимость равна £46.32. Если же все суммы приводить к моменту окончания проекта, то мы получим значение £53.62.

Как и в случае $i = 8\%$, результаты этого расчёта можно интерпретировать двумя способами.

Предположим, что мы располагаем средствами для инвестирования (т.е. суммой £1000 в момент 0 и будем иметь сумму £800 в момент 2) и можем зарабатывать на имеющиеся у нас средства 5% годовых за счёт какого-то альтернативного проекта – депозита, облигаций и т.д. Мы знаем, что нам принесёт анализируемый Проект 3: £500 в момент 1 и £1500 в момент 3. Посмотрим, сможем ли мы получить такой же денежный поток от вложения имеющихся у нас средств в альтернативный проект. После вложения в альтернативный проект £1000 в момент 0 в момент 1 мы будем иметь $£1000 \cdot 1.05 = £1050$. Из этой суммы мы можем получить £500 (именно эту сумму нам обещает Проект 3), а остаток, £550, к моменту 2 вырастет до £577.50. В этот момент мы добавим, как предполагалось, £800. Полученная сумма £1377.50 к моменту 3 вырастет до £1446.38. Чтобы получить £1500 (именно эту сумму нам обещает Проект 3), нам не хватает £53.62. Иначе говоря, Проект 3 обещает бóльший доход, чем мы могли бы заработать за счёт вложения имеющихся у нас средств в альтернативный проект. Эта дополнительная прибыль в точности равна приведённому значению стоимости проекта в момент $T = 3$ его окончания (с точностью до ошибок округления).

Итак, *если мы располагаем средствами для реализации анализируемого проекта и можем зарабатывать на них проценты по ставке i за счёт вложения средств в альтернативный проект, то при NPV(i)>0 лучше входить в анализируемый проект, а не в альтернативный – мы дополнительно получим сумму $NPV(i)$ (в текущих деньгах).*

Возможна и другая интерпретация. Допустим, что мы не располагаем средствами, но можем взять их в долг под 5% годовых; долг погашается по мере поступления средств от проекта. Чтобы войти в проект, в момент 0 мы должны взять в долг сумму £1000. К моменту 1 наш долг вырастет до £1050; иначе говоря, мы «располагаем» суммой –£1050. В момент 1 проект принесёт нам

£500, и мы сможем уменьшить долг до £550; иначе говоря, наш баланс составит –£550. К моменту 2 долг вырастет до £577.50 (наш баланс составит –£577.50). В этот момент мы должны инвестировать ещё £800, так что долг увеличится до £1377.50, а к моменту 3 вырастет до £1446.38. В этот момент проект принесёт £1500, что позволит не только погасить весь долг, но и получить прибыль в размере £53.62. Это в точности приведённое значение стоимости проекта в момент $T = 3$ его окончания.

Итак, *если мы должны брать кредит для финансирования проекта и i – эффективная годовая процентная ставка по кредиту, то $NPV(i) \times (1+i)^T$ – это сумма, которой мы будем располагать в конце проекта, а NPV(i) – текущее значение этой суммы. Поэтому при NPV(i)>0 можно входить в анализируемый проект, т.к. в итоге мы заработаем сумму $NPV(i)$ (в текущих деньгах).*

Теперь немного изменим анализируемый пример инвестиционного проекта, поменяв местами суммы £500 и £1500. Новый проект (***Проект 4***) требует немедленного (в момент $t_0 = 0$) вложения суммы £1000, дополнительного вложения суммы £800 в момент 2, а взамен обещает получение суммы £1500 в момент 1 и суммы £500 в момент 3 (см. рис. 4.7).

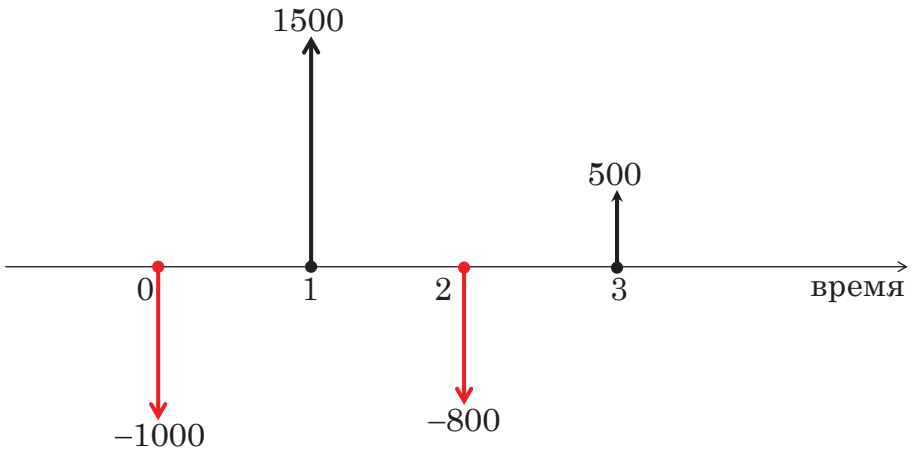


Рис. 4.7

Предположим, например, что техническая процентная ставка i, используемая для дисконтирования, равна 8%. Тогда чистая текущая стоимость Проекта 4 равна $NPV = -1000 + \frac{1500}{1.08} - \frac{800}{1.08^2} + \frac{500}{1.08^3} = 99.93$. Если же все суммы приводить к моменту окончания проекта, то мы получим значение £125.89. Таким образом, изменение моментов поступления денег от проекта (без изменения поступающих сумм) изменило знак *NPV* с отрицательного на

положительный, т.е. сделало проект прибыльным. Это и не удивительно, т.к. в первом примере значительное поступление в размере £1500 ожидалось в момент 3, что в момент 0 имеет гораздо меньшую ценность, чем поступление той же суммы £1500 в момент 1.

Чтобы яснее показать этот факт, проведём детальный анализ проекта, как мы делали это раньше. Допустим, что мы не располагаем средствами, но можем взять их в долг под 8% годовых; мы можем погашать долг или его часть в любой момент. Чтобы войти в Проект 4, в момент 0 мы должны взять в долг сумму £1000. К моменту 1 наш долг вырастет до £1080; иначе говоря, мы «располагаем» суммой –£1080. В момент 1 проект принесёт нам £1500, и мы не только погасим весь долг, но и будем иметь свободной сумму £420. Предположим, что мы можем зарабатывать те же 8% годовых на средства, которыми мы располагаем. Тогда к моменту 2 мы будем иметь £453.60. В этот момент мы должны инвестировать ещё £800, так что нужно будет взять в долг £346.40. К моменту 3 этот долг вырастет до £374.11. В этот момент проект принесёт £500, что позволит не только полностью погасить накопившийся долг, но и иметь прибыль в размере £125.89. Это в точности приведённое значение стоимости Проекта 4 в момент $T = 3$ его окончания.

4.3.4 Расчёт NPV при разных ставках по депозитам и займам

В реальности по кредитам банки требуют гораздо бóльшую процентную ставку, чем дают по депозитам. Кроме того, часто условия кредитного договора накладывают ограничения как на моменты погашения долга, так и на размеры погашаемых сумм. Чтобы анализировать подобные ситуации, нужно проводить детальный анализ динамики финансового положения инвестора, как мы делали это выше.

Рассмотрим ещё раз Проект 4 (см. Рисунок 4.7) и предположим, что для финансирования проекта мы можем, если не располагаем собственными средствами, привлекать кредиты под 8% годовых, но на свободные средства можем зарабатывать только 5% годовых. Чтобы войти в проект, в момент 0 мы должны взять в долг сумму £1000. К моменту 1 наш долг вырастет до £1080; иначе говоря, мы «располагаем» суммой –£1080. В момент 1 проект принесёт нам £1500, и мы не только погасим весь долг, но и будем иметь свободной сумму £420. Поскольку мы можем зарабатывать на средства, которыми располагаем, только 5% годовых, к моменту 2 мы будем иметь £441. В этот момент мы должны инвестировать ещё £800, так что нужно будет взять в долг £359. К моменту 3 этот долг (под 8% годовых) вырастет до £387.72. В этот момент проект принесёт £500, что позволит не только полностью погасить накопившийся долг, но и иметь прибыль в размере £112.28. Таким образом, мы установили, что проект прибылен для инвестора и нашли точное значение прибыли в момент окочания пректа. Эти результаты нельзя получить иначе, кроме как проводя детальный анализ.

В только что рассмотренной ситуации нам удавалось полностью гасить долг через год после его получения. В более сложных проектах нужно будет учитывать ограничения на моменты погашения долга и размеры погашаемых сумм. В качестве примера рассмотрим ещё раз Проект 4, предполагая, что банк даёт в долг любую требуемую сумму под 7% годовых, но только ровно на 3 года. Следует ли принять это предложение?

Проект 4 требует вложения двух сумм: £1000 в момент 0 и £800 в момент 2. Поскольку в момент 1 проект принесёт £1500, из которых можно внести £800 в момент 2, нужно занять только £1000. К моменту 3 этот долг вырастет до $1.07^3 \times £1000 = £1225.04$. Подсчитаем теперь доход от реализации проекта. В момент 1 мы получим сумму £1500 и тут же разместим её под 5% годовых. К моменту 2 мы будем располагать суммой £1575. Из этих денег мы инвестируем £800 в проект, а остаток в размере £775 опять разместим под 5% годовых. К моменту 3 эта сумма вырастет до £813.75. Вместе с £500, поступившими от проекта в момент 3, мы будем иметь £1313.75. Из этих денег мы должны выплать долг с набежавшими за 3 года процентами, так что в итоге у нас останется сумма £88.71, что меньше значения £112.28, которое соответствует займам на 1 год под 8% годовых. Поэтому предложение банка невыгодно. Но если бы банк предложил заём на 3 года под 6% годовых, то мы должны были бы выплачивать £1191.02, так что в итоге у нас осталась бы сумма £122.73, что больше значения £112.28, так что предложение банка следовало бы принять.

Смысл чистой текущей стоимости заключается в том, что *при одинаковых ставках для кредитов и депозитов* можно не проводить подобный подробный анализ финансового положения инвестора, а заменить его разовым вычислением по одной простой формуле.

4.4 Срок окупаемости

Рассмотрим дискретный инвестиционный проект, который требует от инвестора вложения сумм $a_1, a_2, \ldots$ в некоторые моменты времени $t'_1, t'_2, \ldots$ соответственно, а взамен обещает получение дохода в размере $b_1, b_2, \ldots$ в моменты $t''_1, t''_2, \ldots$ соответственно. Пусть $(c_k, t_k)_{0 \le k \le n}$ – чистый денежный поток, а $S(t)$ – его функция распределения, т.е. алгебраическая сумма всех денежных сумм, полученных или выплаченных инвестором вплоть до момента t (включая и этот момент).

Как правило, в момент $t_0 = 0$ начала проекта и на протяжении некоторого времени после этого момента функция $S(t)$ отрицательна – чтобы начать проект, в него нужно вложить средства в надежде, что эти вложения окупятся будущими поступлениями от проекта. Если функция $S(t)$ так и остаётся отрицательной, то это означает, что проект никогда не окупится даже в

номинальных деньгах (без учёта изменения их ценности с течением времени). Такие проекты заведомо несостоятельны с финансовой точки зрения и мы не будем их рассматривать.

Итак, предположим, что в некоторый момент времени график функции $S(t)$ переходит из отрицательной полуплоскости в положительную. Мы уже отмечали и видели на примерах, что моменты $t_1', t_2', \ldots$, когда инвестор вкладывает средства, не обязаны предшествовать моментам $t_1'', t_2'', \ldots$, когда он получает доход, а могут чередоваться. Вследствие этого функция $S(t)$ может несколько раз переходить из отрицательной полуплоскости в положительную. Мы предположим, что это происходит только один раз – во многих реальных ситуациях это предположение выполнено. Тогда момент времени, когда функция $S(t)$ становится неотрицательной, называется *периодом* (или *сроком*) *окупаемости* проекта (payback ['peɪbæk] period ['pɪərɪəd] – *PP*):

$$PP = \min\{t > 0 \mid S(t) \geq 0\}. \tag{4.7}$$

Эта формула сохраняется и для денежных потоков с непрерывной компонентой. Более того, часто её можно упростить. Предположим, например, что проект требует вложения суммы a_0 в момент $t_0 = 0$ начала проекта, а затем, начиная с момента $t_1 > 0$, начинает генерировать непрерывный денежный поток со скоростью $\rho(t)$. Тогда срок окупаемости находится из равенства

$$\int_{t_1}^{PP} \rho(t)dt = a_0. \tag{4.8}$$

В частности, если $\rho(t) \equiv \rho$, то $PP = t_1 + \dfrac{a_0}{\rho}$.

Ещё раз подчеркнём, что понятие срока окупаемости проекта определено только, если его функция распределения переходит из отрицательной в положительную полуплоскость лишь один раз. Поэтому, например, для Проекта 2 (см. рис. 4.4) это понятие не определено.

Срок окупаемости проекта можно интерпретировать, например, так. Предположим, что для финансирования проекта мы привлекаем беспроцентный кредит, а затем гасим свой долг поступлениями от проекта. Тогда срок окупаемости проекта – это момент, когда долг будет погашен и проект начнёт приносить прибыль.

В реальной жизни, конечно, деньги дают в долг под проценты. Пусть i – эффективная годовая процентная ставка по кредиту для финансирования проекта, а i^* – ставка, по которой мы зарабатываем проценты на имеющиеся средства, $\delta = \ln(1+i)$, $\delta^* = \ln(1+i^*)$. Пусть $A(t)$ – баланс по проекту в момент t (учитывая выплаты, произведённые в момент t). В типичной ситуации функция

$A(t)$ сначала отрицательна (мы взяли деньги в долг), затем она уменьшается, оставаясь отрицательной (но растёт по абсолютной величине – долг растёт из-за начисленных процентов), потом, по мере поступления средств от проекта, она начинает возрастать и приближается к 0, и, наконец, в какой то момент τ становится положительной (нестрого). Если после этого функция $A(t)$ больше не переходит в отрицательную полуплоскость, то момент τ называется *дисконтированным периодом* (или *сроком*) *окупаемости* проекта (discounted payback period – *DPP*):

$$DPP = \min\left\{t > 0 \middle| A(t) \geq 0\right\}. \tag{4.9}$$

Поскольку до момента *DPP* функция $A(t)$ отрицательна, её значение на промежутке $[0; DPP]$ не зависит от ставки i^*, по которой мы зарабатываем проценты на имеющиеся средства, и может быть вычислено по формуле

$$\sum_{t_k \leq t} c_k e^{\delta(t-t_k)} + \int_0^t \rho(u) e^{\delta(t-u)} du \equiv e^{\delta t} \int_0^t e^{-\delta u} dS(u) = e^{\delta t} \cdot NPV_{[0;t]},$$

где $NPV_{[0;t]}$ – чистая текущая стоимость поступлений/выплат по проекту на промежутке $[0;t]$. Если T – момент окончания проекта, то необходимым (но не достаточным) условием существования *DPP* является неотрицательность чистой текущей стоимости проекта: $NPV \geq 0$.

После момента *DPP*, когда кредит, полученный на финансирование проекта, погашен, проект начинает приносить прибыль. Эта прибыль не обязана монотонно возрастать, т.к. иногда проект может требовать дополнительных вложений. Важно лишь то, что баланс по проекту уже никогда не будет отрицательным. В момент T окончания проекта мы будем располагать суммой $A(T)$, которая при условии существования *DPP* определяется только значением $A(DPP)$ и ставкой i^*:

$$A(T) = \left(1 + i^*\right)^{T-DPP} \cdot A(DPP) + \sum_{t_k > DPP} c_k \left(1 + i^*\right)^{T-t_k} + \int_{DPP}^{T} \rho(t) e^{\delta^*(T-t)} dt.$$

Действительно, в момент *DPP* мы будем располагать суммой $A(DPP)$, которая к моменту T вырастет до $\left(1 + i^*\right)^{T-DPP} \cdot A(DPP)$, плюс поступления от проекта на промежутке $(DPP; T]$ дадут к моменту T сумму

$$\sum_{t_k > DPP} c_k \left(1 + i^*\right)^{T-t_k} + \int_{DPP}^{T} \rho(t) e^{\delta^*(T-t)} dt.$$

Часто формулу (4.9) можно упростить. Предположим, например, что проект требует вложения суммы a_0 в момент $t_0 = 0$ начала проекта, а затем, начиная с момента $t_1 > 0$, начинает генерировать непрерывный денежный поток со скоростью $\rho(t)$. Тогда дисконтированный срок окупаемости находится из равенства

$$\int_{t_1}^{DPP} e^{-\delta t}\rho(t)dt = a_0. \qquad (4.10)$$

В частности, если $\rho(t) \equiv \rho$, то $DPP = -\frac{1}{\delta}\ln\left(e^{-\delta t_1} - \frac{a_0\delta}{\rho}\right)$, причём DPP существует (т.е. кредит, выданный на реализацию проекта, можно погасить поступлениями от проекта) тогда и только тогда, когда $\rho > a_0\delta e^{\delta t_1}$. После момента DPP проект начинает приносить прибыль. Если мы можем зарабатывать проценты на эти средства по ставке $i*$, то в конце проекта мы будем располагать суммой

$$\rho\bar{s}_{\overline{T-DPP}|@i*} = \rho\frac{(1+i*)^{T-DPP}-1}{\delta*}.$$

4.5 Внутренняя ставка дохода

4.5.1 Определение внутренней ставки дохода

Простейшим инвестиционным проектом, известным каждому, является банковский вклад на фиксированный срок h. Доходность такого проекта характеризуется эффективной процентной ставкой за рассматриваемый промежуток времени $i_{эфф} = i_{эфф}(h) = \frac{I}{P}$, где P – сумма вклада, I – проценты. Для простоты сравнения разных депозитов вместо эффективной процентной ставки используют номинальную годовую ставку $i_{ном} = \frac{i_{эфф}(h)}{h}$ (обычно только для вкладов меньше чем на 1 год) или эквивалентную годовую ставку $AER = \left(1 + i_{эфф}(h)\right)^{1/h} - 1$.

В этом разделе мы введём меру доходности произвольного инвестиционного проекта, аналогичную эквивалентной годовой ставке для банковского депозита. Напомним, как в главе 1 мы определяли эту величину. Мы рассматривали «эквивалентный» банковский вклад, который даёт тот же финансовый результат, что и размещение средств на срок h по эффективной ставке $i_{эфф}$. Этот «эквивалентный» вклад начисляет проценты в соответствии с годовой ставкой i; при этом, если деньги находятся на счёте время h, то доход I на вложенные средства P начисляется в соответствии с принципом *сложных* процентов: $I = P((1+i)^h - 1)$. Поскольку вспомогательный вклад и исходный

депозит начисляют одинаковые проценты на сумму P, верно равенство $P((1+i)^h - 1) = i_{\text{эфф}} P$. Из него мы и получили формулу $AER = \left(1 + i_{\text{эфф}}\left(h\right)\right)^{1/h} - 1$ для годовой эквивалентной ставки $AER \equiv i$.

Теперь рассмотрим более сложный проект, например, Проект 4 (см. рис.4.7). Наряду с этим проектом рассмотрим банковский счёт, который начисляет проценты по формуле сложных процентов с соответствии с годовой процентной ставкой i. По этому счёту разрешён овердрафт (overdraft ['əuvədra:ft]), т.е. мы можем снимать со счёта больше денег, чем есть на счёте. Фактически это означает, что банк даёт нам деньги в долг. Предположим, что по такому долгу банк начисляет проценты по формуле сложных процентов с соответствии с той же годовой процентной ставкой i. Гипотетический вспомогательный банковский счёт должен быть эквивалентен рассматриваемому инвестиционному проекту в том смысле, что должен генерировать тот же денежный поток, что и инвестиционный проект. Эта эквивалентность описана в Таблице 4.2.

Таблица 4.2

Время	**Инвестиционный проект**	**Банковский счёт**
0	Начало проекта. Вложить £1000	Открыть счёт на сумму £1000
1	Проект принёс £1500	Снять со счёта £1500
2	Вложить £800	Пополнить счёт на £800
3	Проект принёс £500.	Снять со счёта £500
3+0	Проект завершён – больше никаких инвестиций в проект и никаких поступлений от проекта	Закрыть счёт – баланс по счёту равен 0

Используя данные третьего столбца Таблицы 4.2, опишем динамику средств по вспомогательному счёту.

1. В момент 0 мы вносим на счёт сумму £1000.
2. Поскольку банковский счёт начисляет проценты по формуле сложных процентов с соответствии с годовой процентной ставкой i, в момент $1-0$ будут начислены проценты в размере £1000i и сумма на счёте вырастет до $S(1-0) = £1000(1+i)$.
3. В момент 1 со счёта будет снята сумма £1500 и сумма на счёте уменьшится до $S(1) = 1000(1+i) - 1500$ (фунтов). Это выражение положительно только при $i > 50\%$, так что скорее всего баланс по счёту стал отрицательным (но гарантировать это мы не можем).
4. Мы предположили, что по долгу банк начисляет проценты по формуле сложных процентов с соответствии с той же годовой процентной ставкой i. Поэтому вне зависимости от того, положителен или отрицателен баланс в

момент 1, в момент $2-0$ на счёте будет сумма $S(2-0)=\big(1000(1+i)-1500\big)\cdot(1+i)$ (фунтов).

5. В момент 2 счёт будет пополнен на £800 и на счёте будет $S(2)=1000(1+i)^2-1500(1+i)+800$ (фунтов).
6. Мы не знаем, положительна или нет эта сумма, но в любом случае на промежутке [2;3) её изменение будет описываться формулой сложных процентов $S(2)\cdot(1+i)^{t-2}$. Поэтому в момент $3-0$ на счёте будет сумма $S(3-0)=\big(1000(1+i)^2-1500(1+i)+800\big)\cdot(1+i)$ (фунтов).
7. В момент 3 со счёта будет снята сумма £500 и на счёте станет $1000(1+i)^3-1500(1+i)^2+800(1+i)-500$ (фунтов).
8. Сразу после этого мы закрываем счёт.

Поскольку в момент закрытия счёта баланс должен быть нулевым, годовая процентная ставка по банковскому счёту, который эквивалентен инвестиционному проекту, удовлетворяет равенству

$$1000(1+i)^3-1500(1+i)^2+800(1+i)-500=0. \qquad (4.11)$$

Таблица 4.3 резюмирует эти рассуждения в компактной форме.

Таблица 4.3

Время	**Операция**	**Баланс**
0	Открытие счёта на сумму 1000	1000
$1-0$	Начисление процентов	$1000(1+i)$
1	Снятие со счёта 1500	$1000(1+i)-1500$
$2-0$	Начисление процентов	$\big(1000(1+i)-1500\big)\cdot(1+i)$
2	Пополнение счёта на 800	$1000(1+i)^2-1500(1+i)+800$
$3-0$	Начисление процентов	$\big(1000(1+i)^2-1500(1+i)+800\big)\cdot(1+i)$
3	Снятие со счёта 500	$1000(1+i)^3-1500(1+i)^2+800(1+i)-500$
3+0	Закрытие счёта	0

В проведённом рассуждении мы предполагали, что располагали средствами для начала финансирования проекта и в качестве эквивалентного проекта рассматривали свой текущий счёт. Можно провести аналогичное рассуждение в предположении, что мы привлекаем для финансирования проекта кредиты, которые затем гасим из поступлений от реализации проекта, причём процентная ставка по кредитам такая же, как и ставка i, по которой начисляются проценты на свободные средства. В этом случае в качестве эквивалентного проекта мы рассматриваем ссудный счёт (счёт, на котором банк

учитывает динамику задолженности по кредиту). Гипотетический вспомогательный ссудный счёт должен быть эквивалентен рассматриваемому инвестиционному проекту в том смысле, что должен генерировать тот же денежный поток, что и инвестиционный проект. Эта эквивалентность описана в Таблице 4.4.

Таблица 4.4

Время	**Инвестиционный проект**	**Ссудный счёт**
0	Начало проекта. Вложить £1000	Выдан кредит на сумму £1000
1	Проект принёс £1500	Зачисление £1500
2	Вложить £800	Выдан кредит на сумму £800
3	Проект принёс £500.	Зачисление £500
3+0	Проект завершён – больше никаких инвестиций в проект и никаких поступлений от проекта	Долг полностью погашен – баланс по счёту 0

Динамика средств по вспомогательному ссудному счёту ясна из Таблицы 4.5.

Таблица 4.5

Время	**Операция**	**Баланс**
0	Выдан кредит на сумму 1000	-1000
$1-0$	Начисление процентов (на невыплаченную сумму долга или положительный остаток по счёту)	$-1000(1+i)$
1	Зачисление 1500	$-1000(1+i)+1500$
$2-0$	Начисление процентов	$\left(-1000(1+i)+1500\right)\cdot(1+i)$
2	Выдан кредит на сумму 800	$-1000(1+i)^2+1500(1+i)-800$
$3-0$	Начисление процентов	$\left(-1000(1+i)^2+1500(1+i)-800\right)\cdot(1+i)$
3	Зачисление 500	$-1000(1+i)^3+1500(1+i)^2-800(1+i)+500$
3+0	Закрытие счёта	0

Поскольку в момент закрытия ссудного счёта баланс должен быть нулевым (долг полностью погашен без переплат в пользу банка), годовая процентная ставка по ссудному счёту, который эквивалентен инвестиционному проекту, удовлетворяет равенству

$$-1000(1+i)^3+1500(1+i)^2-800(1+i)+500=0 \qquad (4.12)$$

Уравнение (4.12), которому удовлетворяет процентная ставка по эквивалентному ссудному счёту, равносильно уравнению (4.11), которому удовлетворяет процентная ставка по эквивалентному текущему счёту (уравнения отличаются друг от друга только знаками членов).

Производная функции $f(i)$ в левой части (4.12) отрицательна при всех значениях i; поэтому эта функция монотонно убывает. Поскольку $f(0)=200$, а $f(+\infty)=-\infty$, уравнение (4.12) имеет единственный корень, который положителен. Этот корень называется *внутренней ставкой дохода* (или *внутренней доходностью* и т.п.) рассматриваемого инвестиционного проекта (internal [ɪn'tɜːn(ə)l] rate of return – IRR). Само уравнение (4.12) называется *уравнением доходности* (yield [jiːld] equation) для рассматриваемого инвестиционного проекта.

Если уравнение доходности (4.12) почленно разделить на $(1+i)^3$, то оно примет вид: $-1000+500v-800v^2+1500v^3=0$, где $v=1/(1+i)$. Выражение в левой части – это чистая текущая стоимость $NPV(i)$ нашего проекта. Поэтому уравнение доходности можно записать и в виде

$$NPV(i)=0. \qquad (4.13)$$

В такой форме его можно рассматривать для произвольного денежного потока. Для произвольного дискретного инвестиционного проекта, который характеризуется чистым денежным потоком $(t_0,c_0),\ldots,(t_n,c_n)$, уравнением доходности называется уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} c_k(1+i)^{-t_k}=0\,. \qquad (4.14)$$

Если обе части уравнения (4.14) умножить на $(1+i)^{-\tau}$, то мы получим равносильное ему (на множестве $i>-1$) уравнение $\sum_{k=0}^{n} c_k(1+i)^{-(t_k+\tau)}=0$. Последнее уравнение определяет внутреннюю ставку дохода для потока $(t_0+\tau,c_0),\ldots,(t_n+\tau,c_n)$. Таким образом, сдвиг всех моментов платежей на одну и ту же величину не меняет IRR.

Часто уравнение доходности записывают в терминах коэффициента дисконтирования $v=1/(1+i)$:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k v^{t_k}=0\,. \qquad (4.15)$$

Если денежный поток имеет непрерывную компоненту, то уравнение доходности записывают в терминах $\delta=\ln(1+i)$:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k e^{-\delta t_k} + \int_0^T \rho(t) e^{-\delta t} dt = 0, \qquad (4.16)$$

где $\rho(t)$ – скорость поступления средств (со знаком «минус», если инвестор вкладывает средства), $t_0 = 0$ – момент начала проекта, T – момент его окончания, а $\rho(t) = 0$ на тех промежутках, где непрерывные потоки отсутствуют.

В Microsoft Excel очень легко численно решить уравнение доходности для конкретного проекта с помощью стандартных функций ВСД (IRR в английской версии) и ЧИСТВНДОХ (XIRR). Например, для численного решения уравнения (4.12) следует открыть новый файл программы Microsoft Excel и внести в ячейки A1, A2, A3, A4 появившейся таблицы значения –1000, 1500, –800, 500 соответственно, а в ячейку B1 – формулу =ВСД(A1:A4) или формулу =ВСД({-1000;1500;-800;500}). Программа автоматически подсчитает корень соответствующего уравнения доходности (он приближённо равен 18.109%) и внесёт его в ячейку B1. Если моменты выплат не являются последовательными целыми числами, для вычисления IRR нужно использовать функцию ЧИСТВНДОХ (XIRR). Подробнее о функциях IRR и XIRR мы будем говорить позже.

Используя значение $i = 18.109\%$, в Таблице 4.6 мы ещё раз описали динамику эквивалентного ссудного счёта для Проекта 4. Из этой таблицы хорошо видно, как на самом деле меняется баланс по счёту, если процентная ставка i – это внутренняя ставка дохода.

Таблица 4.6

Время	**Операция**	**Баланс**
0	Выдан кредит на сумму 1000	–1000.00
1 – 0	Начисление процентов на невыплаченную сумму долга	–1118.09
1	Зачисление 1500	318.91
2 – 0	Начисление процентов на положительный остаток по счёту	376.66
2	Выдан кредит на сумму 800	–423.34
3 – 0	Начисление процентов на невыплаченную сумму долга	–500.00
3	Зачисление 500	0.00
3+0	Закрытие счёта	0

Вообще говоря, уравнение доходности (4.14) имеет несколько действительных корней. Интерпретировать как процентную ставку можно лишь корень i_0, который больше, чем -1; соответствующее значение v должно быть положительно, а δ может быть любым действительным числом. При этом лишь положительное значение i_0 означает собственно доход; в этом случае соответствующее значение v должно быть положительно и меньше 1, а δ

должно быть положительным числом. Ясно, что если не делать никаких предположений о структуре инвестиционного проекта, то уравнение доходности (4.14) может иметь несколько корней на промежутке $-1 < i < +\infty$. В этом случае считают, что внутренняя ставка дохода не определена. Если рассматривать уравнение доходности в виде (4.15) или (4.16), то внутренняя ставка дохода не определена когда это уравнение имеет несколько положительных корней или, соответственно, несколько действительных корней.

Рассмотрим, например, проект, который предполагает вложение сумм 1 и 44 в моменты 0 и 2 соответственно (всего 45), а взамен обещает получение сумм 30 и 16 в моменты 1 и 3 соответственно (всего 46). Чистая текущая стоимость как функция коэффициента дисконтирования даётся формулой $NPV(v) = -1 + 30v - 44v^2 + 16v^3$. На промежутке $0 \le v < +\infty$ эта функция сначала возрастает от $NPV(0) = -1$ до (примерно) $NPV(0.4527) = 5.048$, затем убывает до (примерно) $NPV(1.381) = -1.344$ (принимая при $v = 1$ значение 1), а затем опять возрастает до $+\infty$. Поэтому уравнение $NPV(v) = 0$ имеет три положительных корня, так что внутренняя ставка дохода не определена. Значения этих корней нетрудно вычислить на компьтере: $v_1 \approx 0.035119153$ (соответствующая годовая процентная ставка $i_1 \approx 2747.45\%$), $v_2 \approx 1.10646469$ (соответствующая годовая процентная ставка $i_2 \approx -9.62\%$), $v_3 \approx 1.608416157$ (соответствующая годовая процентная ставка $i_3 \approx -37.88\%$).

4.5.2 Существование внутренней ставки дохода

Стандартные программы, установленные на каждом современном персональном компьютере, например, Microsoft Excel, позволяют без особого труда для любого конкретного денежного потока рассчитать значение $NPV(i)$ (при заданном значении технической процентной ставки i). Это, в свою очередь, даёт возможность создать таблицу значений $NPV(i)$ для любого дискретного набора ставок. Выбирая ставки в этом наборе достаточно близкими друг к другу (например, с шагом 0.1% или 0.01%) легко нарисовать график функции $NPV(i)$ на любом промежутке и визуально определить число корней уравнения доходности, удовлетворяющих условию $i > -1$. Значения этих корней с любой степенью точности можно определить из таблицы значений функции $NPV(i)$. Поэтому с практической точки зрения вопрос о существовании внутренней ставки дохода и её численном значении является относительно простым.

Сказанное хорошо иллюстрируется проведённым ранее анализом Проекта 3 (см. таблицу 4.1 и рис. 4.6).

В ряде практически важных случаев можно гарантировать существование внутренней ставки дохода без проведения вычислений, простым анализом характера распределения средств от проекта во времени.

Предположим, например, что моменты $t_1', t_2', \ldots$, когда инвестор вкладывает

средства в проект (в размере $a_1, a_2, \ldots$ соответственно), предшествуют моментам $t_1'', t_2'', \ldots$, когда инвестор получает доход от реализации проекта (в размере $b_1, b_2, \ldots$ соответственно): $\max_k\left(t_k'\right) < \min_k\left(t_k''\right)$. Выберем произвольное $t \in \left(\max_k\left(t_k'\right); \min_k\left(t_k''\right)\right)$, умножим обе части уравнения доходности $-\sum_k a_k v^{t_k'} + \sum_k b_k v^{t_k''} = 0$ на v^{-t} и перепишем его в виде: $a(v) = b(v)$, где $a(v) = \sum_k a_k v^{t_k' - t}$, $b(v) = \sum_k b_k v^{t_k'' - t}$. Функция $a(v)$ является суммой степеней с отрицательными показателями и положительными коэффициентами. Поэтому на промежутке $0 < v < +\infty$ эта функция убывает от $+\infty$ до 0. Функция $b(v)$ является суммой степеней с положительными показателями и положительными коэффициентами. Поэтому на промежутке $0 < v < +\infty$ эта функция возрастает от 0 до $+\infty$. Следовательно, их графики обязательно пересекаются в полуплоскости $v > 0$, причём в единственной точке, абсцисса которой и будет коээфициентом дисконтирования $v_{IRR} = \dfrac{1}{1 + IRR}$, соответствующим IRR, а сама внутренняя ставка дохода равна $\dfrac{1 - v_{IRR}}{v_{IRR}}$ (см. рис. 4.8).

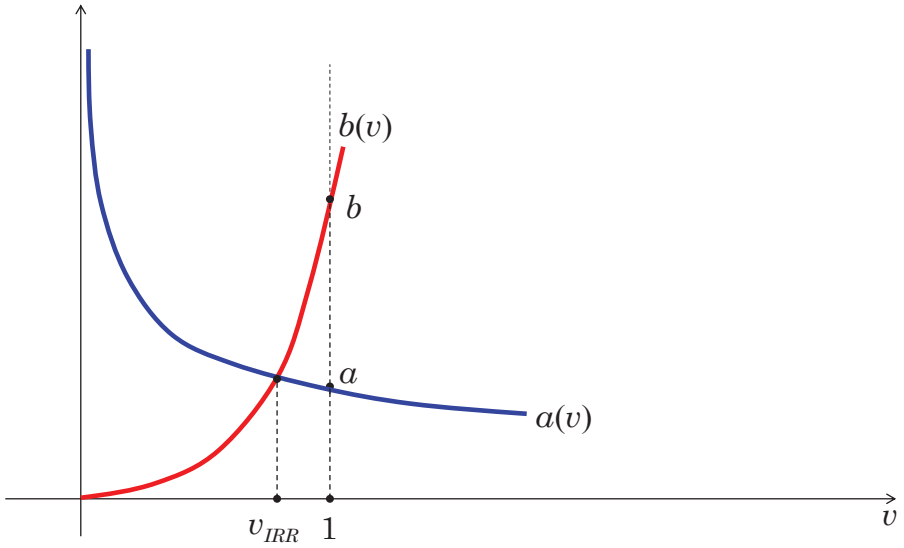


Рис. 4.8

Значение функции $a(v)$ в точке $v = 1$ – это общая сумма вложений в проект, $a = \sum_k a_k$, а значение функции $b(v)$ в точке $v = 1$ – это общая сумма поступлений от проекта, $b = \sum_k b_k$. Если $b > a$ (именно этот случай представлен на рис. 4.8), то точка пересечения графиков функций $a(v)$ и $b(v)$ расположена

левее вертикальной прямой $v=1$. Поэтому $v_{IRR}<1$, что равносильно положительности *IRR*. Если $b<a$, то графики функций $a(v)$ и $b(v)$ пересекутся правее прямой $v=1$. Поэтому $v_{IRR}>1$, что равносильно отрицательности *IRR*. И, наконец, если $b=a$, то графики функций $a(v)$ и $b(v)$ пересекутся в точке с абсциссой $v=1$, так что $IRR=0$. Конечно, с практической точки зрения интересен только случай $b>a$, когда проект обещает дать больше денег, чем в него нужно вложить.

Если все моменты времени $t_0,t_1,\ldots,t_n$ являются неотрицательными целыми числами, то приведённый выше простой результат является частным случаем знаменитой теоремы Декарта о числе положительных корней многочлена $f(v)=c_0+c_1v+\ldots+c_nv^n$: если N – число перемен знаков в последовательности $c_0,c_1,\ldots,c_n$ коэффициентов многочлена, то число положительных корней уравнения $f(v)=0$ с учётом их кратности не превосходит N и отличается от N на чётное число.

В учебниках по финансовой математике часто упоминают и более сложные теоремы о числе корней многочлена: теорему Бюдана-Фурье, теорему Штурма и т.п., но практическая польза от них не очень велика. Следует также отметить, что в классических курсах алгебры эти теоремы доказываются именно для *многочленов*, в то время как в общем случае уравнение доходности $NPV(v)=0$ является суммой степеней с произвольными положительными действительными показателями.

В качестве примера применения доказанного в этом разделе результата рассмотрим общую схему долга:

- в момент $t_0=0$ займодавец даёт заёмщику в долг сумму L_0;
- долг должен быть выплачен n платежами, величиной $P_1,P_2,\ldots,P_n$, в моменты $t_1,t_2,\ldots t_n$ соответственно;
- проценты на невыплаченную часть долга начисляются в соответствии с неизменной эффективной годовой процентной ставкой i.

В этом «инвестиционном проекте» инвестор вкладывает средства (в размере L_0) в момент $t_0=0$, который предшествует моментам $t_1,t_2,\ldots t_n$, когда он получает «доход от реализации проекта» (в размере $P_1,P_2,\ldots,P_n$ соответственно). Поэтому для договора займа всегда существует внутренняя ставка дохода. Для договора займа уравнение доходности (4.14) примет вид:

$$-L_0+\sum_{k=1}^{n}P_j(1+x)^{-t_k}=0.$$

Соотношение (3.10) означает, что процентная ставка i, в соответствии с которой начисляются проценты на невыплаченную часть долга, является корнем уравнения доходности. Поскольку в данном случае уравнение доходности имеет единственное решение на промежутке $-1<x<+\infty$, можно утверждать, что эта

процентная ставка и будет *IRR*.

4.5.3 О вычислении внутренней ставки дохода в Microsoft Excel

Как мы отмечали, в Microsoft Excel для вычисления внутренней ставки дохода имеется две стандартные функции: ВСД (IRR в английской версии), если моменты поступления средств являются натуральными числами, и ЧИСТВНДОХ (XIRR) для общего случая.

Обе функции используют для численного решения уравнения доходности классический метод Ньютона (метод касательных; в англоязычной литературе его часто называют Newton-Raphson method). Поэтому мы начнём с того, что кратко изложим суть этого метода.

Метод Ньютона предназначен для приближённого вычисления корня r уравнения $f(x)=0$ на заданном промежутке $[a;b]$. В классической теории *предполагается*, что:

1. других корней на этом интервале уравнение $f(x)=0$ не имеет;
2. на концах промежутка $[a;b]$ функция $f(x)$ принимает значения разных знаков (не нарушая общности можно считать, что $f(a)>0$, а $f(b)<0$ – в противном случае мы просто заменим уравнение $f(x)=0$ на $-f(x)=0$);
3. функция $f(x)$ – непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема на $[a;b]$, причём производные $f'(x)$ и $f''(x)$ не меняют знак на $[a;b]$, т.е. $f(x)$ монотонна и выпукла (вверх или вниз); если, как мы предположили, $f(a)>0$, $f(b)<0$, то $f(x)$ монотонно убывает, т.е. $f'(x)<0$.

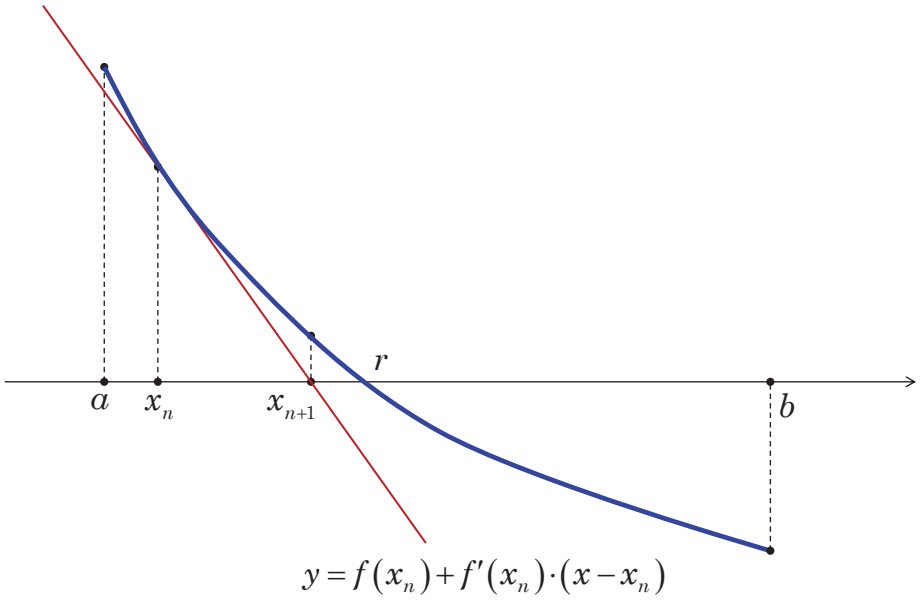


Рис. 4.9

Сделанные предположения означают, что график функции $f(x)$ выглядит так, как показано на рис. 4.9 (для определённости мы изобразили выпуклую вниз функцию, когда $f''(x) > 0$).

Из курса анализа мы знаем, что функция $f(x)$, которая непрерывна на промежутке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, имеет на этом промежутке по меньшей мере один корень (первая теорема Больцано-Коши). Монотонность $f(x)$ гарантирует единственность этого корня. Поэтому факт существования и единственности корня $r \in (a;b)$ автоматически следует из предположений 2 и 3.

Возьмём какое-нибудь значение x_n из промежутка $[a;b]$ в качестве приближённого значения искомого корня (на первом шаге это может быть, например, правый или левый конец промежутка) и проведём касательную к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_n (см. Рисунок 4.9). Её уравнение есть $y = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x - x_n)$. Мы ожидаем, что эта касательная мало отличается от $f(x)$ и потому естественно в качестве приближения заменить $f(x)$ на $f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x - x_n)$. Соответственно, уравнение $f(x) = 0$ превратится в линейное уравнение $f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x - x_n) = 0$, корень которого легко найти: $x = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Возьмём этот корень в качестве очередного приближения:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

и повторим описанную процедуру, заменив x_n на x_{n+1}. В результате мы получим последовательность точек $x_1, x_2, \ldots$, которые, как мы ожидаем, располагаются всё ближе и ближе к искомому корню r. Остановив этот процесс на каком-то шаге, мы получим приближённое значение r.

При всей своей идейной простоте описанная процедура требует исследования нескольких важных вопросов.

1. Можно ли гарантировать сходимость последовательности x_n к r?
2. Если «да», на каком шаге нужно остановить процесс последовательного вычисления точек x_n, чтобы вычислить r с желаемой точностью? Иначе говоря, какова скорость этой сходимости?

Чтобы ответить на эти вопросы, нужно различать два случая:

(I) $f(x)$ выпукла вниз (как на рис. 4.9);

(II) $f(x)$ выпукла вверх.

Случай (I): $f(x)$ выпукла вниз**.** При этом предположении рассмотрим две возвожности: (1) *точка* x_n *находится слева от искомого корня*, т.е. $f(x_n) > 0$ (как на рис. 4.9); (2) x_n *находится справа от искомого корня*.

(1) Если точка x_n находится слева от искомого корня, то $-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}>0$ (напомним, что $f'(x)<0$) и потому $x_{n+1}=x_n+\left(-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)>x_n$, т.е. последовательность точек x_n монотонно возрастает.

С другой стороны, неравенство $x_{n+1}<r$ равносильно неравенству

$$x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}<r \Leftrightarrow f(x_n)+(r-x_n)f'(x_n)<0.$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа даёт (c – некоторая точка между x_n и r):

$$f(r)=f(x_n)+f'(x_n)(r-x_n)+\frac{1}{2}f''(c)(r-x_n)^2.$$

Поскольку $f(r)=0$, неравенство $x_{n+1}<r$ можно переписать в виде: $-\dfrac{1}{2}f''(c)(r-x_n)^2<0$ – это неравенство выполнено, т.к. $f(x)$ выпукла вниз. Таким образом, если начальное приближение x_0 взято слева от искомого корня r, то последовательность точек x_n монотонно возрастает, оставаясь меньше r. Поэтому существует $s\equiv\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\le r$. Переходя к пределу в равенстве $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, мы получим: $s=s-\dfrac{f(s)}{f'(s)}$, т.е. $f(s)=0$. В силу единственности корня уравнения $f(x)=0$ $s\equiv\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ и будет искомым корнем r.

Резюмируя можно сказать, что, если $f(x)$ выпукла вниз, то выбирая начальное приближение x_0 слева от искомого корня (т.е. таким, что $f(x_0)>0$) мы получим последовательность x_n последовательных приближений, которая монотонно возрастая стремится к исходному корню.

Нетрудно оценить и скорость сходимости – применяя формулу для x_{n+1} и упомянутую выше формулу Тейлора, мы имеем:

$$|r-x_{n+1}|=\left|r-x_n+\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right|=\left|\frac{f''(c)}{2f'(x_n)}\right|(r-x_n)^2\le\frac{M}{2m}(r-x_n)^2, \qquad (4.17)$$

где $M=\max_{x\in[a;b]}|f''(x)|$, $m=\min_{x\in[a;b]}|f'(x)|$.

(2) Если же x_n находится справа от искомого корня, то из рис. 4.9 ясно, что для выпуклой вниз функции $f(x)$ значение x_{n+1} может выйти за пределы отрезка $[a;b]$. Поэтому не следует выбирать начальное приближение x_0 справа от искомого корня (т.е. таким, что $f(x_0)<0$).

Случай (II), когда $f(x)$ выпукла вверх, анализируется аналогично и приводит к следующим выводам:

(1) Если x_n находится слева от искомого корня, значение x_{n+1} может выйти за пределы отрезка $[a;b]$. Поэтому не следует выбирать начальное приближение x_0 слева от искомого корня (т.е. таким, что $f(x_0)>0$).

(2) Выбирая начальное приближение x_0 справа от искомого корня (т.е. таким, что $f(x_0)<0$) мы получим последовательность x_n последовательных приближений, которая монотонно убывая стремится к исходному корню. Для скорости сходимости справедлива оценка (4.17).

Применительно к вычислению внутренней ставки доходности дискретного инвестиционного проекта, который характеризуется чистым денежным потоком $(t_0,c_0),\ldots,(t_n,c_n)$, $f(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k(1+x)^{-t_k} \equiv NPV(x)$ – это чистая текущая стоимость, а x имеет смысл технической процентной ставки, используемой для дисконтирования.

Как мы отмечали, функция IRR используется для денежных потоков вида $(1,c_1),\ldots,(n,c_n)$. Если нужно найти IRR для потока $(0,c_0),(1,c_1),\ldots,(n,c_n)$, то следует сдвинуть моменты платежей на 1 и находить IRR потока $(1,c_0),\ldots,(n,c_{n+1})$

При использовании функций IRR и XIRR пользователь может задать начальное значение для итерационного процесса; если же соответствующий аргумент опущен, то по умолчанию в качестве начального берётся значение 0.1 (10%). Удвоением начального значения находится промежуток $[a;b]$, в концах которого функция $NPV(x)$ принимает значения разных знаков, после чего запускается описанный выше итерационный процесс. Он повторяется до тех пор, пока корень уравнения доходности не будет вычислен с точностью 0.00001%, но не более 20 раз. Если достичь этой цели нельзя, то Excel выдаёт сообщение об ошибке в виде #NUM!

Ясно, что для произвольного проекта нельзя гарантировать выполнение условий, при которых работает метод Ньютона. Поэтому использовать функции IRR и XIRR нужно с определённой осторожностью.

Рассмотрим, например, проект, который предполагает вложение сумм 1 и 44 в моменты 0 и 2 соответственно (всего 45), а взамен обещает получение сумм 30 и 16 в моменты 1 и 3 соответственно (всего 46). Как мы отметили в конце п.4.5.1, для этого проекта уравнение доходности имеет три корня, $i_1 \approx 2747.45\%$, $i_2 \approx -9.62\%$, $i_3 \approx -37.88\%$, так что внутренняя ставка дохода не определена. Между тем формула $=\mathrm{IRR}(\{-1,30,-44,16\})$ даёт значение -9.62%, т.е. корень i_2. Если явно указать начальное приближение для итерационного процесса Ньютона, то мы получим самые разные значения: формула

$=\mathrm{IRR}\left(\{-1{,}30,-44{,}16\},-0.9\right)$ даёт значение –37.83% (корень i_3), формула $=\mathrm{IRR}\left(\{-1{,}30,-44{,}16\},2\right)$ даёт значение 2747.45% (корень i_1), начальное значение 1.2 (120%) даёт $IRR \approx -9.62\%$ (корень i_2), но чуть бóльшее начальное значение 1.3 (130%) даёт $IRR \approx 2747.45\%$ (корень i_1).

4.6 Эффективность денежных фондов

4.6.1 Фонды

Традиционные инвестиционные проекты предполагают создание (или покупку, модернизацию и т.п.) некоторого производственного, торгового и т.п. объекта, что позволяет надеяться на устойчивый денежный поток от последующего производства товаров или услуг, а также на продажу в будущем этого физического объекта по высокой цене.

В современной «финансовой экономике» термин «инвестиции» всё чаще означает приобретение бумажных активов (например, акций). Их стоимость постоянно колеблется, а периоды роста сменяются периодами падения.

Посмотрим, например, на динамику индекса РТС Московской Биржи за 15 лет, с 1 сентября 2002 года по 1 сентября 2017 года (см. рис. 4.10; единица масштаба на оси абсцисс – один год). Этот индекс показывает относительное значение текущей суммарной рыночной стоимости в долларах США акций 50 крупнейших отечественных компаний. В качестве базы сравнения берётся суммарная стоимость акций этих компаний на 1 сентября 1995 (эта величина принята за 100). В течение дня индекс непрерывно меняется; мы взяли его значение на начало торгов утром.

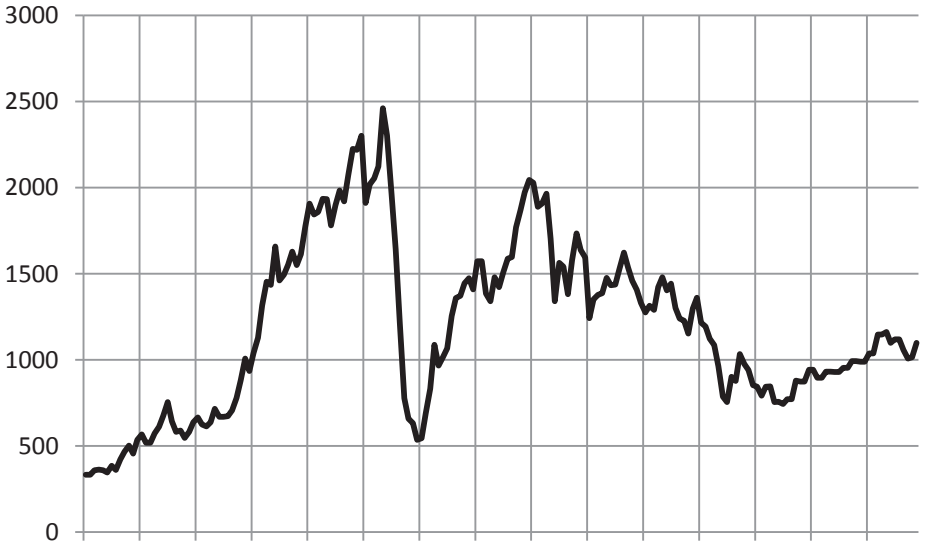


Рис. 4.10

Предположим, что 1 сентября 2002 года, когда индекс был 333.75, кто-то решил инвестировать в индекс РТС – подобная пассивная стратегия считается

безопасной и выгодной. К 1 сентября 2007 индекс РТС вырос до 1920.33. Таким образом, инвестиции в индекс РТС за этот пятилетний промежуток принесли в среднем

$$i = \left(\frac{1920.33}{333.75}\right)^{1/5} - 1 \approx 42\%$$

в год (в долларах США!).

Как показывает этот пример, спекулятивные инвестиции в акции, облигации, недвижимость и т.п. могут дать значительный доход, намного превосходящий доход от нормальной производственной деятельности. Неудивительно поэтому, что подобные возможности зарабатывания денег привлекают сотни миллионов мелких «инвесторов», которые думают, что они стали коллегами Уоррена Баффета и других акул Уолл-стрита.

Приобретая акции, облигации, недвижимость и подобные им активы, инвесторы рассчитывают не только на рост стоимости активов в будущем (capital appreciation [əˌpriːʃiˈeɪʃ(ə)n] – прирост рыночной стоимости капитала), что при продаже обеспечит спекулятивный доход (capital gain – реализованный прирост рыночной стоимости капитала), но и на доход от дивидендов, процентов и т.п. (dividend or interest income).

Важно подчеркнуть разницу между capital appreciation и capital gain:

- capital appreciation – это «виртуальный» доход, он может исчезнуть за мгновение, если цена соответствующего актива резко снизится. Соответственно, capital appreciation не облагается налогом.
- capital gain образуется, когда ваш capital appreciation превращается в реальные деньги, т.е. когда вы продаёте свой актив.

С другой стороны, хотя и capital gain, и interest income – это реальные деньги, их нужно различать, т.к. облагаются они налогом по разным ставкам.

Предположим, например, что в начале года инвестор приобрёл акцию за £100. В конце года по акции были выплачены дивиденды в размере £5, а цена акции составила £120.

В этой ситуации за год инвестор «заработал» £25. Эта сумма складывается из дивидендов $I = £5$ и прироста капитала $C = £20$. Соответственно общая доходность (total return) в размере $r = £25/£100 = 25\%$ годовых складывается из

- дивидендной доходности $i = £5/£100 = 5\%$ годовых,
- дохода от прироста рыночной стоимости капитала в размере $c = £20/£100 = 20\%$ годовых.

Ещё раз подчеркнём, что в рассматриваемой ситуации сумма $I = £5$ находится у инвестора в кармане, в то время как сумма $C = £20$ существует только на бумаге. Если через час на бирже произойдёт крах и цена акции упадёт до £70, то прирост капитала сменится потерей капитала в размере £30 (отрицательный «прирост» в размере –£30). Однако с процентным доходом ничего не случится (деньги уже в кармане).

Продолжим анализ индеса РТС. К 1 сентября 2012 года индекс РТС упал до 1386.66. Если бы кто-то решил инвестировать в индекс РТС 1 сентября 2007, то за 5 лет, к 1 сентября 2012 года, он потерял бы $\frac{1920.33-1386.66}{1920.33}\approx 33\%$ капитала. Это означает, что за пятилетие [1.09.2007;1.09.2012] среднегодовая доходность равна

$$i=\left(\frac{1386.66}{1920.33}\right)^{1/5}-1\approx -6\%\,.$$

К 1 сентября 2017 года индекс РТС упал до 1098.08. Это означает, что за следующее пятилетие, с 1.09.2012 по 1.09.2017, инвестиция в индекс РТС обеспечит среднегодовую доходность

$$i=\left(\frac{1098.08}{1386.66}\right)^{1/5}-1\approx -4.6\%\,.$$

В 2008 году вообще «прилетел Чёрный лебедь[1]» – 20 мая 2008 года при открытии торгов индекс РТС был 2487.98, а за пять месяцев, к утру 28 октября 2008 года, упал почти в 5 раз, до 551.96. Только за один день, 6 октября 2008 года, индекс РТС упал почти на 20% (1070.27 при открытии, 866.39 при закрытии).

Этот простой пример показывает, что инвесторы могут не только не получить ожидаемую прибыль, но и потерять основной капитал.

Однако многочисленные средства массовой информации, финансовые аналитики и т.д. убеждают инвесторов, что при «разумной инвестиционной политике», «в среднесрочной и долгосрочной перспективе», «использовании правильных моделей» они могут быть уверены в получении значительной прибыли. На самом деле в выигрыше всегда остаются только крупные финансовые спекулянты, настоящие организаторы и руководители современной «финансовой экономики».

У граждан современных государств с развитой экономикой нет выбора, «инвестировать» или нет свои деньги в бумажные «ценности». Действуя в интересах крупного финансового и промышленного капитала, государства через свои системы пенсионного обеспечения изымают средства граждан и (инвестируя эти средства в бумажные «ценности») просто перекачивают деньги трудящихся в карманы финансовых спекулянтов и владельцев крупнейших финансово-промышленных групп.

---

[1] Термин «Чёрный лебедь» ввёл Н.Н.Талеб для обозначения события, которое: (1) считалось абсолютно невозможным до того, как оно произошло, и по этой причине не фигурировало ни в каких сценариях будущего; (2) привело к чрезвычайным по важности последствиям. После появления очередного «Чёрного лебедя» специалисты в соответствующей области всегда находят ему объяснение и часто интерпретируют какие-то места в своих старых прогнозах как намёки на его реальную возможность и даже неизбежность.

Чтобы «облегчить» жизнь инвесторам, придуманы и специальные способы привлечения и последующего вложения их денег в акции, облигации и другие финансовые инструменты:

- mutual funds (взаимные фонды – в США; unit trust в Великобритании). Отечественный аналог западных mutual funds – это Паевые Инвестиционные Фонды (ПИФы).
- hedge funds (хедж-фонды)

и т.п.

В настоящее время (2017 г.) совокупные активы mutual funds из разных стран составляют около 40 триллионов долларов (примерно половина из этой суммы приходится на американские mutual funds), совокупные активы hedge funds из разных стран равны примерно 3.2 триллиона долларов (3/4 – американские хедж фонды).

Эти цифры полезно сопоставить с другими: совокупные активы пенсионных фондов равны примерно 40 триллионов долларов, страховых компаний – около 26 триллионов долларов (активы крупнейших, AXA, Allianz, Metlife примерно 1 триллион долларов у каждой).

4.6.2 Паевой инвестиционный фонд (ПИФ)

ПИФ – это инструмент коллективного инвестирования, который:

- объединяет средства большого числа мелких «инвесторов»,
- на эти деньги приобретает акции, облигации и другие бумажные «ценности»,
- управляет сформированным портфелем, продавая и покупая ценные бумаги.

Общий портфель ценных бумаг (и остатки денежных средств, которые ещё не потрачены на покупку ценных бумаг) делится на условные доли (паи) и каждый индивидуальный инвестор получает число паёв, пропорциональное его денежному взносу.

Общая денежная оценка активов ПИФа (стоимостью чистых активов – СЧА) постоянно меняется в зависимости от ситуации на рынке. Соответственно, постоянно меняется и цена пая, которая равна частному от деления СЧА на число паев.

Предполагается, что через какое-то время стоимость ценных бумаг, составляющих портфель, вырастет. Соответственно, вырастет и стоимость пая индивидуального инвестора. Если инвестор продаст свои паи, то сможет заработать деньги.

В Паевые Инвестиционные Фонды (ПИФы) люди несут деньги добровольно, считая, что *кто-то будет за них работать и зарабатывать деньги для них, а не для себя*. Однако зарабатывают ПИФы прежде всего для себя:

- управляющая компания (а также депозитарий, регистратор и аудитор) получают вознаграждение *вне зависимости* от того, растёт или падает СЧА (в общей сложности до 3-4% от среднегодовой СЧА в год).
- при продаже и погашении паёв управляющая компания удерживает комиссию (до 2% от стоимости пая).

Пример (без многих реальных деталей). ПИФ состоит из:

- ценных бумаг (например, облигаций), текущая стоимость которых равна 190 млн. руб.
- еще неизрасходованных денежных средств в размере 10 млн. руб.
- общее число паёв равно 10 тыс.

Соответственно, СЧА=190+10=200 млн. руб., а стоимость одного пая равна 200млн.руб./10тыс.паёв=20 тыс. руб.

Предположим, что вы решили войти в этот фонд и купить 500 паёв (по текущей цене 20 тыс.руб.), потратив 10 млн. руб. собственных средств. Теперь:

- СЧА=200млн.+10млн.=210 млн. (руб.)
- общее число паёв равно 10тыс.+500=10,500.

После этой операции стоимость одного пая равна

210млн.руб./10,500 паёв=20 тыс. руб.,

т.е. покупка новых паёв не меняет цену пая.

Допустим, что через некоторое время СЧА выросла на 10%, до 231 млн. руб. (хотя СЧА может и упасть, в примерах эту возможность не упоминают). Теперь стоимость одного пая стала 231млн.руб./10,500 паёв=22 тыс. руб., т.е. выросла также на 10%.

Предположим, что инвестор решил погасить 100 паёв и получить наличные в размере 100х22 тыс.руб.=2.2 млн.руб. Для оставшихся инвесторов:

- СЧА=231млн.-2.2млн.=228.8 млн. руб.
- общее число паёв равно 10,400.

Стоимость одного пая равна

228.8млн.руб./10,400тыс.паёв=22 тыс. руб.,

т.е. продажа части паёв не меняет цену оставшихся.

4.6.3 Эквивалентная по деньгам доходность

Рекламные объявления ПИФов в конце содержат обязательную стандартную фразу: «Стоимость инвестиционных паев может увеличиваться и уменьшаться, результаты инвестирования в прошлом не определяют доходы в будущем, государство не гарантирует доходность инвестиций в паевые инвестиционные фонды». Хотя «результаты инвестирования в прошлом не определяют доходы в будущем», в финансовой математике значительное внимание уделяется разработке методов оценки эффективности вложения средств в фонды акций и другие подобные фонды *в прошлом*.

Метод такой оценки и используемые характеристики зависят от ответа на следующие вопросы:

1. Какой информацией о деятельности фонда за анализируемый промежуток времени располагает аналитик?
2. Кто определял, когда и сколько денег вложить в фонд (когда и сколько денег изъять их фонда)?
3. Кто определял, какие ценные бумаги на эти деньги нужно приобретать (какие нужно продавать, чтобы получить наличные).

Чтобы разобраться в этой проблеме, рассмотрим два простых примера.

Пример 1. В момент $t_0 = 0$ инвестор А приобрёл акцию некоторой компании за 100 руб. В момент $t_1 = 1$ компания выплатила дивиденды в размере 6 руб. на акцию, а цена акции выросла до 110 руб. В этот момент инвестор А решил купить ещё одну акцию (стоимостью 110 руб.), так что чистый денежный поток (с учётом дивидендов) для инвестора в этот момент составил $M_1 = -104$ руб. В момент $t_2 = 2$ компания выплатила дивиденды в размере 3 руб. на акцию, а цена одной акции составила 115 руб. В этот момент инвестор А решил продать свой пакет из двух акций, так что в момент $t_2 = 2$ он получил 236 руб. (2 акции, каждая из которых принесла 3 руб. дивидендов и 115 руб. от продажи).

Применяя идеологию предыдущих разделов, мы можем отождествить этот спекулятивный проект с денежным потоком, диаграмма которого приведена на рис. 4.11. Соответственно для оценки эффективности вложения средств мы можем использовать введённые выше понятия, например, *IRR*. Уравнение ценности

$$-100 - 104(1+i)^{-1} + 236(1+i)^{-2} = 0 \Leftrightarrow 25i^2 + 76i - 8 = 0$$

имеет единственный корень $i \approx 0.101851$ на промежутке $i > -1$, который и будет искомой внутренней ставкой дохода: $IRR_A \approx 10.1851\%$.

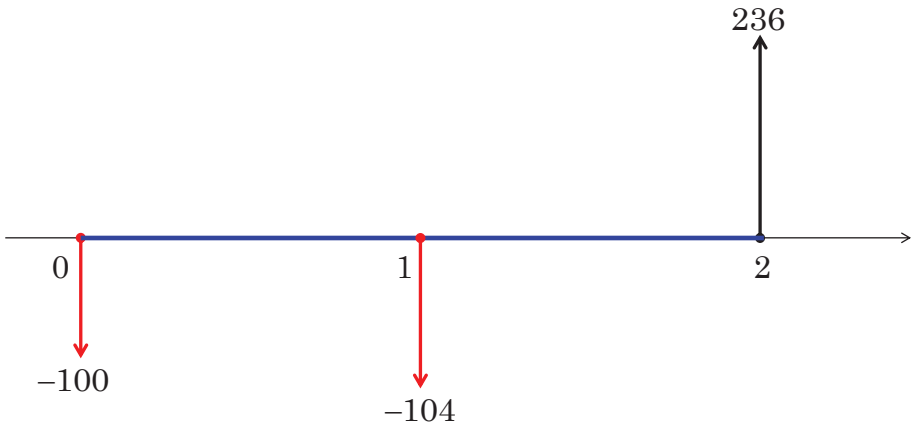


Рис. 4.11

Пример 2. Немного изменим Пример 1, рассмотрев инвестора B, который начал, как и инвестор A, с покупки одной акции в момент $t_0 = 0$, но в момент $t_1 = 1$ купил не одну, а 9 акций (потратив на это $9 \cdot 110 = 990$ руб.). В момент $t_2 = 2$, как и инвестор A, инвестор B продал свой пакет из 10 акций, выручив (вместе с дивидендами) $10 \times (3 + 115) = 1180$ руб. Диаграмма *чистого* денежного потока для этого проекта показана на рис. 4.12.

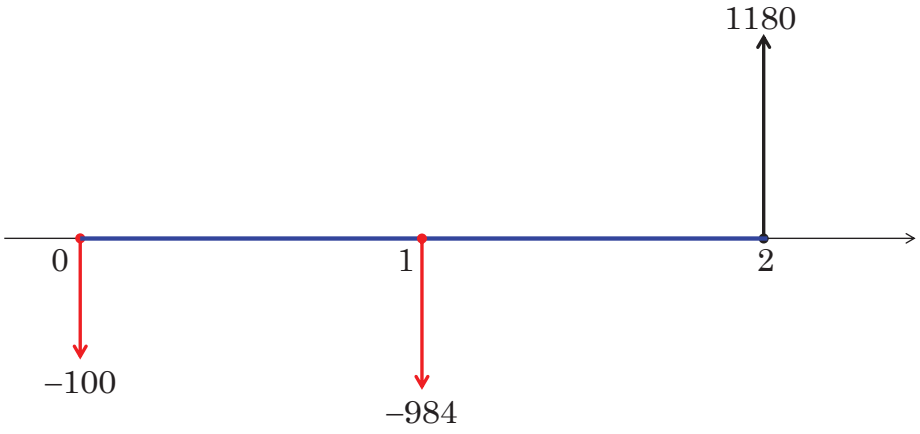


Рис. 4.12

В этом случае уравнение ценности примет вид:

$$-100 - 984(1+i)^{-1} + 1180(1+i)^{-2} = 0 \Leftrightarrow 25i^2 + 296i - 24 = 0.$$

Оно имеет единственный корень $i \approx 0.080533$ на промежутке $i > -1$, который и будет искомой внутренней ставкой дохода: $IRR_B \approx 8.0533\%$.

Таким образом, инвестор B заработал около 8% годовых, в то время как инвестор A – больше, около 10%. Причина, по которой инвестор B получил ме́ньшую доходность, заключается в следующем.

На промежутке (0;1), где оба инвестора действовали одинаково, покупка одной акции за 100 руб. принесла 6 руб. дивидендов + 10 руб. за счёт роста стоимости акции, т.е. 16 руб. Поэтому за первый год оба инвестора получили одинаковую доходность $r_1 = \dfrac{16}{100} = 16\%$ годовых.

Решив в момент 1 держать акцию, текущая цена которой уже 110 руб., инвестор фактически повторно инвестировал сумму 110 руб. ещё на один год. Это решение через год принесло ему 3 руб. дивидендов + 5 руб. за счёт роста стоимости акции, т.е. 8 руб. Если он купит ещё несколько акций по 110 руб., то получит пропорционально бо́льший доход. Поэтому за второй год оба инвестора

получили одинаковую доходность $r_2 = \frac{8}{110} \approx 7.2727\%$ годовых (эта доходность не зависит от числа акций).

Из этих численных данных мы ясно видим, что

1. Внутренняя доходность $IRR_A \approx 10.1851\%$, так же как и внутренняя доходность $IRR_B \approx 8.0533\%$, является некоторой средней величиной между $r_1 = 16\%$ и $r_2 \approx 7.2727\%$.

2. Как IRR_A, так и IRR_B гораздо ближе к r_2, чем к r_1. Это связано с тем, что в начале второго промежутка инвесторы имели в фонде больше денег, чем в начале первого. Поэтому доходность r_2, относящаяся ко второму промежутку времени, имеет бóльший вес, чем доходность r_1, относящаяся к первому промежутку времени.

3. Кроме того, $IRR_B < IRR_A$, т.е. IRR_B ближе к r_2, чем IRR_A. Иначе говоря, в IRR_B доходность r_2, относящаяся ко второму промежутку времени, имеет бóльший вес, чем в IRR_A. Это связано с тем, что на этом промежутке инвестор В вложил намного больше денег, чем инвестор А.

Этим качественным соображениям можно придать количественную форму. Для этого удобно рассмотреть не процентные ставки, а соответствующие коэффициенты накопления $k_A = 1 + IRR_A$, $k_B = 1 + IRR_B$, $k_1 = 1 + r_1$, $k_2 = 1 + r_2$, и записать k_A и k_B как взвешенное среднее геометрическое $k_1^a k_2^{1-a}$ коэффициентов накопления k_1, k_2. Несложные рачёты показывают, что $k_A \approx k_1^{0.34} \cdot k_2^{0.66}$, $k_B \approx k_1^{0.09} \cdot k_2^{0.91}$.

Как мы и отметили выше,

1. в величинах k_A и k_B доходность r_2, относящаяся ко второму промежутку времени, имеет бóльший вес, чем доходность r_1, относящаяся к первому промежутку времени: 0.66 против 0.34 для k_A и 0.91 против 0.09 для k_B. Это связано с тем, что в начале второго промежутка инвесторы имели в фонде больше денег, чем в начале первого.

2. в величине $k_B = 1 + IRR_B$ доходность r_2, относящаяся ко второму промежутку времени, имеет бóльший вес, чем в величине $k_A = 1 + IRR_A$ (0.91 против 0.66). Это связано с тем, что на этом промежутке инвестор В вложил намного больше денег, чем инвестор А.

В силу вышеизложенного при оценке эффективности инвестиций в фонды внутреннюю ставку доходности *IRR* называют money weighted rate of return (MWRR). На русский язык этот термин можно перевести как *«эквивалентная по*

деньгам (или по финансовому результату) *средняя эффективная годовая ставка* (или *норма*) *дохода»* или короче, «*эквивалентная по деньгам доходность*»[2]. В финансовой литературе набор из четырёх букв *MWRR* используется не только как термин, но и как символ, обозначающий внутреннюю ставку доходности в ситуациях, аналогичных рассмотренным выше.

Поскольку решение о том, когда и сколько денег вложить в фонд (изъять из фонда), какие акции приобретать (или продавать), принимали сами инвесторы, *MWRR* является вполне разумной мерой эффективности инвестиционной деятельности этих *индивидуальных* инвесторов.

Рассмотрим теперь общую ситуацию, когда мы хотим проанализировать доходность некоторого фонда на промежутке времени $[0;T]$ длиной T. В начальный момент времени $t_0 \equiv 0$ стоимость фонда была равна $F(0)$. Затем в некоторые моменты $t_1,\ldots,t_N \in (0;T)$ в фонд были дополнительно инвестированы суммы $M(t_1),\ldots,M(t_N)$ соответственно (мы будем считаем, что $t_1 < \ldots < t_N$). Поступление суммы $M(t_n)$ в момент t_n приводит к скачкобразному изменению стоимости фонда от $F(t_n - 0)$ до $F(t_n + 0) = F(t_n - 0) + M(t_n)$. Некоторые или все из этих сумм могут быть отрицательными, что означает реализацию активов и изъятие денег из фонда в соответствующие моменты времени. В результате этих инвестиций и деятельности лица, управлявшего активами фонда, в конце анализируемого промежутка времени стоимость фонда стала $F(T)$.

Поток $(t_n; M(t_n))_{1 \le n \le N}$ принято называть чистым потоком «новых денег». Для страховой компании:

«*новые деньги*» = *полученные премии* − *выплаты по страховым случаям* − *расходы* − *налоги*.

Для пенсионного фонда:

«*новые деньги*» = *взносы в фонд* − *выплаты пенсий* − *расходы* − *налоги*.

Алгебраическая сумма «новых денег», $M \equiv \sum_{n=1}^{N} M(t_n)$, показывает превышение суммарных поступлений в фонд за анализируемый промежуток

---

[2] В отечественной литературе используют термины «норма доходности, взвешенная по деньгам», «доходность, взвешенная по деньгам» и т.п. Эти термины, как и многие другие, появились в результате прямого «перевода» соответствующего английского термина. При этом центральным было слово «weight» – вес. Но это слово имеет и другие значения: «система единиц веса», «важность, значимость» и т.д. В данном контексте лучше всего понимать это слово следующим образом: «attribute importance or value to» (Oxford Dictionary), «If you give something or someone weight, you consider them to be very important or influential in a particular situation» (Collins Cobuild). Наш термин, без сомнения, точнее передаёт суть дела.

времени над суммарными выплатами за тот же промежуток. Кроме «новых денег» в фонд поступают дивиденды по акциям и купонные выплаты по облигациям, которыми владеет фонд, а также проценты на денежную часть фонда. Общую алгебраическую сумму этих денежных поступлений за анализируемый промежуток времени мы обозначим I. Разница

$$C = F(T) - \big(F(0) + M + I\big)$$

между стоимостью фонда в конце промежутка $[0,T]$, $F(T)$, и суммой начальной стоимости фонда и всех поступлений в фонд, $F(0) + M + I$, обеспечивается изменением рыночной стоимости активов (capital appreciation).

Начальную стоимость фонда $F(0)$ можно рассматривать как инвестирование суммы $F(0)$ в момент $t_0 \equiv 0$, конечную – как получение инвестором суммы $F(T)$ в конечный момент $t_{N+1} \equiv T$, а сам фонд – как денежный поток

$$\big(0, F(0)\big), \big(t_1, M(t_1)\big), \ldots, \big(t_N, M(t_N)\big), \big(T, -F(T)\big). \tag{4.18}$$

Приводя все суммы к моменту 0, мы получим уравнение ценности для этого денежного потока в виде:

$$F(0) + \sum_{n=1}^{N} M(t_n)(1+i)^{-t_n} = F(T)(1+i)^{-T}. \tag{4.19}$$

Если это уравнение имеет единственный корень на промежутке $-1 < i < +\infty$, то в контексте оценки доходности фондов он (по определению) называется *MWRR* (а не *IRR*, как для произвольного инвестиционного проекта). В противном случае эквивалентная по деньгам доходность не определена, что является существенным недостатком этой меры эффективности работы фонда. Как мы уже отмечали, в финансовой литературе набор из четырёх букв *MWRR* часто понимается как один символ, обозначающий внутреннюю ставку доходности для проекта (4.18).

Для денежных фондов особенно естественно моделировать поток поток «новых денег» (или его часть) непрерывным потоком с некоторой интенсивностью $\rho(t)$. В этом случае (4.19) примет вид:

$$F(0) + \sum_{n} M(t_n)(1+i)^{-t_n} + \int_0^T \rho(t)(1+i)^{-t} = F(T)(1+i)^{-T}.$$

Отметим, что определение *MWRR* не использует информацию о динамике стоимости фонда на анализируемом промежутке $[0,T]$. Вид функции $F(t)$ и даже отдельные её значения внутри этого промежутка нам совершенно безразличны.

4.6.4 Средняя по времени доходность

Ещё раз подчеркнём, что эквивалентная по деньгам доходность является вполне разумной мерой эффективности инвестиционной деятельности только для инвесторов, которые сами принимают решения о том, когда и сколько денег вложить в фонд (изъять из фонда), какие акции приобретать (или продавать), т.е. фактически для *индивидуальных* инвесторов.

Однако для таких фондов как, например, ПИФы это условие не выполнено: управляющий фондом заранее не знает, когда и в каком объёме в фонд поступят новые средства, а также когда и сколько денег пайщики захотят изъять из фонда. Он определяет только виды активов, в которые нужно инвестировать.

Чтобы понять, каким образом мы могли бы разумно оценить эффективность работы фонда в этой ситуации, вернёмся к нашей общей схеме анализа эффективности работы фонда на промежутке $[0,T]$.

Пусть $\tau_1 = t_1 - t_0, \ldots, \tau_{N+1} = t_{N+1} - t_N$ – длины промежутков $\left[t_0, t_1\right], \ldots, \left[t_N, t_{N+1}\right]$, так что $T = \tau_1 + \ldots + \tau_{N+1}$.

В начале промежутка $\left[t_{n-1} + 0; t_n - 0\right]$ стоимость фонда была $F\left(t_{n-1} + 0\right)$, а в конце стала $F\left(t_n - 0\right)$, что означает доход за счёт изменения стоимости фонда в размере $F\left(t_n - 0\right) - F\left(t_{n-1} + 0\right)$. Поэтому деятельность управляющего обеспечила рост стоимости фонда за этот промежуток времени в $k_n^{\text{эфф}} = \dfrac{F\left(t_n - 0\right)}{F\left(t_{n-1} + 0\right)}$ раз, т.е. эффективную доходность $r_n^{\text{эфф}} = \dfrac{F\left(t_n - 0\right) - F\left(t_{n-1} + 0\right)}{F\left(t_{n-1} + 0\right)} = k_n^{\text{эфф}} - 1$.

С равным успехом для измерения доходности фонда на отрезке $\left[t_{n-1} + 0; t_n - 0\right]$ можно использовать:

- эквивалентный годовой коэффициент роста $k_n \equiv k_n^{\text{экв-год}}$, соответствующий коэффициенту роста $k_n^{\text{эфф}}$: $k_n = \left(k_n^{\text{эфф}}\right)^{1/\tau_n}$,
- эквивалентную годовую процентную ставку $r_n \equiv r_n^{\text{экв-год}} = k_n - 1$,
- эквивалентную интенсивность процентов в год $\delta_n \equiv \delta_n^{\text{экв-год}} = \ln k_n$.

В свою очередь, в терминах этих величин можно выразить эффективный коэффициент роста за промежуток $\left[t_{n-1} + 0; t_n - 0\right]$:

$$k_n^{\text{эфф}} = (k_n)^{\tau_n} = (1 + r_n)^{\tau_n} = e^{\delta_n \tau_n}.$$

Эффективные доходности $r_1^{\text{эфф}}, \ldots, r_{N+1}^{\text{эфф}}$ (или, что равносильно, эффективные коэффициенты роста $k_1^{\text{эфф}}, \ldots, k_{N+1}^{\text{эфф}}$) показывают эффективность работы менеджеров фонда за промежутки времени $\left[t_0; t_1\right], \ldots, \left[t_N; t_{N+1}\right]$. Поэтому,

если бы в момент $t_0 \equiv 0$ в фонд была внесена сумма 1, то через время T, к моменту $t_{N+1} \equiv T$, она выросла бы до $k_1^{\text{эфф}} \ldots k_{N+1}^{\text{эфф}} = \left(1 + r_1^{\text{эфф}}\right) \ldots \left(1 + r_{N+1}^{\text{эфф}}\right)$.

Инвестиции в размере 1 в момент $t_0 = 0$, которая даёт сумму $k_1^{\text{эфф}} \ldots k_{N+1}^{\text{эфф}}$ в момент $t_N = t_0 + T$, соответствует эффективная годовая доходность r_{TW}, которая находится из равенства:

$$(1 + r_{TW})^T = \left(1 + r_1^{\text{эфф}}\right) \ldots \left(1 + r_{N+1}^{\text{эфф}}\right) \Leftrightarrow 1 + r_{TW} = \left(\left(1 + r_1^{\text{эфф}}\right) \ldots \left(1 + r_{N+1}^{\text{эфф}}\right)\right)^{\frac{1}{T}}. \qquad (4.20)$$

Иначе говоря, r_{TW} – это такая годовая эффективная процентная ставка, что гипотетический банковский счёт, начисляющий проценты по этой ставке в соответствии с принципом сложных процентов, даёт на анализируемом промежутке времени тот же *итоговый* финансовый результат, что и рассматриваемый фонд. Фактически r_{TW} – это внутренняя ставка доходности для этого проекта.

Величина r_{TW} является обобщённой характеристикой качества работы управляющей компании по управлению активами фонда на всём отрезке $[0;T]$, которая усредняет колебания доходностей на подинтервалах и учитывает длину периода инвестиций. По этой причине её называют time-weighted rate of return (*TWRR*; отсюда и нижний индекс *TW*). В финансовой литературе вместо r_{TW} часто используют символ *TWRR* (понимая этот набор из четырёх букв именно как один символ).

На русский язык термин «time-weighted rate of return» можно перевести как «*средняя* (или усреднённая) *по времени эффективная* (*годовая*) *ставка* (или *норма*) *дохода*» или короче, «*средняя по времени доходность*». Можно было бы также сказать «*эквивалентная по времени эффективная годовая доходность*». В отечественной литературе используют термины «норма прибыли, взвешенная во времени», «норма доходности, взвешенная по фактору времени» и т.п. Наш термин, без сомнения, точнее передаёт суть дела (см. примечание к термину MWRR).

Если для измерения доходности фонда на отрезках $\left[t_{n-1} + 0; t_n - 0\right]$ использовать соответствующие годовые коэффициенты роста $k_n = \left(k_n^{\text{эфф}}\right)^{1/\tau_n}$, а $1 + r_{TW} \equiv k_{TW}$ интерпретировать как средний по времени коэффициент годового роста, то соотношение (4.20) примет вид:

$$k_{TW} = \left(k_1^{\tau_1} \ldots k_{N+1}^{\tau_{N+1}}\right)^{1/(\tau_1 + \ldots + \tau_{N+1})}. \qquad (4.21)$$

Таким образом, средний по времени коэффициент годового роста k_{TW} является *взвешенным* средним геометрическим *эквивалентных* коэффициентов *годового* роста $k_1, \ldots, k_{N+1}$ (не *эффективных* коэффициентов роста $k_1^{\text{эфф}}, \ldots, k_{N+1}^{\text{эфф}}$!) для всех промежутков, где средства фонда росли/убывали только из-за инвестиционной

деятельности управляющих фонда. *Веса пропорциональны длинам соответствующих промежутков времени.*

Если для измерения доходности фонда на отрезках $\left[t_{n-1}+0;t_n-0\right]$ использовать соответствующие интенсивности процентов в год $\delta_n \equiv \ln k_n = \ln k_n^{\text{эфф}} / \tau_n$, то соотношение (4.20) примет вид:

$$\delta_{TW} = \frac{\delta_1 \cdot \tau_1 + \ldots + \delta_{N+1} \cdot \tau_{N+1}}{\tau_1 + \ldots + \tau_{N+1}}, \qquad (4.22)$$

где $\delta_{TW} = \ln(1 + r_{TW})$ – интенсивность процентов, соответствующая r_{TW}. Таким образом, интенсивность процентов δ_{TW} является взвешенным средним арифметическим интенсивностей $\delta_1,\ldots,\delta_{N+1}$, причём веса пропорциональны длинам соответствующих промежутков времени.

Соотношению (4.22) можно придать другую форму, если мы предположим, что на каждом промежутке времени времени от $t_{n-1}+0$ до t_n-0 стоимость фонда изменилась с постоянной интенсивностью $\delta_n = \dfrac{F'(t)}{F(t)}$ или, что то же самое, на промежутке времени времени от $t_{n-1}+0$ до t_n-0 стоимость фонда изменялась по экспоненциальному закону $F(t) = F\left(t_{n-1}+0\right) \cdot e^{\delta_n (t-t_{n-1})}$.

Если рассмотреть мгновенную интенсивость изменения стоимости фонда $\delta(t) = \dfrac{F'(t)}{F(t)}$ на промежутке $\left[0,T\right]$, то функция $\delta(t)$ будет кусочно-постоянной: на интервале $\left(t_{n-1};t_n\right)$ её значение равно δ_n (в граничных точках эта функция не определена). Поэтому $\int_0^T \delta(t)dt = \delta_1 \cdot \tau_1 + \ldots + \delta_{N+1} \cdot \tau_{N+1}$, а поскольку $\tau_1 + \ldots + \tau_{N+1} = T$, формулу (4.22) можно переписать в виде:

$$\delta_{TW} = \frac{1}{T}\int_0^T \delta(t)dt, \qquad (4.23)$$

так что δ_{TW} является обычным средним по времени значением функции $\delta(t)$ на промежутке $\left[0,T\right]$ (на котором мы анализируем деятельность фонда).

Соотношения (4.21), (4.22) и (4.23) являются дополнительными аргументами в пользу нашего перевода термина «time-weighted rate of return» как «*средняя* по времени ставка дохода».

Чтобы лучше понять смысл понятия TWRR, вернёмся к Примерам 1 и 2, рассмотренным выше, и будем считать, что в них речь идёт о ПИФах. В обоих случаях как на промежутке (0;1), так и на промежутке (1;2) эффективные коэффициенты роста были одинаковы: $k_1^{\text{эфф}} = \dfrac{116}{100}$, $k_2^{\text{эфф}} = \dfrac{118}{110}$. Поэтому в обоих примерах $k_{TW} = \sqrt{k_1^{\text{эфф}} k_2^{\text{эфф}}} = \sqrt{\dfrac{116}{100} \cdot \dfrac{118}{110}} \approx 1.11551$, т.е. в обоих примерах

$TWRR \approx 11.551\%$. Совпадение средних по времени доходностей не удивительно – поскольку в обоих примерах управлющие инвестировали в один и тот же актив, эффективность их работы должна быть одной и той же в обоих случаях.

4.6.5 Формула Харди для MWRR

Доходность фонда в реальных ситуациях измеряется процентами, т.е. MWRR можно считать малой величиной. Поэтому $(1+MWRR)^a \approx 1+MWRR\cdot a$, так что равенство

$$F(0)(1+i)^T + \sum_{n=1}^{N} M(t_n)(1+i)^{T-t_n} = F(T),$$

которое определяет MWRR, примет вид:

$$F(0)\cdot(1+Ti) + \sum_{n=1}^{N} M(t_n)\big(1+(T-t_n)i\big) \approx F(T)$$

$$\Updownarrow$$

$$F(0) + F(0)Ti + M + M\big(T-t_{cp.}\big)i \approx F(T),$$

где:

- $M = \sum_n M(t_n)$ – общая сумма «новых денег»,
- $t_{cp.} = \sum_n w_n t_n$ – средний взвешенный момент поступления «новых денег» с весами $w_n = M(t_n)/M$, пропорциональными размерам поступивших сумм.

Из последнего равенства мы получим следующее приближение для $i = MWRR$:

$$i \approx \frac{F(T) - F(0) - M}{F(0)\cdot T + M\big(T - t_{cp.}\big)}.$$

Естественно считать, что «новые деньги» поступают в фонд равномерно. Это означает, что $t_{cp.} \approx T/2$, и потому последнее равенство примет вид:

$$i \approx \frac{1}{T}\frac{F(T) - F(0) - M}{F(0) + M/2}$$

Этой формуле можно придать другую форму, если отметить, что $M = F(T) - F(0) - C - I$, где I – доход от процентов и дивидендов за время T, а C – изменение рыночной стоимости активов (capital appreciation). В результате мы получим следующее приближение:

$$i \approx \frac{1}{T}\frac{2\big(I+C\big)}{F(T) + F(0) - \big(I+C\big)}.$$

В частности, при $T = 1$ мы имеем:

$$i \approx \frac{2\big(I+C\big)}{F(T) + F(0) - \big(I+C\big)}. \qquad (4.24)$$

Это приближение для MWRR было получено G.F.Hardy в 1890 году. Результат был представлен в форме доклада, прочитанного в Актуарном Обществе Эдинбурга 4 декабря 1890 и 30 лет спустя опубликован в *Transactions of Faculty of Actuaries*, 1921, v. 8, No.74, pp.57-86 («формуле Харди» посвящены стр. 61, 62 этой статьи).

Удобно дробь в правой части формулы Харди (4.24) представить как сумму дробей

$$r_{\text{interest}} = \frac{2I}{F(T)+F(0)-(I+C)}, \qquad r_{\text{capital}} = \frac{2C}{F(T)+F(0)-(I+C)}$$

Первая дробь характеризует годовую доходность за счёт дивидендов и процентов, вторая – за счёт прироста рыночной стоимости активов.

Пример (Пример 5.6.1 из книги J.J. McCutcheon, W.F. Scott. *An Introduction to the Mathematics of Finance*. Oxford, Butterworth-Heinemann Ltd, 1986). Общество взаимопомощи, которое освобождено от налогов, имело следующий баланс за 1982 год:

	£		£
Фонды на 1.01.1982	501050	Страховые выплаты	31459
Инвестиционный доход	41838	Расходы	5541
Доход от взносов	19250	Фонды на 31.12.1982	525138
	562138		562138

Оцените доход за год, полученный обществом на его капитал в 1982 году.

Решение. В этом примере: 1 января 1982 – это начальный момент $t_0 = 0$, 31 декабря 1982 – это конечный момент T. Если считать, что 1 год – это единица времени, то $T = 1$.

Далее,

- $F(0) = 501050$, $F(1) = 525138$,
- нетто-сумма «новых денег»
$$M = 19250 - 31459 - 5541 = -17750,$$
- доход от процентов $I = 41838$,
- доход от роста капитала отсутствует, т.е. $C = 0$.

Поэтому доходность за год можно приближённо оценить как

$$i \approx \frac{2 \times 41838}{501050 + 525138 - 41838} \approx 8.5\%.$$

Пример (Из статьи W.F.Scott. A generalisation of G.F.Hardy's formula for the yield on a fund. *Transactions of Faculty of Actuaries*, v.34 (1973-1975), No.246, pp. 450-454). В таблице показан счёт доходов[3] страховой компании за некоторый год:

	£m		£m
Фонды на 1 января	100	Страховые выплаты	8
Поступление премий	15	Расходы	2
Доход от процентов	6	Налоги	1
Прирост капитала	3	Фонды на 31 декабря	113
	124		124

Оцените доходность страховой компании за этот год.

Решение. Общая доходность фонда примерно равна

$$i \approx \frac{2\times(6+3)}{113+100-(6+3)} \approx 8.82\%.$$

При этом проценты принесли компании примерно

$$r_{\text{interest}} \approx \frac{2\times 6}{113+100-(6+3)} \approx 5.88\%$$

годовых, а прирост рыночной стоимости активов за год составил примерно

$$r_{\text{capital}} \approx \frac{2\times 3}{113+100-(6+3)} \approx 2.94\%.$$

4.7 Задачи

Задача 4.1 (CT1, 7 October 2010, Problem 6) 1 января 2001 года правительство некоторой страны купило 200 миллионов акций одного банка, заплатив общую цену £2,000m. Эти акции на протяжении трёх лет не приносили никаких дивидендов. 30 июня 2004 по акциям были выплачены дивиденды из расчёта 10 пенсов за акцию. 31 декабря 2004 были выплачены дивиденды по 20 пенсов за акцию. В эти же дни дивиденды выплачивались каждый год, вплоть до конца 2009, причём каждый год дивиденды росли на 10% по сравнению с предыдущим годом. 1 января 2010 этот пакет акций был продан по рыночной цене £3,500m.

(i) Используя эффективную годовую ставку 8%, вычислите чистую стоимость на 1 января 2001 года этой инвестиции для правительства.

---

[3] *revenue account* (US) =*profit and loss* (P&L) *account* (UK) – an account in the books of an organization to which incomes and gains are credited and expenses and losses debited, so as to show the net profit or loss over a given period; a financial statement showing a company's net profit or loss in a given period (Oxford Dictionary)

(ii) Используя эффективную годовую ставку 8%, вычислите накопленный доход для правительства от этой инвестиции на день продажи акций.

Решение. Схема проекта показана на рис. 4.13 (мы измеряем денежные суммы в миллионах фунтов, а 1 января 2001 года рассматриваем в качестве начального момента времени $t_0 = 0$, так что, например, 30 июня 2004 – это $t = 3.5$).

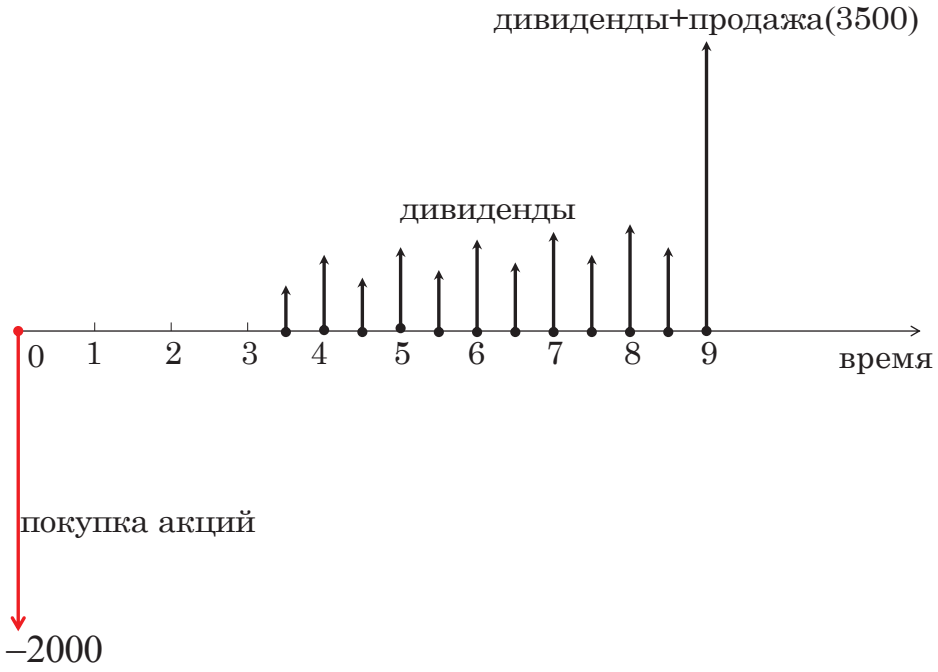


Рис. 4.13

(i) 30 июня 2004 (момент $t = 3.5$) общая сумма выплаченных дивидендов равна £20m. 30 июня дивиденды выплачивались ещё 5 раз, в моменты 4.5, 5.5, 6.5, 7.5, 8.5. Общая сумма выплаченных дивидендов в момент $3.5 + k$ равна (в миллионах фунтов) $20 \cdot 1.1^k$, $0 \le k \le 5$. Приведённая стоимость этого денежного потока в момент $t_0 = 0$ равна

$$\sum_{k=0}^{5} 20 \cdot 1.1^k \cdot 1.08^{-3.5-k} = 20 \cdot 1.08^{-3.5} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1.1}{1.08}\right)^6}{1 - \left(\frac{1.1}{1.08}\right)} \approx 96.0138.$$

31 декабря 2004 – это $t = 4$. В этот день общая сумма выплаченных дивидендов равна £40m. 31 декабря дивиденды выплачивались ещё 5 раз, в моменты 5, 6, 7, 8, 9. Общая сумма выплаченных дивидендов в момент $4 + k$ равна (в миллионах фунтов) $40 \cdot 1.1^k$, $0 \le k \le 5$. Приведённая стоимость этого денежного потока в момент $t_0 = 0$ равна

$$\sum_{k=0}^{5} 40 \cdot 1.1^k \cdot 1.08^{-4-k} = 20 \cdot 1.08^{-4} \cdot \frac{1-\left(\frac{1.1}{1.08}\right)^6}{1-\left(\frac{1.1}{1.08}\right)} \approx 184.7786.$$

Сумма £3,500m, вырученная 1 января 2010 (момент t=9) от продажи пакета акций, имеет текущую стоимость в момент $t_0 = 0$, равную $3{,}500 \cdot 1.08^{-9} \approx 1750.871$.

С учётом £2,000m, израсходованных 1 января 2001 года на покупку акций, для чистой текущей стоимости проекта в момент $t_0 = 0$ имеем значение £31.664 m.

(ii) Чтобы найти доход для правительства от этой инвестиции на день продажи акций, нужно стоимость проекта на 1 января 2001 года (т.е. £31.664m) привести к 1 января 2001 года, т.е. умножить на 1.08^9. В результате мы получим сумму £63.29612m.

Задача 4.2 (CT1, 21 April 2009, Problem 6) Девять месяцев тому назад пенсионный фонд купил офисное здание за £5 миллионов. Фонд предполагает через два месяца потратить ещё £900,000 на обновление здания. Одна компания согласилась арендовать здание через 6 месяцев от настоящего момента. Договор аренды предполагает, что эта компания арендует здание на 15 лет, а по истечении срока аренды купит его за £6 миллионов. Кроме того, было условлено, что арендная плата будет вноситься в начале каждого квартала и каждые 3 года будет увеличиваться, исходя из сложной ставки 4% в год. Исходная арендная плата была установлена в размере £800,000 в год, причём первая выплата должна быть сделана в день начала аренды. Вычислите чистую приведённую стоимость этого проекта для пенсионного фонда на день покупки офисного здания, исходя из годовой эффективной ставки 8%.

Решение. Рассмотрим £1m в качестве новой денежной единицы. Время, как обычно, будем измерять годами, а день покупки здания выберем в качестве начального момента $t_0 = 0$. Для пенсионного фонда проект характеризуется денежным потоком, который состоит из двух отрицательных платежей (платы за здание и расходов на его ремонт):

1. $c_1 = -5$ в момент $t_1 = 0$;
2. $c_2 = -0.9$ в момент $t_2 = 11/12$,

и серии положительных (арендной платы и суммы, которая будет выручена при продаже здания). Схема проекта показана на рис. 4.14.

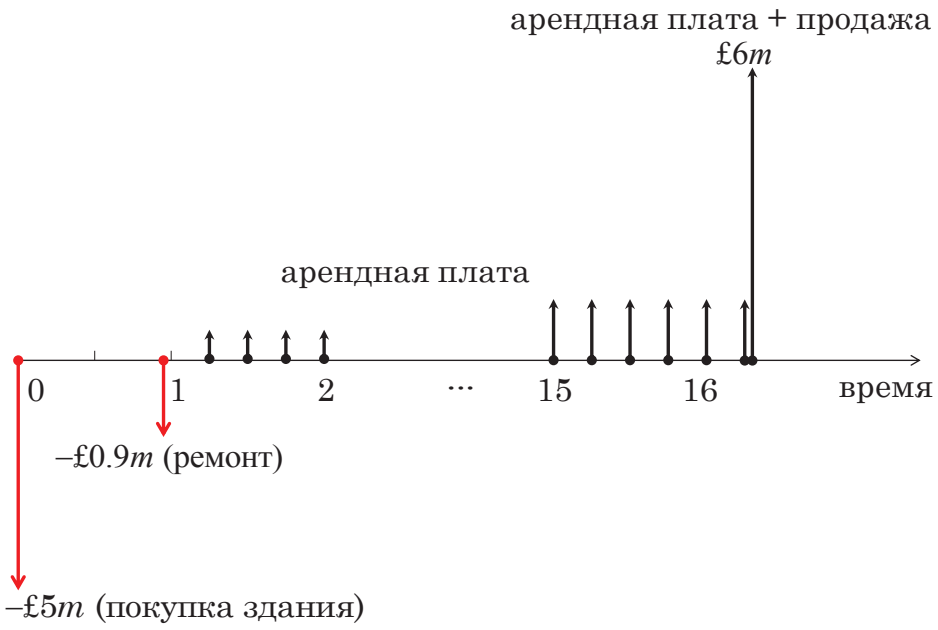


Рис. 4.14

Если $v = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{1.08}$ – коэффициент дисконтирования, то текущая стоимость отрицательных платежей равна

$$a_1 = c_1 v^{t_1} + c_2 v^{t_2} = -5v^0 - 0.9v^{\frac{11}{12}} = -5.838695025.$$

Теперь рассмотрим положительные платежи. Компания займёт здание через 15 месяцев после даты $t_0 = 0$ его приобретения пенсионным фондом, т.е. в момент $t_0' = \dfrac{15}{12} = 1.25$, и купит его у фонда спустя ещё 15 лет, т.е. в момент $t_s = 16.25$. Текущая стоимость суммы 6, которая будет выручена при продаже здания, равна $6v^{16.25} = 1.717968608$.

Немного сложнее будет разобраться с арендными платежами, которые образуют нестандартную ренту, выплачиваемую с момента $t_0' = \dfrac{15}{12}$. Пятнадцатилетний срок этой ренты удобно разбить на 5 трёхлетних периодов, на протяжении каждого из которых арендная плата постоянна:

1. с момента $t_0' = 1.25$ (включительно) до момента $t_1' = t_0' + 3 = 4.25$ (исключая) годовая арендная плата равна $p_1 = 0.8$;
2. с момента $t_1' = 3.25$ (включительно) до момента $t_2' = t_1' + 3 = 7.25$ (исключая) годовая арендная плата равна $p_2 = 0.8 \cdot 1.04^3$;

3. с момента $t_2' = 7.25$ (включительно) до момента $t_3' = t_2' + 3 = 10.25$ (исключая) годовая арендная плата равна $p_3 = 0.8 \cdot 1.04^6$;
4. с момента $t_3' = 10.25$ (включительно) до момента $t_4' = t_3' + 3 = 13.25$ (исключая) годовая арендная плата равна $p_4 = 0.8 \cdot 1.04^9$;
5. с момента $t_4' = 13.25$ (включительно) до момента $t_5' = t_4' + 3 = 16.25$ (исключая) годовая арендная плата равна $p_5 = 0.8 \cdot 1.04^{12}$.

На протяжении каждого из этих периодов арендные платежи образуют стандартную упреждающую ренту, выплачиваемую ежеквартально. Для k-го периода стоимость этой ренты, приведённая к моменту его начала, равна

$$p_k \ddot{a}_{\overline{4}|}^{(4)} = p_k \frac{1 - v^3}{4\left(1 - v^{\frac{1}{4}}\right)}.$$

Если мы заменим выплатой одной этой суммы (в начале соответствующего периода) все арендные платежи на протяжении периода, то поток арендных выплат будет состоять из 5 выплат. Поэтому его текущая стоимость равна

$$0.2 \frac{1 - v^3}{1 - v^{0.25}} v^{1.25} \left(1 + 1.04^3 v^3 + 1.04^6 v^6 + 1.04^9 v^9 + 1.04^{12} v^{12}\right) \approx 7.936165561,$$

текущая стоимость всех положительных платежей равна 9.654134168, а текущая стоимость всего проекта равна 3.815439143 (условных денежных единиц) или, в абсолютных цифрах, £3,815,439.14.

Задача 4.3 (CT1, 27 April 2010, Problem 9) Компания реализует новый проект, который требует стартовых инвестиций в размере £5m и ещё £3m через три месяца. Ожидается, что начиная с начала третьего года на протяжении 15 лет эти инвестиции будут приносить непрывный денежный поток в размере £1.7m в год. В конце этого 15-летнего срока поступление денег от проекта прекратится. При эффективной годовой процентной ставке i=10% подсчитайте:

(i) чистую текущую стоимость проекта;

(ii) дисконтированный срок окупаемости.

Банк предлагает компании взять деньги, которые ей нужны для проекта, в долг под 10% годовых. Эти деньги будут выдаваться по мере необходимости, а заём может быть погашен в любой момент. После выплаты долга компания может зарабатывать на свободные средства 7% в год.

(iii) Вычислите итоговый доход компании в конце семнадцатого года.

Решение. Схема проекта показана на рис. 4.15 (мы принимаем £1m в качестве единицы измерения денежных сумм).

(i) По определению чистая текущая стоимость проекта равна

$$-5 - 3v^{1/4} + 1.7 \int_2^{17} e^{-\delta t} dt = -5 - 3v^{1/4} + \frac{1.7}{\delta} \cdot \left(v^2 - v^{17}\right) \approx 3.282690$$

или, в абсолютных цифрах, примерно £3.283m.

Отметим, что поток поступлений от проекта можно рассматривать как отложенную на 2 года непрывную ренту, выплачиваемую на протяжении 15 лет с постоянной скоростью $\rho = 1.7$. Поэтому текущую стоимость непрерывной компоненты можно подсчитать и как $1.7v^2\bar{a}_{\overline{15}|}$. Это позволяет применить готовую формулу и сразу даёт выражение $\dfrac{1.7}{\delta}\left(v^2 - v^{17}\right)$.

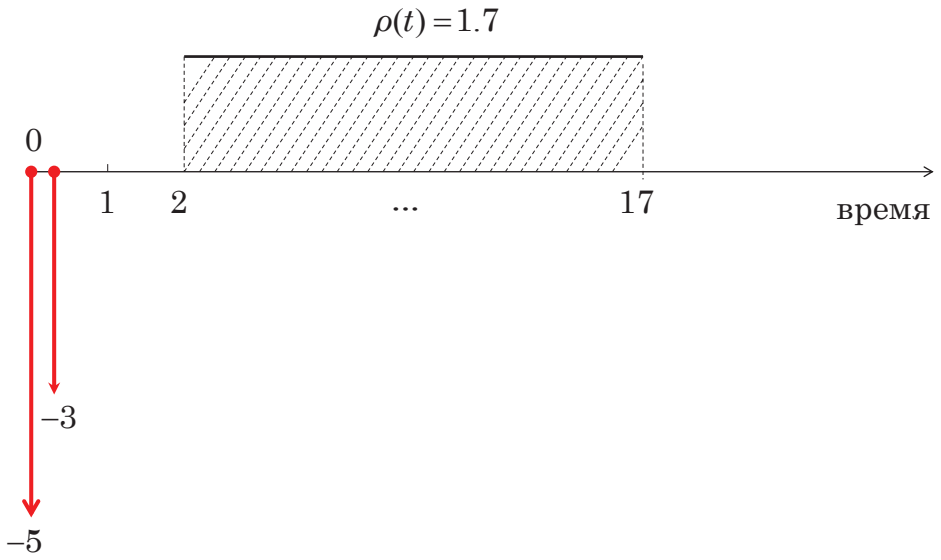


Рис. 4.15

(ii) Текущая стоимость платежей по проекту на промежутке $[0;t]$, $NPV_{[0;t]}$, сначала постоянна и равна $-5-3v^{1/4} < 0$ (при $t \le 2$), а затем (при $t \ge 2$) равна $1.7\int_2^t e^{-\delta t}dt - 5 - 3v^{1/4} = \dfrac{1.7}{\delta}\cdot\left(v^2 - v^t\right) - 5 - 3v^{1/4}$, т.е. монотонно возрастает и стремится к пределу $\dfrac{1.7v^2}{\delta} - 5 - 3v^{1/4} \approx 6.8$. Поэтому существует и притом единственный момент времени T, такой, что текущая стоимость чистого потока платежей по проекту на промежутке $[0;T]$ равна 0, причём при $t < T$ функция $NPV_{[0;t]}$ отрицательна, а при $t > T$ – положительна. По определению, это и будет дисконтированный срок окупаемости проекта. Ясно, что $T = -\dfrac{1}{\delta}\ln\left(v^2 - \dfrac{\delta}{1.7}\cdot\left(5 + 3v^{1/4}\right)\right) \approx 10.1$ (лет).

(iii) Допустим, что компания взяла в долг под $i = 10\%$ годовых £5m в момент $t_0 = 0$ и £3m в момент $t_1 = \dfrac{1}{4}$. К моменту t этот долг вырастет до

$A = 5(1+i)^t + 3(1+i)^{t-0.25}$. С другой стороны, начиная с момента $t_2 = 2$ компания будет погашать долг непрерывным потоком платежей со скоростью $\rho(t) = 1.7$. К моменту t накопленная стоимость этого потока равна $B = 1.7\overline{s}_{\overline{t-2}|} = 1.7\dfrac{(1+i)^{t-2}-1}{\delta}$. Момент, когда долг будет погашен, находится из условия $A = B$, которое равносильно условию $\dfrac{1.7}{\delta}\cdot\left(v^2 - v^t\right) = 5 + 3v^{1/4}$. Это равенство можно получить и сразу, если приравнять текущую стоимость (при дисконтировании по ставке, равной ставке, под которую выдан долг) сумм, взятых в долг к моменту t, и текущую стоимость потока поступлений от проекта к моменту t. Таким образом, момент, когда долг будет погашен, – это дисконтированный срок окупаемости T=10.1.

По условию, после выплаты долга компания может зарабатывать на свободные средства $i' = 7\%$ годовых. Поэтому итоговый доход компаниии в конце семнадцатого года равен

$$1.7\overline{s}_{\overline{17-T}|@7\%} = \frac{1.7}{\delta'}\cdot\left((1+i')^{17-T} - 1\right) \approx 14.95 \text{ (миллионов фунтов).}$$

Задача 4.4 (CT1, 15 April 2008, Problem 3) Компания, предоставляющая ипотечные кредиты, предлагает следующие условия по 25-летним займам.

Продукт A. Сумма займа £100,000, выплаты в размере £7,095.25 производятся в конце каждого года. Никаких дополнительных расходов (на подготовку договора и т.д.) нет.

Продукт B. Сумма займа £100,000, выплаты производятся в начале каждого месяца из расчёта эффективной годовой ставки 4%. Кроме того, заёмщик должен заплатить £6,000 за оформление договора и £5,000 в конце 25-летнего срока за закрытие договора. Сравните эффективные годовые ставки для заёмщика по этим продуктам.

Решение. Для продукта A выплаты по кредиту образуют стандартную постоянную запаздывающую ренту. Поэтому текущая стоимость этого потока равна $£7,095.25\cdot a_{\overline{25}|} = £7,095.25\dfrac{1-(1+i)^{-25}}{i}$, где i – искомая эффективная годовая ставка для заёмщика по этому продукту. Поэтому уравнение доходности для продукта A имеет вид: $£7,095.25\dfrac{1-(1+i)^{-25}}{i} = £100,000$, откуда $i = 5\%$.

Для продукта B выплаты по кредиту образуют стандартную постоянную упреждающую ренту, выплачиваемую $p = 12$ раз в год. Поэтому текущая стоимость этого потока равна $12x\ddot{a}^{(12)}_{\overline{25}|} = 12x\cdot\dfrac{1-(1+i)^{-25}}{d^{(12)}}$, где x – сумма ежемесячных выплат, $i = 4\%$ – заданная эффективная годовая ставка расчёта ежемесячных выплат по этому продукту, $d^{(12)} = 12\cdot\left(1-(1+i)^{-1/12}\right)$. Поэтому для x

имеем уравнение $12x \cdot \frac{1-(1+i)^{-25}}{d^{(12)}} = 100{,}000$, откуда

$x = \frac{100{,}000}{12} \cdot \frac{d^{(12)}}{1-(1+i)^{-25}} \approx 522.1868$.

Для упрощения записей обозначим искомую эффективную годовую ставку для заёмщика по продукту B тем же символом *i,* что и для продукта A. Тогда уравнение доходности для продукта B примет вид: $6{,}000 + 5{,}000(1+i)^{-25} + 12 \cdot 522.1868 \ddot{a}_{\overline{25}|}^{(12)} = 100{,}000$, откуда $i \approx 4.8\%$.

Таким образом, продукт B выгоднее для заёмщика.

Задача 4.5 (CT1, 19 April 2011, Problem 3) 1 июля 2005 года инвестиционная компания купила 1,000 акций по цене £135 за штуку, а 1 июля 2010 года продала эти акции по цене £151 за штуку. На протяжении всего периода владения акциями, 30 июня, компания получала дивиденды. Размер дивидендов на акцию указан в следующей таблице.

год	Дивиденды (£)	Индекс розничных цен
2005	…	121.4
2006	7.9	125.6
2007	8.4	131.8
2008	8.8	138.7
2009	9.4	145.3
2010	10.1	155.2

(i) Используя значения индекса розничных цен из таблицы, вычислите реальную годовую доходность инвестиции.

(ii) Не выполняя никаких дополнительных вычислений, объясните, как бы изменился ответ в пункте (i), если бы индекс розничных цен на 30 июня 2008 был бы больше, чем 138.7, а все остальные значения индекса остались бы неизменными.

Решение. (i) Примем 30 июня 2005 года в качестве начального момента $t_0 = 0$, время будем измерять годами. Пусть S_k – индекс розничных цен в момент $t_k = k$, $0 \le k \le 5$. Компания получила от инвестирования суммы $c_0 = £135000$ в момент $t_0 = 0$ денежный доход в размере: $b_1 = £7900$ в момент $t_1 = 1$, $b_2 = £8400$ в момент $t_2 = 2$, $b_3 = £8800$ в момент $t_3 = 3$, $b_4 = £9400$ в момент $t_4 = 1$, $b_5 = £10100 + £151000 = £161100$ в момент $t_5 = 5$. Сумма b_k в деньгах момента $t_k = k$ эквивалентна сумме $\frac{S_0}{S_k} \cdot b_k$ в деньгах момента $t_0 = 0$ («реальных» деньгах).

Пусть i – искомая реальная годовая доходность, $v=\dfrac{1}{1+i}$. Тогда уравнение доходности примет вид: $\dfrac{c_0}{S_0}=\sum\limits_{k=1}^{5}\dfrac{b_k}{S_k}v^k$. Его можно записать в виде: $f(v)=0$, где $f(v)=-\dfrac{c_0}{S_0}+\sum\limits_{k=1}^{5}\dfrac{b_k}{S_k}v^k$. Функция $f(v)$ монотонно возрастает от $f(0)=-\dfrac{c_0}{S_0}<0$ до бесконечности, причём $f(1)=£180.76$. Поэтому уравнение $f(v)=0$ имеет единственный положительный корень, причём он меньше 1. Его легко найти численно: $v\approx 0.967006$, так что $i\approx 3.4119\,\%$.

(ii) Если индекс розничных цен на 30 июня 2008 (параметр S_3) станет больше, чем 138.7, а все остальные значения индекса останутся неизменными, то значения функции $f(v)$ уменьшатся при всех v. Вследствие этого точка пересечения графика функции $f(v)$ с осью абсцисс сдвинется вправо, т.е. v увеличится, а доходность $i=1/v-1$ уменьшится.

Задача 4.6 (CT1, 24 April 2012, Problem 9) Дивиденды по обычной акции выплачиваются 31 декабря каждого года. 31 декабря 2011 года на одну акцию были выплачены дивиденды в размере 35p. Предполагается, что в 2012 году дивиденды вырастут на 3%, а в 2013 – ещё на 5%. После этого ожидается ежегодный 6% рост на протяжении неограниченного срока.

(i) Вычислите стоимость потока дивидендов, описанного выше, на 1 января 2012 года при эффективной годовой процентной ставке 8%, если в этот день инвестор имеет 100 акций.

1 января 2012 года инвестор покупает 100 акций по цене £17.20 каждая. Он предполагает продать их 1 января 2015 года по цене £18 за штуку.

(ii) Вычислите ожидаемую реальную доходность, если дивиденды будут расти как описано выше, а индекс инфляции на начало 2012, 2013, 2014, 2015 года будет равен 110.0, 112.3, 113.2, 113.8 соответственно.

Решение. (i) Примем 1 января 2012 года в качестве начального момента $t_0=0$, а время будем измерять годами. Поток дивидендов образует бессрочную ренту, выплачиваемую в моменты 1,2,… Сумма, выплачиваемая в момент k, равна $£35\cdot 1.03=£36.05$ для $k=1$ и $£36.05\cdot 1.05\cdot 1.06^{k-2}$ для $k\ge 2$. Текущая стоимость этого потока равна

$$36.05\cdot 1.08^{-1}+36.05\cdot 1.05\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\left(1.06^{k-2}\cdot 1.08^{-k}\right)$$

$$=36.05\cdot\left(1.08^{-1}+1.05\cdot\frac{1.08^{-2}}{1-1.06\cdot 1.08^{-1}}\right)$$

$$=\frac{36.05}{1.08}\cdot\left(1+\frac{1.05}{0.02}\right)=\frac{3605\cdot 53.5}{108}=1785.81.$$

(ii) В момент $t_0 = 0$ инвестор потратил $c_0 = £1720$ на покупку 100 акций по цене £17.20 за штуку. В результате он получит дивиденды в размере $b_1 = £35 \cdot 1.03 = £36.05$ в момент $t_1 = 1$ (31 декабря 2012 года), $b_2 = £36.05 \cdot 1.05 = £37.8525$ в момент $t_2 = 2$ (31 декабря 2013 года), $£37.8525 \cdot 1.06 = £40.12365$ в момент $t_3 = 3$ (31 декабря 2014 года), а также выручит £1800 от продажи пакета акций 1 января 2015 года (этот момент мы отождествляем с $t_3 = 3$), так что общее поступление в момент $t_3 = 3$ составит $b_3 = £1840.12365$.

Пусть S_k – индекс инфляции в момент k, $0 \le k \le 3$ (т.е. на начало года $2012 + k$). Поэтому «реальная» сумма, полученная инвестором в момент k равна $b_k \cdot \dfrac{S_0}{S_k}$. Если i – искомая реальная годовая доходность, а $v = \dfrac{1}{1+i}$, то уравнение доходности примет вид: $\dfrac{c_0}{S_0} = \sum_{k=1}^{3} \dfrac{b_k}{S_k} v^k$. Его можно записать в виде: $f(v) = 0$, где $f(v) = -\dfrac{c_0}{S_0} + \sum_{k=1}^{3} \dfrac{b_k}{S_k} v^k$. Функция $f(v)$ монотонно возрастает от $f(0) = -\dfrac{c_0}{S_0} < 0$ до бесконечности, причём $f(1) \approx £1.19$. Поэтому уравнение $f(v) = 0$ имеет единственный положительный корень, причём он меньше 1. Его легко найти численно: $v \approx 0.975372$, так что $i \approx 2.525\%$.

Задача 4.7 (CT1, 3 October 2012, Problem 10)**.** Рассматривается два инвестиционных проекта.

(i) Объясните, почему сравнение дисконтированных периодов окупаемости или периодов окупаемости в большинстве случаев не походит для того, чтобы сделать выбор между двумя инвестиционными проектами.

Каждый из двух проектов предполагает начальное вложение в размере *P*=£3m. Доходы от этих двух проектов таковы:

Проект A

За первый год проект A принесёт £0.5m. За второй год он принесёт £0.55m. Поступления от этого проекта будут продолжать увеличиваться на 10% в год, а в конце шестого года прекратятся. Предположим, что все деньги, заработанные на протяжении года, поступают в середине года.

Проект B

Проект B будет приносить £0.64m в год на протяжении шести лет. Предположим, что на протяжении этого периода деньги поступают непрерывно и равномерно.

(ii) (a) Найдите период окупаемости проекта B.

(b) Найдите дисконтированный период окупаемости проекта B при технической эффективной годовой ставке 4%.

(iii) Определим точку пересечения как техническую годовую процентную

ставку, при которой чистые приведённые стоимости двух проектов равны. Покажите, что существует по меньшей мере одна точка пересечения, значение которой лежит от 0% до 4%.

(iv) Вычислите продолжительность Мако́ли потока поступлений от проектов A и B при технической процентной ставке 4% годовых.

(v) Объясните, почему при увеличении технической процентной ставки, использовавшейся выше при расчётах, текущая стоимость потока поступлений от проекта A будет уменьшаться быстрее, чем текущая стоимость потока поступлений от проекта B.

Решение. (i) Срок (или период) окупаемости проекта – это время, которое должно пройти от начала инвестиционного проекта, чтобы суммарные денежные поступления от проекта сравнялись с первоначальными инвестициями в проект. Эта характеристика не учитывает ни изменение ценности денег с течением времени, ни общие поступления от проекта. Дисконтированный период окупаемости проекта – это время, которое должно пройти от начала инвестиционного проекта, чтобы суммарные приведённые (к моменту начала проекта) денежные поступления от проекта сравнялись с первоначальными инвестициями в проект. Хотя эта характеристика учитывает изменение ценности денег с течением времени, общие поступления от проекта (фактически поступления после дисконтированного срока окупаемости) не принимаются в расчёт.

(ii) Примем 1 миллион фунтов (£1m) в качестве условной единицы измерения денежных сумм. Время, как обычно, будем измерять годами, а момент начала проектов возьмём в качестве начального.

(a) Поскольку на протяжении шести лет деньги от проекта B поступают с постоянной скоростью $\rho = 0.64$, для $t \in [0;6]$ общие поступления от проекта составят сумму $\rho t = 0.64t$. Затраты на проект равны $P = 3$. Поэтому для вычисления срока окупаемости T_0 проекта B имеем уравнение: $\rho T_0 = P$, откуда $T_0 = \dfrac{P}{\rho} = \dfrac{3}{0.64} = 4.6875(\text{лет})$, что примерно составляет 4 года 8 месяцев и 8 дней. Так как этот период меньше, чем 6 лет, он и будет искомым сроком окупаемости проекта B.

(b) На промежутке $[0;t]$, где $t \le 6$, поступления от проекта образуют непрерывную ренту со скоростью поступления средств $\rho = 0.64$. Её стоимость в момент $t = 0$ начала проекта равна $\rho\bar{a}_{\overline{t}|} = \rho\dfrac{1-v^t}{\delta}$, где, как обычно, $\delta = \ln(1+i)$ – интенсивность процентов, $v = e^{-\delta}$ – коэффициент дисконтирования, соответствующие технической процентной ставке i. Поэтому для вычисления дисконтированного периода окупаемости T проекта B имеем уравнение: $\rho\dfrac{1-e^{-\delta T}}{\delta} = P$, откуда

$$T = -\frac{\ln(1-\delta T_0)}{\delta} \approx 5.179752(\text{лет}) \approx 5 \text{ лет } 2 \text{ месяца } 5 \text{ дней.}$$

Так как этот период меньше, чем 6 лет, он и будет искомым дисконтированным периодом окупаемости проекта B.

(iii) Пусть i – техническая эффективная годовая ставка, используемая при вычислении текущих стоимостей, $\delta = \ln(1+i)$ и $v = \frac{1}{1+i} = e^{-\delta}$ – соответствующие интенсивность процентов и коэффициент дисконтирования.

Проект A предполагает первоначальные расходы в размере $P = 3$ в момент $t = 0$ и поступление шести сумм в середине каждого из шести первых лет, т.е. в моменты $t_1 = 0.5$, $t_2 = 1.5$, …, $t_6 = 5.5$. Последовательность сумм образует геометрическую прогрессию с первым членом 0.5 и знаменателем 1.1, так что k-я сумма равна $a_k = 0.5 \cdot 1.1^{k-1}$. Поэтому чистая приведённая стоимость проекта A равна

$$NPV_A(i) = -3 + 0.5v^{0.5} + 0.5 \cdot 1.1v^{1.5} + \ldots + 0.5 \cdot 1.1^5 v^{5.5} = -3 + 0.5v^{0.5} \cdot \frac{1-(1.1v)^6}{1-1.1v}.$$

Проект B предполагает первоначальные расходы в размере $P = 3$ в момент $t = 0$ и непрерывное поступление средств со скоростью $\rho = 0.64$ на протяжении шести лет. Поэтому для проекта B чистая приведённая стоимость $NPV_B(i)$ равна $NPV_B(i) = -3 + \rho\bar{a}_{\overline{6}|}$. Если $i \neq 0$, то это выражение можно упростить до $-3 + 0.64 \cdot \frac{1-v^6}{\delta}$. Если же $i = 0$, то оно, очевидно, равно $-3 + 0.64 \cdot 6 = 0.84$.

Если $i = 0$, то $v = 1$, $\delta = 0$. Поэтому в точке $i = 0$ значение функции $NPV_A(i)$ равно $NPV_A(0) = -3 + 0.5 \cdot \frac{1.1^6 - 1}{1.1 - 1} = 0.857805$, а $NPV_B(0)$, как мы уже отмечали, равно 0.84. Таким образом, $NPV_A(0) > NPV_B(0)$.

В точке $i = 0.04$ значения функций $NPV_A(i)$ и $NPV_B(i)$ равны

$$NPV_A(0.04) = -3 + 0.5 \cdot 1.04^{-0.5} \cdot \frac{1-\left(1.1/1.04\right)^6 - 1}{1-1.1/1.04} \approx 0.4001145,$$

$$NPV_B(0.04) = -3 + 0.64 \cdot \frac{1-1.04^{-6}}{\ln 1.04} \approx 0.4216283$$

соответственно. Таким образом, $NPV_A(0.04) < NPV_B(0.04)$.

Поскольку эти функции непрерывны, можно гарантировать существование хотя бы одной точки пересечения графиков этих функций на интервале (0;0.04).

(iv) Проект A предполагает поступление шести сумм $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.5 \cdot 1.1$, …, $a_6 = 0.5 \cdot 1.1^5$ в моменты $t_1 = 0.5$, $t_2 = 1.5$, …, $t_6 = 5.5$. Приведённые стоимости этих сумм равны

$a_1^* = 0.5 \cdot 1.04^{-0.5} \approx 0.4902903$, $a_2^* = 0.5 \cdot 1.1 \cdot 1.04^{-1.5} \approx 0.5185763$,

$a_3^* = 0.5 \cdot 1.1^2 \cdot 1.04^{-2.5} \approx 0.5484942$, $a_4^* = 0.5 \cdot 1.1^3 \cdot 1.04^{-3.5} \approx 0.5801381$,

$a_5^* = 0.5 \cdot 1.1^4 \cdot 1.04^{-4.5} \approx 0.6136076$, $a_6^* = 0.5 \cdot 1.1^5 \cdot 1.04^{-5.5} \approx 0.649008$.

Сумма этих приведённых значений равна 3.4001145. Эту приведённую стоимость потока поступлений от проекта A можно вычислить и с помощью формулы $0.5 \cdot 1.04^{0.5} \cdot \dfrac{1-(1.1/1.04)^6}{1-1.1/1.04}$, полученной в разделе (iii) решения. Она стоит в знаменателе дроби, определяющей продолжительность Мако́ли.

Умножая найденные выше приведённые значения поступлений от потока A на моменты времени, к которым они относятся, мы получим числа 0.245145, 0.777864, 1.371235, 2.030483, 2.761234, 3.569544. Их сумма равна 10.75551 – она стоит в числителе дроби, определяющей продолжительность Мако́ли потока поступлений от проекта A.

Поэтому для потока поступлений от проекта A продолжительность Мако́ли при $i = 4\%$ равна 3.163278.

Для потока поступлений от проекта B знаменатель дроби, определяющей продолжительность Мако́ли, равен $\rho\bar{a}_{\overline{7}|} = 0.64 \cdot \dfrac{1-1.04^{-6}}{\ln 1.04} \approx 3.4216283$. Числитель дроби, определяющей продолжительность Мако́ли, равен

$$0.64 \cdot \int_0^6 te^{-\delta t}dt = -0.64 \cdot \frac{1+\delta t}{\delta^2} e^{-\delta t}\Big|_0^6 = 0.64 \cdot \frac{1-v^6-6\delta v^6}{\delta^2} \approx 9.86266.$$

Поэтому для потока поступлений от проекта B продолжительность Мако́ли при $i = 4\%$ равна 2.88245.

(v) Известно, что относительное изменение текущей стоимости денежного потока $\dfrac{NPV(i+\Delta)-NPV(i)}{NPV(i)}$ примерно равно $v \cdot MDT \cdot \Delta$, где MDT – продолжительность Мако́ли. Поэтому, чем больше MDT (а у проекта A эта характеристика больше, чем у проекта B), тем больше относительное уменьшение приведённой стоимости потока поступлений от проекта.

Задача 4.8 (CT1, 3 October 2012, Problem 3)**.** 1 января 2010 г. инвестиционный фонд оценивался в £120m и в £140m 1 января 2011 г. Немедленно после оценки 1 января 2011 г. в фонд внесли £200m. 1 июля 2012 г. фонд оценивался в £600m.

(i) Вычислите среднюю по времени эффективную годовую ставку дохода, TWRR, за этот период времени.

(ii) Объясните, почему для рассмотренного примера эквивалентная по финансовому результату ставка дохода, MWRR, должна быть выше средней по времени ставки дохода, TWRR.

Решение. (i) За промежуток времени от 1 января 2010 г. до 1 января 2011 г. инвестиционный фонд вырос с £120m до £140m. Таким образом,

эффективный коэффициент роста равен $k_1^{\text{эфф}} = \frac{140}{120} \approx 1.17$. Иначе говоря, за первый промежуток времени менеджеры фонда заработали примерно 17% на средства, которыми они располагали в начале этого промежутка. За промежуток времени от 1 января 2011 г. до 1 июля 2012 г. инвестиционный фонд вырос с £340m до £600m. Для этого промежутка времени эффективный коэффициент роста равен $k_2^{\text{эфф}} = \frac{600}{340} \approx 1.76$. Иначе говоря, за второй промежуток времени менеджеры фонда заработали примерно 76% на средства, которыми они располагали в начале этого промежутка.

Коэффициенты $k_1^{\text{эфф}}$ и $k_2^{\text{эфф}}$ показывают эффективность работы менеджеров фонда за соответствующие промежутки времени. Поэтому, если бы 1 января 2010 г. в фонд была внесена сумма 1, то через два с половиной года, к 1 июля 2012 г. она выросла бы до $k_1^{\text{эфф}} k_2^{\text{эфф}} \approx 2.058824$. По определению, средняя по времени эффективная годовая ставка дохода за объединённый промежуток времени *TWRR* – это такая годовая эффективная процентная ставка, что гипотетический банковский счёт, начисляющий проценты по этой ставке в соответствии с принципом сложных процентов, даёт тот же *итоговый* финансовый результат, что и рассматриваемый фонд. Иначе говоря, средняя по времени эффективная годовая ставка дохода за объединённый промежуток времени находится из соотношения: $(1+TWRR)^T = k_1^{\text{эфф}} k_2^{\text{эфф}}$, где $T = 2.5$ – длина (в годах) рассматриваемого объединённого промежутка времени. Подставляя числовые значения, мы получим:

$$\text{TWRR} = \left(k_1^{\text{эфф}} k_2^{\text{эфф}}\right)^{1/T} - 1 = \left(\frac{140}{120} \cdot \frac{600}{340}\right)^{1/2.5} - 1 \approx 33.49\%.$$

(ii) Рассмотрим общую ситуацию, когда в фонд на анализируемом промежутке $[a;b]$ длиной $T = b - a$ было только одно поступление средств в некоторый момент времени $t_1 \in (a;b)$. Стоимость фонда в момент $t_0 \equiv a$ обозначим через F_0, в момент $t_1 - 0$ – через F_1, в момент $t_2 \equiv b$ – через F_2. Размер суммы, поступившей в фонд в момент t_1, обозначим C_1 (она может быть и отрицательной, но должна быть больше $-F_1$), так что в момент $t_1 + 0$ стоимость фонда стала равной $F_1 + C_1 > 0$.

Средний по времени годовой коэффициент роста k_{TW} вычисляется по формуле $k_{\text{TW}} = \left(k_1^{\text{эфф}} k_2^{\text{эфф}}\right)^{1/T} = \left(k_1^{\tau_1} k_2^{\tau_2}\right)^{1/(\tau_1+\tau_2)}$, где $\tau_1 = t_1 - t_0$, $\tau_2 = t_2 - t_1$, а $k_1 = \left(k_1^{\text{эфф}}\right)^{1/\tau_1} = \left(\frac{F_1}{F_0}\right)^{1/\tau_1}$, $k_2 = \left(k_2^{\text{эфф}}\right)^{1/\tau_1} = \left(\frac{F_2}{F_1 + C_1}\right)^{1/\tau_2}$ – соответствующие коэффициенты годового роста.

Эквивалентный по деньгам годовой коэффициент роста, k_{MW}, в рассматриваемой ситуации можно определить как положительный корень уравнения $F_0 z^{\tau_1} + C_1 - F_2 z^{-\tau_2} = 0$. Поскольку $F_0, F_2 > 0$, вне зависимости от знака C_1 функция $f(z) = F_0 z^{\tau_1} + C_1 - F_2 z^{-\tau_2}$ на промежутке $z > 0$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому уравнение $f(z) = 0$ имеет единственный положительный корень, который и будет k_{MW}. Строгая монотонность функции $f(z)$ влечёт, что k_{TW} меньше, больше или равен k_{MW} тогда и только тогда, когда $f\left(k_{\text{TW}}\right)$ отрицательно, положительно или равно 0.

Поскольку $F_2 = \left(F_1 + C_1\right) k_2^{\tau_2} = \left(F_0 k_1^{\tau_1} + C_1\right) k_2^{\tau_2} = F_0 k_{TW}^{\tau_1+\tau_2} + C_1 k_2^{\tau_2}$, для $f\left(k_{\text{TW}}\right)$ мы имеем:

$$f\left(k_{\text{TW}}\right) = F_0 k_{TW}^{\tau_1} + C_1 - F_2 k_{TW}^{-\tau_2} = F_0 k_{TW}^{\tau_1} + C_1 - \left(F_0 k_{TW}^{\tau_1+\tau_2} + C_1 k_2^{\tau_2}\right) k_{TW}^{-\tau_2}$$
$$= F_0 k_{TW}^{\tau_1} + C_1 - F_0 k_{TW}^{\tau_1} - C_1 k_2^{\tau_2} k_{TW}^{-\tau_2} = C_1 k_1^{-\tau_1\tau_2/(\tau_1+\tau_2)} \left(k_1^{\tau_1\tau_2/(\tau_1+\tau_2)} - k_2^{\tau_1\tau_2/(\tau_1+\tau_2)}\right).$$

Знак выражения $k_1^{\tau_1\tau_2/(\tau_1+\tau_2)} - k_2^{\tau_1\tau_2/(\tau_1+\tau_2)}$ совпадает со знаком выражения $k_1 - k_2$. Поэтому $k_{\text{TW}} = k_{\text{MW}}$ тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ или $C_1 = 0$. Если $C_1 > 0$ (т.е. в момент t_1 средства поступали в фонд), то $k_{\text{TW}} < k_{\text{MW}}$ тогда и только тогда, когда $k_1 < k_2$. Если $C_1 < 0$ (т.е. в момент t_1 средства изымались из фонда), то $k_{\text{TW}} < k_{\text{MW}}$ тогда и только тогда, когда $k_1 > k_2$.

Поскольку на анализируемом промежутке времени было только одно *поступление* средств в фонд, можно воспользоваться этой общей теорией. Для первого промежутка времени эквивалентный годовой коэффициент накопления равен $k_1 = k_1^{\text{эфф}} \approx 1.17$. Для второго промежутка времени эквивалентный годовой коэффициент накопления равен $k_2 = \left(k_2^{\text{эфф}}\right)^{1/1.5} \approx 1.46$. Значит, *TWRR<MWRR*.

Глава 5
Облигации

5.1 Общее описание облигаций

5.1.1 Определение облигации

Любой человек согласится, что проще занять 100 рублей, чем 100 тысяч. Поэтому, когда государству или компании нужна большая сумма денег, например, 1 миллиард долларов, то проще не искать одного богатого кредитора, который мог бы ссудить эти деньги (такая большая сумма может быть проблемой даже для среднего банка), а занять, скажем, по 1 тысяче долларов у 1 миллиона лиц. Такую незначительную сумму могут дать даже обычные люди (если условия займа будут достаточно выгодными), так что 1 миллион займодавцев – это вполне реальное число (особенно если учесть, что некоторые из них могут дать взаймы бóльшую сумму, например, 100 тысяч или несколько миллионов долллларов). Технически операция привлечения большой суммы денег за счёт большого числа маленьких займов оформляется в виде выпуска и продажи специальных ценных бумаг (фактически долговых расписок) – облигаций.

В законодательстве Российской Федерации общее определение облигации даётся в Статье 816 «Облигация» Гражданского Кодекса:

«В случаях, предусмотренных законом или иными правовыми актами, договор займа может быть заключён путем выпуска и продажи облигаций.

Облигацией признается ценная бумага, удостоверяющая право её держателя на получение от лица, выпустившего облигацию, в предусмотренный ею срок номинальной стоимости облигации или иного имущественного эквивалента. Облигация предоставляет её держателю также право на получение фиксированного в ней процента от номинальной стоимости облигации либо иные имущественные права…»

Термин «облигация» присходит от латинского obligatio (обязательство). Но в современном английском языке obligation [ˌɔblɪ'geɪʃ(ə)n] означает именно *обязательство* (юридическое или моральное). Термин «облигация» в смысле «ценная бумага, удостоверяющая специфическую форму займа», переводится на английский язык как bond [bɔnd]. Основное значение слова bond в английском языке – «связь», «связывать», а в финансовом контексте оно означает долговое обязательство.

В Статье 816 ГК термин «выпуск облигаций» означает «выпуск облигаций в обращение». В современных отечественных документах в этом случае чаще используют термин *эмиссия* (emission [ɪ'mɪʃ(ə)n]), в то время как а в

англоязычной литературе предпочитают термин issue (['ɪʃuː], ['ɪsjuː]), обычное значение которого именно «выпуск», например, продукции. При эмиссии в обращение выпускается большое число однотипных облигаций, которые равноценны с точки зрения предоставляемых ими прав, вне зависимости от времени приобретения. В России термин «выпуск облигаций» часто означает такой набор облигаций. Для «выпуска облигаций» в этом смысле в англоязычной литературе обычно используют термин «issue» или просто «the bonds». Каждый выпуск облигаций имеет имеет уникальный идентификационный номер, национальный или международный, так называемый ISIN (сокращение от International Securities Identification Number – международный идентификационный номер ценной бумаги). ISIN – это уникальный 12-разрядный буквенно-цифровой код, присваемый каждому выпуску облигаций и других ценных бумаг, которые обращаются на международных рынках капитала. В США каждому выпуску ценных бумаг присваивается уникальный 9 разрядный буквенно-цифровой код CUSIP (сокращение от Committee on Uniform Securities Identification Procedures – Комитет по стандартным методам идентификации ценных бумаг).

Хотя общие принципы функционирования рынка облигаций одни и те же для всех стран, законы и практика сильно меняются от страны к стране.

В Российской Федерации разнообразные вопросы, связанные с выпуском и обращением облигаций, регулируются большим числом правовых актов: законами, постановлениями Правительства РФ, приказами Министерства финансов и т.д. Упомянем, например, Федеральный закон от 22.04.1996 №39-ФЗ «О рынке ценных бумаг», Федеральный закон от 29.07.1998 №136-ФЗ «Об особенностях эмиссии и обращения государственных и муниципальных ценных бумаг», Постановление Правительства РФ от 08.04.2010 №217 «Об утверждении Генеральных условий эмиссии и обращения облигаций внешних облигационных займов Российской Федерации», Приказ Министерства Финансов от 16.08.2001 №65н «Об утверждении условий эмиссии и обращения облигаций федерального займа с постоянным купонным доходом», Приказ Министерства Финансов от 11.09.2013 №235 «Об эмиссии облигаций внешних облигационных займов Российской Федерации» и т.д.

В Главе 1 мы уже ввели основные термины, связанные с облигацией. В силу исключительной важности этого раздела финансов повторим их ещё раз. В случае облигации:

- займодавец называется владельцем (или держателем) облигации (bondholder ['bɔndˌhəuldə]),
- заёмщик – это эмитент, т.е. организация, выпустившая облигацию (issuer ['ɪʃuːə], ['ɪsjuːə]),
- сумма займа – это номинальная стоимость облигации F (face value или par [pɑː] value);
- выплата номинальной стоимости (после выплаты всех процентов) и тем самым выполнение всех обязательств эмитентом называется погашением

(redemption [rɪ'dempʃ(ə)n]) облигации; следует также иметь в виду, что в ряде случаев (например, при досрочном погашении) сумма R, которую получает владелец облигации при её погашении (*выкупная цена* – redemption price, redemption value), отличается от номинальной стоимости F;

- когда наступает срок исполнения обязательств по облигации, облигацию называют mature [mə'ʧuə] [mə'tjuəʳ] (буквально: «зрелый», «спелый»),
- срок до погашения называется term (или time) to maturity [mə'ʧuərətɪ] [mə'tjuərətɪ] или, короче, maturity,
- дата погашения называется maturity date (или, короче, maturity).

Процентные выплаты (interests) по облигациям часто называют *купонными* (coupon ['kuːpɔn]), т.к. исторически для получения очередной такой выплаты нужно было отрезать от прилагаемого к облигации купонного листа купон (квитанцию), удостоверяющий право держателя облигации на получение выплаты, и предъявить его эмитенту. Слово coupon происходит от французского couper (отрезать) и по французски буквально означает «отрезанная часть чего-либо». В английской финансовой литературе для процентных выплат по облигациям часто используют термин dividend ['dɪvɪdɛnd]. Промежуток времени между двумя соседними купонными выплатами называется *купонным периодом* (coupon period); используется также термин «interest period». Для дат выплаты купонов в англоязычной литературе обычно используют термин «interest payment dates». Обычно считается, что если дата выплаты купона приходится на нерабочий день, то реальное перечисление денежных средств владельцу облигаций производится в первый рабочий день, следующий за этой датой. За такую естественную задержку в платеже эмитент не выплачивает держателю облигаций никаких дополнительных сумм.

Некоторые виды облигаций не предполагают выплату купонов. Такие облигации называют *бескупонными* (*беспроцентными*) – zero coupon bonds. Иногда этот термин переводят как *облигации с нулевым купоном*, но это неточный перевод[1]. На самом деле, конечно, инвестор получает процентный доход. Дело в том, что такие облигации всегда продаются по цене, которая ниже номинала; разница $F - P$ между номиналом облигации и её ценой и составляет доход инвестора. Беспроцентные облигации являются важнейшим инструментом денежного рынка и играют существенную роль в теории, но в этой главе мы не будем их рассматривать.

Важная особенность облигации заключается в том, что, как правило, она может быть продана другому лицу. Поэтому, когда держателю облигации нужны наличные деньги, теоретически он без труда может их получить. Цены облигаций постоянно меняются в зависимости от рыночных условий и при перепродаже облигаций инвестор может как заработать, так и потерять.

---

[1] You can use zero to say that there is none at all of the thing mentioned (Collins Cobuild)

Современные стандарты бухгалтерского учёта требуют, чтобы при покупке облигаций компании относили их к одному из трёх классов: удерживаемый до погашения (held to maturity), удерживаемый для торговли (held for trading), доступен для продажи (available for sale – AFS). Облигации, удерживаемые до погашения, указываются в балансе по амортизированной стоимости; колебания цены никак не отражаются. Если компания приобретает облигации с намерением перепродать их через небольшое время (обычно в течение года) и заработать прибыль на ожидаемом росте цены этих облигаций, то эти облигации попадают в категорию held for trading. Облигации, не попадающие в две первые группы, классифицируются как AFS. Основное различие между двумя последними классами связано с тем, как отражается колебание цен облигаций в финансовой отчётности компании.

Некоторые виды облигаций не обращаются на вторичном рынке и не могут использоваться в качестве залога. В качестве примера можно привести государственные сберегательные облигации (ГСО), выпускаемые от имени Российской Федерации Министерством финансов РФ. Инвестиции в эти облигации не нужно переоценивать (в силу природы этих облигаций их цена не меняется), что очень удобно для страховых компаний, НПФ и других пассивных институциональных инвесторов.

Приведённая выше выдержка из Статьи 816 ГК РФ указывает на ещё одно важное отличие облигации от обычного займа. Обычный заём, как правило, погашается серией постоянных выплат, которые включают как проценты на невыплаченную часть долга, так и погашение части основной суммы займа. В случае облигаций до момента погашения выплачиваются только проценты, а номинальная стоимость выплачивается только в момент погашения (поскольку цена облигации обычно отличается от номинала, на самом деле ситуация немного сложнее).

Для стандартной облигации уже в момент её покупки инвестор совершенно точно знает, какие суммы и в какие моменты времени он будет получать, если будет держать облигацию до момента погашения. Поэтому облигации являются ценными бумагами с фиксированным доходом (fixed income ['ɪŋkʌm] securities [sɪ'kjuərɪtɪz]).

Все важные параметры облигации фиксируются эмитентом в проспекте эмиссии (prospectus [prə'spektəs]) – официальном документе, описывающем условия выпуска облигаций.

Денежные потоки, связанные с облигацией, можно проиллюстрировать с помощью рис. 5.1. Показанная на нём стандартная ситуация выглядит так. В некоторый момент $t_0 = 0$ инвестор приобретает облигацию, уплачивая за неё сумму P. Эмитент в момент погашения T выплачивает владельцу облигации сумму, равную номиналу облигации F, а до этого момента в установленные даты выплаты купонного дохода $0 \le t_1 < \ldots < t_n = T$ ещё и купоны в размере $C_1,\ldots,C_n$ соответственно.

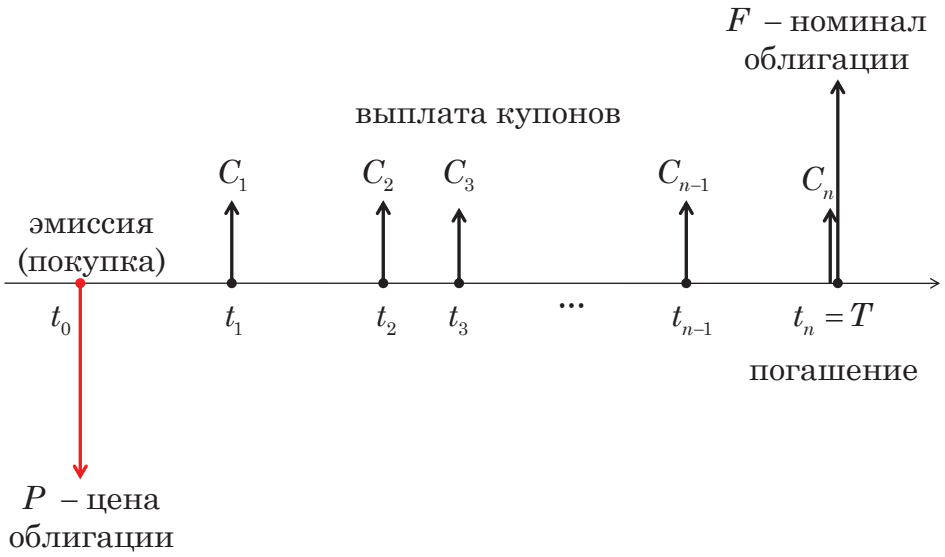


Рис. 5.1

Большинство облигаций гасится по фиксированной номинальной стоимости в заранее установленный день погашения и платит постоянный купон через равные промежутки времени, чаще всего через каждые 6 месяцев или через 1 год. При этом размер купонной выплаты вычисляется как фиксированный постоянный *купонный процент* от номинала. Такие стандартные облигации часто называют straight [streɪt] (в смысле: обычный, традиционный) bonds, vanilla [və'nilə] (буквально: ванильный) bonds и т.п. Следует подчеркнуть различие между *постоянным* купонным процентом (он один и тот же для всех купонных периодов) и *фиксированным* (он заранее определён для всех купонных периодов, но от периода к периоду может меняться).

При всей принципиальной простоте схемы, показанной на рис. 5.1, её реализация на практике содержит массу нюансов. Например, при сделке купли/продажи облигаций нужно различать день заключения сделки (trade date) и день окончательного расчёта (settlement ['setlmənt] date), когда продавец получает деньги, а покупатель – облигации (точнее, право собственности на облигации). Для государственных ценных бумаг обычно день расчёта – это следующий рабочий день после дня заключения сделки (правило T+1), а для корпоративных облигаций между днём сделки и днём расчёта проходит 3 рабочих дня (правило T+3). Важно помнить, что разница между днём заключения сделки и днём расчёта измеряется в *рабочих* днях, а не в календарных. Поэтому если, например, день сделки – четверг и применяется правило T+3, то день расчёта – вторник. В Великобритании правило T+1 применяется к государственным облигациям, приобретаемым крупными инвесторами, скажем, страховыми компаниями. Для розничных покупателей часто применяют правило T+3. Ниже мы приведём дополнительные сведения об облигациях практического характера.

Наряду со стандартной схемой существует громадное число вариаций, некоторые из которых мы упомянем ниже. Поскольку описать все виды облигаций, обращающиеся на финансовых рынках, невозможно, в последующих параграфах этой главы мы будем изучать только упрощённую схему, показанную на рис. 5.1, и её частные случаи. Это позволит нам изложить основные принципиальные идеи математики облигаций, общие для всех видов облигаций. С их помощью можно провести необходимые финансово-математические расчёты для любого конкретного выпуска. Мы будем иллюстрировать общие теоретические соображения реальными расчётами для британских и отечественных облигаций.

5.1.2 Облигации и акции

Приобретая акции инвестор становится совладельцем компании, а приобретая облигации – её кредитором. Поэтому, в отличие от акций, облигации не дают права участвовать в управлении компанией.

Уже в момент размещения облигации инвестор совершенно точно знает, какие суммы и в какие моменты времени он будет получать, если будет держать облигацию до момента погашения. Эти платежи не зависят от финансовых результатов компании, выпустившей облигации. В этом смысле облигации принципиально отличаются от акций, выплаты по которым (дивиденды) зависят от успешности работы компании.

В определённые периоды времени цены на акции растут очень быстро и удачное вложение в акции может принести большой и быстрый доход. Однако периоды роста рынка сменяются периодами его падения, так что акции могут принести и значительные потери. Хотя стоимость облигаций также меняется с течением времени, но не так значительно, как стоимость акций. На большом промежутке времени, не меньше 10 лет, вложения в акции, как правило, приносят бóльший доход, чем вложения в облигации, но за это приходится платить риском бóльших потерь на промежутках времени небольшой и средней длины. Дополнительный риск связан с тем, что в случае банкротства компании и распродажи её имущества для погашения обязательств акционеры получат свою долю после того, как будут выполнены обязательства перед держателями облигаций.

Разумная инвестиционная стратегия предполагает наличие в портфеле как акций, так и облигаций. Соотношение между ними зависит от конкретного инвестора. Например, пенсионер не может взять на себя риск потери значительной доли своего капитала из-за резкого падения курса акций – для него разумнее вложить свободные средства в надёжные облигации и получать гарантированный доход. С другой стороны, молодой человек, который выйдет на пенсию только через несколько десятков лет, может инвестировать в акции, вполне обоснованно предполагая получить существенно бóльший доход, чем от покупки облигаций. Однако, если этот молодой человек копит деньги для приобретения квартиры через 5 лет, ему следует инвестировать в облигации ту

часть своих средств, которую он предполагает направить на улучшение жилищных условий.

Разнообразные события на рынке акций довольно подробно освещаются средствами массовой информации, и потому он привлекает бóльшее общественное внимание. Рынок облигаций мало известен непрофессионалам, но он больше и важнее для экономики, чем рынок акций. В 2013 году мировой объём рынка акций составлял примерно 64 триллиона долларов США, а долговой рынок – около 100 триллионов (при этом с 2007 года он вырос на 43%).

5.1.3 Виды облигаций в зависимости от эмитента

В зависимости от эмитента облигации подразделяются на *государственные* (government ['gʌv(ə)nmənt] bonds), *муниципальные* (municipal [mju:'nɪsɪp(ə)l] bonds или munis [ˈmju:niz]), которые выпускаются местными органами власти, и *корпоративные* (corporate ['kɔ:p(ə)rət] bonds), которые выпускаются частными компаниями.

В современной мировой финансовой системе *исключительно* важную роль играют правительственные облигации США. Они номинированы в долларах США и считаются самым надёжным финансовым инструментом в мире. За из выпуск отвечает Министерство финансов (Department of the Treasury[2]).

В зависимости от срока до погашения для американских облигаций используют разные термины:

- *казначейский вексель* (treasury ['trəʒ(ə)rɪ] bill или T-bill), если срок до погашения не больше года (стандартные сроки: 4, 13, 26 или 52 недели) – это бескупонная облигация;
- *казначейский билет* (treasury note или T-note), если срок до погашения от года до 10 лет (стандартные сроки: 2, 3, 5, 7 и 10 лет) – это облигация с полугодовым купоном;
- *казначейская облигация* (treasury bond или T-bond), если срок до погашения больше 10 лет (стандартный срок – 30 лет) – это облигация с полугодовым купоном.

Наряду с традиционными облигациями казначейство США выпускает *казначейские билеты с плавающей ставкой* (Treasury Floating ['fləutɪŋ] Rate

---

[2] Появившееся здесь слово treasury буквально переводится как «сокровищница» (treasure ['treʒə] – сокровище, богатство, деньги), но в США и Великобритании оно означает «казначейство» или «министерство финансов». В США Министерство финансов называется Department of the Treasury, а министр финансов – Secretary of the Treasury. В Великобритании Министерство финансов называется The Treasury; формально им руководит премьер-министр в качестве первого лорда казначейства (First Lord of the Treasury), но реальным руководителем, т.е. министром финансов, является Chancellor ['ʧa:n(t)s(ə)lə] of the Exchequer [ɪkstʃe̲kə(r)] (буквально «канцлер казначейства»).

Notes – FRN) и *ценные бумаги, защищённые от инфляции* (Treasury Inflation-Protected Securities – TIPS).

Казначейский билет с плавающей ставкой является облигацией с ежеквартальным купоном и сроком до погашения от 1 года до 10 лет (стандартный срок – 2 года). Номинал этой облигации фиксирован, но ежедневно начисляемые проценты меняются в зависимости от цены на 13-недельные казначейские векселя; соответственно меняются и суммы купонных выплат.

Treasury inflation-protected note (*казначейский билет, защищённый от инфляции*) является облигацией с полугодовым купоном и сроком до погашения от 1 года до 10 лет (стандартные сроки: 5 и 10 лет). Купонная ставка фиксирована, но номинал в день платежа купона или погашения пересчитывается в зависимости от инфляции.

Treasury inflation-protected bond (*казначейская облигация, защищённая от инфляции*) является облигацией с полугодовым купоном и сроком до погашения больше 10 лет (стандартный срок – 30 лет). Купонная ставка фиксирована, но номинал в день платежа купона или погашения пересчитывается в зависимости от инфляции.

Казначейство США выпускает и другие виды облигаций, например, *сберегательные облигации серии I* (Series I Savings Bonds – I Bonds) и *серии EE* (Series EE Savings Bonds – EE Bonds). По этим облигациям проценты выплачиваются только при погашении. Для облигаций серии I начисляемые проценты меняются в зависимости от инфляции, а для облигаций серии EE фиксируются на весь срок до погашения в момент приобретения облигации. Например, для облигаций, приобретённых с 1 мая по 31 октября 2005, процентная ставка равнялась 3.5%, для облигаций, приобретённых с 1 ноября 2014 по 30 апреля 2015 – только 0.1%. Проценты начисляются ежемесячно, но основной капитал (к которому применяется процентная ставка) меняется раз в 6 месяцев. Казначейство гарантирует, что при погашении через 20 лет владелец облигации серии EE заработает не меньше 100% на вложенный капитал (недостающая сумма будет доначислена в 20-ю годовщину). В отличие от обычных облигаций, сберегательные облигации не могут быть проданы или приобретены на вторичном рынке, но по истечении года с момента приобретения их можно погасить (если с момента приобретения прошло меньше 5 лет, теряются проценты за последние три месяца). Сберегательные облигации часто используют как подарки (их можно регистрировать и на несовершеннолетних). Есть и другие важные отличия по сравнению с обычными облигациями.

Британские правительственные облигации номированы в фунтах стерлингов. До апреля 1998 года их выпускал Банк Англии (The Bank of England), а с апреля 1998 года этим занимается специальное подразделение Министерства финансов – ведомство по управлению долгом (The UK Debt Management Office – DMO).

Бескупонные облигации со сроком до погашения не больше года (стандартные сроки: 1, 3, 6 месяцев) называют, как и в США, казначейскими векселями (treasury bills).

Традиционные британские правительственные облигации впервые появились под именем Treasury Stock (обратим внимание на то, что в финансовом контексте основное значение термина stock – акция). Для последующих выпусков использовались разные имена: Treasury Stock, Exchequer Stock, Conversion Stock, War Loan, Consolidated Stock. В последние годы для новых выпусков используется имя Treasury Stock. На рынке для обозначения британских правительственных облигаций используют обобщённое имя *Gilts*[3]. Для неформального обозначения конкретного выпуска кроме имени используют купонную ставку и год погашения, например, 4% Treasury Gilt 2016, 4¾% Treasury Stock 2015 и т.п. Традиционные облигации имеют срок до погашения от 5 до 50 лет, выплачивают фиксированный купон 2 раза в год и номинальную стоимость облигации в момент погашения. Три старых выпуска, 2½ Annuities (выпущены 13 июня 1853), 2¾ Annuities (выпущены 17 октября 1884), 2½ Consolidated Stock (выпущены 5 апреля 1888) платят купон 4 раза в год. Эти и несколько других выпусков не имеют установленной даты погашения (их называют undated [ʌn'deɪtɪd] gilts); они могут быть погашены в любой момент (по решению правительства). Раньше правительство выпускало облигации «с двумя датами погашения» (double-dated gilts). Они могли быть погашены в любой день между этими двумя датами. Последний выпуск такого рода, 12% Exchequer Stock 2013-17, был погашен 12 декабря 2013 года.

Наряду с традиционными облигациями с 1981 года правительство Великобритании выпускает индексированные облигации (index-linked gilts, сокращённо, IGs). В отличие от традиционных облигаций, для этих облигаций размеры купонных платежей и окончательной выплаты при погашении зависят от британского индекса розничных цен.

На конец марта 2012 года по общему номиналу казначейские векселя составляли 5.7% всех облигаций, выпущенных британским правительством, традиционные купонные облигации – 72.8%, а индексированные – 21.5%.

5.1.4 Другие виды облигаций

Если облигация номинирована в валюте, отличной от валюты страны, в которой эмитирована, то она называется *еврооблигацией* (eurobond ['juərəubɔnd]). Например, облигация российской компании, номинированная в долларах и эмитированная в любой стране, кроме США, является

[3] Сокращение от gilt-edged stock. Слово gilt [gɪlt] буквально означает «позолота» или «позолоченный», а gilt-edged [gɪlt,edʒd] – «с золотым обрезом». Этот термин отражает основную характеристику этих ценных бумаг – их абсолютную надёжность. Более широко, любые чрезвычайно надёжные ценные бумаги называют gilt-edged securities.

еврооблигацией (евродолларовой облигацией). Еврооблигации не следует путать с иностранными облигациями (foreign bonds), т.е. облигациями, которые иностранные компании эмитируют на некотором рынке в местной валюте. Иностранные облигации обычно покупают местные инвесторы и они подлежат регулированию местных органов. В зависимости от валюты иностранным облигациям обычно дают образные имена. Облигация «янки» – это облигация, эмитированная в США иностранной компанией и номинированная в долларах, облигация «бульдог» – это облигация, эмитированная в Великобритании иностранной компанией и номинированная в фунтах, и т.д.

С облигациями нельзя путать *депозитные сертификаты* (certificate of deposit; сокращённо, CD), хотя с точки зрения денежных потоков они практически ничем не отличаются от облигаций. Депозитный сертификат – это ценная бумага, которая удостоверяет факт получения банком определённой суммы денег и право держателя сертификата на получение в установленный срок этой суммы и процентов. Права, удостоверенные депозитным сертификатом, могут переданы другому лицу. Соответственно, существует вторичный рынок депозитных сертификатов.

В Великобритании депозитные сертификаты появились в конце 1960-х годов для того, чтобы на межбанковском рынке банки могли торговать депозитами. Проценты по CD тесно связаны с текущими рыночными процентными ставками на межбанковском рынке депозитов на такой же срок. Как и для других инструментов с фиксированным доходом, цена депозитного сертификата на вторичном рынке зависит от текущего уровня процентных ставок и при росте процентных ставок цена депозитного сертификата падает. Эта зависимость уменьшается при уменьшении срока до погашения. Стоимость сертификата на вторичном рынке зависит также от кредитного рейтинга банка, который выдал сертификат. Большинство депозитных сертификатов приобретается банками, строительными обществами и другими институтами, работающими на лондонском рынке. Доля держателей из-за рубежа и частных лиц пренебрежимо мала. Минимальная сумма депозитного сертификата равна 100 тысяч фунтов. Как правило, они выпускаются на срок до 6 месяцев. Процентная ставка может быть и переменной. Вместо выплаты процентов сертификат может продаваться с дисконтом.

В США депозитные сертификаты рассматриваются как разновидность банковского счёта, на котором (для традиционных CD) фиксированная сумма размещается на фиксированный срок под фиксированные проценты, которые выплачиваются по истечении срока обращения. В частности, в США они застрахованы Федеральной Корпорацией Страхования Депозитов (FDIC). Часто никакого «сертификата» владелец депозитного сертификата не получает. Поскольку предполагается, что деньги будут находиться в банке фиксированный срок, проценты по сетификатам выше, чем по обычным банковским вкладам. Если сертификат предъявляется к оплате досрочно, то выплачивается неустойка. Например, в Bank of America неустойка

складывается из фиксированной суммы ($25) и процента от суммы сертификата (1% для сертификатов, выпущенных на срок до одного года, и 3%, если сертификат выпущен на год или больше). Для CD, которые могут продаваться повторно, неустойка обычно сводится к уменьшению процентной ставки. В США банки выпускают большое число разновидностей традиционных депозитных сертификатов (с периодической выплатой процентов, с возможностью увеличить процентную ставку, с возможностью частичного изъятия части основной суммы, сертификаты, которые могут быть досрочно погашены банком, и т.д.).

В России депозитные (сберегательные) сертификаты предлагает, например, Сбербанк РФ. В отличие от банковских вкладов, вложения в сберегательные сертификаты не застрахованы.

5.1.5 Рейтинги эмитентов и облигаций

Чтобы помочь инвесторам принять разумное решение о том, следует ли покупать облигации определённого эмитента, а если покупать, то по какой цене, специальные агенства оценивают способность эмитента выполнять свои финансовые обязательства. Результат такой аналитической деятельности выражается в специальной оценке, которая называется рейтинг (rating; одно из значений слова rate – оценивать, присваивать определённый уровень качества). Основными рейтинговыми агенствами являются три американских компании: Moody's, Standard and Poor's, Fitch. Каждое рейтинговое агенство использует собственную систему оценки кредитоспособности и коды для оценок. Эта система и вкладываемый в оценки содержательный смысл являются довольно сложными. Поэтому иногда разные агенства присваивают разные рейтинги одной и той же ценной бумаге; для такой ситуации существует даже специальный термин – split rating (разделённый рейтинг).

В качестве примера мы кратко опишем систему кредитных рейтингов эмитентов агенства Fitch. Она делит рейтинги на две большие группы: инвестиционный уровень (investment grade) и спекулятивный уровень (speculative grade).

Наивысший инвестиционный рейтинг обозначается AAA. Он означает чрезвычайно высокую способность выполнения финансовых обязательств.

За ним идёт рейтинг AA. Он означает очень высокую кредитоспособность, на которую не могут существенно повлиять предсказуемые обстоятельства.

Следующий по порядку – рейтинг A, который означает высокую способность выполнения финансовых обязательств. При этом определённое влияние на кредитоспособность могут оказать неблагоприятные экономические условия.

В группу инвестиционных рейтингов входит и рейтинг BBB – хорошая кредитоспособность, которая, однако, с большой вероятностью может снизиться при неблагоприятных экономических условий.

Спекулятивные рейтинги (по возрастанию риска) обозначаются:

BB – повышенный риск дефолта (default [dɪˈfɔːlt] – невыполнение обязательств), особенно при неблагоприятных рыночных условиях в будущем; однако гибкость бизнеса позволяет обслуживать свои финансовые обязательства,

B – значительный риск дефолта, хотя в настоящее время финансовые обязательства и выполняются,

CCC – существенный кредитный риск, т.к. имеется реальная возможность дефолта,

CC – очень высокий кредитный риск, т.к. вероятен дефолт,

C – исключительно высокий кредитный риск, т.к. дефолт практически неизбежен: эмитент вступил в льготный период после неплатежа по обязательствам, договорился о временном разрешении на невыполнение обязательств и т.п.,

RD – ограниченный дефолт (объявлен дефолт по существенным финансовым обязательствам, но не начата процедура банкротства, ликвидации и т.п.),

D – дефолт (начата процедура банкротства, назначен временный управляющий и т.п.)

К этим оценкам могут добавляться знаки + или –, чтобы подчернуть относительно меньший или бóльший риск в пределах указанного рейтинга. Например, рейтинг BBB– является инвестиционным, но хуже, чем BBB. Рейтинг BB+ является спекулятивным, но означает наименьшую степень риска по сравнению с другими спекулятивными рейтингами.

Примерно так же устроены и другие системы рейтингов Fitch, но есть и важные отличия. Например, рейтинги облигаций с покрытием отражают не только вероятность дефолта, но и возвратность средств при дефолте. Поэтому рейтинг эмитента может быть выше или ниже рейтинга его конкретного финансового обязательства.

Важно понимать, что, например, рейтинг AA для облигаций вовсе не исключает возможность дефолта. Просто по мнению агенства вероятность этого существенно ниже, чем для облигаций с рейтингом BBB. Рейтинговые агенства подчеркивают, что они употребляют слово «вероятность» в субъективном смысле и не выражают её числом. Это вовсе не отрицает того, что существует статистика дефолтов по облигациям с заданным рейтингом и характеристиками, но вряд ли оправдан её анализ вероятностными методами – эта статистика носит описательный характер. Тем не менее, инвесторы на основе рейтингов меняют требования к доходности облигаций.

Рейтинги время от времени меняются. Например, 27.07.2006 агенство Fitch присвоило Сбербанку долгосрочный рейтинг дефолта эмитента в иностранной валюте – BBB+, а 04.02.2009 изменило его на BBB.

Ещё один пример. Украинская агрокомпания Мрия имела во второй половине 2014 года долгосрочный рейтинг дефолта эмитента в иностранной валюте на уровне C. В сентябре 2014 компания допустила дефолт по купонному

платежу. По истечении 30-дневного льготного периода купонный платёж так и не был произведён, существенного прогресса в переговорах с кредиторами по реструктуризации долга не было. Поэтому агенство Fitch пришло к выводу, что неизбежен обмен проблемных обязательств со значительными потерями для держателей облигаций, и 31 октября 2014 г. понизило рейтинг с уровня C до RD.

5.1.6 Текущая информация об облигациях

Рыночная информация об основных видах облигаций публикуется деловыми изданиями во всех странах мира. Например, 12 ноября 2014 года на странице http://www.bloomberg.com/markets/ мы могли увидеть следующую таблицу:

Таблица 5.1

Treasury	Coupon	Maturity	Price/Yield	Time
U.K. Government Bonds				
2-Year	4.00	2016-09-07	106.13/0.60	10:23:30
10-Year	2.75	2024-09-07	105.05/2.18	10:30:53
30-Year	3.25	2044-01-22	106.72/2.91	10:41:26

Из неё мы узнаём, например, что двухлетняя облигация британского правительства номиналом $F = £100$, которая будет погашена 7 сентября 2016 года и выплачивает полугодовой купон по ставке $c = 4.00\%$ годовых (т.е., в абсолютных цифрах, $C = £2.00$ каждые полгода), продаётся в момент публикации (12 ноября 2014 года в 10 час. 23 мин. 30 сек. по часам в Нью-Йорке, т.е. в 18 час. 23 мин. 30 сек. московского времени) по цене $P = £106.13$. Доходность к погашению (мы определим это понятие позже) равна 0.60% годовых.

Установление цен на товары, ценные бумаги и т.д. на определённую дату в соответствии с рыночной конъюнктурой называют котировкой (quotation [kwə'teɪʃ(ə)n]). Этот же термин используют и для информационного документа, в котором указаны установленные цены. Опубликованная в таком документе цена на товар или ценную бумагу называется quoted [kwəutid] price; на русский язык этот термин переводят как «объявленная цена», «зарегистрированный на бирже курс» и т.п. Реальная цена, по которой облигации покупаются и продаются, в дополнение к объявленной цене включает так называемый накопленный купонный доход (НКД) – об этом мы подробно будем говорить позже. Важно понимать, что дилеры продают облигации по цене, которая немного выше цены, по которой они готовы купить эти же облигации. Разница между ценой, по которой дилер готов продать облигации (offer price), и ценой, по которой он готов их купить (bid price), называется *спред* (spread [spred]) – она покрывает издержки дилера. Кроме того, необходимо иметь в виду, что на

рынке цены облигаций меняются непрерывно. Поэтому котировки всегда указывают некоторую среднюю цену.

5.2 Купон

5.2.1 Купонный период

Как мы отмечали, большинство облигаций платит постоянный купон через равные промежутки времени, чаще всего каждые 6 месяцев или через 1 год. «Равенство» длин купонных периодов для разных облигаций понимается в разных смыслах. Чаще всего для вычисления длин временных промежутков применяется метод Actual/Actual (ICMA), о котором мы расскажем в этом пункте.

Начнём с важного частного случая, когда купонный период составляет 1 год (эта ситуация типична для корпоративных облигаций). В простейшем случае, когда и первый купонный период имеет ту же длину, денежные потоки для облигации с ежегодным купоном показаны на рис. 5.2.

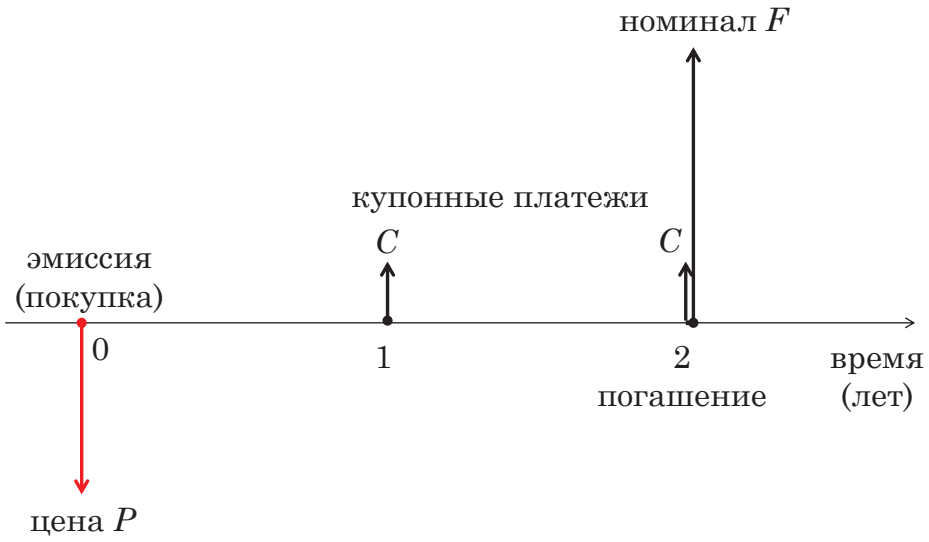


Рис. 5.2 Двухлетняя облигация с ежегодным купоном

Для таких облигаций выплаты купонов производятся в тот же день и месяц, когда облигация должна быть погашена. Иначе говоря, даты выплаты процентов отсчитываются от даты погашения назад.

Пример 1. Рассмотрим в качестве примера облигации с ежегодным купоном компании Nestlé Finance International Ltd, выпущенные 12 сентября 2013 года и подлежащие погашению 10 сентября 2021 года (ISIN: XS0969795680).

В соответствии с указанным общим правилом купоны будут выплачиваться: 10 сентября 2014, 10 сентября 2015, …, 10 сентября 2021 года – всего 8 купонов. Хотя даты выплаты купонов определяются автоматически, проспект эмиссии в п. 15(b) их явно указывает: «Interest Payment Date(s): 10 September in each year from, and including, 10 September 2014 up to, and including, the Maturity Date …» – «Даты выплаты процентов: 10 сентября каждого года, от 10 сентября 2014 включительно до даты погашения включительно…».

В этом примере промежуток времени между первым и вторым купонами (от 10.09.2014 до 10.09.2015) состоит из 365 дней, промежуток между вторым и третьим купонами (от 10.09.2015 до 10.09.2016) – из 366, и т.д.. Тем не менее, при финансовых расчётах принято считать, что все эти купонные периоды имеют одну длину, которая принимается в качестве единицы измерения временных промежутков. Эту единицу времени можно называть и годом, понимая, что «год» в этом контексте – это *не* 365 дней (или 366, если год – високосный), а промежуток между двумя соседними купонными выплатами (которые приходятся на одно и то же число одного и того же месяца соседних лет) .

С первым купоном ситуация немного сложнее. Пункт 7(b) проспекта указывает, что первый купонный период начинается в день эмиссии (это обычная практика): «Interest Commencement [kə'men(t)smənt] Date: Issue Date» – «днём начала начисления процентов считается дата эмиссии». В нашем случае день эмиссии – 12.09.2013. *Если бы* облигация была эмитирована 10.09.2013, то гипотетический первый купонный период [10.09.2013;10.09.2014] имел бы длину 1. Этот гипотетический первый купонный период называют *квази-купонным периодом* (quasi[4]-coupon period), а дату 10 сентября 2013 года – *квази-купонной датой* (quasi-coupon date); часто квази-купонными называют все даты, полученные откладыванием стандартного купонного периода от даты погашения назад, вне зависимости от того, должна производиться в этот день выплата купона или нет. Для правительственных облигаций США, которые выплачивают купон 2 раза в год, квази-купонные даты называют coupon frequency dates.

Наша облигация была выпущена 12.09.2013, т.е. между двумя квазикупонными датами, 10.09.2013 и 10.09.2014. В подобных случаях говорят о *коротком* первом купонном периоде (short first dividend period, short first coupon). Короткий первый купонный период типичен для многих облигаций и важно точно понимать, как его длина выражается числом. Для рассматриваемой облигации рассуждают следующим образом. Промежуток от 12.09.2013 до 10.09.2014 состоит из $s^* = 363$ дней, а квази-купонный период [10.09.2013;10.09.2014], в котором расположена дата эмиссии, состоит из $s = 365$ дней. Поэтому, если в качестве единицы времени брать «год», то длина

[4] quasi ['kweɪzaɪ], ['kwɑːzɪ] – как бы, якобы; как будто; почти

короткого первого купонного периода равна $t = s^*/s = 363/365$ (купонного периода). Описанный метод измерения длин временных промежутков в настоящее время является основным для облигаций; его называют Actual/Actual (ICMA).

Гораздо чаще встречаются облигации с выплатой постоянного купона каждые 6 месяцев (этот случай типичен для государственных облигаций). В простейшем случае, когда все купонные периоды имеют одну длину, денежные потоки для такой облигации показаны на рис. 5.3.

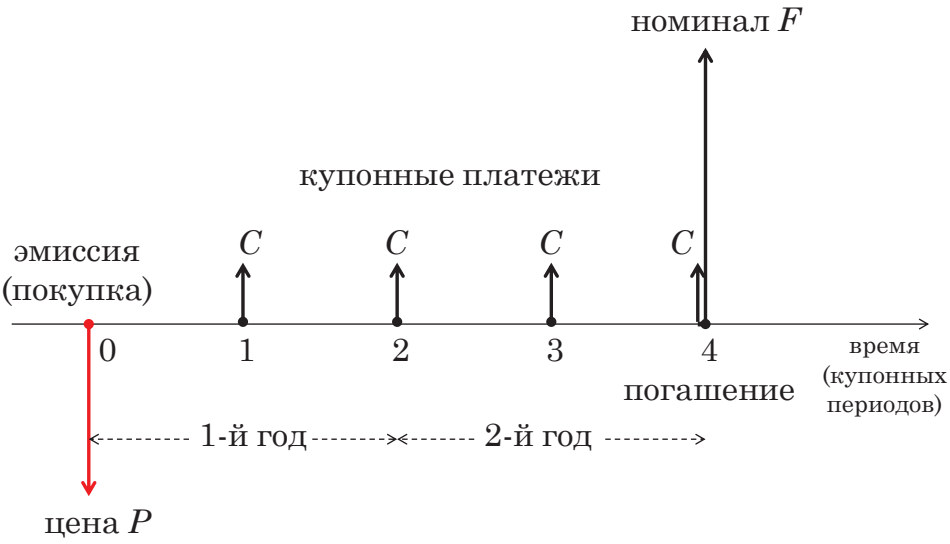


Рис. 5.3 Двухлетняя облигация с полугодовым купоном

Для облигаций с полугодовым купоном даты выплаты купонов и длины купонных периодов определяются по тому же принципу Actual/Actual (ICMA), что и для облигаций с ежегодным купоном, но с очевидными модификациями. Чтобы разъяснить их, рассмотрим следующий

Пример 2. 21 июня 2010 года британский банк LloydsTSB выпустил облигации с полугодовым купоном, которые будут погашены 7 сентября 2015 года (ISIN: XS0517466198).

Чтобы определить даты выплаты купонов для этих облигаций, следует от даты погашения, т.е. от 7 сентября 2015 года, отсчитать назад 6-месячные промежутки (не меняя день месяца). Таким образом, купоны будут выплачиваться 7 сентября (9-й месяц) и 7 марта (3-й месяц) каждого года: 7 сентября 2010, 7 марта 2011, 7 сентября 2011, 7 марта 2012, …, 7 марта 2105, 7 сентября 2015 года – всего 11 купонов. В проспекте эмиссии, пункт 15(ii), эти даты формально указаны следующим образом: «Interest Payment Date(s): 7 March and 7 September in each year commencing on 7 September 2010 (the "First Interest Payment Date") up to and including the Maturity Date (short first coupon)…» – «даты выплаты процентов: 7 марта и 7 сентября каждого года,

начиная с 7 сентября 2010 года до даты погашения включительно (короткий первый купон)…».

В этом примере число дней в купонном периоде от 7.09.2010 года до 7.03.2011 года равно 181, в следующем купонном периоде, от 7.03.2011 до 7.09.2011 – 184, и т.д. Тем не менее, считается, что все *эти* купонные периоды имеют одну длину. Иногда удобно в качестве единицы времени использовать длину купонного периода, иногда – один «год», понимая под ним 2 стандартных купонных периода (так что купонный период имеет длину 1/2 «года» или, что то же самое, 6 «месяцев»).

Первый купонный период, от даты эмиссии 21.06.2010 до даты выплаты первого купона 7.09.2010, является коротким и состоит из $s^* = 78$ дней. Чтобы все купонные периоды имели одну длину, равную 1/2 года, облигация «должна была быть выпущена» 7.03.2010. Как и в примере с облигациями Nestlé последняя дата называется *квази-купонной датой*, а промежуток от 7.03.2010 до 7.09.2010 – *квази-купонным периодом*. Квазикупонный период, в котором расположена дата эмиссии, состоит из $s = 184$ дней. Соответственно, считается, что реальный (короткий) купонный период составляет $t = s^*/s = 78/184 \approx 0.423913$ стандартного купонного периода («полугодия») или $78/(2 \cdot 184) \approx 0.2119565$ «года».

В общем случае для расчёта длины t короткого первого купонного периода применяется формула $t = s^*/s$ (стандартных купонных периодов), где s^* – точное число дней от даты эмиссии до ближайшей даты выплаты купона (которая является квази-купонной датой), а s – точное число дней в квазикупонном периоде, внутри которого расположена дата эмиссии (см. рис. 5.4, где короткий первый купонный период обозначен жирной линией).

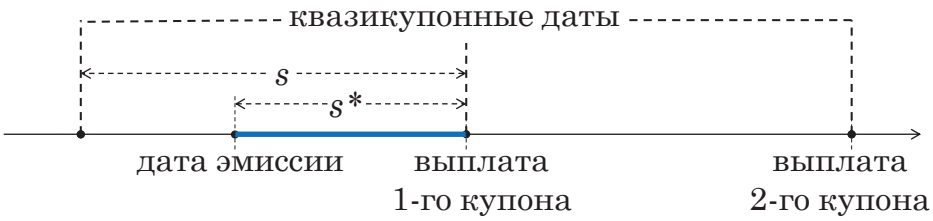


Рис. 5.4

Рассмотрим теперь случай длинного первого купонного периода (см. рис.5.5, где показана наиболее интересная с практической точки зрения ситуация). В этом случае для вычисления его длины применяется формула $t = s^*/s + 1$ (стандартных купонных периодов), где s^* – точное число дней от даты эмиссии до ближайшей следующей квази-купонной даты, а s – точное

число дней в квазикупонном периоде, внутри которого расположена дата эмиссии.

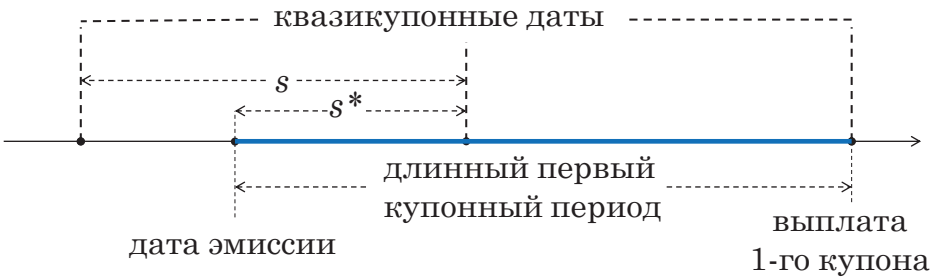


Рис. 5.5

В России часто применяют другой принцип определения дат купонных выплат: если купон платится 2 раза в год, то все купонные периоды, исключая, возможно, первый, имеют одну и ту же длину в *днях*, равную 182 (26 недель), а если 4 раза в год, то 91 (13 недель).

Пример 3. Рассмотрим выпуск ОФЗ-25082-ПД облигаций федерального займа с постоянным купонным доходом, выпущенный Минфином РФ (государственный регистрационный номер 25082RMFS, ISIN: RU000A0JTWW3). Для этих облигаций купон выплачивается 2 раза в год по ставке 6% годовых в соответствии с графиком, указанным в таблице 5.2.

Таблица 5.2

Номер купона, i	Дата выплаты, t_i	Длина купонного периода, $t_i - t_{i-1}$ (дней)
0 (размещение)	15.05.2013	
1	13.11.2013	182
2	14.05.2014	182
3	12.11.2014	182
4	13.05.2015	182
5	11.11.2015	182
6 (погашение)	11.05.2016	182

Для этих облигаций длины временных промежутков измеряются в годах по принципу Actual/365F. Поэтому для рассматриваемого примера длина стандартного купонного периода составляет $182/365$ (года).

Пример 4. По облигациям ГСО-35001-ППС, выпущенным Министерством финансов РФ (государственный регистрационный номер 35001RMFS) купон выплачивается 4 раза в год по ставке 6.1% годовых в соответствии с графиком, указанным в таблице 5.3.

Таблица 5.3

Номер купона, i	Дата выплаты, t_i	Длина купонного периода, $t_i - t_{i-1}$ (дней)
0 (размещение)	21.12.2006	
1	25.04.2007	125
2	25.07.2007	91
3	24.10.2007	91
4	23.01.2008	91
5	23.04.2008	91
6	23.07.2008	91
7	22.10.2008	91
8	21.01.2009	91
9	22.04.2009	91
10 (погашение)	22.07.2009	91

Для этих облигаций длины временных промежутков также измеряются в годах по принципу Actual/365F. Поэтому для рассматриваемого примера длина стандартного купонного периода составляет 91/365 (года). Первый купон должен выплачиваться 25 апреля 2007 года, т.е. через 125 дней после размещения. Таким образом, мы имеем дело с длинным первым купонным периодом. Его длина в соответствии с принципом Actual/365F равна 125/365 (года).

На международных рынках капитала облигации, которые платят купон каждый квартал или месяц (т.е. с частотой 4 или 12 раз в год) встречаются реже, чем облигации с ежегодным или полугодовым купоном. Раз в месяц платят купон, например, ценные бумаги, обеспеченные пулом ипотек (mortgage-backed ['mɔ:gɪʤbækt] securities). Ежеквартальный купон типичен для облигаций с плавающей купонной ставкой. Следует внимательно читать проспекты эмиссии подобных облигаций, чтобы точно понять, как измеряются временные промежутки. Для облигаций с плавающей купонной ставкой, например, обычно применяют методику ISDA, а не ICMA.

5.2.2 Купонный процент

Вместо абсолютных размеров купонных выплат (в рублях, долларах, фунтах и т.д.) обычно указывается *купонный процент* (coupon rate; используют также термин «rate of interest») – это размер купонной выплаты на единицу номинала облигации, пересчитанный в номинальную годовую процентную ставку. В России для этой величины используют и другие термины, например, *процентная ставка купонного дохода*, *процентная ставка купона*, *процентная ставка по купону*, *ставка купона* и т.п.

Для облигаций номиналом F с ежегодным купоном величиной C купонный процент c – это просто отношение C/F . Соответственно, каждый купон равен cF. Если же купонные выплаты производятся несколько раз в год, то соотношение между купонным процентом и размером регулярной купонной выплаты зависит от принятого метода измерения длин промежутков времени.

Если принята методика Actual/Actual (ICMA), то для облигаций, выплачивающих купон p раз в год ($p=1,2,4,12$), считается, что все купонные периоды имеют постоянную длину, равную $1/p$ части года, или, что то же самое, год состоит из p стандартных купонных периодов. Соответственно, если F – номинал облигации, $C_*^{(p)}$ – размер регулярной купонной выплаты, то эффективная купонная ставка для купонного периода равна $c_*^{(p)}=C_*^{(p)}/F$, а соответствующая номинальная годовая ставка $c^{(p)}$, т.е. (номинальный) купонный процент, равна $\dfrac{c_*^{(p)}}{1/p}=pc_*^{(p)}=\dfrac{pC_*^{(p)}}{F}$. Иначе говоря, (номинальный) годовой купонный процент можно определить как отношение алгебраической суммы купонных выплат за год $C=pC_*^{(p)}$ к номиналу F. Для облигаций с выплатой купона каждые 6 месяцев ($p=2$), каждый квартал ($p=4$), ежемесячно ($p=12$) под купонной ставкой понимают именно этот номинальный годовой купонный процент $c^{(p)}$. Обычно при анализе конкретного вида облигаций частота выплаты купонов фиксирована и потому мы будем опускать верхний индекс (p) и обозначать номинальную купонную ставку просто c, а не $c^{(p)}$, а эффективную ставку за купонный период – просто c_*, а не $c_*^{(p)}$.

При расчёте различных характеристик облигаций, выплачивающих купон p раз в год, удобно в качестве основной единицы времени рассматривать не год, а p-ю часть года (понимаемую как стандартный купонный период). Соответственно, основной денежной единицей является размер $C_*\equiv C_*^{(p)}$ регулярного купона, а основной процентной ставкой – *эффективная* ставка купона за купонный период $c_*=\dfrac{C_*}{F}$ (которая равна p-й доле *номинальной* годовой купонной ставки $c\equiv c^{(p)}$). В этом случае с математической точки зрения нет никакой разницы между облигациями с ежегодным купоном и облигациями, выплачивающеми купон p раз в год. Поэтому можно выводить формулы только для облигаций с ежегодным купоном, а использовать их (при соответствующей интепретации переменных) для облигаций с любой частотой p купонных выплат.

Если нужно рассчитать размер процентной выплаты C' не за весь купонный период (длиной s дней), а лишь за его часть (длиной r дней), то применяют принцип простых процентов. Если в качестве единицы времени берётся длина купонного периода, то длина этой части есть $t=r/s$. Поэтому

$C' = C_*^{(p)} t = c_*^{(p)} tF$. Если в качестве основной единицы времени брать год, а не купонный период (длина которого равна p-й части года), то длина рассматриваемой части купонного периода равна t/p. Соответственно, $C' = c_*^{(p)} \cdot F \cdot t/p = c^{(p)} Ft = Ct$.

Купонный процент устанавливается, исходя из доходности, которую обещают аналогичные (по надёжности, срокам и т.д.) финансовые инструменты – эту доходность называют преобладающей (prevailing [prɪ'veɪlɪŋ] interest rate). Если преобладающая доходность постоянна, то естественно купонный процент установить равным этой доходности. Тогда, как мы увидим позже, облигации можно продать по номиналу (at par). Однако эта доходность постоянно меняется. Поэтому при планировании выпуска обычно берут некоторую среднюю цифру. На рынке обращается большое число облигаций, выпущенных в разные моменты в прошлом. Их купонные ставки дают представление о том, как менялись проценты по займам в прошлом.

Купонный процент всегда учитывает и инфляцию за время до погашения. Для стандартных облигаций купонный процент *включает ожидаемую* инфляцию. Для индексируемых облигаций купонный процент *добавляется* к *реальной* инфляции и потому он ниже, чем в случае стандартных облигаций.

Если в момент размещения преобладающая доходность будет выше купонной, эмитент будет вынужден согласиться на соответствующее уменьшение цены, чтобы компенсировать эту разницу (иначе у него не будут покупать облигации) – в этом случае говорят, что облигация продаётся с дисконтом (at a discount). С другой стороны, если в момент размещения преобладающая доходность будет ниже купонной, эмитент сможет продать облигации по цене выше номинала – в этом случае говорят, что облигация продаётся с премией (at a premium).

Применяется и другая схема. В проспекте эмиссии заранее фиксируется *цена размещения облигаций* (обычно она равна номиналу), а при размещении облигаций купонная ставка определяется по итогам проведения аукциона (конкурса) среди потенциальных покупателей.

Теперь разберём несколько реальных примеров.

Пример 1. В качестве примера облигации с ежегодным купоном возьмём облигации компании Nestlé Finance International Ltd, которые мы рассматривали в предыдущем пункте. В соответствии с проспектом эмиссии эти облигации номинированы в евро, общий объём выпуска равен €500,000,000, купонный процент $c = 2.125\%$, цена размещения (issue price) – 99.709% от номинала, дата выпуска – 12 сентября 2013 года, дата погашения – 10 сентября 2021 года, купоны будут выплачиваться 10 сентября каждого года, с 10 сентября 2014 года до 10 сенября 2021 года – всего 8 купонов.

В соответствии с данными выше определениями, размер каждой купонный выплаты, *исключая первую*, для облигации номиналом $F = €1000$

равен $cF \equiv C = €21.25$. Длина *короткого* первого купонного периода составляет $t = 363/365$ года. Соответственно, первый купон равен $ctF = 2.125\% \cdot \frac{363}{365} \cdot €1000 = €21.13$ (€10566780.82 за весь выпуск), как и указано в пункте 15d проспекта.

Сама компания Nestlé занимается производством продуктов питания. Поэтому, как обычно, для размещения такого значительного займа (полмиллиарда евро) был создан синдикат (syndicate ['sındıkət]) из 14 крупных *финансовых* институтов: Banko Santander, HSBC Bank, J.P.Morgan Securities, Société Générale и т.д., которые выкупили весь выпуск – 4 упомянутых банка приобрели облигаций на €53750000 номинала каждый, а 10 остальных – на €28500000 номинала каждый. Члены синдиката (bookrunners, dealers) затем продают их своим клиентам по ценам, учитывающим текущую рыночную ситуацию на момент совершения сделки, и ведут необходимый учёт. Члены синдиката приобрели облигации по цене P=€997.09 за F=€1000 номинала, что принесло компании Nestlé €498545000. Из этой суммы Nestlé выплатила членам синдиката комиссию в размере 0.275% от номинала приобретённых облигаций (€1375000 за весь выпуск), так что чистыми компания Nestlé получила сумму €497170000.

Пример 2. В качестве примера облигации с полугодовым купоном возьмём облигации банка LloydsTSB, которые мы рассматривали в предыдущем пункте. В соответствии с проспектом эмиссии эти облигации номинированы в фунтах, общий объём выпуска равен £75,000,000, купонный процент – c=5.375% , цена размещения – 100% от номинала, дата выпуска – 21 июня 2010 года дата погашения – 7 сентября 2015 года (через 5 лет после выпуска). Соответственно, купоны будут выплачиваться 7 марта и 7 сентября каждого года, начиная с 7 сентября 2010 года до 7 сентября 2015 года – всего 11 купонов.

Если в качестве основной единицы времени взять длину стандартного купонного периода (6 месяцев), то эффективная купонная ставка равна $c_* = \frac{5.375\%}{2} = 2.6875\%$. Следовательно, размер каждой купонный выплаты, *исключая первую*, для облигации номиналом $F = £100$ равен $C_* = c_* F = £2.6875$.

Теперь рассчитаем величину первого купона. Как мы видели в предыдущем разделе, первый (короткий) купонный период составляет $t = 78/184 \approx 0.423913$ стандартного купонного периода. Значит, первый купон равен $C_* t = £2.6875 \cdot \frac{78}{184} \approx £1.139266$ (как и указано в п.15(iv) проспекта) – округление суммы купона до 6 знаков после запятой для облигаций номиналом £100 является стандартной практикой.

Пример 3. Алгоритм вычисления купонных выплат меняется, если для вычислении длин временных промежутков используется другой метод. Например, для ОФЗ-25082-ПД расчёты базируются на методе Actual/365F.

Поскольку купонный процент равен 6%, а стандартные купонные периоды имеют длину 182 дня, купонная выплата для облигации номиналом $F=1000$ руб. равна $1000\cdot\frac{182}{365}\cdot 0.06=29$ руб. 92 коп. (полученная в ходе вычислений сумма округлена до целого числа копеек).

Пример 4. Для ГСО-35001-ППС купонный процент равен 6.1%, а стандартные купонные периоды имеют длину 91 день. Поэтому стандартная купонная выплата для облигации номиналом $F=1000$ руб. равна $1000\cdot\frac{91}{365}\cdot 0.061=15$ руб. 21 коп. Первый купонный период состоит из 125 дней. Поэтому первый купон равен $1000\cdot\frac{125}{365}\cdot 0.061=20$ руб. 89 коп. Здесь, как обычно, вычисленные суммы округлены до целого числа копеек.

Методика Actual/365F, как нетрудно видеть, следует идеологии расчёта процентов по банковским вкладам, описанной в гл.1

5.3 Цена облигации

5.3.1 Принцип определения цены

Предположим, что в момент $t=0$ по цене P приобретена облигация номинальной стоимостью F, со сроком до погашения T лет, которая выплачивает n купонов величиной $C_1,\ldots,C_n$ в моменты $0\le t_1<\ldots<t_n=T$ соответственно. Уплачивая за облигацию сумму P, инвестор фактически даёт эту сумму в долг (часто суммой займа естественнее считать номинал F). При этом инвестор, конечно, предполагает, что на невыплаченную часть долга будет начисляться определённый процент (по формуле сложных процентов) в соответствии с некоторой эффективной годовой процентной ставкой i. Купонные платежи можно рассматривать как выплату процентов по долгу, а выплату номинала в день погашения – как возврат суммы займа (и выплату части процентов). Поэтому мы можем применять теорию, изложенную в главе 3; в обозначениях этой главы: $P=L_0$ – это сумма займа; возврат взятой в долг суммы и процентов производится выплатой сумм $P_1\equiv C_1, P_2\equiv C_2,\ldots,P_n\equiv C_n+F$ в моменты $t_1,t_2,\ldots t_n=T$ соответственно.

Как мы отметили в разделе 4.5.2, проценты, под которые деньги даются в долг, можно рассматривать и как внутреннюю ставку дохода для инвестиции в облигацию, *если* её владелец будет держать эту облигацию до момента погашения. Поэтому i называют *эффективной годовой доходностью к погашению* (yield [ji:ld] to maturity [mə'ʧuərətı] (YTM) или redemption [rı'dempʃ(ə)n] yield). Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы будем обозначать эффективную годовую доходность облигации к погашению y (а не i) и для краткости называть просто доходностью. Для соответствующей интенсивности

процентов $\ln(1+y)$ мы будем использовать обозначение δ_y, для коэффициента дисконтирования $1/(1+y)$ – обозначение v_y, а для учётной ставки $1-v_y \equiv y/(1+y)$ – обозначение d_y.

Доходность к погашению показывает, под какие проценты инвестор готов давать деньги в долг на заданный срок (до погашения) и на заданных условиях (частота и размер купона). Эта процентная ставка зависит от многих факторов: доходности, которую обещают аналогичные (по надёжности, срокам и т.д.) финансовые инструменты, прогноза относительно инфляции в будущем, склонности инвестора к риску, инвестиционного горизонта, характера обязательств и т.д. Поэтому для разных инвесторов требования к доходности к погашению немного отличаются.

Чем больше риск дефолта по облигациям, тем бóльшую доходность к погашению требуют инвесторы. Государственные облигации, номинированные в валюте страны эмитента, практически не имеют риска невыполнения обязательств, т.к. государство всегда может напечатать нужную сумму денег (впрочем, по облигациям развивающихся стран риск дефолта может быть довольно значительным). Поэтому, например, для облигаций, номинированных в долларах США, при прочих равных условиях наименьшую доходность имеют облигации казначейства США. Выплаты по корпоративным облигациям, в конце концов, производятся из прибыли эмитента. Гарантировать прибыльность бизнеса нельзя. Поэтому вложения в корпоративные облигации связаны с определённым риском. Платой за этот риск является более высокая доходность по сравнению с аналогичными по сроку до погашения и выплате купонов государственными облигациями. Разница между доходностью, которую требуют инвесторы по таким облигациям и доходностью по государственным облигациям США (в случае облигаций, номинированных в долларах США) называется *премией за риск* (*неуплаты*) – default premium. Если рейтинговые агенства ухудшают кредитный рейтинг эмитента, то это немедленно приводит к росту премии за риск.

Но в любом случае инвестор всегда ясно понимает, какую эффективную годовую доходность y должна обеспечить покупка облигации, *если* он будет держать эту облигацию до момента погашения.

Применяя формулу (3.10) из гл.3, мы получим следующее соотношение для цены облигации при заданном значении доходности к погашению y:

$$P = \sum_{k=1}^{n} C_k (1+y)^{-t_k} + F(1+y)^{-t_n}. \qquad (5.1)$$

Это равенство говорит, что цена облигации равна текущей стоимости потока выплат по облигации, причём техническая процентная ставка, используемая для дисконтирования, равна требуемой доходности y.

Из соотношения (5.1) очевидно вытекает несколько простых свойств цены облигации как функции $P(y)$ от требуемой доходности:

(1) при нулевой доходности цена равна $\sum_{k=1}^{n} C_k + F$, т.е. общей сумме S всех средств, которые получит владелец облигации (если он будет держать её от момента приобретения до момента погашения),

(2) по мере роста требуемой доходности цена монотонно убывает и выпукла вниз,

(3) при $y \to +\infty$ цена $P(y)$ стремится к 0, а при $y \to -1$ – к $+\infty$.

Отсюда, в частности, следует, что существует доходность $y_0 \in (0;+\infty)$ такая, что:

(1) при $-1 < y < y_0$ цена облигации больше её номинала; в этом случае говорят, что облигация продаётся с премией – at a premium, а сама облигация называется премиальной – premium ['pri:mıəm] bond[5];

(2) при $y = y_0$ цена облигации равна её номиналу; в этом случае говорят, что облигация продаётся по нарицательной стоимости – at par;

(3) при $y > y_0$ цена облигации меньше её номинала; в этом случае говорят, что облигация продаётся с дисконтом – at a discount; а сама облигация называется дисконтной – discount bond (если цена меньше 20% номинала, то используют термин deep-discount [ˌdi:pdıs'kaunt] bond – буквально: «облигация, продающаяся со значительной скидкой»).

Типичный график функции $P(y)$ выглядит так, как показано на рис.5.6.

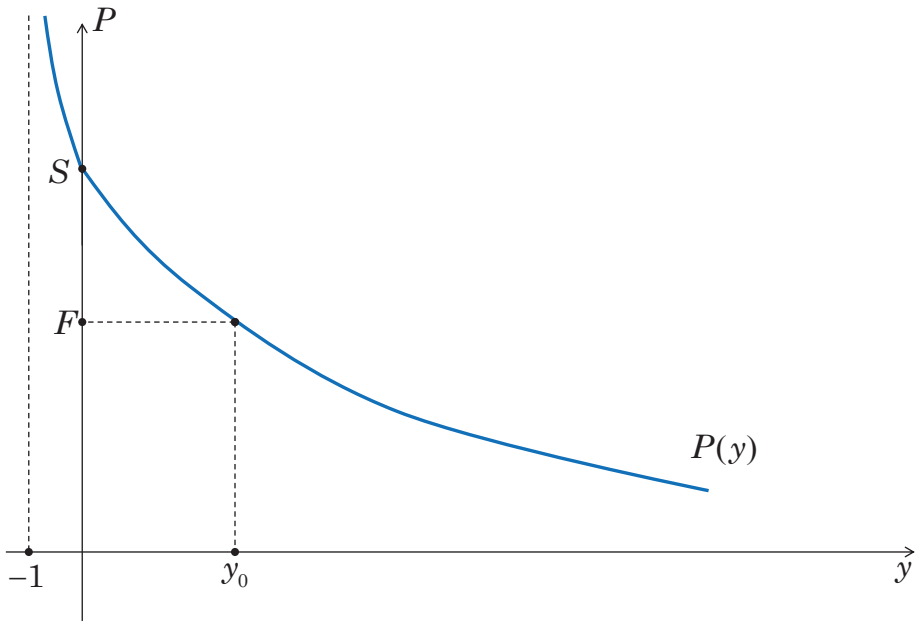


Рис. 5.6

[5] В Великобритании термин premium bond употребляется также для специальных бескупонных облигаций, по которым регулярно разыгрываются не облагаемые налогом денежные призы (до 1 миллиона фунтов).

В нормальной ситуации доходность *к погашению*, конечно, является положительной величиной – любой займодавец рассчитывает на определённый доход, когда даёт деньги в долг. Иначе говоря, в нормальной ситуации цена облигации всегда меньше, чем общая сумма денег, которую инвестор получит, если будет держать облигацию до погашения: $P < S$. Поэтому на рис. 5.6 реальный интерес представляет только часть графика, лежащая в полуплоскости $y > 0$.

Но в последние годы сложилась парадоксальная ситуация, когда для некоторые выпусков правительственных облигаций самых развитых стран (Японии, Швейцарии, Германии, Франции) доходность к погашению отрицательна. Как видно из рис. 5.6, это означает, что цена облигации больше абсолютной суммы всех будущих выплат. Иначе говоря, приобретая облигацию, инвестор фактически платит эмитенту за то, что тот взял у него деньги в долг. В июле 2016 года общий мировой объём рынка облигаций с отрицательной доходностью составлял около 12 триллионов долларов США. Из недавних примеров можно упомянуть размещение в июле 2016 года 10-летних облигаций немецкого правительства с доходностью к погашению $y = -0.05\%$ и швейцарских 42-летних облигаций с доходностью к погашению $y = -0.023\%$.

Есть несколько причин, по которым инвесторы покупают облигации с отрицательной доходностью к погашению:

1. По закону страховые компании, пенсионные фонды, банки обязаны держать часть своих средств в облигациях правительств своих стран. Поэтому даже при отрицательной доходности к погашению, они вынуждены приобретать такие облигации.
2. В условиях падения цен на сырьевые активы, акции, дефолтов по корпоративным обязательствам, отрицательных ставок по депозитам в банках инвесторы предпочитают иметь небольшие потери от инвестиций в правительственные облигации, чем гораздо большие потери от других способов вложения своих средств.
3. Некоторые инвесторы считают, что доходность облигаций и дальше будет падать. Тогда в соответствии с Рисунком 5.6 цены на облигации ещё вырастут и они смогут заработать.
4. Некоторые инвесторы готовы покупать облигации тех стран, валюта которых по их мнению имеет перспективы значительного роста по отношению к другим валютам.

Отрицательную доходность к погашению не следует путать с отрицательной доходностью от вложения средств в облигации, когда облигация приобретается со спекулятивной целью, в расчёте на то, что через некоторое время цена на неё вырастет и её можно будет продать с выгодой. В этом случае нельзя исключить и того, что цена облигации упадёт и тогда доходность вложения в облигацию окажется отрицательной.

Если задана интенсивность процентов $\delta_y = \ln(1+y)$, то цена вычисляется по формуле

$$P = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{-\delta_y t_k} + F e^{-\delta_y t_n}, \tag{5.2}$$

а если коэффициент дисконтирования $v_y = (1+y)^{-1}$, то по формуле

$$P = \sum_{k=1}^{n} C_k v_y^{t_k} + F v_y^{t_n}. \tag{5.3}$$

Перед тем как покупать облигации некоторого типа, инвестор может, исходя из своих требований к доходности, по формуле (5.1) (или (5.2), (5.3)) вычислить их цену, сравнить эту цену с ценой, по которой облигации продаются/покупаются на рынке, и принять решение, стоит ли покупать эти облигации и на какую сумму (или, наоборот, следует продать облигации, приобретённые ранее).

При всей простоте формулы (5.1) её практическое применение предполагает прояснение массы вопросов. Важнейший из них – какие числовые значения подставлять вместо переменных t_i или, что то же самое, как измерять длины временных промежутков? Мы уже знаем, что для вычисления этих величин применяют разные соглашения. Но какой следует использовать для конкретной анализируемой облигации? Без ответа на этот и многие другие аналогичные вопросы финансовая математика становится обычной для современной математики «игрой разума».

Ниже мы будем излагать теорию для принципа Actual/Actual (ICMA), следуя документам Ведомства по управлению долгом Министерства финансов Соединённого Королевства (*Formulae for Calculating Gilt Prices from Yields*. United Kingdon Debt Management Office. 3rd ed., 16 March 2005; *UK Government Securities: a Guide to 'Gilts'*. United Kingdon Debt Management Office. 10th ed., June 2012 и т.д.) и Лондонской фондовой биржи (*Trading Bonds on the London Stock Exchange: A Guide for Private Investors*, London Stock Exchange plc., January 2010. и др.). Формулы для расчёта правительственных облигаций США аналогичны; детали можно найти в Code of Federal Regulation, Title 31 – Money and Finance: Treasury, Subtitle B, Chapter II, Subchapter B, part 356 – Sale and Issue of Marketable Book-Entry Treasury Bills, Notes, and Bonds, Appendix B – Formulas and Tables.

5.3.2 Цена стандартной облигации

Для облигаций с регулярной выплатой процентов общая формула (5.1) может быть упрощена. Рассмотрим, например, облигацию номиналом F с выплатой купона раз в год по ставке $c = C/F$ и предположим, что до момента погашения будет выплачено n купонов, *причём все купонные периоды равны* 1 (т.е. момент $t = 0$ определения цены – квази-купонный момент; см. рис. 5.7).

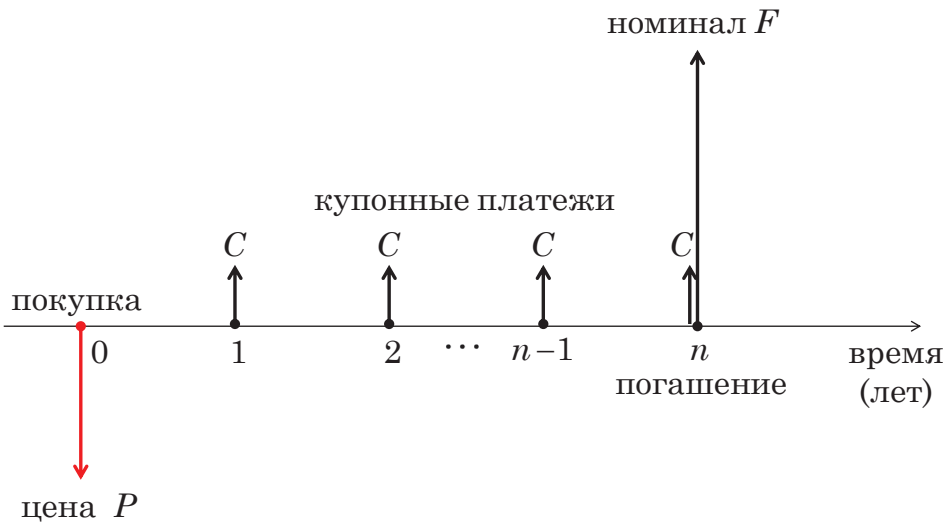


Рис. 5.7

Поток купонных выплат образует постоянную запаздывающую ренту с ежегодной выплатой суммы $C = cF$ и, значит, его текущая стоимость равна $cFa_{\overline{n}|}$. Текущая стоимость выплаты нарицательной стоимости облигации при погашении равна $F(1+y)^{-n}$. Значит, при заданной доходности к погашению y цена облигации в момент $t = 0$ вычисляется по формуле $P = F\left(ca_{\overline{n}|@y} + (1+y)^{-n}\right)$. Вспоминая формулу для текущей стоимости стандартной отложенной ренты, мы получим:

$$P = F\left(c\frac{1-(1+y)^{-n}}{y} + (1+y)^{-n}\right). \qquad (5.4)$$

Формула (5.4) можно применить и в случае $n = 0$, который соответствует моменту времени непосредственно перед погашением (но после выплаты последнего купона). Ясно, что в этой ситуации цена равна номиналу.

Из (5.4) нетрудно вывести, что рассматриваемая облигация продаётся по номиналу тогда и только тогда, когда $y = c$, т.е. требуемая доходность равна купонной ставке. Значит, при $y > c$ облигация будет продаваться с дисконтом, а при $y < c$ – с премией.

Предположим, например, что только что выпущена трёхлетняя облигация номиналом £1000, которая платит купон раз в год по ставке $c = 8\%$ годовых (всего $n = 3$ купона). Если мы хотим получить от её приобретения доходность к погашению $y = 12\%$, то в соответствии с формулой (5.4) заплатить за эту облигацию нужно цену $P = £903.93$. Таким образом, облигация будет приобретена с дисконтом – этот результат следовало ожидать из общих соображений, т.к. $y = 12\% > c = 8\%$.

Применим теперь соотношение (5.4) для изучения динамики цены P как

функции $P(n)$ числа n невыплаченных купонов, *предполагая, что доходность к погашению не меняется*. Для этого вычислим изменение цены, $P(n-1)-P(n)$, за один купонный период. Нетрудно показать, что

$$P(n-1)-P(n)=F\cdot(y-c)(1+y)^{-n}.$$

Отсюда ясно, что:

- при $y=c$ (когда требуемая доходность к погашению равна купонной доходности, так что облигация продаётся по номиналу) цена облигации не меняется при уменьшении числа n невыплаченных купонов (она всё время равна номиналу);
- при $y>c$ (так что облигация продаётся с дисконтом) функция $P(n)$ монотонно убывает, т.е. цена облигации увеличивается при уменьшении числа n невыплаченных купонов:

$$P(n)<P(n-1)<\ldots<P(1)=F\frac{1+c}{1+y}<P(0)=F;$$

- при $y<c$ (так что облигация продаётся с премией) цена облигации уменьшается при уменьшении числа n невыплаченных купонов:

$$P(n)>P(n-1)>\ldots>P(1)=F\frac{1+c}{1+y}>P(0)=F.$$

Отметим, что этот анализ относится только к ценам облигаций в квазикупонный момент.

Для облигаций, выплачивающих купон p раз в год, под доходностью к погашению y понимают номинальную годовую доходность (nominal redemption yield) $y^{(p)}$ (так же, как под купонной ставкой c понимают номинальную ставку $c^{(p)}$). Иными словами, если, например, говорят, что доходность облигации, которая платит купон $p=4$ раза в год, равна $y=12\%$, то это означает, что за каждый купонный период (длина которого равна 1/4 года, т.е. 3 месяца) проценты на невыплаченную часть долга начисляются в соответствии с эффективной процентной ставкой 3%. Для расчётов удобно взять p-ю часть года (т.е. длину стандартного купонного периода) в качестве основной единицы времени. В этом случае эффективная купонная ставка равна $c^{(p)}/p$, а эффективная доходность к погашению – $y^{(p)}/p$. Теперь ситуация, в сущности, не отличается от случая выплаты купона раз в год, так что можно использовать формулу (5.4) для облигаций с ежегодным купоном (при соответствующей интерпретации переменных). Следовательно, если $t=0$ – квазикупонный момент, то формула (5.4) для цены такой облигации даёт (ниже T – срок до погашения, $n=Tp$ – общее число оставшихся купонных выплат):

$$P = F\left(c^{(p)} \frac{1-\left(1+\frac{y^{(p)}}{p}\right)^{-Tp}}{y^{(p)}} + \left(1+\frac{y^{(p)}}{p}\right)^{-Tp} \right). \qquad (5.5)$$

Из (5.5) нетрудно вывести, что рассматриваемая облигация продаётся по номиналу тогда и только тогда, когда $y^{(p)} = c^{(p)}$, т.е. требуемая (номинальная) доходность равна (номинальной) купонной ставке. Значит, при $y^{(p)} > c^{(p)}$ облигация будет продаваться с дисконтом, а при $y^{(p)} < c^{(p)}$ – с премией.

Предположим, например, что только что выпущена трехлетняя облигация номиналом £1000, которая платит купон два раза в год по (номинальной) ставке $c^{(2)} = 8\%$ годовых (всего n=6 купонов). Если мы хотим получить от её приобретения доходность $y^{(2)} = 12\%$, то в соответствии с формулой (5.5) заплатить за эту облигацию нужно цену $P = £901.65$.

5.3.3 Риск изменения процентной ставки

Предположим, что фиксированы основные параметры облигации: номинал F, срок до погашения T, число n оставшихся купонных выплат, их размеры $C_1,\ldots,C_n$ и купонные моменты $0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Тогда цена облигации однозначно определяется доходностью к погашению y, которую требует рынок для финансовых инструментов такого рода. Но эта доходность не является постоянной величиной, а постоянно меняется в зависимости от многих факторов, предвидеть которые нельзя. Соответственно постоянно меняется и цена облигации: при уменьшении y она растёт, а при росте – падает. Поэтому, если инвестор не намерен держать облигацию до погашения, а хочет продать её через некоторое время, то он не может точно предсказать, какую сумму ему удастся выручить. Эта неопределённость будущей цены облигации, связанная с неопределённостью процентных ставок в будущем, называется *процентным риском* (interest rate risk). От этого риска несвободны даже правительственные облигации США, Великобритании и других стран с высокоразвитой экономикой и финансовой системой, которые являются безрисковыми только в том смысле, что гарантируют выплату обещанных купонов и номинала.

Чтобы проиллюстрировать эти общие соображения, рассмотрим простой пример. Предположим, что инвестор приобрёл только что выпущенную 5-летнюю облигацию номиналом $F = \$100$, которая платит купон раз в год по ставке $c = 5\%$. Предположим, далее, что в этот момент рынок требует от подобных инструментов годовую доходность $y = 5\%$ (совпадение купонного процента и доходности к погашению – типичная ситуация при выпуске новых облигаций). Тогда, как мы знаем, цена облигации равна её номиналу, т.е. $P = \$100$.

Допустим, что через год, после получения первой купонной выплаты,

инвестор захочет продать облигацию. Если в этот момент рынок всё ещё требует доходность $y = 5\%$, то (поскольку $c = y$) цена облигации равна номиналу, т.е. \$100, и потому после продажи облигации инвестор выручит \$100, т.е. ту же сумму, которую он заплатил за облигацию год назад. С учётом купонной выплаты в размере \$5 инвестор получит после продажи облигации сумму \$105, что означает годовой доход в размере 5%.

Предположим, однако, что рыночная ситуация изменилась и теперь рынок требует доходность $y = 6\%$. Тогда, в соответствии с (5.4), цена облигации будет равна

$$P = \$100 \cdot \left(0.05 \frac{1 - 1.06^{-4}}{0.06} + 1.06^{-4} \right) \approx \$96.53 .$$

Поэтому на продаже облигации инвестор потеряет примерно \$3.47. С учётом купонной выплаты в размере \$5 инвестор получит после продажи облигации сумму \$101.53, что означает годовой доход в размере 1.53% (а не 5% как было бы, если бы доходность к погашению не изменилась и осталась равной 5%).

Однако не исключена и обратная ситуация, когда требуемая доходность к погашению не вырастет, а упадёт, скажем, до 4%. Тогда, в соответствии с (5.4), цена облигации будет равна

$$P = \$100 \cdot \left(0.05 \frac{1 - 1.04^{-4}}{0.04} + 1.04^{-4} \right) \approx \$103.63 .$$

В этом случае при продаже облигации инвестор заработает примерно \$3.63. С учётом купонной выплаты в размере \$5 инвестор получит после продажи облигации сумму \$108.63, что означает годовой доход в размере 8.63% (а не 5% как было бы, если бы доходность к погашению не изменилась и осталась равной 5%).

Влияние небольших изменений требуемой доходности на цены облигаций можно описать количественно с помощью простых, но достаточно точных приближённых формул. С этой целью рассмотрим общую купонную облигацию номинальной стоимостью F, до погашения которой осталось T лет и по которой будет выплачено ещё n купонов величиной $C_1, \ldots, C_n$ в моменты $0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ соответственно (как обычно, $t = 0$ – текущий момент). Если в настоящий момент рынок требует доходность к погашению y, то в соответствии с (5.1) цена облигации равна

$$P(y) = \sum_{k=1}^{n} C_k (1 + y)^{-t_k} + F(1 + y)^{-t_n} .$$

Предположим, далее, что на самом деле требуемая рынком доходность к погашению немного отличается от предполагаемой, т.е. равна $y + \Delta$, где $\Delta \to 0$. Поэтому реальная цена облигации равна

$$P(y+\Delta)=\sum_{k=1}^{n}C_k(1+y+\Delta)^{-t_k}+F(1+y+\Delta)^{-t_n}.$$

Если $\Delta\to 0$, то относительное изменение цены облигации $\big(P(y+\Delta)-P(y)\big)\big/P(y)$ в результате изменения доходности к погашению, используемой для расчёта цены, с точностью до бесконечно малых высшего порядка будет равно

$$\frac{P'(y)}{P(y)}\cdot\Delta=-\frac{1}{1+y}\frac{\sum_{k=1}^{n}t_kC_k(1+y)^{-t_k}+Ft_n(1+y)^{-t_n}}{\sum_{k=1}^{n}C_k(1+y)^{-t_k}+F(1+y)^{-t_n}}\cdot\Delta=-\frac{MDT}{1+y}\cdot\Delta\equiv -MDT_{\text{mod}}\cdot\Delta,$$

где *MDT – средний дисконтированный срок до погашения* (mean discount term, Macaulay duration), а $MDT_{\text{mod}}=\dfrac{MDT}{1+y}$ *– модифицированный срок до погашения* (modified duration) для денежного потока $\big(C_1,t_1\big),\ldots,\big(C_{n-1},t_{n-1}\big),\big(C_n+F,t_n\big)$ (см. Раздел 2.3 Главы 2).

Таким образом, если требуемая доходность к погашению увеличится (уменьшится) на $|\Delta|=1\%$ в абсолютном выражении, т.е. на 100 процентных пунктов, то цена облигации уменьшится (соответственно, увеличится) примерно на $MDT_{\text{mod}}\%$. Поэтому в качестве количественной меры процентного риска используют модифицированный срок до погашения.

Если вместо доходности к погашению y использовать соответствующую интенсивность процентов $\delta\equiv\delta_y$, то в силу (5.2)

$$P(\delta)=\sum_{k=1}^{n}C_ke^{-\delta t_k}+Fe^{-\delta t_n}.$$

При малом изменении мгновенно начисляемой доходности относительное изменение цены облигации $\big(P(\delta+\Delta)-P(\delta)\big)\big/P(\delta)$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка будет равно

$$\frac{P'(\delta)}{P(\delta)}\cdot\Delta=-\frac{\sum_{k=1}^{n}t_kC_ke^{-\delta t_k}+Ft_ne^{-\delta t_n}}{\sum_{k=1}^{n}C_ke^{-\delta t_k}+Fe^{-\delta t_n}}\cdot\Delta=-MDT\cdot\Delta.$$

Таким образом, если требуемая непрерывно начисляемая доходность к погашению увеличится (уменьшится) на $|\Delta|=1\%$ в абсолютном выражении, т.е. на 100 процентных пунктов, то цена облигации уменьшится (соответственно, увеличится) примерно на $MDT\%$. Поэтому в этом случае количественной мерой процентного риска будет средний дисконтированный срок до погашения.

Геометрически приближение

$$\frac{P(y+\Delta)-P(y)}{P(y)} \approx -MDT_{\text{mod}} \cdot \Delta$$

означает замену кривой $P(y)$ в окрестности данной точки касательной. Поскольку функция $P(y)$ выпукла вниз, $P(y+\Delta) > P(y) - P(y) \cdot MDT_{\text{mod}} \cdot \Delta$ или, что то же самое, $\big(P(y+\Delta)-P(y)\big)\big/P(y) > -MDT_{\text{mod}} \cdot \Delta$. Поэтому при $\Delta > 0$ верно неравенство $\big|P(y+\Delta)-P(y)\big|\big/P(y) < MDT_{\text{mod}} \cdot \big|\Delta\big|$, а при $\Delta < 0$ – неравенство $\big|P(y+\Delta)-P(y)\big|\big/P(y) > MDT_{\text{mod}} \cdot \big|\Delta\big|$. Таким образом, при $\Delta > 0$ реальное падение цены меньше, чем даёт использование MDT_{mod}, а при $\Delta < 0$ реальный рост цены больше, чем даёт использование MDT_{mod}. Иначе говоря, использование MDT_{mod} даёт пессимистическую (с точки зрения владельца облигации) оценку изменения цены при изменении процентной ставки, что вполне разумно.

Для облигации, рассмотренной в иллюстративном примере в начале этого раздела, в момент её продажи (когда до погашения осталось 4 года) $MDT_{\text{mod}} \approx 3.55$. Поэтому при увеличении (уменьшении) доходности $y = 5\%$ на 1% в абсолютном выражении цена облигации $P = \$100$ уменьшится (увеличится) примерно на \$3.55, что очень близко к реальным значениям (уменьшение на \$3.47, увеличение на \$3.63).

5.3.4 Чистая цена

Формулы (5.4) и (5.5) применимы только для вычисления цены облигации в квазикупонный момент. Но их можно модифицировать и на случай, когда момент $t = 0$ покупки расположен внутри купонного периода.

Чтобы не усложнять изложение второстепенными деталями, рассмотрим облигацию с выплатой купона раз в год и предположим, что в момент $t = 0$ покупки облигации после последней квази-купонной даты $t_0 = -\tau$ прошло некоторое время $\tau \in [0;1]$, а до выплаты очередного купона в момент $t_1 = 1 - \tau$ осталось время $1 - \tau$ (см. рис. 5.8).

Случай $\tau = 0$ означает, что облигация приобретается непосредственно после квази-купонной даты, а случай $\tau = 1$ – что облигация пробретается непосредственно перед квазикупонной датой (при этом мы будем считать, что в момент $t = 1$ производится выплата купона). Пусть, как и ранее, n – число оставшихся купонных выплат. Тогда момент выплаты k-го купона $t_k = k - \tau$, срок до погашения $T = n - \tau$.

Если для вычисления цены облигации использовать общую формулу (5.1), то мы получим:

$$P = cF\sum_{k=1}^{n}(1+y)^{-k+\tau} + F(1+y)^{-n+\tau} = (1+y)^{\tau}P(n), \qquad (5.6)$$

где $P(n)$ даётся (5.4). Этот же результат мы получим, если сначала по формуле

(5.4) найдём цену $P(n)$ облигации за год до получения первого купона (в квазикупонный момент $t_0 = -\tau$), а затем умножением на $(1+y)^{\tau}$ приведём эту сумму к моменту $t = 0$.

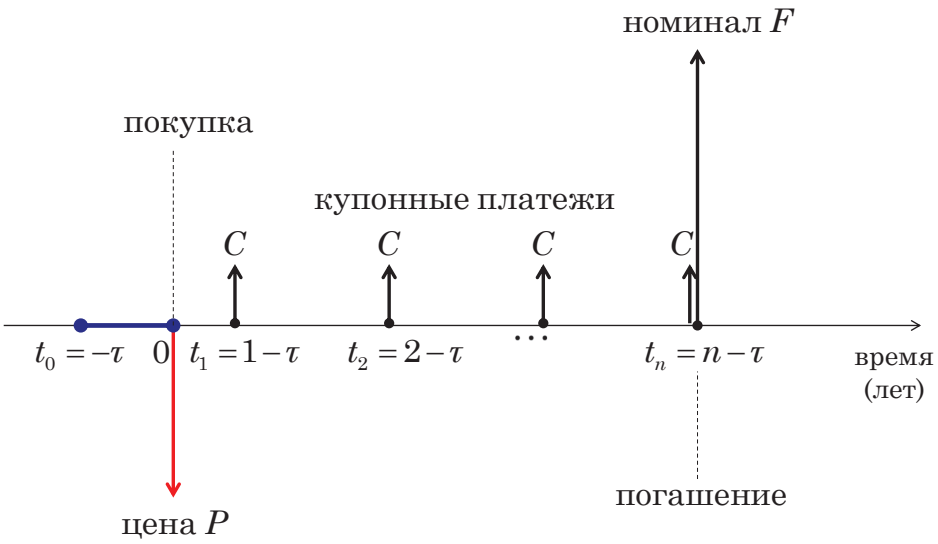


Рис. 5.8

Формула (5.6) может быть применена и для расчёта цены облигации, выплачивающей купон p раз в год. В этом случае единичным промежутком времени будет p-я часть года, под y нужно понимать эффективную доходность к погашению за новый единичный промежуток (т.е. $y = y^{(p)}/p$, где $y^{(p)}$ – номинальная годовая доходность к погашению), а под c – эффективную купонную ставку за новый единичный промежуток (т.е. p-ю часть номинальной купонной ставки).

Практическое применение формулы (5.6) содержит ряд важных нюансов, о которых мы расскажем на примере британских правительственных облигаций.

Рассмотрим двухлетнюю облигацию британского правительства номиналом F=£100, которая будет погашена 7 сентября 2016 года и выплачивает полугодовой купон по ставке $c = 4.00\%$ годовых, т.е., в абсолютных цифрах, $C = £2.00$ каждые полгода, 7 марта и 7 сентября (4% Treasury Gilt 2016). Предположим, что сегодня 12 ноября 2014 года (среда) и нам предлагают приобрести эту облигацию, утверждая, что сегодня её доходность к погашению равна 0.60%. Рассчитаем цену облигации.

Прежде всего отметим, что 0.60% – это номинальная доходность $y^{(2)}$. Иначе говоря, если мы в качестве основного промежутка времени выберем полугодие, то эффективная доходность будет равна 0.30%. Аналогично, купонная ставка 4% означает, что каждый полугодовой купон вычисляется исходя из эффективной ставки 2%. До момента погашения будет выплачено n=4 купона. Значит,

$$P(4) = £100 \cdot \left(0.02 \cdot \frac{1 - 1.003^{-4}}{0.003} + 1.003^{-4} \right) = £106.75.$$

Теперь нужно вычислить коэффициент $(1+y)^{\tau} = 1.003^{\tau}$. Ключевой момент – это длина τ промежутка времени от начала текущего купонного периода (7 сентября 2014 года) до момента приобретения облигации (следующий рабочий день после заключения сделки 12 ноября 2014 года, т.е. 13 ноября 2014 года), *если единицей времени является полугодие*, т.е. *число дней в текущем купонном периоде*. В нашем примере текущий купонный период состоит из $s = 181$ дней (для вычисления удобно использовать следующую формулу Microsoft Excel: =DATE(2015,3,7) – DATE(2014,9,7)), а промежуток от 7 сентября 2014 года (начало текущего купонного периода) до 13 ноября 2014 (день приобретения облигации) – из $r = 67$ дней. Поэтому $\tau = r/s = 67/181$, а $(1+y)^{\tau} = 1.003^{67/181}$.

Теперь мы пожем найти цену облигации. В соответствии с формулой (5.6) она равна £106.87. Для контроля обратимся к таблице в конце раздела 5.1.6. Там указана цена £106.13. В чём же дело?

Причина расхождения связана с тем, что, как мы уже отмечали, объявленная в этой таблице цена (quoted price) – это не реальная цена, которую должен заплатить инвестор, желающий приобрести облигацию, а так называемая чистая цена (clean price). Чистая цена рассчитывается как разность между реальной ценой (её называют «грязной» – dirty ['dəːtɪ] price) и *накопленным купонным доходом* (accrued [ə'kruːd] interest; сокращённо: НКД или AI). Прилагательное «накопленный=accrued» применяется в финансах в случаях, когда проценты ещё не выплачены, но их величина уже известна и предполагается, что через некоторое время они будут выплачены.

Накопленный купонный доход AI определяется следующим образом. Предположим что облигация приобретается внутри купонного периода длиной s дней, когда с его начала прошло r дней. Если длину купонного периода взять в качестве единицы времени, то время τ от начала текущего купонного периода до даты приобретения облигации равно r/s, а до выплаты очередного купона осталось время $(s-r)/s = 1-\tau$. Тогда очередной купон величиной C будет выплачен покупателю (новому владельцу облигации). Однако покупатель к этому моменту будет владеть облигацией лишь часть купонного периода ($s-r$ дней из s). Поэтому было бы справедливо разделить очередную купонную выплату C на две части, пропорционально времени владения облигацией, и считать, что на долю продавца приходится сумма $C\tau$. Эта сумма и называется накопленным купонным доходом:

$$AI = C\tau = C\frac{r}{s}. \tag{5.7}$$

В нашем случае накопленный купонный доход равен $£2 \cdot \frac{67}{181} = £0.74$.

Поэтому чистая цена P_{clean} равна $£106.87 - £0.74 = £106.13$, как и указано на сайте Bloomberg.

Дополнительные преимущества использования чистой цены вместо грязной связаны с динамикой цены облигации по мере приближения момента погашения. Чтобы не усложнять изложение второстепенными деталями, мы рассмотрим ситуацию, изображённую на рис. 5.7, и *предположим, что доходность к погашению не меняется на протяжении всего периода жизни облигации (от момента эмиссии до момента погашения).*

Применяя формулу (5.4), мы можем рассчитать цену облигации в момент $t_0 = 0$; она равна $P(n)$. Соотношение (5.6) говорит, что на промежутке [0;1) цена растёт по закону $(1+y)^{\tau} P(n)$ и непосредственно перед выплатой первого купона становится равной $(1+y)P(n)$. После выплаты первого купона (в размере cF) в момент $t_1 = 1$ цена уменьшится на cF до величины $(1+y)P(n) - cF = P(n-1)$, и т.д.

Предположим, например, что только что выпущена трёхлетняя облигация номиналом $F = £1000$, которая платит купон раз в год по ставке $c = 8\%$ годовых (всего $n = 3$ купона в размере $cF = £80$ каждый). Если в момент её выпуска аналогичные финансовые инструменты дают эффективную годовую доходность $y = 12\%$, то, как мы видели, заплатить за эту облигацию нужно цену $P(3) = £903.93$ (аргумент 3 указывает на число n купонов). Предположим, далее, что до момента погашения требуемая доходность не меняется. Тогда на протяжении первого года цена будет расти по закону $P(3) \cdot 1.12^{\tau}$ и непосредственно перед выплатой первого купона составит $£903.93 \cdot 1.12 \approx £1012.40$. После выплаты первого купона в момент $t_1 = 1$ цена уменьшится до величины $P(2) = £932.40$ (см. рис. 5.9, где графически показана зависимость цены этой облигации от времени, прошедшего с момента её выпуска).

На протяжении второго года цена будет расти по закону $P(2) \cdot 1.12^{\tau}$ и непосредственно перед выплатой второго купона составит $£932.40 \cdot 1.12 \approx £1044.29$. После выплаты второго купона в момент $t_2 = 2$ цена уменьшится до величины $P(1) = £964.29$. На протяжении третьего года цена будет расти по закону $P(1) \cdot 1.12^{\tau}$ и непосредственно перед погашением составит $£964.29 \cdot 1.12 \approx £1080.00$. После выплаты последнего купона в момент $t_3 = 3$ цена уменьшится до величины $P(0) = £1000.00$, т.е. сравняется с нарицательной стоимостью. Выплата нарицательной стоимости погасит облигацию и сведёт её цену к 0.

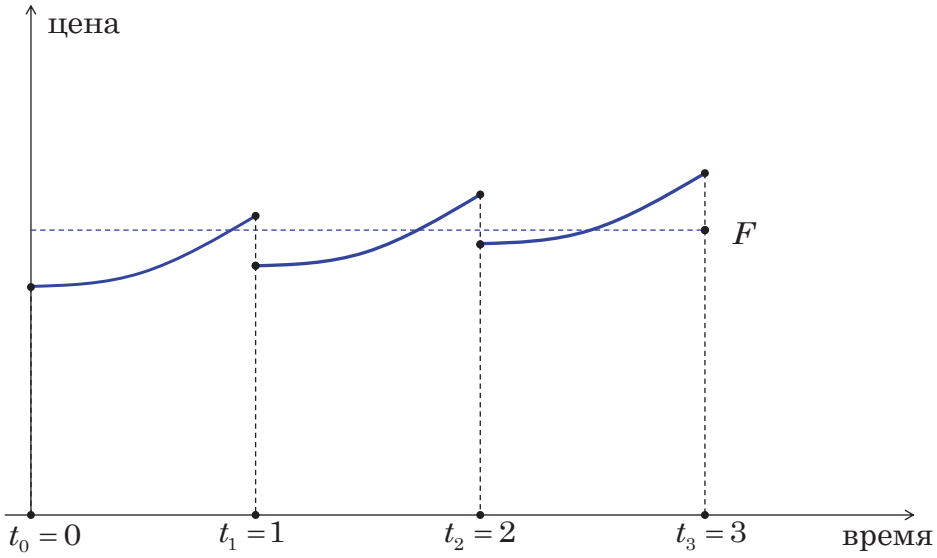


Рис. 5.9

Характерной особенностью графика, изображённого на рис. 5.9, являются разрывы в моменты купонных выплат и значительный рост цены внутри каждого купонного периода. Последний факт может быть неправильно интерпретирован неопытным инвестором. Например, при $\tau \approx 0.8913$ (с момента эмиссии прошло примерно 10 месяцев и 21 день) цена облигации будет равна $P(3) \cdot 1.12^{0.8913} = £1000.00$, т.е. сравняется с нарицательной стоимостью. Из этого факта неопытный инвестор может сделать ошибочный вывод о том, что процентная ставка, предлагаемая рынком для аналогичных финансовых инструментов, уменьшилась до купонной ставки 8%. На самом деле, цена растёт, главным образом, потому, что в случае продажи облигации в указанный момент покупатель (как новый владелец облигации) в момент $t_1 = 1$ получит купонный доход за весь первый год, хотя владеть облигацией он будет только немногим больше месяца. Вычитая накопленный доход в размере $cF\tau = £71.30$ мы мы немного сгладим этот рост и получим чистую цену примерно £928.70.

Для первого купонного периода (осталось $n = 3$ купонных выплаты) зависимость чистой цены $P_{\text{clean}}(3;\tau)$ этой облигации от τ даётся формулой: $P_{\text{clean}}(3;\tau) = 903.93 \cdot 1.12^{\tau} - 80\tau$. Полученные с её помощью численные данные приведены в Таблице 5.4. Мы видим, что в момент эмиссии ($\tau = 0$) чистая цена совпадает с грязной, $P(3) = £903.93$, а при $\tau \to 1 - 0$, т.е. при по мере приближения момента выплаты очередного купона, непрерывно и плавно переходит в очередную грязную цену $P(2) = £932.40$.

Таким образом, чистая цена: (1) точнее отражает влияние изменения процентных ставок на цену; (2) меняется непрерывно и более плавно.

Таблица 5.4

τ	$P_{\text{clean}}(3;\tau)$	τ	$P_{\text{clean}}(3;\tau)$	τ	$P_{\text{clean}}(3;\tau)$
0	903.93	0.35	912.50	0.70	922.56
0.05	905.07	0.40	913.85	0.75	924.12
0.10	906.23	0.45	915.22	0.80	925.71
0.15	907.43	0.50	916.63	0.85	927.34
0.20	908.65	0.55	918.07	0.90	928.99
0.25	909.91	0.60	919.53	0.95	930.68
0.30	911.19	0.65	921.03	1.00	932.40

В общем случае (*при сделанном предположении о неизменности доходности к погашению*) зависимость чистой цены от времени τ, прошедшего от начала текущего купонного периода, и числа n оставшихся купонов даётся формулой

$$P_{\text{clean}}(n;\tau) = (1+y)^{\tau} P(n) - cF\tau. \tag{5.8}$$

Поэтому $\lim\limits_{\tau\to 1-} P_{\text{clean}}(n;\tau) = (1+y)P(n) - cF = P(n-1) = \lim\limits_{\tau\to 0+} P_{\text{clean}}(n-1;\tau)$, что означает непрерывность зависимости чистой цены от времени, прошедшего с момента выпуска облигации. Кроме того, $P_{\text{clean}}(n;0) = P(n)$, т.е. в моменты купонных выплат чистая цена совпадает с грязной.

Для расчёта чистой цены стандартной облигации номиналом $F = 100$, которая платит купон p раз в год по (номинальной) ставке c, можно использовать функцию ЦЕНА (PRICE в английской версии) пакета Microsoft Excel. Её синтаксис: ЦЕНА(t_0, t_n, c, y, R, p, basis), где:

- t_0 – день приобретения облигации (не день совершения сделки купли/продажи!),
- t_n – дата погашения,
- $c \equiv c^{(p)}$ – (номинальная годовая) купонная ставка,
- $y \equiv y^{(p)}$ – (номинальная годовая) доходность к погашению,
- R – выкупная цена за 100 номинала,
- p – число купонов за год (может принимать значения 1, 2 или 4),
- basis – способ подсчёта дней (необязательный аргумент; см. Раздел 1.2).

Эта функция производит расчёт в соответствии с подходом, описанным в предыдущем разделе, т.е. по формуле

$$P = \frac{c}{p} F \sum_{k=1}^{n} \left(1 + y_*\right)^{-k+\tau} + R\left(1 + y_*\right)^{-n+\tau} - AI,$$

где $F = 100$ – номинал стандартной облигации, c/p – эффективная купонная ставка для p-й части года (один купонный период), $cF/p \equiv 100c/p$ – величина

одного купона, $y_* = y/p$ – эффективная доходность за p-ю часть года (один купонный период), τ – длина промежутка времени от начала текущего купонного периода до момента приобретения облигации, *если единицей времени является p-я часть года* (точнее говоря, $\tau = r/s$, где r – число дней от начала текущего купонного периода до момента приобретения облигации, s – число дней в текущем купонном периоде), $AI = cF\tau/p \equiv 100c\tau/p$ – накопленный купонный доход.

Для иллюстрации рассмотрим опять двухлетнюю облигацию британского правительства номиналом $F = £100$, которая будет погашена 7 сентября 2016 года и выплачивает полугодовой купон по ставке $c = 4.00\%$ годовых, т.е., в абсолютных цифрах, $C = £2.00$ каждые полгода, 7 марта и 7 сентября. Предположим, что сегодня 12 ноября 2014 года (среда) и нам предлагают приобрести эту облигацию, утверждая, что сегодня её доходность к погашению равна 0.60%. Чтобы рассчитать *чистую* цену этой облигации нужно

- формулами =DATE(2014,11,13) и =DATE(2016,09,07) ввести даты приобретения и погашения (например, в ячейки A1 и A2);
- в любую другую ячейку ввести формулу: =PRICE(A1,A2,0.04,0.006,100,2,1) (здесь последний аргумент, число 1, указывает на базис «Actual/Actual»).

В результате мы получим то же значение $106.127406 \approx 106.13$, что и раньше.

При расчёте цены размещения облигации с коротким первым купонным периодом мы имеем дело с ситуацией, показанной на рис. 5.10. Хотя она похожа на ситуацию, изображённую на рис. 5.8, важное отличие связано с тем, что, как мы видели в Разделе 5.2.2, размер первого купона, C_1, будет меньше размера $C = cF$ второго и последующих купонов (мы рассматриваем облигации с выплатой купона раз в год). Кроме того, основной переменной будет не длина τ промежутка времени от квазикупонной даты, непосредственно предшествующей дню эмиссии, до дня приобретения, а длина $t = \dfrac{s^*}{s}$ промежутка времени от дня эмиссии до даты выплаты первого купона (см. рис.5.4, где объяснён смысл переменных s^* и s), через которую выражается сумма первой купонной выплаты $C_1 = Ct$.

Если для вычисления цены облигации использовать общую формулу (5.1), то мы получим:

$$\begin{aligned} P &= cFt(1+y)^{-t} + cF\sum_{k=2}^{n}(1+y)^{-t-k+1} + F(1+y)^{-t-n+1} \\ &= (1+y)^{-t}F\left(ct + c\frac{1-(1+y)^{-n^*}}{y} + (1+y)^{-n^*}\right), \end{aligned} \tag{5.9}$$

где $n^* = n-1$ – число стандартных (полных) купонных периодов до даты погашения. Этот же результат мы получим, если сначала с помощью формулы

(5.4) найдём стоимость потока платежей в момент t_1 (она складывается из суммы короткого первого купона и приведённой к моменту t_1 стоимости последующих выплат), а затем умножением на $(1+y)^{-t}$ приведём эту сумму к моменту 0.

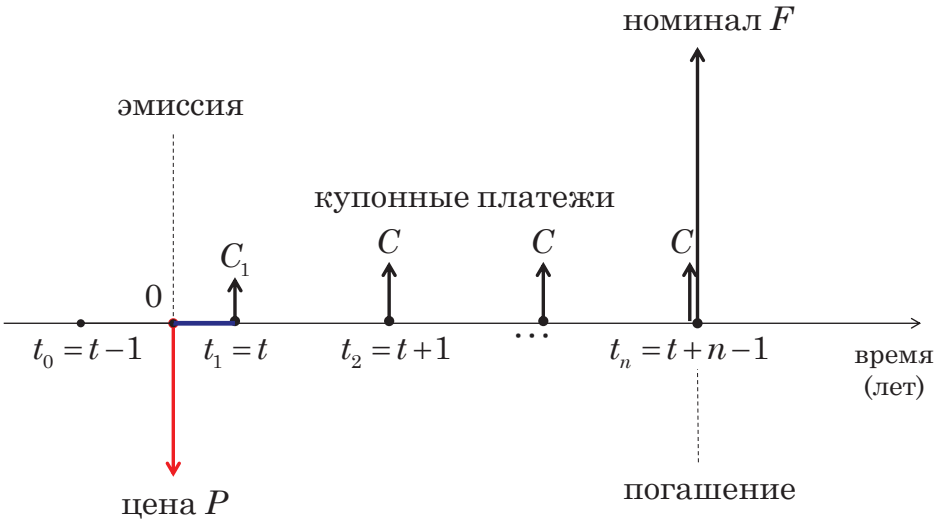


Рис. 5.10

В рассмотренной ситуации первый купон $C_1 = Ct$ меньше стандартного купона $C = cF$. Формула $C_1 = Ct$ отражает тот факт, что проценты начинают накапливаться только после размещения. Поэтому при покупке облигации в день размещения накопленный купонный доход равен 0. Если же после даты эмиссии прошло некоторое время, но день окончательного расчёта находится внутри короткого первого купонного периода, то накопленный купонный доход AI вычисляется по тому же принципу, что и раньше, т.е. по формуле:

$$AI = \frac{r^*}{s} \cdot C = \frac{r^*}{s^*} \cdot C_1, \qquad (5.10)$$

где r^* – точное число дней от даты эмиссии до дня окончательного расчёта, s – точное число дней в квазикупонном периоде, внутри которого расположена дата эмиссии, $C = cF$ – размер стандартного купона, s^* – точное число дней от даты эмиссии до ближайшей даты выплаты (короткого) купона величиной $C_1 = C \cdot \frac{s^*}{s}$.

При покупке облигаций правительства США в день размещения иногда покупателю приходится платить накопленный процент. Например, 13 августа 2009 года состоялся аукцион по размещению 30-летних облигаций (CUSIP Number 912810QC5), подлежащих погашению 15 августа 2039 года. Такие облигации размещаются 15 февраля, 15 мая, 15 августа, 15 ноября каждого года и именно с этой даты (она называется dated date) начинают начисляться проценты. Но в 2009 году 15 августа приходилось на субботу. Поэтому реально

днём размещения был понедельник 17 августа 2009 года; именно в этот день Министерство финансов получило от покупателей деньги, а покупатели – облигации. По результатам аукциона облигации цена размещения составила \$99.331386 за \$100 номинала, а купонная ставка установлена на уровне c=4½% годовых. Длина квазикупонного периода [15.08.2009;15.02.2010] равна 184 дня. Поэтому сумма накопленных процентов за 2 дня от 15.08.2009 до 17.08.2009 за \$100 номинала равна $\frac{4.5\%}{2}\cdot\frac{2}{184}\cdot\$100=\$0.024457.$

Чтобы проиллюстрировать применение формулы (5.9), вернёмся к Примеру 1 с облигациями компании Nestlé из раздела 5.2.2. Для этих облигаций: общий объём выпуска равен €500,000,000, купонный процент $c=2.125\%$, длина короткого первого купонного периода составляет $t=363/365$ года, всего будет выплачено $n=8$ купонов, так что $n^*=7$. В проспекте эмиссии, раздел 5 части B, указано, что $y=2.165\%$. Применяя формулу (5.9), мы найдём, что цена размещения для облигации номиналом F=€1000 равна €997.09, как и указано в пункте 5 проспекта.

Подобным же образом можно получить цену размещения облигации с длинным первым купонным периодом.

5.3.5 Бездивидендный период

При расчёте цен облигаций нужно иметь в виду ещё одно обстоятельство. Владелец облигации для целей выплаты купона определяется за несколько дней до даты фактической выплаты. Эта дата называется *датой утраты права на получение дивидендов* (ex[6]-dividend date), а промежуток времени от этой даты до даты выплаты купона называется *бездивидендным периодом* (ex-dividend period). Например, для британских правительственных облигаций длина бездивидендного периода равна 7 рабочих дней (10 дней для 3½% War Loan).

Если такая облигация продаётся до даты утраты права на получение дивидендов, то (с учётом правила T+1) она сменит владельца до даты утраты права на получение дивидендов или в этот день. Поэтому купон будет выплачен покупателю. В этой ситуации говорят, что облигация *торгуется с дивидендом* или *включая дивиденд* (cum[7] dividend). Если облигация торгуется с дивидендом, продавец имеет право на накопленный процент, который рассчитывается по приведённым выше формулам.

Если же если сделка купли/продажи состоялась в день утраты права на получение дивидендов или позже, но до дня выплаты купона, то (с учётом правила T+1) покупатель получит право собственности на облигации уже внутри бездивидендного периода. Соответственно, купон будет выплачен не реальному владельцу (покупателю), а продавцу. В этой ситуации говорят, что

---

[6] латинский предлог ex [eks] здесь употребляется в смысле «без».

[7] латинский предлог cum [kʌm] означает «с», «вместе с».

облигация *торгуется без дивиденда* (ex-dividend, exdiv или xd). Поскольку покупатель не получает купонную выплату, он не платит продавцу накопленный процент (который является частью купона). С другой стороны, покупатель будет владеть облигацией несколько дней до выплаты купона и имеет право на получение от продавца соответствующей доли купонной выплаты, т.е. право на частичный *возврат процентов* (rebate[8] interest), что уменьшает чистую цену. Скидка рассчитывается исходя из количества календарных дней от даты окончательного расчёта до даты выплаты купона.

Для стандартного купонного периода от даты окончательного расчёта до даты выплаты купона пройдёт $s-r$ дней, где, как и раньше, s – число дней в текущем купонном периоде, r – число дней от начала текущего купонного периода до даты окончательного расчёта, что составляет $\tau = \dfrac{s-r}{s} = 1-\dfrac{r}{s}$ (стандартных купонных периодов). Поэтому для облигации, торгуемой без дивидендов, возврат процентов равен

$$RI = \left(1-\frac{r}{s}\right)\cdot C. \tag{5.11}$$

Возврат процентов можно рассматривать как отрицательный накопленный процент. Поэтому иногда вместо величины RI используют величину AI, которую в данном случае вычисляют по формуле:

$$AI = -RI = \left(\frac{r}{s}-1\right)\cdot C. \tag{5.12}$$

Для короткого купонного периода от даты окончательного расчёта до даты выплаты купона пройдёт s^*-r^* дней, где, как и раньше, s^* – число дней в текущем коротком купонном периоде, r^* – число дней от дня эмиссии до даты окончательного расчёта, что составляет $\dfrac{s^*-r^*}{s}$ (стандартного купонного периода). Если s – число дней в текущем квазикупонном периоде, r – число дней от его начала до даты окончательного расчёта, то $r=(s-s^*)+r^*$ или, что то же самое, $s^*-r^*=s-r$. Поэтому возврат процентов равен

$$RI = \frac{s^*-r^*}{s}\cdot C = \left(1-\frac{r^*}{s^*}\right)\cdot C_1 = \left(1-\frac{r}{s}\right)\cdot C \tag{5.13}$$

Таким образом, для расчёта возврата процентов можно использовать одну и ту же формулу (5.11) как для стандартного, так и для короткого купонного периода. Соответствующий отрицательный накопленный процент равен

[8] rebate ['ri:beɪt] скидка, возврат переплаты; [rɪ'beɪt] делать скидку; уменьшать, сбавлять (цену).

$$AI = -RI = \left(\frac{r^*}{s^*} - 1\right) \cdot C_1 = \left(\frac{r}{s} - 1\right) \cdot C. \qquad (5.14)$$

В отличие от британских правительственных облигаций, правительственные облигации США всегда торгуются с дивидендом, т.е. вне зависимости от даты окончательного расчёта покупатель всегда получает очередной купон.

5.3.6 Цена рублёвых облигаций

Для рублёвых облигаций длины временных промежутков рассчитываются по принципу Actual/365F, а все купонные периоды (исключая, возможно, первый) состоят из фиксированного числа дней: $s = 182$ при выплате процентов 2 раза в год, $s = 91$ при выплате процентов 4 раза в год. Тогда стандартный купон равен $C = \frac{sc}{365} F$, где, как обычно, c – номинальная годовая купонная ставка, F – номинал облигации. При размещении первый купон, вообще говоря, отличается от стандартного и равен $C_1 = \frac{s^* c}{365} F$, где s^* – точное число дней от даты эмиссии до дня выплаты первого купона. Номинал F рублёвой облигации обычно равен 1000руб., а суммы $C = \frac{sc}{365} F$ и $C_1 = \frac{s^* c}{365} F$ округляются до целого числа копеек. Чтобы не загромождать изложение второстепенными деталями, мы будем считать, что все купонные периоды имеют одну длину, а с начала текущего купонного периода до дня приобретения облигации прошло r дней.

В этой ситуации: $\frac{c}{365}$ – проценты, начисляемые за 1 день, $\frac{c}{365} \cdot r$ – проценты, начисляемые за r дней, т.е. накопленный купонный доход в процентах от номинала. Соответственно, абсолютный НКД (в рублях) рассчитывается по формуле $AI = \frac{cr}{365} F$, или, что то же самое, по формуле $AI = \frac{r}{s} C = C\tau$, где $\tau = \frac{r}{s}$, т.е. фактически по формуле (5.7).

Рассчитаем, например, НКД при покупке ОФЗ-25082 номиналом $F = 1000$ руб. в понедельник 16 февраля 2015 года (Пример 3; купонный процент $c = 6\%$). Фактический расчёт по заключенной сделке будет произведён через 2 торговых дня, т.е. в среду 18 февраля 2015 года. Текущий купонный период [12.11.2014;13.05.2015] состоит из $s = 182$ дней. От его начала до 18.02.2015 прошло $r = 98$ дней. Поэтому $AI = \frac{0.06 \cdot 98}{365} \cdot 1000 = 16.11$ (руб.), как и было указано 16.02.2015 на сайте Московской Биржи.

Число r_k дней от дня приобретения облигации до даты выплаты k-го купона даётся формулой: $r_k = sk - r$, $k = 1,\ldots,n$ (здесь и далее n – общее число

купонов до погашения). Принимая 1 год из 365 дней в качестве основной единицы времени, а момент размещения облигации в качестве начального, для момента t_k выплаты k-го купона мы имеем: $t_k = \frac{r_k}{365} = \frac{sk-r}{365} = \frac{s}{365}k - \frac{r}{365}$. Теперь общая формула (5.1) примет вид:

$$P = (1+y)^{\frac{r}{365}} \left(C \frac{1-(1+y)^{-\frac{s}{365}n}}{(1+y)^{\frac{s}{365}}-1} + F(1+y)^{-\frac{s}{365}n} \right).$$

Для упрощения этой формулы удобно ввести величину y_* с помощью равенства $1+y_* = (1+y)^{s/365}$. Тогда

$$P = (1+y_*)^{r} \left(C \frac{1-(1+y_*)^{-n}}{y_*} + F(1+y_*)^{-n} \right), \tag{5.15}$$

что фактически совпадает с (5.6).

5.4 Доходность к погашению

В предыдущем разделе мы вычисляли цену облигации P при заданнной доходности к погашению y (считая, что владелец облигации держит её до момента погашения). Конечно, при этом мы предполагали, что фиксированы основные параметры облигации: номинальная стоимость F, срок до погашения T (лет), число оставшихся купонных выплат n, размеры купонов $C_1,\ldots,C_n$, моменты купонных выплат $0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. В сущности, это означало, что фиксирована функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k (1+x)^{-t_k} + F(1+x)^{-t_n}, \tag{5.16}$$

которая (при $x > -1$) имеет смысл текущей стоимости потока выплат по облигации, если техническая процентная ставка, используемая для дисконтирования, равна x; в терминах этой функции $P = f(y)$.

Гораздо важнее и интереснее обратная операция: по заданной цене облигации P (и фиксированных основных её параметрах) вычислить доходность к погашению y. С математической точки зрения дело сводится к решению уравнения $f(x) = P$. Мы уже знаем (см. Раздел 4.5.2), что это уравнение имеет и притом единственное решение на промежутке $x > -1$. Однако, имея в виду важность теории облигаций, мы не ограничимся простой ссылкой на результаты Главы 4, а частично повторим проведённые там

рассуждения (однако теперь не в общей ситуации, а в контексте облигаций). Это позволит нам получить и ряд дополнительных результатов.

Начнём с графической иллюстрации решения уравнения $f(x)=P$ (см. рис. 5.11, который, в сущности, является копией рис. 5.6).

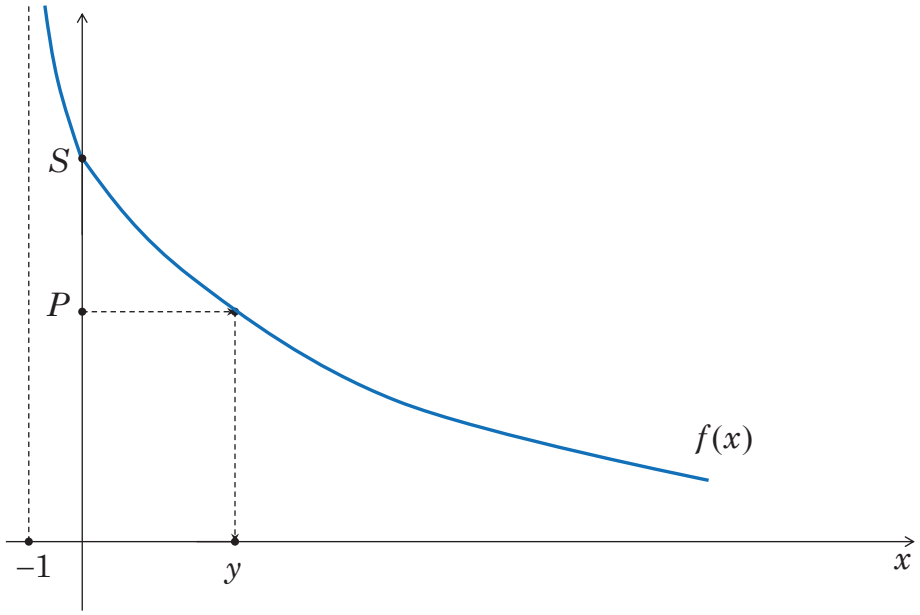


Рис. 5.11

Как мы уже отмечали, функция $f(x)$ выпукла вниз, возрастает до $+\infty$ при $x\to -1+0$, стремится к 0 при $x\to +\infty$. Значение этой функции при $x=0$ равно $\sum_{k=1}^{n} C_k + F$, т.е. общей сумме S всех средств, которые получит владелец облигации (если он будет держать её до момента погашения). В нормальной ситуации эта сумма, конечно, должна быть больше, чем цена P, уплаченная за облигацию (никто не будет платить за облигацию больше, чем потом получит) – именно эта ситуация показана на рис. 5.11.

Однако, как мы отмечали, в последние годы сложилась ситуация, когда иногда для некоторые выпусков правительственных облигаций самых развитых стран цена облигации больше, чем абсолютная сумма всех выплат по ней, т.е. $P>S$.

Кроме того, в реальной жизни встречаются случаи, когда государство или компания, которые выпустили облигацию, отказываются в полной мере исполнить свои обязательства. Те купонные выплаты, которые до дефолта уже получил владелец облигации, у него никто не заберёт, но относительно оставшихся платежей возможны разные варианты: (1) всё прекращается; (2) купоны продолжают выплачиваться, но купонная ставка уменьшается; сама облигация гасится не по номиналу (выплачивается лишь определённый процент номинальной стоимости); (3) срок погашения облигации отодвигается и

т.д. В таких случаях неравенство $P < S$ может и не выполняться.

Из рис. 5.11 ясно, что при любой заданной цене P уравнение доходности $f(x) = P$ имеет и притом единственный корень y на промежутке $(-1;+\infty)$, который равен 0, положителен или отрицателен в зависимости от того, $S = P$, $S > P$ или $S < P$. Отмеченные выше свойства функции $f(x)$ означают, что для численного расчёта доходности к погашению при заданной цене облигации можно без всяких проблем использовать метод Ньютона (см. Раздел 4.5.3).

Функция $y = F(P)$, которая показывает зависимость доходности к погашению от цены облигации, является обратной к функции $P = f(y)$. Поэтому её график выглядит как показано на рис. 5.12. Реальный интерес, как мы отмечали, представляет часть графика, соответствующая $P \in (0;S)$.

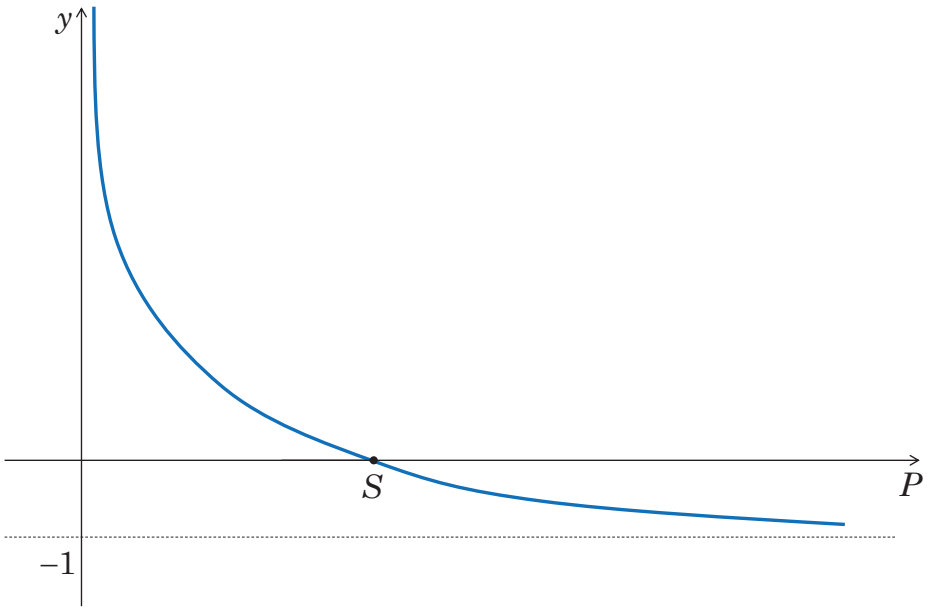


Рис. 5.12

При заданной цене облигации можно находить эффективную годовую доходность к погашению y через соответствующий коэффициент дисконтирования $v_y \equiv 1/(1+y)$: $y = (1-v_y)/v_y$. Величина v_y является (единственным) положительным корнем уравнения (относительно z)

$$\sum_{k=1}^{n} C_k z^{t_k} + F z^{t_n} = P. \qquad (5.17)$$

Обозначим левую часть этого уравнения через $f_v(z)$. При $z > 0$ её можно рассматривать как текущую стоимость потока выплат по облигации, приведённую к моменту $t_0 = 0$ с коэффициентом дисконтирования z. На промежутке $0 \le z < +\infty$ функция $f_v(z)$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ (см.

рис.5.13). Поэтому уравнение (5.17) всегда имеет и притом единственный положительный корень, который и будет коэффициентом дисконтирования, соответствующим доходности к погашению (неравенство $v_y > 0$ равносильно неравенству $y > -1$). Так как $f_v(1) = S$, при $S > P$ этот корень меньше 1, что означает положительность соответствующей годовой процентной ставки, т.е. доходности к погашению. При $S < P$ величина v_y больше 1, что означает отрицательность доходности к погашению, а при $S = P$ величина v_y равна 1, что означает равенство 0 доходности к погашению.

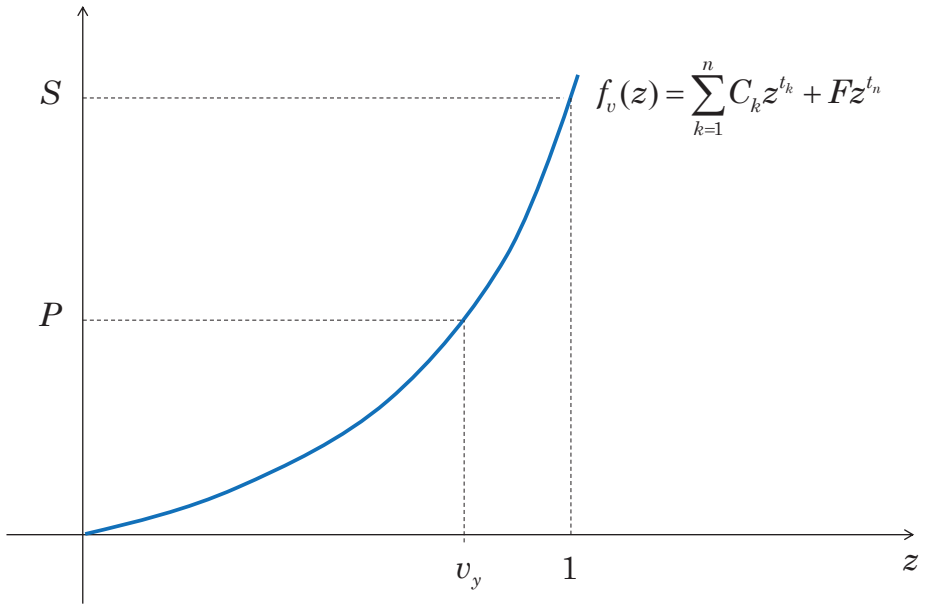


Рис. 5.13

Уравнение доходности можно переписать и в терминах интенсивности процентов $\delta_y = \ln(1+y)$, соответствующей доходности к погашению y. Величина δ_y является корнем уравнения (относительно s)

$$\sum_{k=1}^{n} C_k e^{-st_k} + F e^{-st_n} = P. \qquad (5.18)$$

Левая часть этого уравнения, $f_\delta(s) \equiv \sum_{k=1}^{n} C_k e^{-st_k} + F e^{-st_n}$, является монотонно убывающей функцией (см. рис. 5.14). Поэтому при любом $P > 0$ уравнение (5.18) всегда имеет и притом единственный корень. Так как $f_\delta(0) = S$, при $S > P$ этот корень положителен, при $S < P$ – отрицателен, а при $S = P$ равен 0.

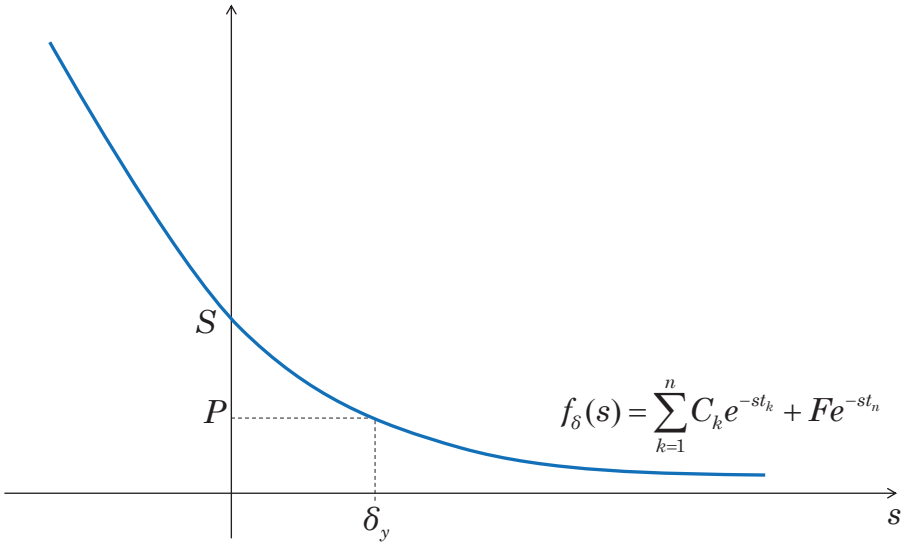


Рис. 5.14

Ещё одна, теоретически очень удобная, форма записи уравнения доходности (5.18) получается следующим образом. Разделим его почленно на $S=\sum_{k=1}^{n}C_k+F$. Поскольку величины $\frac{C_1}{S},\ldots,\frac{C_n}{S},\frac{F}{S}$ неотрицательны и их сумма равна 1, их можно рассматривать как распределение вероятностей. Введём дискретную случайную величину T, которая принимает значения $t_1,\ldots,t_n$ с вероятностями: $P(\mathrm{T}=t_1)=\frac{C_1}{S},\ldots,P(\mathrm{T}=t_n)=\frac{C_n+F}{S}$. Она показывает время до случайно выбранной выплаты по облигации, если вероятности, с которыми она принимает значения $t_1,\ldots,t_n$, являются относительными размерами выплат в эти моменты. Тогда выражение $\sum_{k=1}^{n}\frac{C_k}{S}e^{-st_k}+\frac{F}{S}e^{-st_n}$ можно рассматривать как $Ee^{-s\mathrm{T}}$, т.е. как преобразование Лапласа случайной величины T. Соответственно, уравнение (5.18) примет вид

$$Ee^{-s\mathrm{T}}=\frac{P}{S}. \tag{5.19}$$

В наших рассмотрениях мы рассчитывали доходность к погашению (при заданной цене) без учёта выплаты налогов и чтобы подчеркнуть это обстоятельство её называют брутто-доходностью, общей доходностью, полной доходностью к погашению (gross redemption yield). Доходность после вычета налогов называется чистой (net redemption yield).

Кроме того, важно иметь в виду, что для облигаций, выплачивающих купон несколько раз в год, под доходностью к погашению понимают номинальную годовую доходность $y^{(p)}$. Для таких облигаций удобно проводить расчёты, выбрав длину купонного периода в качестве единицы времени. После этого найденное решение уравнения доходности следует умножить на число купонных выплат за год.

5.5 Приближения для доходности к погашению

С помощью рис. 5.11, который графически иллюстрирует вычисление доходности облигации к погашению y (при заданной цене облигации P и параметрах выплат), можно получить большое число неравенств и приближений для y. Для этого нужно заменить функцию $f(x)$, заданную равенством (5.16), более простой функцией $h(x)$ и, соответственно, уравнение доходности $f(x)=P$ – уравнением $h(x)=P$. Конечно, это имеет смысл, если:

(1) приближение $f(x)\approx h(x)$ достаточно хорошее в интересующей нас области (как правило, в окрестности точек $x=0$ или $x=c$);

(2) в этой области уравнение $h(x)=P$ имеет единственный корень $y_{\text{пр.}}$, который легко выразить через цену облигации и параметры потока выплат.

Имея в виду формулу (5.16), естественно приближать $f(x)$ степенной функцией вида $h^{(1)}(x)=A(1+x)^{-t}$, которая:

(1) проходит через ту же точку $(0;S)$, что и $f(x)$;

(2) имеет ту же касательную в этой точке, что и $f(x)$.

Эти условия с необходимостью влекут, что $h^{(1)}(x)=S(1+x)^{-t_{\text{ср.}}}$, где $t_{\text{ср.}}=\dfrac{1}{S}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}C_k t_k+Ft_n\right)$ – средний взвешенный момент поступления денег от облигации. В результате мы получим следующее приближение для доходности к погашению:

$$y_{\text{пр.}}^{(1)}=\left(\frac{S}{P}\right)^{1/t_{\text{ср.}}}-1. \qquad (5.20)$$

Это приближение имеет очень простой смысл. Приобретая облигацию за цену P, инвестор в обмен получает в общей сложности сумму $S=\sum\limits_{k=1}^{n}C_k+F$ (если он держит облигацию до момента погашения). Эта сумма поступает к нему по частям: C_1 в момент t_1, …, C_{n-1} в момент t_{n-1}, и, наконец, C_n+F в момент t_n. Для упрощения будем считать, что сумма S поступает целиком в момент $t_{\text{ср.}}$. Фактически это означает, что мы заменяем анализируемую купонную облигацию облигацией с нулевым купоном, у которой номинал $F'=S$, а срок до погашения $T'=t_{\text{ср}}$. Тогда $y_{\text{пр.}}^{(1)}$ можно рассматривать как доходность к погашению этой бескупонной облигации.

Для трёхлетней облигации номиналом £100000, которая платит купон раз в год по ставке $c=8\%$ годовых и продаётся по цене $P=$£90392.67 эта формула даёт $y_{\text{пр.}}^{(1)}=11.9229\%$ (что совсем незначительно отличается от точного значения y=12%).

Сейчас мы покажем, что приближение (5.20) всегда оценивает истинное значение доходности к погашению снизу. Для этого применим обобщённое

неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического:

если положительные числа $p_1,\ldots,p_n$ *таковы, что их сумма равна* 1, *то для любых положительных чисел* $a_1,\ldots,a_n$ *верно неравенство:* $\sum_{k=1}^{n} p_k a_k \geq \prod_{k=1}^{n} a_k^{p_k}$.

В частности, при $p_1 = \frac{C_1}{S},\ldots,p_{n-1} = \frac{C_{n-1}}{S}, p_n = \frac{C_n + F}{S}$, $a_k = (1+x)^{-t_k}$ это неравенство примет вид: $\sum_{k=1}^{n} C_k (1+x)^{-t_k} + F(1+x)^{-t_n} \geq S(1+x)^{-t_{\text{ср.}}}$. При $x = y$ левая часть последнего неравенства равна цене P облигации, что даёт следующее неравенство, связывающее цену облигации и доходность к погашению:

$$P \geq S(1+y)^{-t_{\text{ср.}}} \Leftrightarrow y \geq \left(\frac{S}{P}\right)^{1/t_{\text{ср.}}} - 1. \qquad (5.21)$$

Развивая изложенный выше подход, можно получить большое число других приближений для доходности к погашению разной степени сложности (и, соответственно, точности). Например, если заменить функцию $f(x)$ гиперболой $h^{(2)}(x) = \frac{S}{1 + t_{\text{ср.}} x}$, которая:

(1) проходит через ту же точку $(0;S)$, что и $f(x)$;

(2) имеет ту же касательную в этой точке, что и $f(x)$;

(3) имеет ту же горизонтальную асимптоту, что и $f(x)$,

то мы получим следующее приближение:

$$y_{\text{пр.}}^{(2)} = \frac{S-P}{Pt_{\text{ср.}}}.$$

Это приближение имеет очень простой смысл. Заменим, как и при интерпретации приближения $y_{\text{пр.}}^{(1)}$, анализируемую купонную облигацию облигацией с нулевым купоном, у которой номинал $F' = S$, а срок до погашения $T' = t_{\text{ср}}$ (и та же цена P). Эффективная доходность для этого проекта равна $\frac{S-P}{P}$, а соответствующая простая годовая ставка – $\frac{S-P}{Pt_{\text{ср.}}} = y_{\text{пр.}}^{(2)}$.

Чтобы сравнить приближения $y_{\text{пр.}}^{(1)}$ и $y_{\text{пр.}}^{(2)}$, применим неравенство Бернулли:

если $x > -1$, *так что определено выражение* $(1+x)^a$, *то при* $a > 1$ *или* $a < 0$ *верно неравенство* $(1+x)^a \geq 1 + ax$, *а при* $0 < a < 1$ – *неравенство* $(1+x)^a \leq 1 + ax$, *причём знак равенства достигается тогда и только тогда, когда* $x = 0$.

При $x = \frac{S-P}{P}$, $a = \frac{1}{t_{\text{ср.}}}$ оно даст: $y_{\text{пр.}}^{(1)} > y_{\text{пр.}}^{(2)}$, так что первое приближение лучше второго.

Для облигаций с регулярной выплатой процентов можно получить приближения для цены другого типа. Рассмотрим, например, облигацию с выплатой купона раз в год по ставке c и предположим, что до момента погашения будет выплачено n купонов, причём все купонные периоды равны (т.е. день приобретения – квазикупонный момент). В этом случае

$$f(x) = cF\sum_{k=1}^{n}(1+x)^{-k} + F(1+x)^{-n} = F\left(c\frac{1-(1+x)^{-n}}{x} + (1+x)^{-n}\right).$$

Из этой формулы ясно, что $f(c) = F$ (если доходность к погашению совпадает с купонной ставкой, то облигация продаётся по номиналу – этот факт мы уже отмечали раньше). Теперь мы имеем две известные точки графика функции $f(x)$: (0;S) и (c;F) (см. рис. 5.15, где этот график изображён сплошной линией).

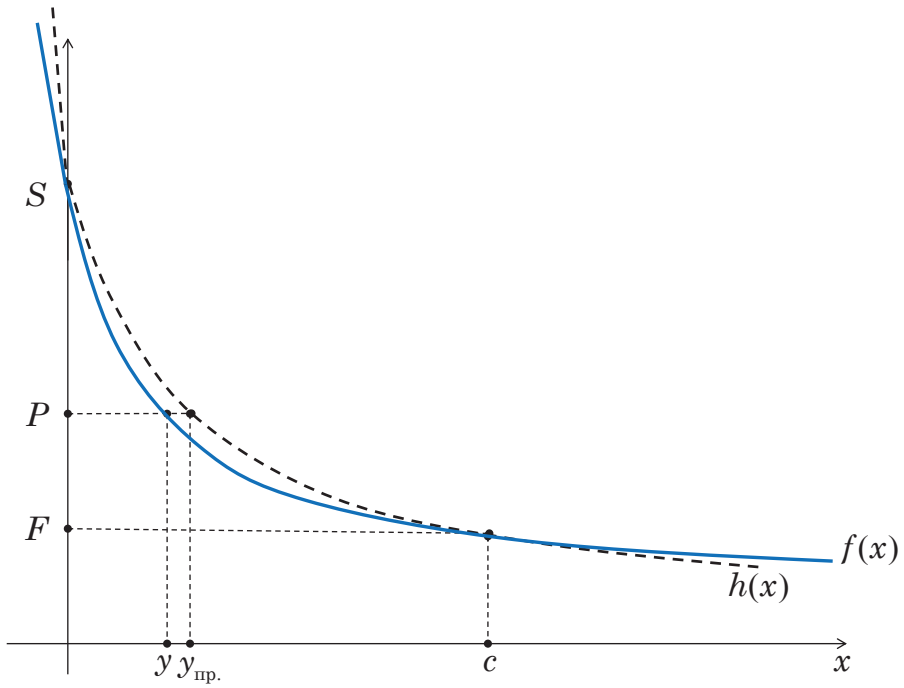


Рис. 5.15

Из рис. 5.15 ясно, что следует приближать функцию $f(x)$ монотонно убывающей, выпуклой вниз функцией $h(x)$, принимающей в точках $x = 0$ и $x = c$ те же значения $f(0) = S$ и $f(c) = F$, что и $f(x)$. Простейший вариант – взять гиперболу (на рис.5.15 она показана штрихованной линией).

В самом общем виде уравнение гиперболы можно записать в виде: $h(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + 1}$, $\gamma \neq 0$. Условия $h(0) = S$, $h(c) = F$ выполнены тогда и только тогда, когда $h(x) = F\dfrac{(\gamma - n)x + cn + 1}{\gamma x + 1}$. Если $\gamma > -\dfrac{1}{c}$ (в частности, если $\gamma > 0$), то эта

функция монотонно убывает и выпукла вниз. Решая уравнение $h(x) = P$, мы получим целую серию приближений для доходности к погашению:

$$y_{\text{пр.}}(\gamma) = \frac{cF + \dfrac{F - P}{n}}{\dfrac{\gamma}{n}P + \left(1 - \dfrac{\gamma}{n}\right)F}. \tag{5.22}$$

Правая часть формулы (5.22) имеет очень простой смысл. Если инвестор держит облигацию до момента погашения, то каждый год он будет получать купонный доход в размере cF. Кроме того, при погашении он получит дополнительный доход (capital gain) в размере $F - P$ в виде разницы между суммой F, которую он получит при погашении, и ценой P, которую он заплатил за облигацию (если $F < P$, то инвестор получит отрицательный «доход», т.е. потеряет часть денег). Таким образом, в среднем каждый год инвестор будет получать сумму $cF + \dfrac{F - P}{n}$ – эта величина стоит в числителе дроби в правой части (5.22). Далее, доходность облигации определяется не этой суммой, а её отношением к цене облигации. В момент приобретения облигации инвестор знает только текущую цену P и цену непосредственно перед погашением (после выплаты всех купонов) – она равна номиналу F. Знаменатель дроби в правой части (5.22) является обобщённым средним арифметическим этих двух цен и его можно считать оценкой средней цены облигации за все время до погашения.

Выбирая из тех или иных условий конкретное значение параметра γ, мы получим конкретное приближение для доходности к погашению.

1. Функция $f(x)$ при $x \to +\infty$ стремится к 0. Для функции $h(x)$ это условие выполнено тогда и только тогда, когда коэффициент при x в числителе равен 0, т.е. $\gamma = n$. Этому значению γ соответствует следующее приближение:

$$y_{\text{пр.}}^{(3)} = \frac{cF + (F - P)/n}{P}. \tag{5.23}$$

Величина $\dfrac{cF + (F - P)/n}{P}$ называется *простой доходностью к погашению* (simple yield to maturity – SY; в отечественной учебной литературе используют термин *полная ориентировочная доходность*). Она является отношением среднего годового дохода $cF + (F - P)/n$ к цене облигации в момент приобретения.

2. Если средний годовой доход относить к среднему арифметическому P и F (т.е. взять $\gamma = n/2$), то мы получим следующее приближение:

$$y_{\text{пр.}}^{(4)} = \frac{cF + (F-P)/n}{(P+F)/2}. \tag{5.24}$$

Величина $\dfrac{cF+(F-P)/n}{(P+F)/2}$ называется *средним процентом к погашению* (average rate of interest to maturity – ARTM).

3. Потребуем равенство производных функций $f(x)$ и $h(x)$ в точке $x=0$. Поскольку $h'(0) = -Fn(c\gamma+1)$, $f'(0) = -Fn\left(c\dfrac{n+1}{2}+1\right)$, это условие даёт для параметра γ значение $\dfrac{n+1}{2}$. В результате мы получим *уточнённый средний процент к погашению*:

$$y_{\text{пр.}}^{(5)} = \frac{cF + \dfrac{F-P}{n}}{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\right)P + \left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n}\right)F} \equiv \frac{cF+(F-P)/n}{\left(P+P'\right)/2}, \tag{5.25}$$

где $P' = P + (F-P)(n-1)/n$ – оценка цены в начале последнего купонного периода. Условие выбора γ, приводящее к этому приближению, объясняет хорошо известную его высокую точность. Например, для используемой нами в качестве примера трёхлетней облигации номиналом £100000, которая платит купон раз в год по ставке $c = 8\%$ годовых и продаётся по цене $P = £90392.67$ эта формула даёт $y_{\text{пр.}}^{(5)} = 11.96905\%$, что совсем незначительно отличается от точного значения $y = 12\%$.

Для облигаций с большим числом купонов до погашения обычно используют другое приближение. Дело в том, что при $n \to \infty$ уравнение $f(x) = P$ перейдёт в уравнение $\dfrac{cF}{x} = P$, которое имеет единственный корень $x = \dfrac{cF}{P}$. Величина $y_{\text{flat}} = \dfrac{cF}{P}$ называется *текущей доходностью* (flat yield; используют также термины: current yield, running yield). Эта доходность рассчитывается до уплаты налогов и чтобы подчеркнуть это обстоятельство её называют текущей брутто доходностью (gross flat yield). Текущая доходность после вычета налогов называется чистой (net flat yield). Если облигация приобретается внутри квазикупонного периода, то текущая доходность определяется как дробь cF/P_{clean}. Приближение $y \approx y_{\text{flat}}$ можно получить и заменой функции $f(x)$ гиперболой $h(x) = cF/x$, которая принимает в точке $x = c$ то же значение, что и $f(x)$, и имеет ту же горизонтальную асимптоту.

В заключение отметим, что вместо функции $f(x)$ с равным успехом можно было приближать функцию $f_v(z)$ или $f_\delta(s)$.

5.6 Задачи

Задача 5.1 (CT1, 7 October 2010, Problem 1) Облигация выплачивает купон бессрочно 1 июня и 1 декабря каждого года. Годовая купонная ставка равна 3.5%. Инвестор покупает некоторое количество таких облигаций 20 августа 2009 года. Вычислите цену за £100 номинала, при которой инвестор обеспечит себе эффективную годовую доходность 10%.

Решение. Одна купонная выплата по облигации с условным номиналом £100 равна $\frac{3.5\%}{2}\cdot £100 = £1.75$.

Купонные платежи 1 декабря каждого года образуют бессрочную ренту с ежегодной выплатой суммы £1.75. Стоимость этой ренты на 1 декабря 2009 года при процентной ставке i=10% равна $£1.75\cdot\frac{1+i}{i} = £19.25$ (поскольку мы учитываем выплату купона 1 декабря 2009 года, речь идёт об упрежающей ренте). От 20 августа 2009 года до 1 декабря 2009 года пройдёт 103 дня (мы считаем начало и конец этого промежутка за один день). Поэтому, чтобы получить стоимость нашей ренты на 20 августа 2009 года, нужно её стоимость на 1 декабря 2009 года дисконтировать на 103 дня, т.е. умножить на $v^{103/365} = 1.1^{-103/365}$, что даст £18.73916.

Купонные платежи 1 июня каждого года образуют бессрочную ренту с ежегодной выплатой суммы £1.75. Стоимость этой ренты на 1 июня 2009 года при процентной ставке i=10% равна $£1.75\cdot\frac{1}{i} = £17.5$ (поскольку мы не учитываем выплату купона 1 июня 2009 года, речь идёт о запаздывающей ренте). От 1 июня 2009 года до 20 августа 2009 года пройдёт 80 дней (мы считаем начало и конец этого промежутка за один день). Поэтому, чтобы получить стоимость нашей ренты на 20 августа 2009 года, нужно её стоимость на 1 июня 2009 года умножить на $(1+i)^{80/365} = 1.1^{80/365}$, что даст £17.86942.

Следовательно, искомая цена облигации за £100 номинала равна $£18.73916 + £17.86942 = £36.60858 \approx £36.61$.

Можно рассуждать по другому. Примем 1 июня 2009 года в качестве начального момента времени, а в качестве единицы времени возьмём полугодие. Годовой эффективной ставке 10% соответствует эффективная полугодовая ставка $i_*^{(2)} = (1+0.1)^{1/2} - 1 \approx 4.8809\%$.

Купонные платежи образуют стандартную бессрочную запаздывающую ренту с регулярной выплатой суммы £1.75. Стоимость этой ренты на 1 июня 2009 года при процентной ставке $i_*^{(2)}$ равна $£1.75\cdot\frac{1}{i_*^{(2)}} \approx £35.85415$.

Чтобы получить стоимость нашей ренты на 20 августа 2009 года, нужно её стоимость на 1 июня 2009 года сдвинуть на 80 дней, т.е. умножить на $1.1^{80/365}$, что даст $£36.61102 \approx £36.61$.

Задача 5.2 (FM, May 2005, Problem 3) Облигация будет выплачивать купон в размере \$100 в конце каждого из трёх последующих лет и выплатит номинальную стоимость \$1000 в конце этого трёхлетнего периода. Найдите средний дисконтированный срок до погашения (продолжительность Макóли), используя для его оценки эффективную годовую процентную ставку 20%.

Решение. По определению средний дисконтированный срок до погашения для облигации, которая выплачивает n купонов в размере $C_1,\ldots,C_n$ в моменты $t_1,\ldots,t_n$ соответственно и гасится в момент $T=t_n$ по номиналу F, равен

$$\mathrm{MDT}=\frac{\sum_{k=1}^{n} t_k C_k (1+y)^{-t_k} + F t_n (1+y)^{-t_n}}{\sum_{k=1}^{n} C_k (1+y)^{-t_k} + F(1+y)^{-t_n}}.$$

Если принять текущий момент в качестве начального, а один год в качестве единицы времени, то рассматриваемая облигация генерирует следующий денежный поток: $(\$100;1),(\$100;2),(\$1100;3)$. Поэтому для неё

$$\mathrm{MDT}=\frac{1\cdot 100\cdot 1.2^{-1}+2\cdot 100\cdot 1.2^{-2}+3\cdot 1100\cdot 1.2^{-3}}{100\cdot 1.2^{-1}+100\cdot 1.2^{-2}+1100\cdot 1.2^{-3}}$$
$$=\frac{1.2^2+2\cdot 1.2^1+3\cdot 11}{1.2^2+1.2^1+11}=\frac{36.84}{13.64}\approx 2.70088.$$

Задача 5.3 (FM, May 2005, Problem 4) Сьюзен может купить за \$624.60 бескупонную облигацию, которая выплатит \$1000 в конце 12-летнего срока. Вместо этого она покупает за $\$X$ 6% облигацию с полугодовым купоном, которая будет погашена через 10 лет по номиналу \$1000. При какой цене X обе облигации будут иметь равные доходности к погашению?

Решение. Доходность к погашению для бескупонной облигации находится из равенства $P(1+\mathrm{YTM})^T=F$, где $P=\$624.60$ – цена облигации, $F=\$1000$ – номинальная стоимость, $T=12$ – срок до погашения в годах. Поэтому $\mathrm{YTM}=\left(F/P\right)^{1/T}-1=0.6246^{-1/12}-1=4\%$.

Для расчёта цены купонной облигации удобно взять полугодие в качестве новой единицы измерения длин промежутков времени. Тогда она выплатит $n=20$ купонов величиной $C=\$30$ в моменты $1,\ldots,20$ и дополнительно номинал $F=\$1000$ в момент 20. Годовой доходности к погашению $\mathrm{YTM}=4\%$ соответствует доходность за полугодие $y=\sqrt{1.04}-1\approx 1.9804\%$. Применяя формулу (5.4), для цены P купонной облигации мы имеем:

$$P=C\frac{1-(1+y)^{-n}}{y}+F(1+y)^{-n}=30\frac{1-(\sqrt{1.04})^{-20}}{\sqrt{1.04}-1}+1000(\sqrt{1.04})^{-20}$$
$$=30\frac{1-1.04^{-10}}{\sqrt{1.04}-1}+1000\cdot 1.04^{-10}\approx \$1167.04.$$

Задача 5.4 (CT1, 23 September 2013, Problem 8) Госпожа Джонс предполагает выйти на пенсию через 20 лет и с этой целью хочет вложить деньги в 20-летние беспроцентные облигации, которые обеспечивают эффективную годовую доходность 5%. После выхода на пенсию она хотела бы приобрести 25-летнюю ренту с выплатой £1000 в конце каждого месяца. Стоимость ренты рассчитывается исходя из технической процентной ставки $i^{(2)} = 4\%$.

(i) Какую сумму должна инвестировать в облигации г-жа Джонс?

В настоящий момент значение индекса розничных цен равно 143, а через 20 лет ожидается, что его значение увеличится до 340.

(ii) Какую реальную эффективную годовую доходность обеспечат эти 20-летние облигации?

Правительство вводит налог на прирост капитала в размере 25% от номинального прироста капитала.

(iii) Вычислите чистую реальную эффективную годовую доходность для инвестора на этом 20-летном промежутке времени.

(iv) Объясните, почему чистая реальная эффективная годовая доходность отрицательна, несмотря на то, что налогом на прирост капитала облагается только доход от инвестиции.

Решение. (i) Сначала найдём стоимость 25-летней ренты. Эффективная годовая процентная ставка i, используемая при расчёте цены ренты равна $i = \left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^2 - 1 = 4.04\%$. Поскольку алгебраическая сумма выплат за год равна £12000, стоимость ренты в момент её покупки равна $12{,}000 a^{(12)}_{\overline{25}|} = 12{,}000 \cdot \frac{1 - v^{25}}{12\left((1+i)^{1/12} - 1\right)} = 190{,}106.77$ – именно эту сумму должны принести облигации. Текущая стоимость этой суммы (при техническрй ставке 5%) равна $190{,}106.77 \cdot 1.05^{-20} = 71{,}649.24$ – именно на эту сумму должна приобрести облигации г-жа Джонс.

(ii) Пусть i_{real} – реальная эффективная годовая доходность 20-летней беспроцентной облигации. Это означает, что за сумму S, вложенную в облигации, инвестор через 20 лет получит сумму $S' = S\left(1 + i_{\text{real}}\right)^{20}$ *в текущих* деньгах. Поэтому $i_{\text{real}} = \left(\frac{S'}{S}\right)^{1/20} - 1$. С другой стороны, за сумму S, вложенную в облигации, инвестор через 20 лет получит сумму $1.05^{20} S$ (номинально). Через 20 лет на £340 можно купить столько же товаров, сколько сейчас на £143. Поэтому (номинальная) сумма $1.05^{20} S$ через 20 лет равноценна сумме $S' = \frac{143}{340} \cdot 1.05^{20} S$ в настоящий момент. Следовательно,

$$i_{\text{real}} = \left(\frac{143}{340}\cdot 1.05^{20}\right)^{1/20} - 1 = 1.05\cdot\left(\frac{143}{340}\right)^{1/20} - 1 \approx 0.55\%.$$

(iii) Как мы отмечали, за сумму S, вложенную в облигации, инвестор через 20 лет получит сумму $1.05^{20}S$ (номинально), что означает номинальный прирост капитала в размере $\left(1.05^{20}-1\right)S$. После выплаты 25% налога на прирост капитала инвестор получит чистыми через 20 лет сумму $S + 0.75\cdot\left(1.05^{20}-1\right)S = \left(0.75\cdot 1.05^{20} + 0.25\right)S$. Эта сумма равноценна сумме $S' = \frac{143}{340}\cdot\left(0.75\cdot 1.05^{20} + 0.25\right)S$ в настоящий момент. Следовательно, чистая реальная эффективная годовая доходность для инвестора на этом 20-летном промежутке времени равна $i_{\text{real}}^{\text{net}} = \left(\frac{143}{340}\cdot\left(0.75\cdot 1.05^{20} + 0.25\right)\right)^{1/20} - 1 \approx -0.298\%$.

(iv) Бóльшая часть номинального прироста капитала после погашения облигации по истечении 20-летнего срока идёт на компенсацию инфляции. Если номинальный прирост капитала облагается 25% налогом, то на компенсацию инфляции не хватает денег из дохода и приходится брать деньги из основного капитала, что приводит к отрицательному значению чистой реальной эффективной годовой доходности.

Задача 5.5 (CT1, 12 April 2016, Problem 9) Правительство некоторой страны 15 января 2014 года выпустило индексированные облигации со сроком до погашения 2 года. Купоны выплачивались каждые полгода и номинальная годовая купонная ставка была 6%. Выкупная цена до индексации была £100 за £100 номинала. Выплаты процентов и капитала индексировались в соответствии с индексом инфляции с задержкой во времени 6 месяцев.

Инвестор, освобождённый от налогов, купил облигаций номиналом £100,000 в день эмиссии и держал их до погашения. Цена размещения была £97 за £100 номинала.

Информация об инфляции приведена в таблице 5.5.

Таблица 5.5

Год	2013	2014		2015		2016
Дата	15.07	15.01	15.07	15.01	15.07	15.01
Индекс инфляции	120.0	122.3	124.9	127.2	129.1	131.8

(i) Опишите расписание выплат инвестору, показав сумму и месяц каждого платежа.

(ii) Определите реальную эффективную годовую доходность, полученную инвестором (ответ округлите до ближайшей десятой доли процента).

Решение. Возьмём один купонный период (полугодие) в качестве единицы времени, а день эмиссии, 15 января 2014 года, примем в качестве начального. Теперь таблица 5.5 превратится в таблицу 5.6.

Таблица 5.6

Год	2013	2014		2015		2016
Дата	15.07	15.01	15.07	15.01	15.07	15.01
t	–1	0	1	2	3	4
Индекс инфляции, I_t	120.0	122.3	124.9	127.2	129.1	131.8

(i) Поскольку облигация была эмитирована 15 января 2014 года, а купонные выплаты производятся каждые полгода, за 2 года (до погашения) были выплачены 4 купона: 15 июля 2014, 15 января 2015, 15 июля 2015, 15 января 2016 (вместе с этим купоном была выплачена и номинальная стоимость облигации). Эти даты указаны в первой и второй строках таблицы 5.7. В третьей строке таблицы 5.7 указаны значения дат платежей на введённой оси времени.

Таблица 5.7

год	2014		2015		2016
дата	15 января	15 июля	15 января	15 июля	15 января
t	0	1	2	3	4
номинальный платёж, S_t^{nom}	– £97000 эмиссия	£3000 купон	£3000 купон	£3000 купон	£103000 купон+номинал
используемый индекс инфляции, $I_t^* = I_{t-1}$	120.0 (база)	122.3	124.9	127.2	129.1
расчётный коэффициент инфляции, $k_t = \dfrac{I_t^*}{I_0^*}$	1	$\dfrac{122.3}{120.0}$	$\dfrac{124.9}{120.0}$	$\dfrac{127.2}{120.0}$	$\dfrac{129.1}{120.0}$
реальный платёж, $S_t^{\text{money}} = k_t \cdot S_t^{\text{nom}}$	– £97000 эмиссия	£3057.50 купон	£3122.50 купон	£3180.00 купон	£110810.83 купон+номинал
выплата, очищенная от инфляции, $S_t^{\text{real}} = S_t^{\text{money}} \cdot \dfrac{I_0}{I_t}$	– £97000	£2993.85	£3002.22	£3012.50	£102823.71

Для облигации номиналом $F = £100{,}000$ номинальный размер каждого купона равен $cF/2 = £3000$ – это размер номинальной выплаты 15 июля 2014, 15 января 2015, 15 июля 2015. 15 января 2016 года номинальная выплата равна $£3000 + £100000 = £103000$. Эти номинальные суммы S_t^{nom} приведены в четвёртой строке таблицы 5.7.

Для индексации каждой выплаты используется индекс инфляции, подсчитанный в начале соответствующего квазикупонного периода: в июле 2014 – индекс января 2014, в январе 2015 – индекс июля 2014 и т.д. Для $t = 0,1,2,3,4$ эти индексы $I_t^* = I_{t-1}$ приведены в пятой строке таблицы 5.7.

Для целей расчёта реальной выплаты коэффициент инфляции за промежуток $[0;t]$ вычисляется по формуле $k_t = I_t^* / I_0^*$ – эти числа приведены в шестой строке таблицы 5.7.

Реальный платёж в момент t определяется по формуле: $S_t^{\text{money}} = k_t \cdot S_t^{\text{nom}}$. Размеры реальных выплат приведены в предпоследней строке таблицы 5.7.

(ii) Чтобы найти реальную доходность y^{real} инвестиции в облигацию, прежде всего выразим все реальные выплаты в деньгах января 2014 года (даты эмиссии). Для этого нужно для каждой даты t умножить размер реальной выплаты S_t^{money} на коэффициент I_0/I_t. Очищенные от инфляции размеры выплат $S_t^{\text{real}} = S_t^{\text{money}} \cdot I_0/I_t$ приведены в последней строке таблицы 5.7.

Уравнение доходности для расчёта эффективной доходности к погашению, очищенной от инфляции, имеет вид:

$$S_0^{\text{real}} + S_1^{\text{real}} \cdot (1+i)^{-1} + S_2^{\text{real}} \cdot (1+i)^{-2} + S_3^{\text{real}} \cdot (1+i)^{-3} + S_4^{\text{real}} \cdot (1+i)^{-4} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-97000 \cdot (1+i)^4 + 2993.85 \cdot (1+i)^3 + 3002.22 \cdot (1+i)^2 + 3012.50 \cdot (1+i)^1 + 102823.71 = 0$$

Это уравнение имеет единственный корень $i_0 = 0.03782596$. Таким образом, если единицей времени является полугодие, то эффективная доходность к погашению, очищенная от инфляции, равна 3.78%. Умножив это число на 2, мы получим *номинальную* годовую доходность к погашению, очищенную от инфляции; она равна 7.56%. Нас же интересует *эффективная* годовая доходность y, которая связана с i_0 соотношением $1 + y = (1 + i_0)^2$, из которого мы имеем: $y \approx 7.7083\%$. Округляя, как того требует условие задачи, до десятых долей процента, мы получим ответ: $y \approx 7.7\%$.

Задача 5.6 (CT1, 23 September 2013, Problem 11) У пенсионного фонда есть обязательства по выплате запаздывающих рент на протяжении 40 лет в размере 10 миллионов фунтов в год. Активы фонда, соответствующие этим обязательствам, в равных долях инвестированы в две ценные бумаги с фиксированным доходом. Первая платит ежегодный купон в размере 5% и гасится по номиналу через 10 лет. Вторая бумага платит ежегодный купон в размере 10% и гасится по номиналу через 5 лет. При технической процентной

ставке $i = 4\%$ текущая стоимость активов пенсионного фонда равна текущей стоимости обязательств.

(i) Вычислите текущую стоимость обязательств фонда.

(ii) Вычислите номинальную стоимость каждой ценной бумаги.

(iii) Вычислите продолжительность обязательств фонда.

(iv) Вычислите продолжительность активов фонда.

(v) Не проводя вычисления объясните, получит фонд прибыль или понесёт потери, если эффективные годовые процентные ставки упадут на 1.5%.

Решение. (i) Текущая стоимость обязательств фонда равна $a_{\text{fund}} = 10{,}000{,}000 a_{\overline{40}|} = 10{,}000{,}000 \dfrac{1 - v^{40}}{i} = 197{,}927{,}738.83.$

(ii) Пусть F_A – номинальная стоимость 10-летней ценной бумаги, а F_B – номинальная стоимость 5-летней. Для 10-летней ценной бумаги текущая цена равна $P_A = F_A\left(v^{10} + 0.05 a_{\overline{10}|}\right)$, а для 5-летней – $P_B = F_B\left(v^5 + 0.1 a_{\overline{5}|}\right)$. По условию, $P_A = P_B = a_{\text{fund}}/2$. Отсюда:

$$F_A = \frac{a_{\text{fund}}}{2\left(v^{10} + 0.05 a_{\overline{10}|}\right)} = 10{,}000{,}000 \cdot \frac{1 - v^{40}}{0.1 - (0.1 - 2i)v^{10}} = 91{,}539{,}218.78,$$

$$F_B = \frac{a_{\text{fund}}}{2\left(v^5 + 0.1 a_{\overline{5}|}\right)} = 10{,}000{,}000 \cdot \frac{1 - v^{40}}{0.2 - (0.2 - 2i)v^5} = 78{,}102{,}075.57.$$

(iii) Известно, что для стандартной n-летней запаздывающей ренты средняя дисконтированная продолжительность промежутка выплат даётся формулой $MDT_{\overline{n}|} = 1 + \dfrac{1}{i} - \dfrac{n}{(1+i)^n - 1}$. Поэтому продолжительность обязательств фонда равна $MDT_{\overline{40}|} = 1 + \dfrac{1}{0.04} - \dfrac{40}{1.04^{40} - 1} \approx 15.4765$ (лет).

(iv) Известно, что для n-летней облигации с выплатой купона в конце каждого года по ставке i_C средняя дисконтированная продолжительность промежутка выплат даётся формулой $MDT = \dfrac{n v^n + i_c (Ia)_{\overline{n}|}}{v^n + i_c a_{\overline{n}|}}$. Поэтому средний срок 10-летней облигации равен $MDT_A = \dfrac{10 v^{10} + 0.05 (Ia)_{\overline{10}|}}{v^{10} + 0.05 a_{\overline{10}|}} \approx 8.190899$, а 5-летней – $MDT_B = \dfrac{5 v^5 + 0.1 (Ia)_{\overline{5}|}}{v^5 + 0.1 a_{\overline{5}|}} \approx 4.269785$. Далее, в нашем случае цены облигаций равны между собой. Поэтому средняя дисконтированная продолжительность промежутка поступления средств по активам фонда равна среднему арифметическому средних сроков облигаций, т.е. примерно 6.2303 (лет).

(v) Если эффективные годовые процентные ставки упадут, то вырастут как текущие значения обязательств фонда, так и текущие значения

поступлений. Однако, поскольку средний срок обязательств больше, их текущее значение вырастет больше, что означает потери для фонда.

Задача 5.7 (CT1, 23 September 2013, Problem 5) Инвестор рассматривает возможность покупки двух видов облигаций государственного займа, выпущенных правительствами стран A и B соответственно. Оба вида облигаций номинированы в евро. Каждая облигация обеспечивает возврат капитала €100 и купонного платежа в размере €6 через один год. Инвестор уверен, что он гарантированно получит обе суммы за облигацию, выпущенную страной A. Для облигации, выпущенной страной B, по его мнению, есть 4 возможности, указанные в таблице 5.8.

Таблица 5.8

Исход	Вероятность
Ни капитал, ни купон не оплачиваются	0.1
Капитал выплачивается, купон – нет	0.2
Выплачивается 50% капитала, купон – нет	0.3
Полностью выплачиваются и капитал, и купон	0.4

Цена облигации, выпущенной страной A, равна €101.

(i) Вычислите цену облигации, выпущенной страной B, которая обеспечивала бы такую же среднюю доходность, что и облигация, выпущенная страной A.

(ii) Предполагая, что облигация, выпущенная страной B, продаётся по цене, вычисленной в пункте (i), вычислите полную доходность этой облигации к погашению.

(iii) Объясните, почему инвестор мог бы требовать более высокую среднюю доходность облигации, выпущенной страной B, по сравнению с облигацией, выпущенной страной A.

Решение. (i) Сначала вычислим доходность i_A облигации A. Она продаётся за €101, а при погашении через год её держатель получает €106, что означает доход в €5. Поэтому $i_A = 5/101 \approx 4.9505\%$.

Облигация B при её погашении через год принесёт держателю в среднем $0.1 \cdot 0 + 0.2 \cdot 100 + 0.3 \cdot 50 + 0.4 \cdot 106 = 77.4$ (евро). Если P_B – цена этой облигации, то ожидаемая доходность равна $i_B = \dfrac{77.4}{P_B} - 1$. По условию, $i_A = i_B$, что означает справедливость равенства $\dfrac{5}{101} = \dfrac{77.4}{P_B} - 1$. Отсюда: $P_B = \dfrac{€77.4 \cdot 101}{106} \approx €73.7491$.

(ii) Полная доходность облигации к погашению – это эффективная годовая доходность при условии, что инвестор держит облигацию до момента погашения и в установленные сроки выплачиваются все купоны и основной капитал. В данном случае (поскольку срок облигации ровно один год и

единственный купон выплачивается при погашении) $i = \frac{F+C}{P_B} - 1 = \frac{106}{73.7491} - 1 \approx 43.731\%$.

(iii) Для облигации, выпущенной страной B, есть существенный риск неполучения номинальной стоимости и/или купона, в то время как облигация, выпущенная страной A, является безрисковой. В качестве платы за риск инвестор мог бы потребовать более высокую среднюю доходность для облигаций B, т.е. более низкую цену, чем €73.7491.

Глава 6
Зависимость процентных ставок от срока займа

6.1 Бескупонные облигации

6.1.1 Введение

В предыдущей главе мы упомянули особый вид облигаций, по которым не выплачивается регулярный процентный доход – *бескупонные облигации* (zero coupon bonds или zeros). Бескупонная облигация является очень простым финансовым инструментом из двух платежей: платы за облигацию в момент её приобретения и выплаты номинальной стоимости в момент её погашения. Мы будем считать, что цена бескупонной облигации пропорциональна номинальной стоимости, и введём в рассмотрение «стандартные» облигации с номинальной стоимостью $F=1$ (1 рубль, £1, \$1 и т.д.). Для такой *единичной бескупонной облигации* (unit zero coupon bond) цена зависит только от времени t (лет) до погашения и мы обозначим её P_t. Схема денежного потока для такой облигации показана на рис. 6.1.

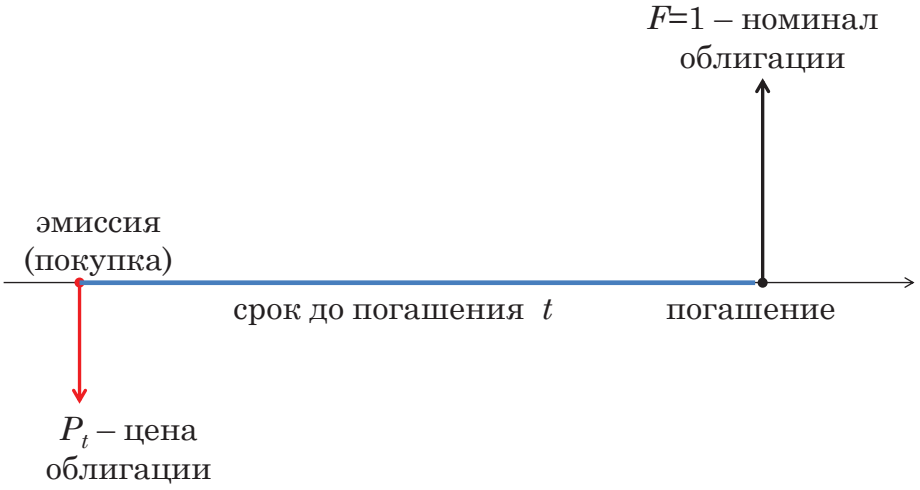


Рис. 6.1 Денежный поток для единичной бескупонной облигации

Если номинал облигации равен F, то цена облигации равна FP_t. В частности, если номинал равен $1/P_t$, то цена облигации равна 1. Иначе говоря, если в момент $t_0=0$ займодавец даст в долг сумму 1, то через время t он получит сумму $A_t=1/P_t$. В нормальной ситуации накопление A_t должно быть

больше суммы займа (т.е. $A_t > 1$), причём чем больше время t до возврата долга, тем больше должно быть накопление $A_t = 1/P_t$, т.е. функция A_t является монотонно возрастающей. Соответственно, функция P_t является убывающей, причём $P_t < 1$, т.е. в нормальной ситуации бескупонные облигации являются дисконтными. Разница $1 - P_t$ между номиналом $F = 1$ и ценой P_t является доходом инвестора (если он держит облигацию до погашения).

В финансовой литературе термины «дисконтная облигация» и «бескупонная облигация» часто отождествляют, что, строго говоря, неверно. Купонные облигации также могут продаваться с дисконтом (если купонный процент ниже текущей доходности по аналогичным финансовым инструментам), но для купонных облигаций разница $F - P$ между номиналом F и ценой P относительно невелика (так как основной доход инвестор получает за счёт купонов). Для бескупонных облигаций дисконт является единственным источником процентного дохода и потому намного больше (при равном номинале и сроке до погашения). При достаточно большом сроке до погашения он может доходить до 50% от номинала даже для высоконадёжных облигаций; в этом случае, как мы отмечали в гл.5, употребляют термин «deep discount».

6.1.2 Бескупонные облигации и дисконтирование

Величина P_t показывает, сколько *сегодня* готовы платить инвесторы за получение суммы 1 в будущем, спустя время t. Иначе говоря, P_t – это текущая стоимость единичной суммы, выплачиваемой через t лет. Текущая стоимость PV (Present Value) произвольной суммы FV (Future Value), выплачиваемой через t лет, равна $FV \cdot P_t$, так что P_t можно рассматривать как коэффициент дисконтирования для расчёта текущей стоимости суммы, которая будет выплачена через t лет. Соответственно, накопление FV через время t при инвестировании суммы PV в настоящий момент равно PV/P_t:

$$PV = FV \cdot P_t \quad \Leftrightarrow \quad FV = PV/P_t. \tag{6.1}$$

Эти соотношения наглядно иллюстрирует рис. 6.2.

Поскольку P_t в сущности является коэффициентом дисконтирования, во многих руководствах для этой величины используют термин discount function (*дисконтная функция*) и обозначение $d(t)$, $D(t)$ и т.п.

Величины P_t не устанавливаются исходя из каких-то теоретических соображений, их определяет рынок. Поэтому именно они должны использоваться при расчёте текущей стоимости любого финансового инструмента. При этом следует иметь в виду, что этот инструмент и набор бескупонных облигаций, используемых при определении величин P_t, должны иметь одинаковую надёжность и другие качественные характеристики. В большинстве стран величины P_t рассчитываются только для

правительственных облигаций. Для оценки остальных, более рискованных, проектов, используют коэффициенты дисконтирования, которые получаются определённой модификацией этих базовых коэффициентов[1].

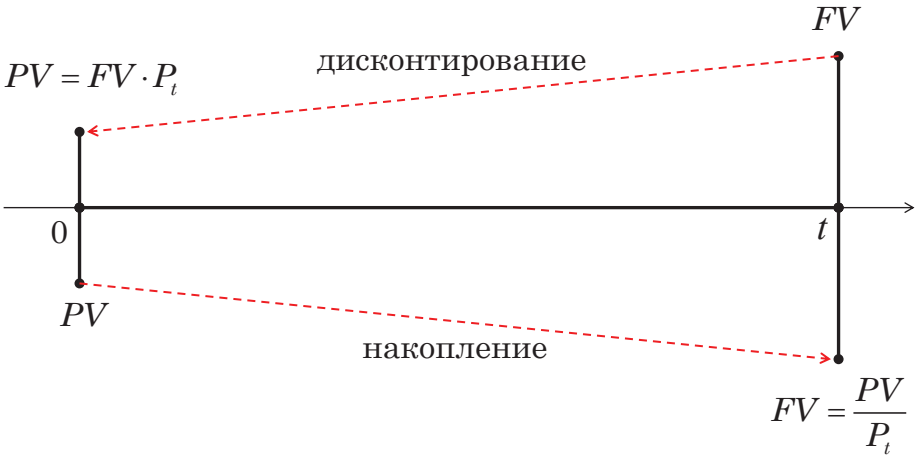


Рис. 6.2 Текущая стоимость *PV* и будущая стоимость *FV*

Чтобы с помощью этого простого общего соображения рассчитать цену произвольной купонной облигации номиналом F со сроком до погашения T, которая выплачивает купоны в размере $C_1,\ldots,C_n$ в моменты $0 \le t_1 < \ldots < t_n = T$ соответственно, обычно проводят следующее рассуждение. Наряду с купонной облигацией рассмотрим набор из n бескупонных облигаций со сроками до погашения $0 \le t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T$ и номиналами $C_1,\ldots,C_n + F$ соответственно. Стоимость этого портфеля равна $C_1 P_{t_1} + \ldots + C_{n-1} P_{t_{n-1}} + (C_n + F) P_{t_n}$. С другой стороны, рассматриваемый набор бескупонных облигаций обеспечивает выплаты тех же сумм и в те же моменты времени, что и исходная купонная облигация. Иначе говоря, с точки зрения денежных потоков исходная купонная облигация и этот набор бескупонных облигаций неразличимы. Поэтому они должны иметь одну цену (этот вывод является следствием предположения об отсутствии арбитража; об этом понятии мы будем говорить позже). Таким образом, справедлива следующая чрезвычайно важная формула для цены P произвольной облигации:

$$P = C_1 P_{t_1} + \ldots + C_{n-1} P_{t_{n-1}} + (C_n + F) P_{t_n}. \qquad (6.2)$$

Как мы отмечали в Главе 5, в ряде случаев выкупная цена R, т.е. сумма которую получает владелец облигации при её погашении, отличается от номинальной стоимости F. Чтобы описать эту ситуацию, нужно в правой части формулы (6.2) заменить номинал F на выкупную цену R.

[1] На самом деле вопрос о «правильном» коэффициенте дисконтирования намного сложнее.

Для стандартных облигаций общая формула (6.2) немного упрощается. Рассмотрим, например, облигацию номиналом F с ежегодным купоном в размере C, до погашения которой осталось выплатить n купонов. В квазикупонный момент эту облигацию можно рассматривать как набор из n бескупонных облигаций одного и того же номинала C со сроками погашения $1,2,\ldots,n$ лет соответственно и ещё одной n-летней бескупонной облигации номинальной стоимостью F. Поэтому цена P исходной купонной облигации вычисляется по формуле

$$P = C \cdot \left(P_1 + \ldots + P_n\right) + F \cdot P_n.$$

Если, в отличие от предыдущего примера, купон выплачивается p раз в год в размере C/p в конце каждой p-й части года (так что абсолютная сумма всех процентных выплат за год равна C), то формула для цены в квазикупонный момент примет вид:

$$P = \frac{C}{p}\sum_{k=1}^{np} P_{k/p} + F \cdot P_n.$$

Купонную облигацию с номинальной стоимостью F, сроком погашения n лет, которая выплачивает проценты непрерывно со скоростью C, можно рассматривать как предельный случай предыдущей облигации при $p \to \infty$. При этом сумму $\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{np} P_{k/p}$ можно рассматривать как интегральную сумму для $\int_0^n P_t dt$. Поэтому цена такой облигации вычисляется по формуле

$$P = C \cdot \int_0^n P_t dt + F \cdot P_n. \qquad (6.3)$$

6.1.3 «Демонтаж» купонных облигаций

В проведённом выше рассуждении мы объединили вместе несколько бескупонных облигаций, чтобы получить купонную облигацию. Можно проделать и обратную операцию – превратить купонную облигацию в набор бескупонных. Предположим, например, что 10 мая 2016 года инвестиционный банк приобрёл облигацию номиналом \$100000, которая выплачивает купон 2 раза в год по ставке 4% годовых и будет погашена 16 ноября 2025. Поэтому банк гарантированно получит 20 платежей по \$2000 каждый (16 мая 2016, 16 ноября 2016, 16 мая 2017, … , 16 ноября 2025 соответственно) и дополнительно \$100000 16 ноября 2025. Теперь банк может выпустить:

(1) 20 бескупонных облигаций со сроками погашения 16 мая 2016, 16 ноября 2016, 16 мая 2017, … , 16 ноября 2025 соответственно, выплаты по которым обеспечены купонами родительской облигации (поэтому для каждой новой облигации объём выпуска равен размеру купона, т.е. \$2000),

(2) ещё одну бескупонную облигацию со сроком погашения 16 ноября 2025, выплаты по которой обеспечены номиналом родительской облигации (поэтому объём выпуска равен \$100000).

Описанная процедура называется stripping ['strɪpɪŋ], а полученные в её результате бескупонные облигации – strip bonds или strips. Последний термин появился в 1985 году из первых букв фразы Separate Trading of Registered Interest and Principal of Securities. С другой стороны, обычные значения слов strip и stripping в английском языке отражают суть процесса, приводящего к появлению этих ценных бумаг (strip – полоса, разбирать, демонтировать и т.п.; stripping – разборка, демонтаж). В отечественной финансовой литературе термины stripping, strip не переводят, а просто записывают русскими буквами: «стриппинг», «стрип». Хотя выплаты по strips обеспечены выплатами по родительской облигации, они продаются как самостоятельные инструменты.

Strips привлекательны для потенциальных инвесторов, так как позволяют сформировать поток будущих денежных поступлений, точно учитывающий специфические потребности как по моментам поступления сумм, так и по их величине. Цены на strips определяются текущим уровнем процентных ставок и сроком до погашения и постоянно меняются.

Выпуск и обращение strips на каждом рынке регулируется специальными документами. О британских gilt strips, полученных «разрезанием» на купоны и номинал стандартных британских правительственных облигаций, в частности об особенностях налогообложения, можно прочитать в документах: *The Official Gilt Strips Facility*. Bank of England. October 1997, *A Private Investor's Guide to Gilts*. United Kingdon Debt Management Office. 4th ed., December 2004 и др. О strips, полученных «разрезанием» на купоны и номинал казначейских билетов (T-notes) и казначейских облигаций (T-bonds) США можно прочитать в Code of Federal Regulation, Title 31, Subtitle B, Chapter II, Subchapter B, §356.31 «How does the STRIPS program work?»

6.2 Кривая доходности

6.2.1 Текущая процентная ставка

Как и всякая облигация, бескупонная облигация является своеобразной формой долга. Уплачивая за единичную облигацию со сроком до погашения t лет сумму P_t, инвестор фактически даёт эту сумму эмитенту в долг на t лет. Давая деньги взаймы, инвестор, конечно, предполагает, что на невыплаченную часть долга будет начисляться определённый процент (по формуле сложных процентов) в соответствии с некоторой эффективной годовой процентной ставкой y_t (нижний индекс t подчёркивает зависимость этой ставки от срока до погашения, который может рассматриваться как срок займа). Иначе говоря, инвестор рассчитывает на получение в момент t погашения облигации суммы $P_t(1+y_t)^t$. С другой стороны, при погашении облигации инвестор получит заранее обусловленный номинал $F=1$. Поэтому $P_t(1+y_t)^t=1$. Отметим, что это соотношение можно рассматривать и как уравнение доходности для инвестиции

в бескупонную облигацию со сроком до погашения t лет, *если* владелец будет держать эту облигацию до момента погашения, так что y_t – это внутренняя ставка дохода для простого инвестиционного проекта, показанного на рис. 6.1. Соответственно, величину y_t можно рассматривать и как доходность к погашению для единичной облигации, до погашения которой осталось t лет. Именно по этой причине мы используем обозначение y_t, а не i_t.

Из равенства $P_t(1+y_t)^t = 1$ мы можем выразить цену единичной бескупонной облигации P_t и её доходность к погашению y_t друг через друга:

$$P_t = \left(1+y_t\right)^{-t}, \tag{6.4}$$

$$y_t = P_t^{-1/t} - 1. \tag{6.5}$$

Доходность y_t единичной бескупонной облигации, которая будет погашена через время t, показывает, под какие проценты рынок готов *сейчас* давать деньги в долг на заданный срок t, на какую *сейчас* доходность рассчитывают инвесторы при вложении средств на срок t. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, в ангоязычной финансовой литературе величину y_t называют *t-year spot rate of interest* (одно из значений слова spot [spɔt] в английском языке – «определённое место или точка»; выражение on the spot означает «без задержки, немедленно») или, точнее, *annually compounded t-year spot rate of interest*. В отечественной литературе этот термин переводят как «спотовая ставка», «текущая процентная ставка» и т.п.

6.2.2 Кривая доходности

График функции y_t называется *кривой доходности* (yield curve или, подробнее, zero-coupon bond yield curve). Центральные банки всех стран ежедневно рассчитывают и публикуют кривые доходности для облигаций своих правительств. Эти кривые являются важнейшим показателем состояния экономики соответствующей страны.

В России кривая доходности[2] рассчитывается Московской биржей по результатам торгов государственными облигациями в соответствии с «Методикой определения кривой бескупонной доходности государственных облигаций (облигаций федеральных займов)». В этой Методике величина y_t называется «спот-доходностью с годовой капитализацией процентов»; для её величины в базисных пунктах используется обозначение $Y(t)$.

На рис. 6.3 и 6.4 показаны кривые доходности Банка России для отечественных облигаций и ЕЦБ для правительственных облигаций зоны евро с рейтингом AAA в один и тот же день, 24 августа 2016 года.

---

[2] Полное наименование: «Кривая бескупонной доходности государственных облигаций России» («Russian Government Bond Zero Coupon Yield Curve»). Обычно используют сокращения: КБД, G-кривая (MOEX GCurve).

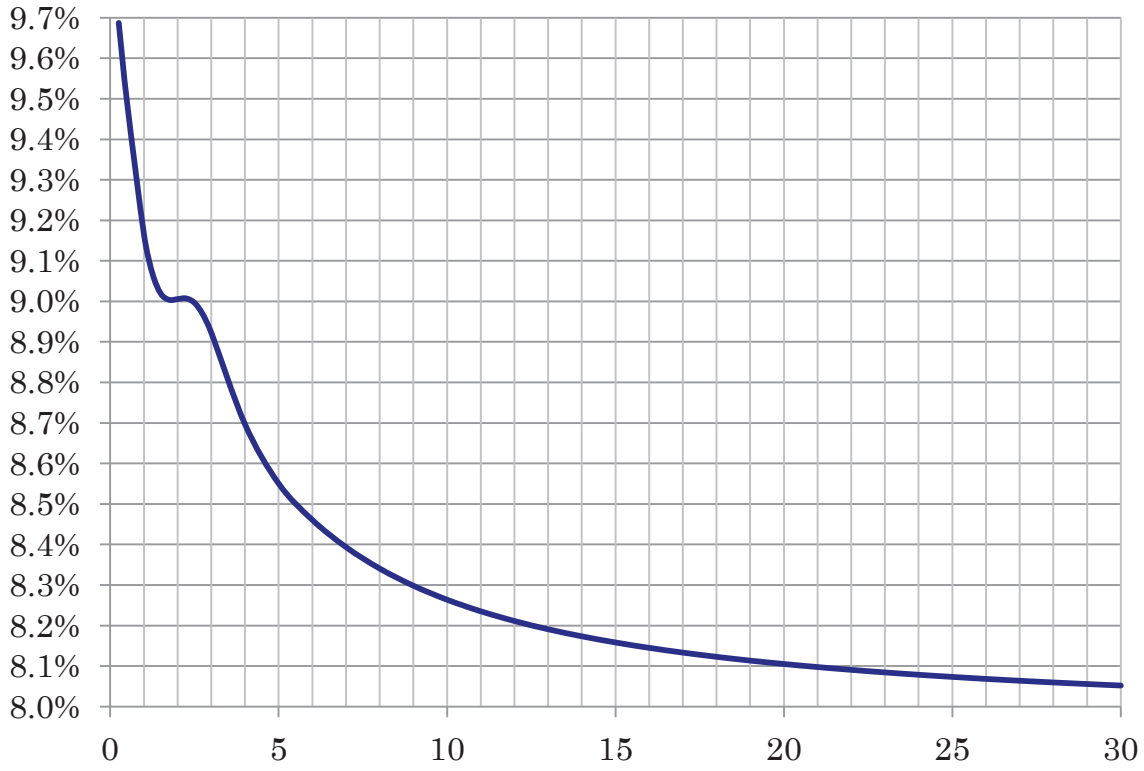


Рис. 6.3 Кривая доходности ЦБ РФ (спотовая процентная ставка y_t) 24 августа 2016 года

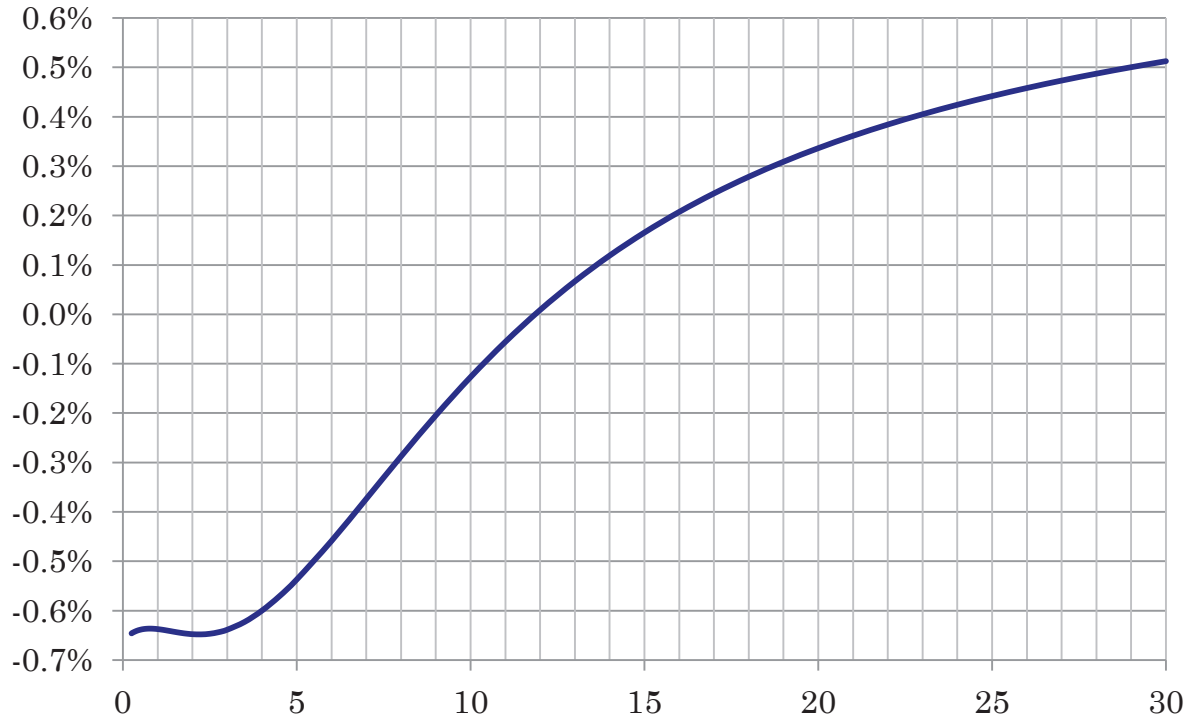


Рис. 6.4 Кривая доходности ЕЦБ (спотовая процентная ставка y_t) 24 августа 2016 года

Сразу бросается в глаза не только разный уровень процентных ставок, но и принципиально разное поведение кривой доходности – для рубля она убывает, а для евро возрастает. Причины этого отличия мы обсудим в следующем разделе.

Поскольку время в финансах измеряется целым числом дней, формально говоря, кривая доходности не является непрерывной, а состоит из изолированных точек. Однако, с одной стороны, на рисунке ограниченных размеров эти точки практически сливаются в непрывную линию, а с другой – для большинства задач важен лишь общий вид зависимости процентных ставок от времени и их порядок, что замечательно характеризует непрерывная кривая.

В англоязычной литературе в случае зависимости процентных ставок от времени говорят о *term structure of interest rates*; так же называют и раздел финансовой математики, где эта зависимость изучается. На русский язык эту фразу часто переводят как «*временна́я структура процентных ставок*», что не совсем точно[3], или «*срочная структура процентных ставок*», что не намного лучше из-за двусмысленности слова «срочная».

При более широком понимании кривая доходности описывает зависимость процентов, под которые рынок готов давать деньги в долг определённому заёмщику (или группе однотипных заёмщиков), от срока займа. При этом предполагается, что фиксирована валюта займа (доллары США, фунты стерлингов, евро, рубли и т.д.) и условия предоставления займа.

Наибольшее значение имеют кривые доходности для правительственных облигаций разных стран, номинированные в валюте соответствующей страны. По этим обязательствам риск дефолта практически отсутствует, т.к. любое правительство всегда может напечатать нужную ему сумму денег в национальной валюте (другое дело, что реальная ценность этих денег может быть ниже, чем ожидали инвесторы, когда приобретали облигации). Для других обязательств в этой валюте, например, корпоративных обязательств компаний с определённым рейтингом, кривая доходности обычно получается сдвигом вверх кривой доходности для государственных бумаг; это соответствует постоянной аддитивной надбавке (которая называется spread [spred]) к доходности y_t для каждого t. Иначе говоря, правительственные облигации выступают в качестве стандарта (benchmark ['benʧmɑːk]), с которым сравниваются другие долговые инструменты, номинированные в валюте соответствующей страны.

Банковский депозит является своеобразной формой займа – размещая свои средства в банке на определённый срок, вы фактически даёте их банку в долг. Процентная ставка по депозиту зависит от срока вклада, суммы вклада, условий вклада (т.е. типа депозита), вкладчика (пенсионер или нет), меняется

---

[3] В английском языке слово term [tɜːm] означает (в нашей ситуации) «определённый период времени»: term – a fixed or limited period for which something, for example office, imprisonment, or investment, lasts or is intended to last (Oxford Dictionary). «Временно́й» – это temporal ['temp(ə)r(ə)l].

от банка к банку и т.д. Например, 16 декабря 2016 Сбербанк предлагал следующие номинальные годовые процентные ставки при открытии вклада «Сохраняй» на сумму от 700 тысяч до 2 миллионов рублей; нижняя граница промежутка времени включена, верхняя – нет:

срок	1-2 мес.	2-3 мес.	3-6 мес.	6-12 мес.	1-2 г.	2-3 г.	3 г.
ставка	5.10%	5.50%	5.95%	6.40%	6.25%	6.05%	5.90%

Будем рассматривать вклад без капитализации процентов (так что он работает как бескупонная облигация). Для такого вклада калькулятор на сайте Сбербанка для заданных значениях суммы P и срока t вклада рассчитывает накопление A_t. Например, если сумма вклада $P=1$ млн. руб, а $t=182$ дня, то накопление $A_t=1032339.57$ руб. Этому значению соответствует эффективная годовая доходность («доходность к погашению») $y_t=\left(\frac{A_t}{P}\right)^{1/t}-1\approx 6.59\%$ годовых.

На рис. 6.5 изображена «кривая доходности», построенная на основе этих данных.

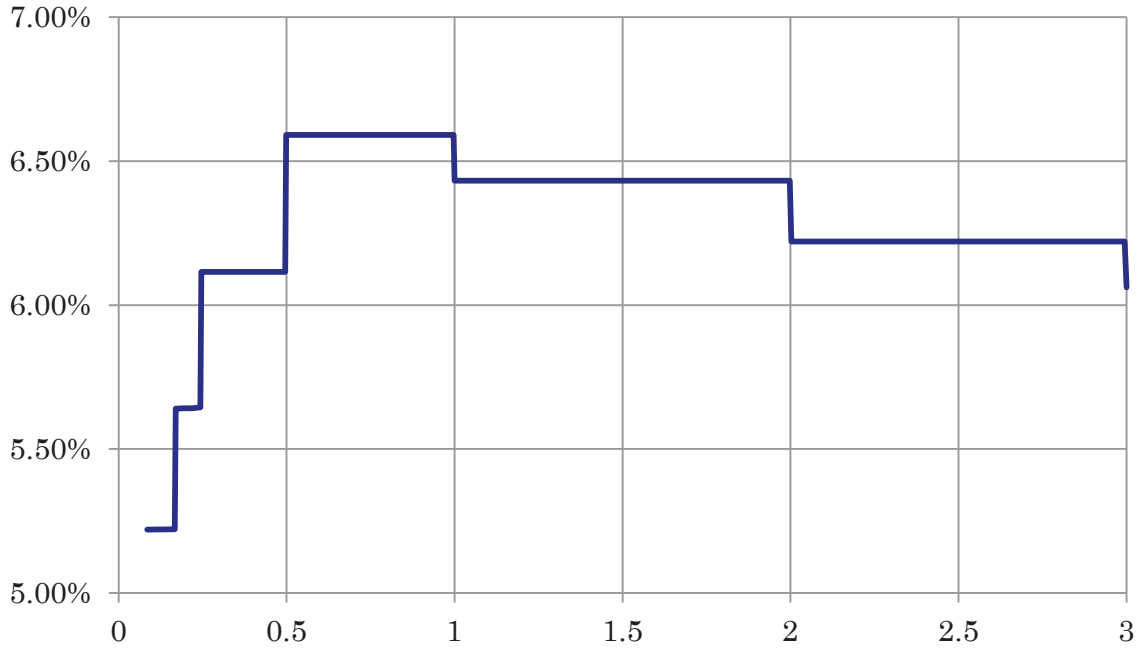


Рис. 6.5 Кривая доходности, соответствующая вкладу «Сохраняй» Сбербанка 16 декабря 2016

Следует отметить, что из-за особенностей начисления процентов, о которых мы рассказывали в Главе 1, эта «кривая доходности» не вполне кусочно-постоянна.

Доходность, на которую рассчитывают инвесторы при вложении средств на срок t, можно описывать не только процентной ставкой y_t, но и другими величинами (о них мы расскажем чуть позже), так что график зависимости y_t от времени – это лишь один из видов кривой доходности.

6.2.3 Теории, объясняющие форму кривой доходности

Для объяснения вида кривой доходности было видвинуто несколько теорий; основными являются *чистая теория ожиданий* (pure expectations theory), *теория предпочтения ликвидности* (liquidity preference), *теория сегментации рынка* (market segmentation).

Теория ожиданий в её простейшем виде базируется на утверждении, что доходности облигаций определяются ожиданиями инвесторов относительно значений краткосрочных спотовых процентных ставок в будущем.

Если, например, в некоторый момент времени доходности краткосрочных и долгосрочных облигаций равны, но инвесторы ожидают падения краткосрочных спотовых процентных ставок в будущем, то облигации с большим сроком до погашения станут более привлекательными. Действительно, покупая долгосрочные облигации инвесторы гарантируют получение высокого дохода в будущем, даже после ожидаемого падения процентных ставок. Это приведёт к росту спроса на них, что в свою очередь приведёт к росту цен и, значит, к падению доходности. В противоположность этому облигации с небольшим сроком до погашения станут менее привлекательными. Это приведёт к падению спроса на них, что в свою очередь приведёт к падению цен и, значит, к росту доходности этих облигаций.

Аналогично, если инвесторы ожидают роста краткосрочных спотовых процентных ставок в будущем, то текущая доходность долгосрочных облигаций вырастет, а краткосрочных упадёт.

Таким образом, возрастание кривой доходности (такую кривую называют *обычной* или *нормальной* – normal ['nɔ:(r)m(ə)l]) означает, что инвесторы ожидают роста спотовых краткосрочных процентных ставок в будущем, что, в свою очередь, обычно связано с экономическим ростом и сопутствующей инфляцией. Одной из причин такого вида кривой доходности является политика «количественного смягчения», проводимая соответствующим центральным банком. Эта политика увеличивает денежную массу и облегчает получение кредита.

Убывание кривой доходности (такую кривую называют *перевёрнутой* – inverted [ɪn'vɜ:tɪd]) означает падение спотовых краткосрочных процентных ставок в будущем, что, в свою очередь, часто свидетельствует о замедлении экономического роста и надвигающейся рецессии. Одной из причин такого вида кривой доходности является жёсткая монетарная политика, проводимая соответствующим центральным банком. Эта политика ограничивает денежную массу и усложняет получение кредита.

Более формально, основное положение теории ожиданий говорит, что доходность облигации с большим сроком до погашения такая же, как доходность от эквивалентной серии краткосрочных инвестиций. Используя понятие форвардной доходности (которое мы определим позже), можно сказать, что текущая форвардная доходность равна спотовой доходности в будущем (при таком же сроке до погашения).

Фактические данные не подтверждают теорию ожиданий. Хотя для небольшого инвестионного горизонта эта теория работает достаточно хорошо, часто она переоценивает будущие значения краткосрочных спотовых ставок. Иначе говоря, для возрастающей кривой доходности часто оказывается, что в реальности с течением времени краткосрочные процентные ставки не растут, а остаются неизменными. Тем не менее, чистая теория ожиданий важна как первый этап выработки разумного прогноза состояния экономики в будущем.

Теория предпочтения ликвидности утверждает, что инвесторы при прочих равных условиях предпочитают краткосрочные облигации как более ликвидные и менее рискованные и приобретают долгосрочные облигации только, если доходность по ним включает определённую рисковую премию. Эта премия состоит из нескольких компонент: (1) компенсации за риск невозможности быстро продать достаточный объём облигаций без потерь (liquidity risk), (2) компенсации за риск обесценивания денег из-за инфляции (inflation risk), (3) компенсации за риск уменьшения стоимости облигации из-за роста процентных ставок (interest rate risk), (4) компенсации за риск дефолта (credit risk). Обычно эти риски растут по мере увеличения срока до погашения и потому возрастающая кривая доходности может быть следствием, например, того, что инвесторы ожидают роста инфляции в будущем, а вовсе не роста будущих краткосрочных спотовых ставок (см. рис. 6.6). Аналогично, убывающая кривая доходности может быть следствием того, что инвесторы ожидают замедления инфляции в будущем, а вовсе не падения будущих краткосрочных спотовых ставок.

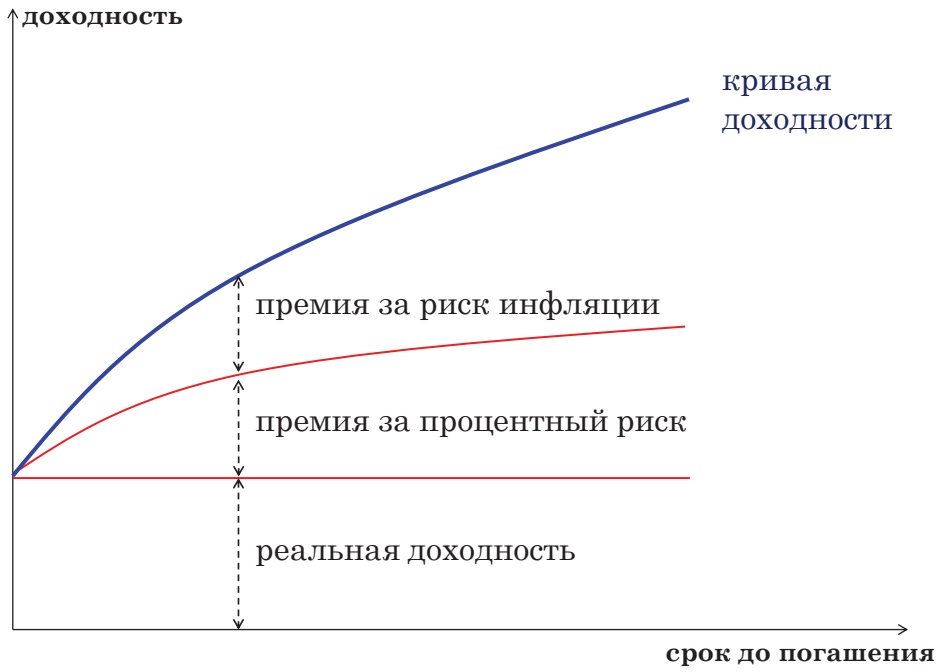


Рис. 6.6 Структура кривой доходности по теории предпочтения ликвидности

Выделение из кривой доходности премий за различные виды рисков является очень непростой задачей; см., например, Jacob Ejsing, Magdalena Grothe, Oliver Grothe. Liquidity and credit risk premia in government bond yields. European Central Bank, Working paper No.1440, June 2012.

Теория сегментации рынка утверждает, что ценные бумаги с разными сроками до погашения интересуют разные группы инвесторов с разными интересами и разными обязательствами, а разные группы эмитентов интересует выпуск бумаг с разными сроками до погашения. Поэтому зависимость процентных ставок от времени формируется спросом и предложением на ценные бумаги среди разных групп инвесторов и эмитентов. В частности, связь между участками кривой доходности, которые соответствуют разным срокам до погашения, относительно слабая.

6.2.4 Колебания процентных ставок с течением времени (при фиксированном сроке займа)

Говоря о «*сегодня*» и *спотовых* ставках мы будем иметь в виду некоторый фиксированный день и рассматривать его в качестве нулевого. Когда наступит завтрашний день, он станет новым «сегодня» и спотовые ставки y_t для него будут, вообще говоря, отличаться от вчерашних спотовых ставок. Например, 26 июля 2016 года по данным ЦБ РФ (http://www.cbr.ru/gcurve/GDB.asp) на отечественном рынке были зафиксированы следующие доходности государственных облигаций России:

$$y_1 = 9.57\%,\ y_2 = 9.23\%,\ \ y_3 = 9.07\%,\ y_4 = 8.89\%,\ y_5 = 8.79\%.$$

На следующий день, 27 июля 2016 года эти доходности уменьшились на несколько базисных пунктов (от 1 до 4 в зависимости от срока до погашения):

$$y_1 = 9.56\%,\ y_2 = 9.21\%,\ \ y_3 = 9.04\%,\ y_4 = 8.85\%,\ y_5 = 8.75\%.$$

Если возможна путаница, принято использовать обозначение $y_t(T)$, явно указывая ту дату T, которая считается «сегодняшним днём» и от которой отсчитывается срок до погашения t. Скажем, в приведённом выше примере можно написать:

$$y_5(\text{26 июля 2016}) = 8.79\%,\ y_5(\text{27 июля 2016}) = 8.75\%.$$

На рис. 6.7 показана динамика изменения трёхлетней доходности $y_3(T)$ за три месяца, с 1 марта 2016 года по 30 мая 2016 года.

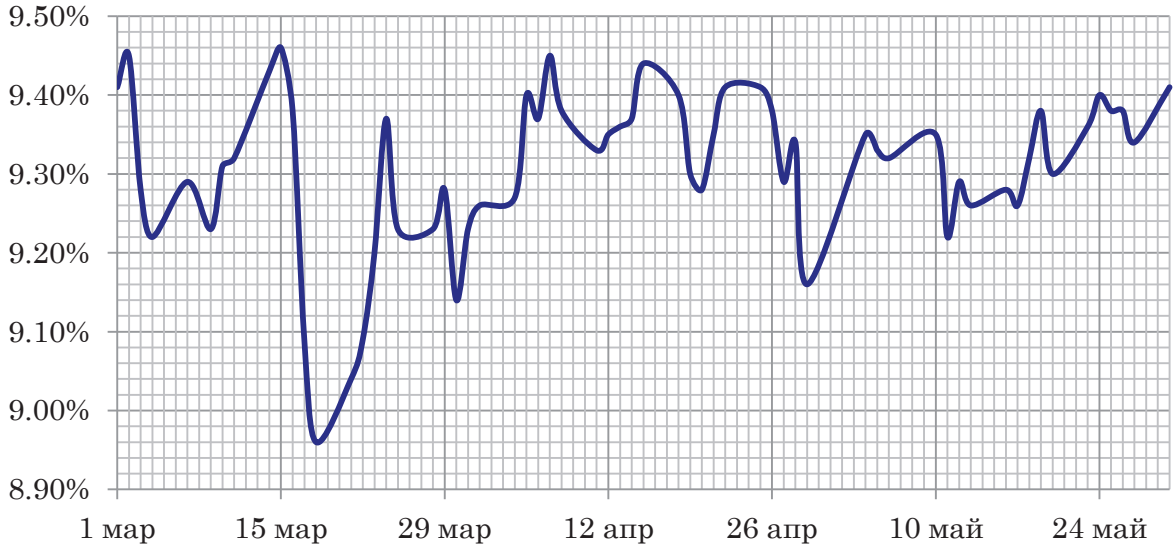


Рис. 6.7 Трёхлетняя доходность $y_3(T)$ как функция T для периода 1 марта – 30 мая 2016 года

Колебания, показанные на рис. 6.7, отражают ежедневные случайные флуктуации доходностей. Чтобы получить более объективную картину, для расчёта коэффициентов дисконтирования обычно используют 90-дневное среднее значение доходностей.

Для последовательных значений доходностей $y_t(T)$ при фиксированном значении срока до погашения t Центальный Банк Росии придумал специальный термин *изотермный ряд*, определив его как «временной ряд бескупонных доходностей с заданным сроком до погашения облигаций». Больше никто это определение не использует, кроме авторов отечественных учебников, статей, диссертаций и дипломов по финансам, где это определение бездумно копируется. В принципе создавать определения можно и нужно – они являются первым шагом на пути проникновения в суть предмета. «Изотермный», надо полагать, появился из *изо-* (от греческого isos – равный) и *-терм* (term, англ. длительность, срок; в данном контексте «срок до погашения». Английское term восходит к латинскому terminus – конец, предел). Проблема в том, что в современной науке уже существует термин *изотермный* = *изотермический* (isothermal [ˌaɪsə'θɜːm(ə)l] от греческих слов: isos – равный и therme – жара), который употребляется для указания на процессы, происходящие при постоянной температуре. Если уж и употреблять в рассматриваемой ситуации какой-то термин, то наиболее подходящим был бы *изохронный* (isochronous [aɪ'sɔkrənəs], от греческих слов: isos – равный и khronos – время). Этот термин используется в современной науке и означает «равный по продолжительности чему либо другому; одинаковой длительности» (Энциклопедический словарь), «occurring at the same time, occupying equal time» (Oxford Dictionary).

Наряду с доходностью бескупонных облигаций важную роль при определении процентных ставок по займам по всему миру играет ICE LIBOR (['laɪbɔː], сокращение от Intercontinental Exchange London Interbank Offered

Rate) – ставка, по которой банки с очень высоким кредитным рейтингом берут деньги в долг друг у друга на срок от одного дня до одного года на лондонском межбанковском рынке.

6.2.5 Купонный эффект

С помощью (6.4) можно переписать ключевую формулу (6.2) для цены произвольной облигации (а фактически формулу для текущей стоимости любого денежного потока) не в терминах коэффициентов дисконтирования P_t, а в терминах ставок y_t:

$$P = C_1\left(1+y_{t_1}\right)^{-t_1} + \ldots + C_{n-1}\left(1+y_{t_{n-1}}\right)^{-t_{n-1}} + \left(C_n+F\right)\left(1+y_{t_n}\right)^{-t_n}. \qquad (6.6)$$

Отсюда мы получим следующее соотношение, связывающее доходность к погашению купонной облигации, *YTM*, и спотовые ставки y_t:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k\left(1+YTM\right)^{-t_k} + F\left(1+YTM\right)^{-t_n} = \sum_{k=1}^{n} C_k\left(1+y_{t_k}\right)^{-t_k} + F\left(1+y_{t_n}\right)^{-t_n}. \qquad (6.7)$$

Поэтому *YTM* является своеобразным средним значением спотовых ставок $y_{t_1},\ldots,y_{t_n}$.

В типичной ситуации доходности являются величинами порядка нескольких процентов и поэтому в качестве простого приближения можно заменить выражение вида $(1+y)^{-t}$ на $1-yt$. Если n не очень велико, так что ошибка от этой замены не накапливается при суммировании, то уравнение (6.7) превратится в линейное, что даёт следующее приближённое значение *YTM*:

$$YTM_{\text{appr}} = \sum_{k=1}^{n} w_{t_k} y_{t_k},$$

где

$$w_{t_k} = \frac{C_k t_k}{\sum_{j=1}^{n} C_k t_j + F t_n},\ k=1,\ldots,n-1; \quad w_{t_n} = \frac{\left(C_n+F\right)t_n}{\sum_{j=1}^{n} C_j t_j + F t_n}.$$

Иначе говоря, доходность к погашению для купонной облигации приближённо равна взвешенному среднему арифметическому спотовых ставок, относящихся к моментам выплат, с весами, пропорциональными размерам и срокам выплат.

Для стандартных облигаций общая формула (6.7) немного упрощается. Рассмотрим, например, облигацию, которая платит ежегодный купон по ставке $c = C/F$ и до погашения которой осталось выплатить n купонов. Если настоящий момент является квазикупонным, то доходность к погашению находится из равенства:

$$c\frac{1-(1+YTM)^{-n}}{YTM}+(1+YTM)^{-n}=c\sum_{k=1}^{n}\left(1+y_k\right)^{-k}+\left(1+y_n\right)^{-n}, \tag{6.8}$$

а в качестве приближённого значения можно взять

$$YTM_{\text{appr}}=\frac{c\sum_{k=1}^{n}ky_k+ny_n}{cn(n+1)/2+n} \tag{6.9}$$

Если зафиксировать срок до погашения n и спотовые ставки $y_1,\ldots,y_n$, то доходность к погашению будет (относительно) немного меняться при изменении купонного процента. Эта зависимость называется *купонным эффектом* (coupon ['ku:pɔn] effect [ɪ'fekt]). Купонный эффект возникает вследствие того, что при росте купонного процента увеличивается доля более ранних платежей в общей сумме выплат. Поэтому бóльший вес получают спотовые ставки для более ранних сроков до погашения.

Купонный эффект хорошо виден из Таблицы 6.1, где приведены рассчитанные численно значения YTM для случаев: $n=5$, $y_1=1\%$, $y_2=3\%$, $y_3=4\%$, $y_4=4.5\%$, $y_5=5\%$ (первый случай) и $n=5$, $y_1=9\%$, $y_2=7\%$, $y_3=6\%$, $y_4=5.5\%$, $y_5=5\%$ (второй случай). Купонный процент c меняется от 0 до 10% с шагом 1%.

Если $c=0$ (5-летняя бескупонная облигация), то, конечно, в обоих случаях $YTM=y_5=5\%$. В первом случае для ранних сроков спотовые доходности меньше и потому по мере роста купонного процента доходность к погашению уменьшается. Во втором случае для ранних сроков спотовые доходности больше и потому по мере роста купонного процента доходность к погашению увеличивается. Мы также привели приближённые значения доходности к погашению, подсчитанные по формуле (6.9).

Таблица 6.1

	первый случай			*второй случай*		
c	цена	YTM	YTM_{appr}	цена	YTM	YTM_{appr}
0%	78.35	5.00%	5.00%	78.35	5.00%	5.00%
1%	82.80	4.97%	4.97%	82.57	5.03%	5.03%
2%	87.24	4.94%	4.95%	86.80	5.05%	5.05%
3%	91.68	4.92%	4.93%	91.02	5.08%	5.07%
4%	96.13	4.89%	4.91%	95.24	5.10%	5.09%
5%	100.57	4.87%	4.89%	99.46	5.13%	5.11%
6%	105.02	4.85%	4.87%	103.68	5.15%	5.13%
7%	109.46	4.83%	4.85%	107.90	5.17%	5.15%
8%	113.90	4.81%	4.83%	112.12	5.19%	5.17%
9%	118.35	4.79%	4.82%	116.34	5.20%	5.18%
10%	122.79	4.77%	4.80%	120.56	5.22%	5.20%

6.2.6 Эквивалентная по облигациям доходность

Бескупонные облигации с большим сроком до погашения обычно получаются «разрезанием» на купоны и номинал стандартных правительственных облигаций с полугодовым купоном. Поэтому для них естественным единичным промежутком является квази-купонный период, а естественной мерой доходности – номинальная годовая доходность, которую мы обозначим $y_t^{(2)}$. Её называют bond equivalent yield (*эквивалентная по облигациям доходность*); используют и термин coupon-equivalent yield. Чтобы определить эту величину, обычным образом вводят понятие квазикупонной даты и квазикупонного периода: если, например, дата погашения 7 июня 2020 года, то квазикупонные даты – это 7 июня и 7 декабря каждого года, начиная от текущего года до дня погашения (для strip bond это квазикупонные даты родительской облигации). Если в качестве единичного промежутка времени берётся квази-купонный период, длина промежутка времени от текущего дня до дня погашения равна $\frac{r}{s}+n$, где s – точное число дней в квазикупонном периоде, внутри которого расположен текущий день, r – точное число дней от этого дня до следующей квази-купонной даты, n – число квазикупонных периодов до дня погашения (исключая текущий). Считая, что «год» – это два квазикупонных периода, срок t до погашения в годах можно записать как $\left(\frac{r}{s}+n\right)\Big/2$. Эффективная ставка за купонный период, $y_{\text{эфф}}$, определяется соотношением $P_t\left(1+y_{\text{эфф}}\right)^{\frac{r}{s}+n}=1$. Поскольку bond equivalent yield $y_t^{(2)}=2y_{\text{эфф}}$, мы можем переписать последнюю формулу в виде:

$$P_t=\left(1+\frac{y_t^{(2)}}{2}\right)^{-2t}. \tag{6.10}$$

Из (6.10) и (6.4) следует, что для любого времени до погашения величины $y_t^{(2)}$ и y_t связаны друг с другом формулой $\left(1+\frac{y_t^{(2)}}{2}\right)^2=1+y_t$. Поэтому

$$y_t=\left(1+\frac{y_t^{(2)}}{2}\right)^2-1, \qquad y_t^{(2)}=2\left(\sqrt{1+y_t}-1\right). \tag{6.11}$$

Таким образом, bond equivalent yield $y_t^{(2)}$ фактически является номинальной процентной ставкой, начисляемой 2 раза в год, которая соответствует эффективной годовой ставке y_t. При этом важно иметь в виду (точно описанную) процедуру измерения длины промежутка времени t.

6.2.7 Непрерывно начисляемая доходность

Годовую доходность к погашению можно описывать и соответствующей интенсивностью процентов $Y_t = \ln(1+y_t)$ – её называют continuously compounded zero-coupon rate, continuously compounded spot rate of interest, *t*-year spot force of interest и т.п. В «Методике определения кривой бескупонной доходности государственных облигаций» Московской биржи величина Y_t называется «непрерывно начисляемой доходностью»; для её величины в базисных пунктах используется обозначение $G(t)$.

Для Y_t соотношение (6.5) превратится в соотношение

$$Y_t = -\frac{\ln P_t}{t} \Leftrightarrow P_t = e^{-tY_t}. \qquad (6.12)$$

Важно подчеркнуть, что величина Y_t относится не к моменту времени t, а к *промежутку* $[0;t]$ на оси времени. Для бескупонной облигации, удерживаемой до погашения, естественно считать, что проценты на протяжении всего промежутка $[0;t]$ начисляются с постоянной интенсивностью, т.е. для любого малого промежутка времени $(u;u+h)$ внутри промежутка $[0;t]$ эффективная процентная ставка не зависят от u. Тогда её значение равно $Y_t \cdot h + o(h)$.

Поскольку y_t малая величина, верна приближённая формула: $Y_t \equiv \ln(1+y_t) \approx y_t$, т.е. графики функций y_t и Y_t практически совпадают. Отметим, что всегда $Y_t < y_t$, за исключением случая $y_t = 0$, когда и $Y_t = 0$.

6.2.8 Паритетный доход

Поскольку основными долговыми инструментами являются купонные облигации, инвесторы часто предпочитают описывать зависимость процентных ставок от времени с помощью так называемой *паритетной доходности* (par yield). Она определяется как ставка купонного дохода, при которой цена купонной облигации с тем же сроком до погашения, что и у расматриваемой облигации с нулевым купоном, равна её номиналу (в этом случае доходность к погашению совпадает с купонной ставкой). Это общее определение нужно уточнить, указав, как часто производятся выплаты процентов паритетной купонной облигацией. Ниже мы будем считать, что начальный момент является квазикупонным.

Паритетная купонная облигация с ежегодным купоном. В этом случае паритетная доходность определяется как ставка π_n купонного дохода, при которой цена облигации с фиксированным ежегодным купоном и сроком до погашения n лет равна её номиналу. Если F – номинальная стоимость облигации, то ежегодные процентные выплаты равны $C = F\pi_n$ и, значит, как мы установили ранее, цена такой облигации равна $F\pi_n(P_1 + \ldots + P_n) + FP_n$. Из равенства *цена = номинал*, мы имеем:

$$п_n = \frac{1-P_n}{P_1+\ldots+P_n}. \tag{6.13}$$

Паритетная купонная облигация с полугодовым купоном. Вместо облигации с ежегодным купоном можно рассматривать облигации с полугодовым купоном. Соответственно, паритетная доходность определяется как номинальная годовая ставка $п_n^{(2)}$ купонного дохода, при которой цена облигации с фиксированным полугодовым купоном и сроком до погашения n лет равна её номиналу. Если F – номинальная стоимость облигации, то каждые полгода выплачиваются проценты в размере $\frac{C}{2} = F \cdot \frac{п_n^{(2)}}{2}$ и, значит, как мы установили ранее, цена такой облигации равна

$$F\frac{п_n^{(2)}}{2}\left(P_{0.5}+P_1+P_{1.5}+P_2+\ldots+P_{n-0.5}+P_n\right)+FP_n.$$

Из равенства *цена = номинал*, мы имеем:

$$п_n^{(2)} = 2 \cdot \frac{1-P_n}{P_{0.5}+P_1+P_{1.5}+P_2+\ldots+P_{n-0.5}+P_n}. \tag{6.14}$$

Паритетная купонная облигация с непрерывной купонной выплатой. При определении паритетной доходности можно рассматривать купонную облигацию, которая выплачивает проценты непрерывно, со скоростью $C = F \cdot п_n^{(\infty)}$ (n – срок до погашения, F – номинал облигации). Соответственно, паритетная доходность определяется как номинальная годовая ставка $п_n^{(\infty)}$ купонного дохода, при которой цена такой облигации равна её номиналу. Как мы установили ранее, цена такой облигации равна $Fп_n^{(\infty)}\int_0^n P_t dt + FP_n$. Из равенства *цена = номинал* мы имеем:

$$п_n^{(\infty)} = \frac{1-P_n}{\int_0^n P_t dt}. \tag{6.15}$$

Облигации с непрерывной выплатой процентов удобны тем, что их естественным образом можно рассматривать для любого срока до погашения. Поэтому формула (6.15) верна для любого положительного действительного n, а не только для натурального.

Вследствие купонного эффекта, в зависимости от вида кривой доходности паритетная доходность будет отличаться от спотовой в бóльшую или меньшую сторону.

При всей важности изложенных выше способов описания зависимости процентных ставок от времени, понять природу этой зависимости можно только с помощью так называемых *форвардных ставок*.

6.3 Форвардные ставки

6.3.1 Форвардные контракты

Цена P_t единичной бескупонной облигации предполагает, что покупатель немедленно выплачивает эту сумму, а продавец немедленно передаёт покупателю приобретённую им облигацию. Такая сделка о немедленной оплате товара и немедленной его поставке называется *договором на реальный товар* (spot contract). Соответственно P_t называют spot price. В отечественной литературе spot price иногда переводится как «цена при условии немедленной уплаты наличными», но чаще термин spot не переводится, а просто записывается русскими буквами, так что spot price переводится как «цена спот» или «спотовая цена».

Хотя мы употребляем слово «немедленно», в реальности между днём заключения сделки и днём окончательного расчёта, когда продавец получает деньги, а покупатель – облигации, всегда проходит несколько дней. Как мы отмечали в Главе 5, для государственных облигаций обычно день расчёта – это следующий рабочий день после дня заключения сделки (правило $T+1$), а для корпоративных облигаций между днём сделки и днём расчёта проходит 3 рабочих дня (правило $T+3$). Похожая ситуация и на других рынках. Например, на рынке Forex[4] применяется правило $T+2$, за исключением пары канадский доллар-доллар США, для которой действует правило $T+1$.

Сделки купли/продажи могут заключаться не только на условиях немедленной уплаты и поставки товара. Стороны могут заключить контракт о купле/продаже некоторого товара в определённый момент T в будущем, причём уже при заключении контракта, т.е. в настоящий момент $t_0 = 0$, согласовать ту цену K, которую в момент T должен будет уплатить за товар покупатель и по которой продавец будет обязан продать товар (см. рис.6.8).

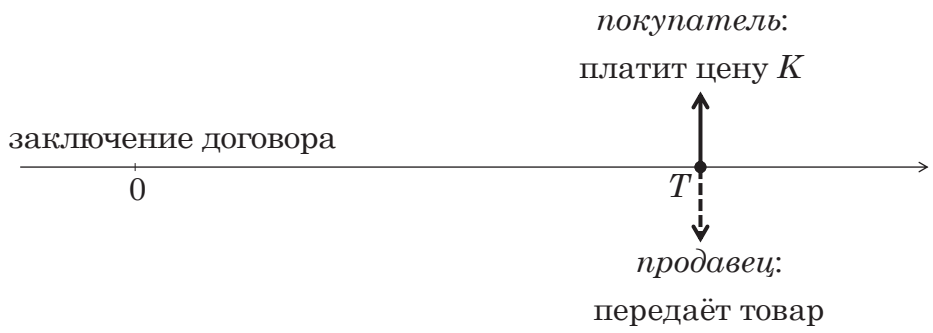


Рис. 6.8. Простейший форвардный контракт

[4] также и FX – сокращение от FOReign Exchange (иностранная валюта); на этом децентрализованном глобальном рынке круглосуточно, за исключением выходных, происходит торговля валютами разных стран.

Такая сделка называется *форвардной* (forward[5] ['fɔ:wəd] contract или просто forward), зафиксированная в нём цена K – *форвардной ценой* (forward price), момент T – *днём поставки* (delivery date) или *днём расчёта* (settlement date). Хотя при заключении форвардного контракта деньги не платятся, он *обязателен* для исполнения сторонами в согласованный момент T в будущем на условиях, согласованных в настоящий момент, вне зависимости от того, какова будет реальная (т.е. спотовая) цена товара в момент T.

Поэтому, если спотовая цена товара в момент T, S_T, меньше форвардной цены K, то покупатель переплатит за товар сумму $K - S_T$ (а продавец получит дополнительный доход в размере $K - S_T$); если же спотовая цена в момент T больше форвардной, то продавец потеряет сумму $S_T - K$, а покупатель сэкономит сумму $S_T - K$ (см. рис.6.9). Если потери считать отрицательным доходом, то оба случая можно описать одним утверждением: доход покупателя равен $S_T - K$, доход продавца равен $K - S_T$.

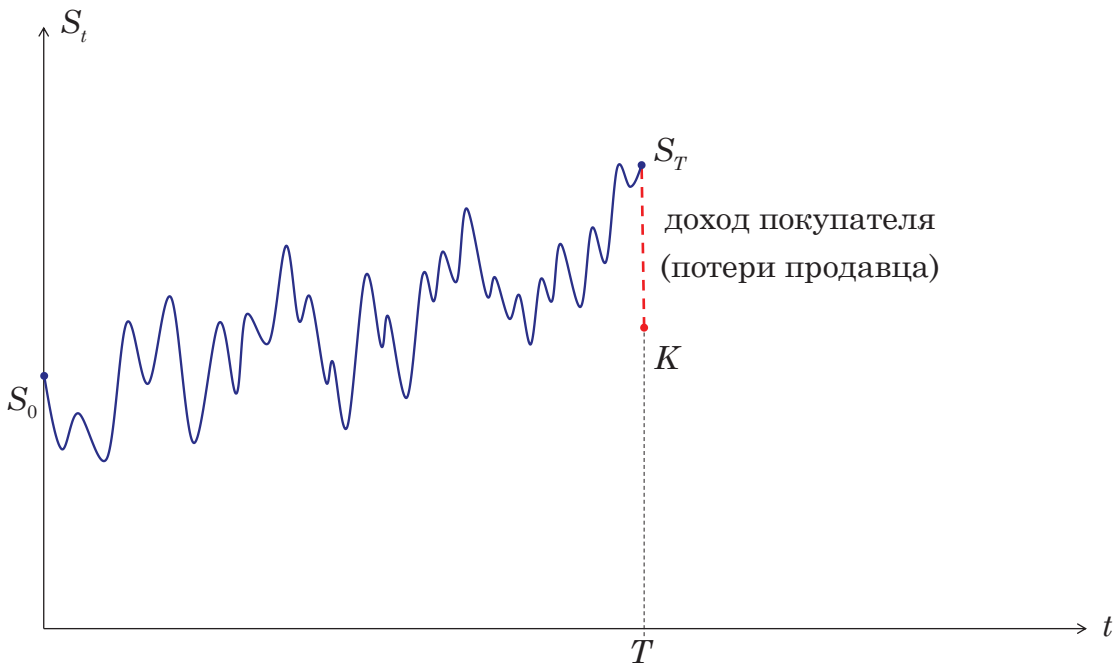


Рис. 6.9

Покупатель заключает форвардный контракт потому, что не исключает роста цен на приобретаемый актив и надеется заработать на этом. В подобных случаях, когда кто-то покупает актив в расчёте на рост его цены в будущем, играет на повышение, говорят, что он занимает «*длинную позицию*» (long position). В противоположность этому продавец актива, который надеется на падение цен, занимает «*короткую позицию*» (short position). Короткая позиция

[5] в английском языке forward означает «вперёд», «в будущем» и т.п.

рискованнее длинной, хотя бы потому, что потери $K - S_T$ по длинной позиции не превышают K (будущая спотовая цена актива, S_T, может упасть только до 0), в то время как по короткой позиции потери $S_T - K$ теоретически могут быть сколь угодно большими.

Чтобы проиллюстрировать понятие форвардного контракта, рассмотрим следующий пример. Предположим, что 15 декабря 2016 года российская компания АБВ закупила у немецкой компании XYZ для реализации в России большую партию товара, скажем на EUR10m (10 миллионов евро), с условием выплаты этой суммы через 3 месяца (15 марта 2017 года), после реализации товара. Компания АБВ предполагает, что за три месяца она сможет продать в России всю эту партию и выручить (за вычетом всех расходов) RUB700m (700 миллионов рублей). В день заключения этой сделки, т.е. 15 декабря 2016 года, курс евро, установленный ЦБ РФ, был 64.7543. Будем считать для простоты, что в этот день по этому курсу можно купить или продать любое количество валюты. Поэтому по текущему курсу для выплаты компании XYZ десяти миллионов евро будет достаточно RUB647.543m, что означает чистый доход более 50 миллионов рублей. Однако, никто не знает, каким будет курс евро через три месяца, когда компания АБВ должна будет выплатить компании XYZ 10 миллионов евро. Возможно, курс упадёт до 62 и тогда чистый доход компании АБВ вырастет до 80 миллионов рублей. Но нельзя исключить и того, что курс евро вырастет и тогда прибыль уменьшится. Более того, если через три месяца курс будет выше 70 EUR/RUB, то компания АБВ понесёт убытки. Что же делать этой компании? Поскольку её бизнес – торговые операции, было бы очень неразумно брать на себя этот *валютный риск* (currency risk; его также называют exchange-rate risk). Такого рода риски – бизнес банков, которые могут предложить компании АБВ валютный форвардный контракт – currency forward; его также называют outright ['autraɪt] forward (буквально: «полный, ясный форвард») на покупку необходимого количества евро через 3 месяца по фиксированному курсу, который будет согласован в момент заключения контракта.

Предположим, например, что банк предлагает продать через 3 месяца 10 миллионов евро за 665 миллионов рублей, т.е. по курсу 66.5 (этот индикативный форвардный курс даёт 15 декабря 2016 г. калькулятор банка HSBC http://www.hsbcnet.com/gbm/fwcalc-disp). Если компания АБВ заключит этот форвардный контракт, то всякая неопределённость с курсом евро исчезнет и компания может сосредоточиться на своём основном бизнесе, чтобы действительно выручить предполагаемые 700 миллионов рублей (в этом случае она получит гарантированную прибыль 35 миллионов рублей). В этом примере компания АБВ занимает длинную позицию по форвардному контракту на покупку евро, а банк – короткую.

Таким образом, форвардный контракт обеспечивает своеобразную защиту от финансовых потерь из-за возможных будущих колебаний цен на рассматриваемый товар, причём одновременно он «защищает» и от

дополнительного дохода при благоприятном изменении цен. Поэтому, хотя форвардный контракт и не предполагает платы за его заключение (в отличие, например, от страхового полиса, когда за страховую защиту нужно заплатить премию), на самом деле он вовсе не бесплатен. Следует, впрочем, отметить, что для небольших компаний банк может потребовать какую-то финансовую гарантию того, что форвард действительно будет ими исполнен.

В английском языке защита от финансовых потерь из-за неблагоприятного изменения цен на какой-то актив в будущем с помощью инвестиций в другой инструмент называется hedge [hedʒ] (основное значение этого слова – изгородь из кустов, посаженных рядом друг с другом, «живая» изгородь) или hedging. На русский язык эти термины не переводят, а просто записывают русскими буквами. Поэтому можно сказать, что валютный форвард – это один из способов *хеджирования* валютного риска. Хотя форвард может заключаться и в чисто спекулятивных целях, чтобы получить финансовую выгоду при благоприятном изменении цен в будущем, обычно для спекуляций используют фьючерсы и опционы.

Форвардные контракты заключаются на внебиржевом рынке (over-the-counter [ˌəuvəðə'kauntə] market – OTC market), обычно между двумя финансовыми институтами или финансовым институтом и его клиентом. Они никак не регулируются законами, что

- обеспечивают конфиденциальность сделки,
- позволяет им быть очень гибкими и учитывать индивидуальные потребности сторон.

Важное их достоинство – это отсутствие какой бы то ни было платы за их заключение. Серьёзным недостатком является обязательность исполнения, даже если это означает финансовые потери. Эта обязательность, т.е. риск потерь, в сущности, и является платой за форвард. С другой стороны, эта обязательность весьма относительна и с форвардными контрактами всегда связан *риск поставки* (delivery risk); его также называют *расчётный риск* (settlement risk).

Рассмотренный в примере с торговой компанией АБВ простейший валютный форвардный контракт называется *поставочным*. Хеджировать валютный риск можно и с помощью *расчётного форварда* (Non-Deliverable Forward, сокращённо, NDF), когда в момент исполнения не производится покупка/продажа согласованного количества валюты, а лишь выплачивается разница между форвардной ценой и ценой в день исполнения (той стороне, которая оказывается в выигрыше). Это, в частности, уменьшает риск неисполнения обязательств и суммы денег, которые должны переходить из рук в руки. Западные банки предлагают большое число разнообразных модификаций этих основных видов валютных форвардов. Например, HSBC предлагает: forward extra, forward extra plus, participating forward, tracker forward. В отличие от стандартного валютного форварда эти контракты позволяют получить определённую выгоду от благоприятного изменения курса

к моменту исполнения, но за это приходится платить форвардным курсом K', который менее выгоден, чем стандартный.

Форвардные контракты самым простым для понимания производным финансовым инструментом. Более сложные инструменты, такие, например, как *фьючерсы* (futures ['fju:ʧəz]) и *опционы* (option ['ɔpʃ(ə)n]) фактически являются усложнёнными и модифицированными версиями форвардов. Упрощённо говоря,

- *фьючерс* – это стандартизованный форвард, которым торгуют на биржах,
- *опцион покупателя* (call option) – это форвард, который даёт право (а не обязанность) купить товар по согласованной цене в установленное время (для *европейского опциона*) или раньше (для *американского опциона*),
- *опцион продавца* (put option) – это форвард, который даёт право (а не обязанность) продать товар по согласованной цене в установленное время (для европейского опциона) или раньше (для американского опциона).

6.3.2 Форвардные ставки

До сих пор, когда мы говорили о договоре займа, мы предполагали, что займодавец даёт заёмщику в долг согласованную в договоре сумму *немедленно* после заключения договора (в момент $t_0 = 0$). Процентная ставка по займу относится к промежутку $[0;t]$, где t – срок займа.

Однако в настоящий момент можно заключить и своеобразный отложенный договор займа. По такому договору займодавец даёт заёмщику в долг согласованную в договоре сумму S не немедленно после заключения договора, а в определённый момент u в будущем, причём уже при заключении контракта, т.е. в настоящий момент $t_0 = 0$, стороны фиксируют как срок займа t, так и процентную ставку $f_{u,t}$ (которая относится к промежутку $[u;u+t]$); нижние индексы указывают момент u заключения договора займа в будущем и его срок t. Иначе говоря, в момент u займодавец *обязан* дать заёмщику сумму S в долг на срок t по ставке $f_{u,t}$, а заёмщик *обязан* взять эту сумму в долг на срок t по ставке $f_{u,t}$ и в момент $u+t$ *обязан* вернуть займодавцу сумму $S\left(1+f_{u,t}\right)^t$ (если промежуточная выплата процентов не предусмотрена).

Рассматриваемое нами специфическое форвардное соглашение об отложенном договоре займа называют forward-forward agreement. Согласованная в нём будущая эффективная годовая процентная ставка $f_{u,t}$, в соответствии с которой начисляются проценты на невыплаченную часть долга, называется *форвардной* (forward rate) или, подробнее, *t-летней форвардной ставкой через u лет* (t-year forward rate u years from now). При $u = 0$ форвардная ставка $f_{u,t} \equiv f_{0,t}$ – это обычная спотовая ставка для займа на срок t:

$$f_{0,t} = y_t . \tag{6.16}$$

Диаграмма денежного потока для forward-forward agreement с точки зрения заёмщика показана на рис. 6.10.

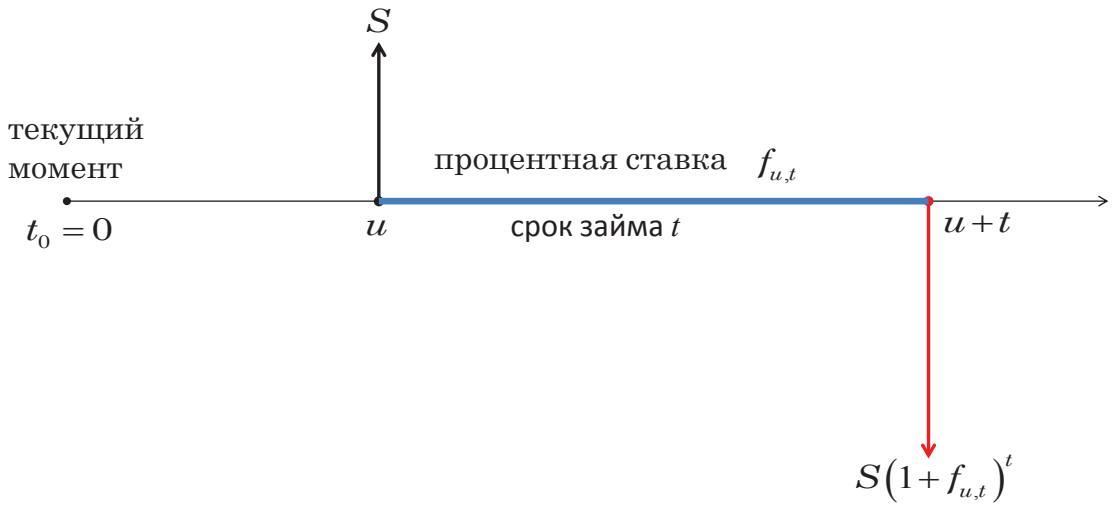


Рис. 6.10 Схема денежного потока для forward-forward agreement

В зависимости от того, какой реально будет процентная ставка для займа на срок t в момент u в будущем, forward-forward agreement принесёт прибыль одной стороне и такие же по размеру потери для другой. Предположим, например, что в настоящий момент $t_0 = 0$ компания XYZ заключила соглашение с банком ABC, по которому через 9 месяцев (в момент $u = 9/12$ лет) компания разместит в банке сумму £1m на $t = 6$ месяцев под 2% годовых ($t = 6/12$ лет), а банк по истечении этого срока (в момент $u + t = 15/12$) вернёт компании £1m основного капитала и £10000 процентов.

Предположим, далее, что по прошествии 9 месяцев оказалось, что рынок предлагает по таком депозитам только 1% годовых. Если бы компания XYZ не заключила форвардный контракт с банком ABC, то она могла бы разместить свои деньги только под 1% и заработать в виде процентов лишь £5000. Но банк обязан взять деньги у компании на 6 месяцев под 2% и выплатить компании £10000. Фактически это означает, что форвардный контракт позволит компании XYZ в момент $u + t = 15/12$ получить дополнительную прибыль в размере £5000 (банк фактически потеряет в этот момент такую же сумму).

Предположим теперь, что по прошествии 9 месяцев рынок предлагает по таким депозитам 3% годовых. Если бы компания XYZ не заключила форвардный контракт с банком ABC, то она могла бы разместить свои деньги под 3% и заработать £15000. Но компания обязана разместить свои средства в этом банке под 2%, что даст ей в виде процентов только £10000. Фактически это означает убыток для компания XYZ в момент $u + t = 15/12$ в размере £5000 (и такую же прибыль в этот момент для банка).

В контексте forward-forward agreement та сторона, которая выигрывает от роста процентной ставки (т.е. заёмщик), занимает длинную позицию, а та, которая выигрывает от падения процентной ставки (т.е. займодавец), занимает короткую позицию.

На практике процентная ставка по будущему займу фиксируется в настоящий момент времени, как правило, с помощью *соглашения о будущей процентной ставке* (forward rate agreement – FRA). В соответствии с этим соглашением предполагается, что

- в момент u заёмщик, если ему действительно нужны деньги, берёт деньги в долг на рыночных условиях (а кредитор, если ему это действительно нужно, размещает свои средства в момент u на рыночных условиях);
- та сторона, для которой несовпадение форвардной ставки и спотовой ставки в момент u означает потери, выплачивает в момент u компенсацию другой стороне (которая выигрывает от несовпадения ставок), после чего контракт считается исполненным.

Размер компенсации равен размеру потери, дисконтированному на время u по спотовой ставке в момент u, т.к. в forward-forward agreement выплаты производятся в момент $u+t$, в forward rate agreement – в момент u. Фактически это означает, что всё происходит так, как будто был исполнен forward-forward agreement.

В приведённом выше примере, в первом случае, когда реальная процентная ставка меньше форвардной, банк ABC просто выплачивает в момент $u=9/12$ компании XYZ сумму $£5000\Big/\left(1+\frac{6}{12}\cdot 1\%\right)=£4975.12$ (на денежном рынке дисконтирование производится по формуле простых процентов). Во втором случае, когда реальная процентная ставка больше форвардной, компания XYZ выплачивает в момент $u=9/12$ банку ABC сумму $£5000\Big/\left(1+\frac{6}{12}\cdot 3\%\right)=£4926.11$.

6.3.3 Расчёт форвардной ставки

В силу (6.1) текущая стоимость (в момент $t_0=0$) обязательства займодавца равна $S\cdot P_u$, а заёмщика – $S\left(1+f_{u,t}\right)^t\cdot P_{u+t}$. Принцип эквивалентности обязательств требует, чтобы эти две суммы быть равны:

$$P_u=\left(1+f_{u,t}\right)^t P_{u+t}\ , \tag{6.17}$$

откуда мы имеем:

$$f_{u,t}=\left(\frac{P_u}{P_{u+t}}\right)^{1/t}-1\ . \tag{6.18}$$

Теоретические форварные ставки, подсчитанные по формуле (6.18), называют *implied* [ɪm'plaɪd] forward rates. Реальные рыночные фовардные

ставки (их называют *market* forward rates), вообще говоря, отличаются от них.

Вместо договора займа на срок t в момент u в будущем можно говорить о приобретении в момент u бескупонной облигации, которая будет погашена ещё спустя время t (т.е. в момент $u+t$). Форвардная процентная ставкой $f_{u,t}$ является ни чем иным, как доходностью к погашению для этой облигации. Если считать, что номинал облигации равен 1 и обозначить через $P_{u,t}$ её форвардную цену, то верно равенство

$$P_{u,t}\left(1+f_{u,t}\right)^{t}=1, \tag{6.19}$$

откуда

$$P_{u,t}=\left(1+f_{u,t}\right)^{-t}=\frac{P_{u+t}}{P_u}. \tag{6.20}$$

С помощью (6.4) форвардную ставку можно выразить не через спотовые цены бескупонных облигаций, а через спотовые доходности, эффективную годовую y_t и continuously compounded $Y_t=\ln\left(1+y_t\right)$:

$$\left(1+f_{t,u}\right)^{u}=\frac{\left(1+y_{t+u}\right)^{t+u}}{\left(1+y_t\right)^{t}}=e^{(t+u)Y_{t+u}-tY_t}. \tag{6.21}$$

В важном частном случае $t=1$ мы получим форвардную ставку $f_u\equiv f_{u,1}$ для займа на 1 год в момент u:

$$1+f_u=\frac{P_u}{P_{u+1}}=\frac{\left(1+y_{u+1}\right)^{u+1}}{\left(1+y_u\right)^{u}}=e^{(u+1)Y_{u+1}-uY_u}. \tag{6.22}$$

Если $t\equiv n$ – целое число, т.е. срок займа выражается целым числом лет, то форвардную ставку $f_{u,t}\equiv f_{u,n}$, можно выразить через однолетние форвардные ставки $f_u,f_{u+1},\ldots,f_{u+n-1}$:

$$\left(1+f_{u,n}\right)^{n}=\frac{P_u}{P_{u+n}}=\frac{P_u}{P_{u+1}}\cdot\frac{P_{u+1}}{P_{u+2}}\cdot\ldots\cdot\frac{P_{u+n-1}}{P_{u+n}}=\left(1+f_u\right)\left(1+f_{u+1}\right)\ldots\left(1+f_{u+n-1}\right). \tag{6.23}$$

При $u=0$ из (6.23) и (6.16) мы получим следующее соотношение, выражающее спотовую ставку y_n через однолетние форвардные ставки:

$$1+y_n=\sqrt[n]{\left(1+f_0\right)\left(1+f_1\right)\ldots\left(1+f_{n-1}\right)}. \tag{6.24}$$

Таким образом, спотовый коэффициент накопления является средним геометрическим форвардных коэффициентов накопления. Отметим также, что в этом соотношении f_0 – это, в сущности, годовая спотовая ставка y_1.

Для описания форвардной процентной ставки $f_{u,t}$ удобно ввести форвардную интенсивность процентов (forward force of interest) $F_{u,t} = \ln\left(1+f_{u,t}\right)$. Можно считать, что величина $F_{u,t}$ относится к *промежутку* $\left[u;u+t\right]$. Это означает, что на протяжении всего промежутка $\left[u;u+t\right]$ проценты начисляются с постоянной интенсивностью $F_{u,t}$, т.е. эффективная процентная ставка для любого малого промежутка времени $\left(x;x+h\right)$ внутри промежутка $\left[u;u+t\right]$ не зависит от x, а зависит только от длины h и при $h\to 0$ равна $F_{u,t}\cdot h + o(h)$. Отметим также, что в силу (6.16)

$$F_{0,t} \equiv \ln\left(1+f_{0,t}\right) = \ln\left(1+y_t\right) = Y_t.$$

Если вместо годовой доходности $f_{u,t}$ использовать соответствующую интенсивность процентов $F_{u,t}$, то соотношение (6.21) упростится:

$$F_{u,t} = Y_{u+t} + u\frac{Y_{u+t}-Y_u}{t}\ . \tag{6.25}$$

Последнее равенство удобно переписать в виде:

$$Y_{u+t} = \frac{u}{u+t}Y_u + \frac{t}{u+t}F_{u,t}. \tag{6.26}$$

Это соотношение утверждает, что спотовая интенсивность процентов Y_{u+t} для промежутка $\left[0;u+t\right]$ является взвешенным средним арифметическим спотовой интенсивности процентов Y_u для промежутка $\left[0;u\right]$ и форвардной интенсивности процентов $F_{u,t}$ для промежутка $\left[u;u+t\right]$.

Для интенсивностей процентов упростится и соотношение (6.24):

$$Y_n = \frac{F_0 + F_1 + \ldots + F_{n-1}}{n}, \tag{6.27}$$

т.е. спотовая интенсивность процентов является средним арифметическим интенсивностей процентов $F_u \equiv F_{u,1} = \ln\left(1+f_u\right)$, соответствующих однолетним форвардным ставкам.

Рассмотрим теперь форвардную интенсивность процентов для бесконечно малого промежутка времени, начивающегося в момент u в будущем, т.е. рассмотрим $\lim\limits_{t\to 0} F_{u,t}$. Его называют instantaneous forward rate и обозначают F_u:

$$F_u = \lim_{t\to 0} F_{u,t} \tag{6.28}$$

Величина F_u задаёт номинальную годовую ставку, в соответствии с которой будут начисляться проценты на бесконечно малом промежутке $\left[u;u+0\right]$ в

будущем. Точнее говоря, при $t \to 0$ эффективная процентная ставка для промежутка времени $(u;u+t)$ равна

$$\left(1+f_{u,t}\right)^t - 1 = e^{tF_{u,t}} - 1 = e^{t(F_u+o(1))} - 1 = tF_u + o(u).$$

Поэтому мгновенную форвардную ставку F_u можно приближённо рассматривать как номинальную годовую ставку для суточной ссуды в момент u в будущем (forward overnight rate).

Из (6.25) при $t \to 0$ мы получим:

$$F_u = Y_u + uY_u' \ . \tag{6.29}$$

Поскольку $Y_u + uY_u' = \left(uY_u\right)'$, из (6.29) можно выразить Y_u через F_u:

$$Y_t = \frac{1}{t}\int_0^t F_x dx \, . \tag{6.30}$$

Таким образом, спотовая интенсивность процентов Y_t является средним значением мгновенных форвардных ставок F_x для $x \in (0;t)$.

Поскольку спотовая интенсивность процентов Y_t и мгновенная форвардная ставка F_t легко выражаются друг через друга, кривые Y_t и F_t содержат одну и ту же информацию. Однако кривую F_t легче интерпретировать. Дело в том, что на форвардные ставки для разных сроков влияют разные факторы, в то время как спотовая доходность (в силу соотношений (6.30) и (6.24)) включает все эти факторы в усреднённой форме.

На рис. 6.11 изображён график мгновенной форвардной ставки F_t для зоны евро, соответствующий графику для спотовой доходности, изображённому на рис. 6.4.

Соотношения (6.30) и (6.12) позволяют выразить цену P_t бескупонной облигации (которую мы сейчас рассматриваем и как коэффициент дисконтирования для вычисления текущей стоимости платежа в момент t в будущем) через мгновенную форвардную ставку:

$$P_t = \exp\left(-\int_0^t F_x dx\right) \ . \tag{6.31}$$

Сопоставляя это соотношение и (1.18), мы можем сказать, что переменную интенсивность процентов $\delta(t)$, которую мы ввели в разделе 1.4 с помощью накопления $A(t)$ к моменту t как $\dfrac{A'(t)}{A(t)}$, можно интерпретировать как instantaneous forward rate.

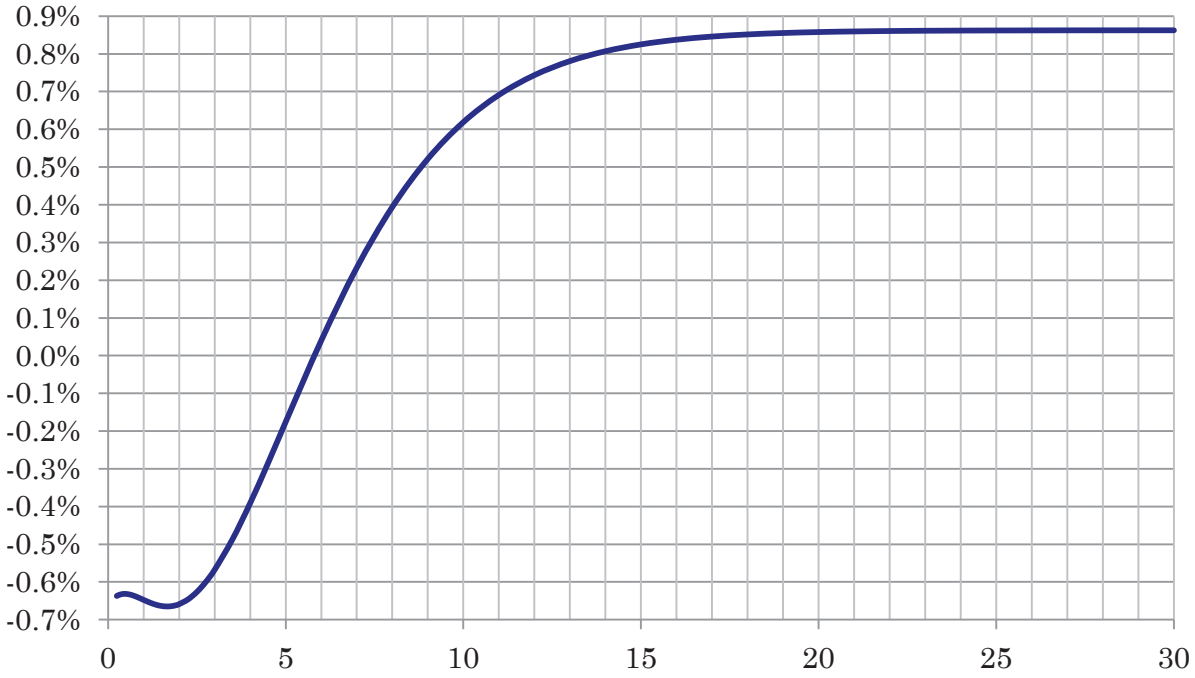


Рис.6.11 Кривая доходности ЕЦБ (мгновенная форвардная ставка F_t) 24 августа 2016 года

6.4 Реальные кривые доходности

6.4.1 Общее описание проблемы

Кривые доходности для государственных облигаций рассчитывают центральные банки соответствующих стран. Этот процесс не такой простой, как может показаться на первый взгляд.

Если бы на рынке ежедневно покупались/продавались бескупонные облигации для всех значений срока до погашения t, причём цена P_t бескупонной облигации для любого заданного значения t во всех сделках была бы одной и той же, то мы могли бы просто фиксировать цены P_t и на их основе с помощью формул (6.5), (6.12), (6.18) сразу непосредственно рассчитывать годовую спотовую доходность y_t, непрерывно начисляемую спотовую доходность Y_t, форвардные ставки $f_{u,t}, F_u$ и т.д. На самом деле реальная ситуация намного сложнее.

1. Прежде всего, в каждый момент времени на рынке обращаются бескупонные облигации для ограниченного набора сроков до погашения. Одновременно с ними имеется большое число купонных облигаций с разными купонными ставками и разными сроками до погашения. Если предположить, что на все эти купонные облигации рынок устанавливает цены в соответствии с формулой (6.2), то мы можем произвести фиктивный stripping купонных

облигаций и определить значения P_t для бóльшего числа сроков до погашения. Чтобы показать, как это делается, рассмотрим следующий пример.

Допустим, что на рынке продаются:

- бескупонные облигации со сроком до погашения 1 и 2 года по цене $P_1 = 0.95$ и $P_2 = 0.9$ за единицу номинала соответственно (что соответствует спотовым ставкам $y_1 = 5.2632\%$, $y_2 = 5.4093\%$);

1. облигации с полугодовым купоном со сроком со сроком до погашения 1 и 2 года по цене $P' = 100.79$ и $P'' = 105.04$ за 100 номинала соответственно. Допустим далее, что для однолетней купонной облигации купонная ставка равна 6%, а для двухлетней – 8%.

В соответствии с формулой (6.2) верны равенства:

$$\begin{aligned} 100.79 &= 3P_{0.5} + 103P_1, \\ 105.04 &= 4P_{0.5} + 4P_1 + 4P_{1.5} + 104P_2. \end{aligned}$$

Поскольку величины $P_1 = 0.95$ и $P_2 = 0.9$ нам известны, из этой системы мы легко находим $P_{0.5}$ и $P_{1.5}$: $P_{0.5} = 0.98$, $P_{1.5} = 0.93$. Теперь мы можем найти спотовые ставки y_t для $t = 0.5$ и $t = 1.5$: $y_{0.5} = 4.1233\%$, $y_{1.5} = 4.957\%$.

Имея достаточно большой набор сроков до погашения, с помощью интерполяции можно построить кривую доходности для всех действительных значений *t*.

Описанную процедуру в финансовой математике называют bootstrapping или bootstrap ['bu:tstræp]. Последнее слово означает петлю на заднике ботинка, за которую тянут, чтобы легче обуться (от boot – ботинок, strap – ремень). В переносном смысле bootstrap, bootstrapping означает метод достижения какой-то сложной цели, основанный на ограниченных начальных ресурсах. Термин bootstrap обычно не переводят на русский язык, а просто записывают русскими буквами: бутстрап.

2. Но самое главное – это то, что реальные цены облигаций в силу разных причин немного отличаются от теоретических значений, даваемых формулой (6.2). Точнее говоря, какую бы кривую доходности мы ни взяли, всегда найдутся облигации, для которых реальная цена будет отличаться от теоретической. Способ решения этой проблемы зависит от того, с какой целью строится кривая доходности. Если основная цель – понять общие макроэкономические условия, перспективы денежной политики, склонность инвесторов к риску и т.д., то обычно постулируют некоторую параметрическую форму кривой доходности, а затем выбирают значения параметров таким образом, чтобы «среднее» отклонение теоретических цен от реальных по всему спектру облигаций анализируемого класса было минимальным. В качестве этого «среднего» отклонения обычно берут взвешенную сумму квадратов разностей между теоретическими и реальными ценами с весами, обратно пропорциональными дисконтированным средним срокам. Используемое параметрическое семейство с одной стороны должно быть достаточно богатым и при надлежащем выборе

параметров давать все типичные формы кривой доходности и улавливать наиболее существенные изменения общей экономической ситуации. С другой стороны, это семейство должно эффективно сглаживать не очень существенные флуктуации.

В настоящее время основным является метод Нельсона-Сигеля и его модификации.

6.4.2 Метод Нельсона-Сигеля

В своей основополагающей статье[6] Чарльз Нельсон и Эндрю Сигель из университета Вашингтона предложили описывать зависимость мгновенной форвардной ставки F_t от времени соотношением

$$F_t = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + \beta_2 \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} , \qquad (6.32)$$

где $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ и τ – параметры. Первое слагаемое в правой части (6.32), β_0, постоянно и является пределом F_t при $t \to +\infty$. Потому оно описывает влияние на кривую доходности ситуации со ставками в долгосрочной перспективе.

Второе слагаемое, $\beta_1 e^{-\frac{t}{\tau}}$, быстро стремится к 0 при $t \to +\infty$ и его значение существенно только при небольших значениях t. Оно описывает влияние на кривую доходности текущей денежной политики.

Третье слагаемое, $\beta_2 \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$, равно 0 при $t = 0$ и потому мало влияет на краткосрочные ставки. Кроме того, оно быстро стремится к 0 при $t \to +\infty$ и потому мало влияет и на долгосрочные ставки. Таким образом, третье слагаемое описывает влияние на кривую доходности денежной политики, ожиданий по уровню инфляции, деловой активности и т.п. в среднесрочной перспективе.

Параметр τ характеризует скорость стремления к нулю экспоненциального члена $e^{-\frac{t}{\tau}}$, т.е. степень влияния на кривую доходности краткосрочных и долгосрочных факторов.

Чтобы описать возможные формы кривой F_t в зависимости от значений параметров $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau$, отметим прежде всего, что параметр τ определяет масштаб на оси времени. Поэтому не нарушая общности его можно считать равным 1, т.е. считать, что $F_t = \beta_0 + \beta_1 e^{-t} + \beta_2 t e^{-t}$.

При определении вида этой кривой ключевую роль играет значение параметра β_2.

Случай 1: $\beta_2 = 0$**.** Тогда $F_t = \beta_0 + \beta_1 e^{-t}$ и, значит,

---

[6] Charles R. Nelson, Andrew F. Siegel. Parsimonious Modeling of Yield Curves. *The Journal of Business*, 1987, vol. 60, No. 4, pp. 473-489.

1.1 при $\beta_1 = 0$ кривая доходности является горизонтальной прямой, проведённой на уровне β_0 (см. рис. 6.12);

1.2 при $\beta_1 > 0$ кривая доходности экспоненциально быстро убывает от значения $\beta_0 + \beta_1$ при $t = 0$ до значения β_0 на $+\infty$ (см. рис. 6.13);

1.3 при $\beta_1 < 0$ кривая доходности экспоненциально быстро возрастает от значения $\beta_0 + \beta_1$ при $t = 0$ до значения β_0 на $+\infty$ (см. рис. 6.14).

Рис. 6.12 Кривая мгновенной форвардной доходности в модели Нельсона-Сигеля: случай $\beta_2 = 0, \beta_1 = 0$

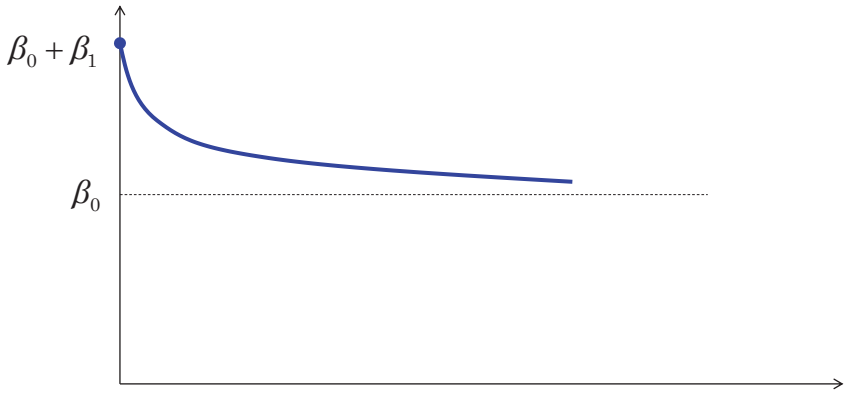


Рис. 6.13 Кривая мгновенной форвардной доходности в модели Нельсона-Сигеля: случаи $\beta_2 = 0, \beta_1 > 0$ и $\beta_2 > 0, \beta_1 \geq \beta_2$

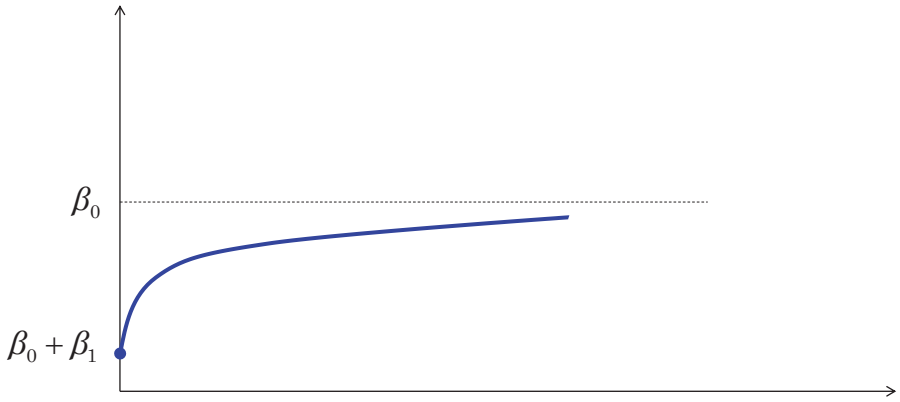


Рис. 6.14 Кривая мгновенной форвардной доходности в модели Нельсона-Сигеля: случаи $\beta_2=0,\beta_1<0$ и $\beta_2<0,\beta_1\le\beta_2$

Если $\beta_2\neq 0$, то для изучения поведения функции F_t подсчитам её производную; она равна $e^{-t}\left(\beta_2-\beta_1-\beta_2 t\right)$. Знак производной совпадает со знаком линейного выражения $\beta_2-\beta_1-\beta_2 t$, поведение которого, в свою очередь, зависит от знака β_2.

Случай 2: $\beta_2>0$. Тогда:

2.1 если $\beta_1\ge\beta_2$, то $F_t'<0$ при всех $t\in\left(0;+\infty\right)$. В этом случае кривая доходности монотонно убывает от значения $\beta_0+\beta_1$ при $t=0$ до значения β_0 на $+\infty$ (см. рис. 6.13).

2.2 если $\beta_1<\beta_2$, то F_t' положительна при $t\in\left(0;\dfrac{\beta_2-\beta_1}{\beta_2}\right)$ и отрицательная при $t\in\left(\dfrac{\beta_2-\beta_1}{\beta_2};+\infty\right)$. В этом случае кривая доходности сначала монотонно возрастает от значения $\beta_0+\beta_1$ при $t=0$ до значения $F\left(\dfrac{\beta_2-\beta_1}{\beta_2}\right)$, а затем монотонно убывает до значения β_0 (которое может быть как меньше, так и больше, чем $\beta_0+\beta_1$) на $+\infty$ (см. рис. 6.15).

Случай 3: $\beta_2<0$. Тогда:

3.1 если $\beta_1\le\beta_2$, то $F_t'>0$ при всех $t\in\left(0;+\infty\right)$. В этом случае кривая доходности монотонно возрастает от значения $\beta_0+\beta_1$ при $t=0$ до значения β_0 на $+\infty$ (см. рис. 6.14).

3.2 если $\beta_1>\beta_2$, то F_t' отрицательна при $t\in\left(0;\dfrac{\beta_2-\beta_1}{\beta_2}\right)$ и положительна при $t\in\left(\dfrac{\beta_2-\beta_1}{\beta_2};+\infty\right)$. В этом случае кривая доходности сначала монотонно

убывает от значения $\beta_0 + \beta_1$ при $t = 0$ до значения $F\left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2}\right)$, а затем возрастает до значения β_0 (которое может быть как меньше, так и больше, чем $\beta_0 + \beta_1$) на $+\infty$ (см. рис. 6.16).

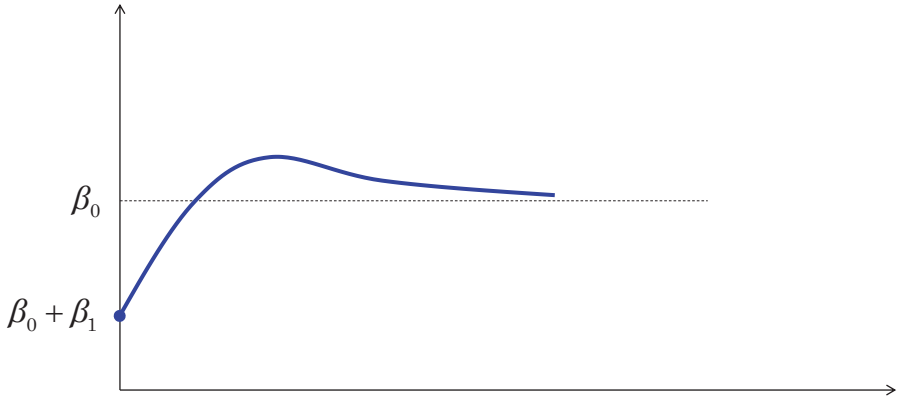


Рис. 6.15 Кривая мгновенной форвардной доходности в модели Нельсона-Сигеля: случай $\beta_2 > 0, \beta_1 < \beta_2$

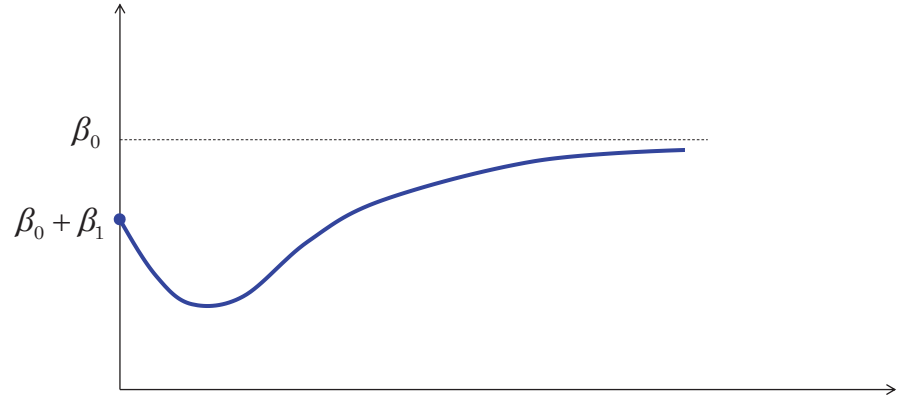


Рис. 6.16 Кривая мгновенной форвардной доходности в модели Нельсона-Сигеля: случай $\beta_2 < 0, \beta_1 > \beta_2$

Таким образом, рис. 6.12 – 6.16 дают полный спектр кривых, задаваемых формулой (6.32). Чаще всего кривая доходности имеет вид, показанный на рис. 6.15 и 6.16 (с локальным экстремумом, который называют hump [hʌmp] – «холмик», «горб»).

Для проверки качества и возможностей своей модели Нельсон и Сигель использовали данные о результатах торгов казначейскими векселями правительства США (US Treasury Bills) за 1981-1983 гг. Напомним, что T-bills являются бескупонными облигациями со сроками до погашения не более 1 года. Цены на эти облигации были пересчитаны в спотовую интенсивность

процентов. Соответственно, для оценки параметров модели использовалась следующая модель для спотовой интенсивности процентов Y_t, вытекающая из основной формулы (6.32) для мгновенной форвардной ставки F_t:

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{1}{t}\int_0^t F_x dx = \beta_0 + \beta_1 \frac{\tau}{t}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \beta_2 \left(\frac{\tau}{t}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ &= a + b\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\frac{\tau}{t} + ce^{-\frac{t}{\tau}}, \end{aligned} \tag{6.33}$$

где $a = \beta_0, b = \beta_1 + \beta_2, c = -\beta_2$.

Для каждого конкретного дня имелось 30 (иногда 31) точек на плоскости (срок до погашения; спотовая доходность). Типичная ситуация показана на рис. 6.17 (это копия рисунка из статьи Нельсона и Сигеля).

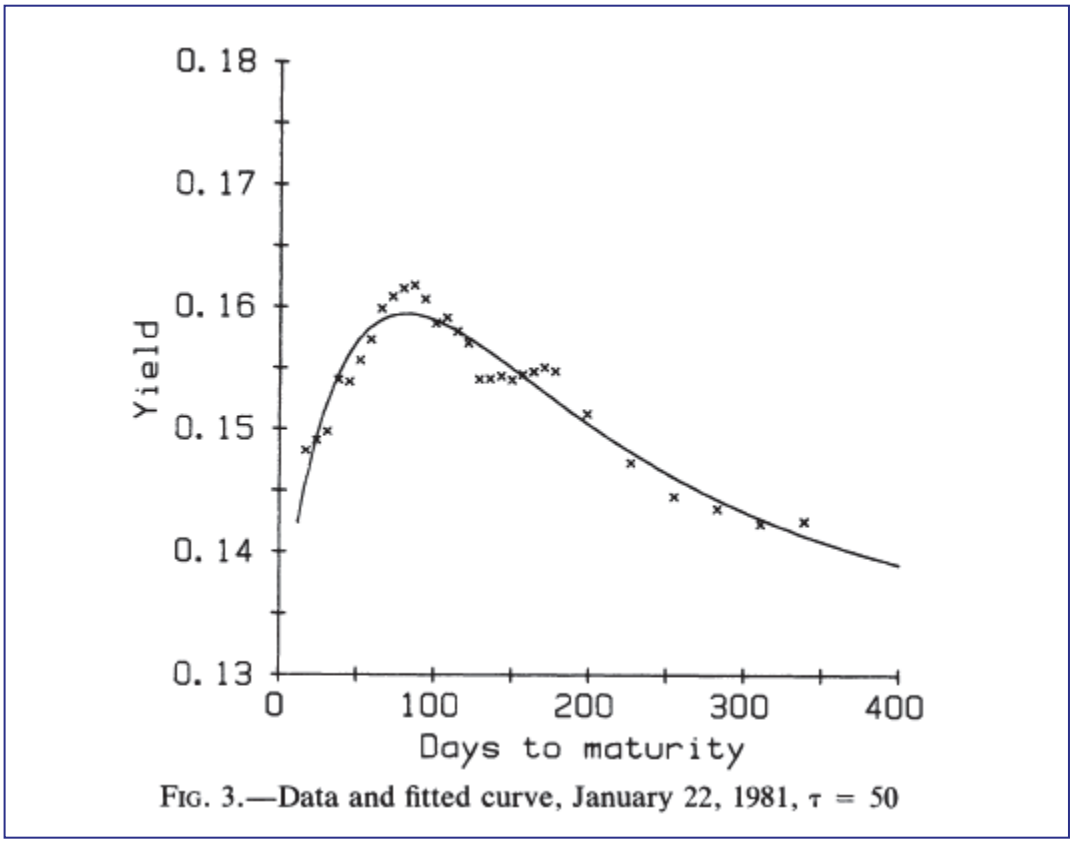


FIG. 3.—Data and fitted curve, January 22, 1981, τ = 50

Рис. 6.17

Для фиксированного значения параметра τ из диапазона 10, 20, …, 200, 250, 300, 365 (дней) методом наименьших квадратов Нельсон и Сигель находили значения параметров a, b, c. Затем выбиралось то значение τ, для которого погрешность была минимальной. Интересно отметить, что значение $\tau = 50$ (дней) даёт результат близкий к оптимальному во всех случаях.

В последней части своей статьи Нельсон и Сигель показали, что хотя при построении теоретической кривой доходности использовались статистические данные для сроков до погашения не превышающих один год, эта кривая

достаточно точно предсказывала цены и долгосрочных облигаций (особенно для сроков до погашения от 12 до 24 лет). Таким образом, модель Нельсона-Сигеля не просто хорошо приближала реальные данные (для очень короткого диапазона сроков до погашения), но и улавливала существенные черты кривой доходности для больших сроков до погашения.

Нельсон и Сигель отметили, что для рассмотренного диапазона сроков до погашения кубический полином (который имеет то же число параметров. что и их модель) приближает реальные данные немного лучше. Однако ценность модели определяется не только степенью соответствия реальным данным, но и способностью предсказывать результаты для других сроков до погашения. Кубический полином для этих целей, очевидно, не подходит, т.к для больших сроков до погашения доходность стремится к бесконечности (со знаком «плюс» или «минус»). Следует отметить, что сглаживание кубическими полиномами используется в модифицированном виде (сглаживание кубическими сплайнами) в США и Великобритании.

6.4.3 Модифицированная модель Нельсона-Сигеля Банка России

Кривую доходности для отечественного рынка рассчитывает Московская биржа по результатам торгов государственными облигациями. До конца 2017 года использовалась следующая модификация модели Нельсона-Сигеля для спотовой интенсивности процентов Y_t:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 \frac{\tau}{t}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \beta_2 \left(\frac{\tau}{t}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \gamma_0 e^{-\frac{t^2}{2}} + \gamma_1 e^{-\frac{(t-1)^2}{2}} + \gamma_2 e^{-\frac{(t-2)^2}{2}}, \quad (6.34)$$

где $\beta_0, \beta_1, \beta_2$, τ и $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ – параметры (всего 7 параметров, на 3 больше, чем в модели Нельсона-Сигеля).

Таким образом, модель Банка России отличается от модели Нельсона Сигеля тремя добавочными членами $\gamma_0 e^{-\frac{t^2}{2}}$, $\gamma_1 e^{-\frac{(t-1)^2}{2}}$, $\gamma_2 e^{-\frac{(t-2)^2}{2}}$. Их влияние существенно только в окрестности точек 0, 1, 2 соответственно и они позволяют точнее описать начальный участок кривой доходности.

Выше, на рис. 6.3, мы изобразили зависимость спотовой доходности $y_t = e^{Y_t} - 1$ от срока t до погашения для отечественных облигаций 24 августа 2016 года. Этой кривой соответствуют следующие значения параметров в формуле (6.34): $\beta_0 = 0.076519$, $\beta_1 = 0.015545$, $\beta_2 = 0.004492$, $\tau = 1.47$, $\gamma_0 = 0.005653$, $\gamma_1 = -0.006248$, $\gamma_2 = 0.003043$ (расчёт при этих значениях параметров даёт Y_t в

виде десятичной дроби; чтобы получить Y_t в базисных пунктах, нужно значения параметров β_0, β_1, β_2, γ_0, γ_1, γ_2 умножить на 10000).

С 2018 года используется усложнённый вариант модели (6.34):

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 \frac{\tau}{t}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \beta_2 \left(\frac{\tau}{t}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \sum_{i=1}^{9} \gamma_i \exp\left(-\frac{(t-a_i)^2}{b_i^2}\right), \qquad (6.35)$$

где параметры $a_1,\ldots,a_9$ и $b_1,\ldots,b_9$ фиксированы: $a_i = 1.6^{i-1} - 1$, $b_i = 0.6 \cdot 1.6^{i-1}$, а параметры $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\tau$ и $\gamma_1,\ldots,\gamma_9$ определяются по итогам торгов государственными облигациями России на Московской Бирже. Детальное описание алгоритма расчёта этих параметров увело бы нас слишком далеко в сторону от темы книги. Заинтересованный читатель может обратиться к упомянутой выше «Методике определения кривой бескупонной доходности государственных облигаций» Московской Биржи.

В качестве примера приведём значения параметров $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\tau$, $\gamma_1,\ldots,\gamma_9$ модели (6.35) 20 ноября 2018 года (приводимые значения дают Y_t в базисных пунктах):

$$\beta_0 = 854.58,\ \beta_1 = -163.53,\ \beta_2 = 151.65,\ \tau = 2.75,$$

$$\gamma_1 = 0.03,\ \gamma_2 = -0.02,\ \gamma_3 = -2.27,\ \gamma_4 = 1.15,$$

$$\gamma_5 = -0.91,\ \gamma_6 = -0.37,\ \gamma_7 = 0.84,\ \gamma_8 = 0,\ \gamma_9 = 0.$$

Этим значениям параметров соответствуют следующие значения спотовой доходности y_t:

t (лет)	0.25	0.5	0.75	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
y_t (%)	7.29	7.42	7.54	7.65	7.85	8.02	8.16	8.29	8.39	8.47	8.54
t (лет)	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10
y_t (%)	8.59	8.64	8.68	8.71	8.74	8.76	8.78	8.80	8.82	8.83	8.84
t (лет)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	25
y_t (%)	8.86	8.88	8.89	8.89	8.90	8.90	8.91	8.91	8.91	8.91	8.91

График функции y_t приведён на Рис. 6.18. Сравнивая этот рисунок с Рис. 6.3, где изображена кривая доходности y_t по состоянию на 24 августа 2016 года, мы

видим, что кривая доходности принципиально изменила свой вид: она была перевёрнутой, а стала нормальной.

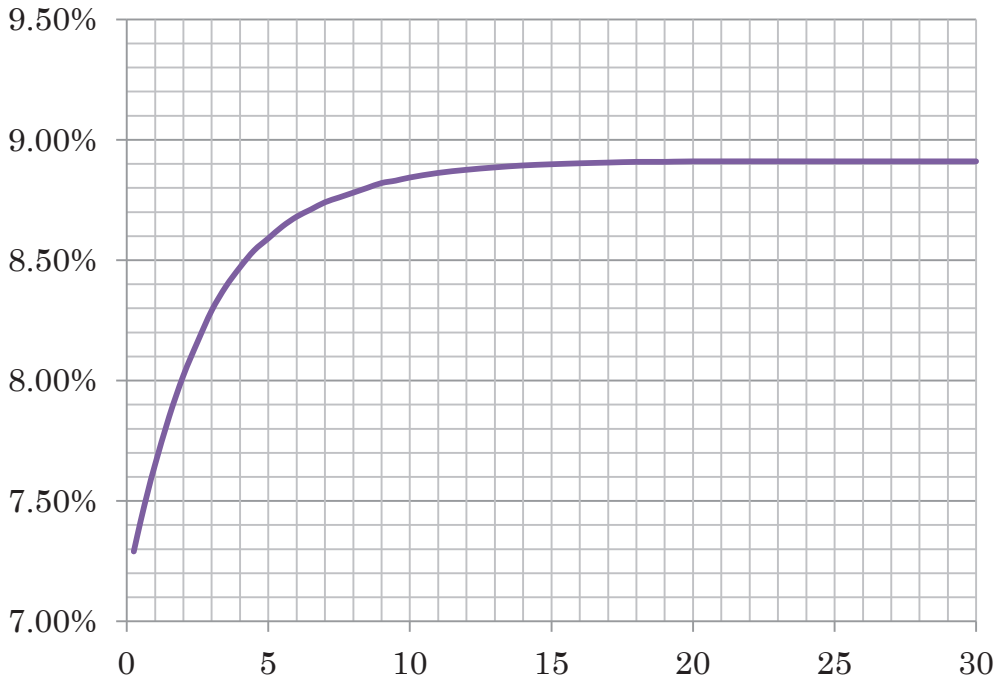


Рис.6.18 Кривая доходности ЦБ РФ (спотовая процентная ставка y_t) 20 ноября 2018 года

6.4.4 Метод Свенсона

Кривая Нельсона-Сигеля плохо описывает ситуацию с доходностями для больших сроков до погашения (больше 20 лет), главным образом из-за слишком быстрого стремления F_t к пределу β_0 при $t \to +\infty$. Чтобы решить эту проблему Ларс Свенсон[7] из Института международных экономических исследований университета Стокгольма модифицировал модель Нельсона-Сигеля, включив в формулу (6.32) ещё один член, аналогичный третьему. В модели Свенсона

$$F_t = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \beta_2 \frac{t}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \beta_3 \frac{t}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}, \qquad (6.36)$$

где $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ и τ_1, τ_2 – параметры (всего 6 параметров, на 2 больше, чем в модели Нельсона-Сигеля).

Для спотовой интенсивности процентов $Y_t = \frac{1}{t}\int_0^t F_x dx$ соотношение (6.36) даёт:

[7] Lars E.O. Svensson. Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994. National Bureau of Economic Research, Working Paper No. 4871, September 1994.

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 \frac{\tau_1}{t}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) + \beta_2\left(\frac{\tau_1}{t}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) + \beta_3\left(\frac{\tau_2}{t}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right) - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right). \quad (6.37)$$

Параметрическую формулу Свенсона использует для моделирования кривой доходности, например, ЕЦБ. Выше, на рис. 6.4, мы изобразили зависимость спотовой доходности $y_t = e^{Y_t} - 1$ от срока t до погашения для правительственных облигаций зоны евро с рейтингом AAA 24 августа 2016 года. Этой кривой соответствуют следующие значения параметров в формуле (6.37):

$$\beta_0 = 0.00862891,\ \beta_1 = -0.01525891,\ \beta_2 = 0.12670349,\ \beta_3 = -0.15368460,$$
$$\tau_1 = 1.808059,\ \tau_2 = 1.997868.$$

Европейский центробанк каждый рабочий день системы TARGET[8], в 12:00 по центрально-европейскому времени, публикует два вида кривых доходности: (1) для правительственных облигаций еврозоны с рейтингом AAA и (2) для всех правительственных облигаций еврозоны (включая и облигации с рейтингом AAA). Для этих двух видов облигаций рассчитываются спотовая интенсивность процентов (continuously compounded zero-coupon rate) Y_t, мгновенная форвардная ставка (instantaneous forward rate) F_t, паритетная доходность при непрерывной выплате процентов (continuously compounded par yield) $\pi_t^{(\infty)}$. Таким образом, ЕЦБ ежедневно публикует 6 кривых доходности (в виде графиков, таблиц и значений параметров в модели Свенсона).

ЕЦБ при расчёте кривой доходности использует данные о ценах на облигации, которые удовлетворяют ряду условий:

1. выпущены в евро центральными банками стран зоны евро;
2. общая сумма долга по меньшей 5 миллиардов евро;
3. минимальный объём ежедневной торговли 1 миллион евро;
4. нулевой купон или фиксированный купон (исключены облигации, привязанные к индексу инфляции, вечные облигации, облигации с переменным купоном и т.п.);
5. разница между ценой покупки и ценой продажи не должна превышать три базисных пункта;
6. срок до погашения от 3 месяцев до 30 лет;
7. доходность по облигации отклоняется от средней доходности для облигаций с аналогичным сроком до погашения не больше, чем на 2

[8] TARGET (Trans-European Automated Real-time Gross settlement Express Transfer) system, сейчас TARGET2 system – основная межбанковская платёжная система зоны евро. Ежедневно через неё проводится около 350 тысяч операций (в некоторые дни более 500 тысяч) общим объёмом около 2 триллионов евро (в некоторые дни более 3 триллионов).

стандартных отклонения.

Дополнительные подробности можно найти на сайте ЕЦБ по адресу https://www.ecb.europa.eu/stats/money/yc/html/index.en.html и в его публикациях, например, The New Euro Area Yield Curve. ECB Monthly Bulletin, February 2008, 95-102.

6.4.5 Аппроксимация сплайнами

Министерство финансов США и Банк Англии при построении кривых доходности сглаживают реальные данные с помощью кубических сплайнов.

Напомним, что сплайном степени m на отрезке $[a;b]$ с узлами $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ (точнее, полиномиальным сплайном) называется функция $s(x)$, $x \in [a;b]$, которая

1. на частичных промежутках $\left[x_{k-1};x_k\right]$, $k = 1,\ldots,n$, совпадает с полиномом (своим для каждого промежутка), степень которого не превышает m;
2. $m-1$ раз непрерывно дифференцируема на $[a;b]$.

Нетрудно показать, что такая функция представима в виде

$$s(x) = P(x) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \left(x - x_k\right)_+^m,$$

где $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ – некоторый полином степени не выше m.

В приложениях чаще всего используются кубические сплайны, поскольку в этом случае вычислительная сторона дела сводится к решению систем линейных уравнений с трёхдиагональной матрицей (для таких систем существуют эффективные алгоритмы численного решения). Кубический сплайн можно записать в виде

$$s(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^2 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \left(x - x_k\right)_+^3,$$

или, поскольку $x_+^3 = \dfrac{x^3 + |x|^3}{2}$, в виде:

$$s(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^2 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \left|x - x_k\right|^3.$$

Этот метод был предложен для рынка США в статье Waggoner, D. Spline methods for extracting interest rate curves from coupon bond prices, Federal Reserve Bank of Atlanta, 1997, Working Paper series, 97-10 и адаптирован для британского рынка в статье Nicola Anderson, John Sleath. New estimates of the UK real and nominal yield curves. Bank of England, 2001.

Главное преимущество сплайнов по сравнению с параметрическими методами при сглаживании реальных данных для построения кривой доходности заключается в следующем. Для параметрических методов изменение цен на облигации со сроком до погашения в некотором диапазоне влияет на всю кривую доходности, даже если для других сроков до погашения

никаких изменений на рынке не происходит. Например, если на рынке вырастет доходность *только* 30-летних облигаций, то модель Свенсона покажет резкое изменение доходности краткосрочных облигаций. Если же кривая доходности моделируется сплайном, то её отдельные части меняются почти независимо друг от друга. Поэтому, если на рынке происходят изменения доходности только для определённого временно́го диапазона, то изменения в соответствующей части аппроксимирующей кривой доходности мало затрагивают её соседние участки.

Дополнительные сведения о построении кривых доходности центобанками разных стран можно найти в публикациях:

1. Zero-coupon yield curves: technical documentation. Bank for International Settlements, Monetary and Economic Department, BIS Papers No 25, October 2005.

2. Refet S. Gurkaynak, Brian Sack, Jonathan H. Wright. The U.S. Treasury Yield Curve; 1961 to the Present. Finance and Economics Discussion Series, Divisions of Research & Statistics and Monetary Affairs, Federal Reserve Board, Washington, D.C., 2006 – 28.

3. David Bolder, David Stréliski. Yield Curve Modelling at the Bank of Canada. Technical Report No. 84, Bank of Canada, 1999.

6.5 Задачи

Задача 6.1 (FM, May 2005, Problem 10) В настоящий момент доходности к погашению для бескупонных облигаций со сроком до погашения 1 год, 2 года, 3 года равны 8.5%, 9.5%, 10.5% годовых соответственно. Вычислите фовардные ставки для займов на 1 год через год и через два года.

Решение. Используя формулу (6.22), мы имеем:

$$f_1 = \frac{(1+y_2)^2}{(1+y_1)^1} - 1 = \frac{1.095^2}{1.085} - 1 \approx 10.5092\%,$$

$$f_2 = \frac{(1+y_3)^3}{(1+y_2)^2} - 1 = \frac{1.105^3}{1.095^2} - 1 \approx 12.5275\%.$$

Задача 6.2 (CT1, April 2015, Problem 7) В некоторой стране закон требует, чтобы страховые компании оценивали свои обязательства с использованием спотовых процентных ставок, полученных из кривой доходности для правительственных облигаций. При изменении времени t (измеренного годами) эта спотовая процентная ставка для $t \le 5$ меняется по закону $y_t = 0.02t$. Страховая компания из этой страны заключила группу договоров по выплате ренты, которые потребуют выплату £1m в год на протяжении ближайших четырёх лет и £2m на протяжении пятого года.

Предполагается, что все выплаты производятся в середине соответствующего года.

(i) Найдите текущую стоимость обязательств этой страховой компании.

(ii) Приведите два причины, по которым кривая спотовой доходности могла бы возрастать со сроком до погашения.

(iii) Вычислите форвардную процентную ставку для промежутка времени от $t=3.5$ до $t=4.5$.

Решение. (i) По формуле (6.2) текущая стоимость обязательств страховой компании равна $PV=1\cdot P_{0.5}+1\cdot P_{1.5}+1\cdot P_{2.5}+1\cdot P_{3.5}+2\cdot P_{4.5}$, где $P_t=\left(1+y_t\right)^{-t}=(1+0.02t)^{-t}$ – цена единичной бескупонной облигации со сроком до погашения t лет. Поэтому

$$\begin{aligned} PV &= 1.01^{-0.5}+1.03^{-1.5}+1.05^{-2.5}+1.07^{-3.5}+2\cdot 1.09^{-4.5} \\ &\approx 4.98307921 \end{aligned}$$

или, в абсолютных цифрах, £4983079.21.

(ii) Кривая спотовой доходности возрастает со сроком до погашения, если

1. инвесторы ожидают роста будущих краткосрочных спотовых ставок (это объяснение даёт чистая теория ожиданий);
2. инвесторы учитывают риски владения долгосрочными облигациями и требуют за них увеличенную доходность (это объяснение даёт теория предпочтения ликвидности);
3. краткосрочные и долгосрочные облигации интересуют разные группы инвесторов и на рынке сложился повышенный спрос (недостаточное предложение) на краткосрочные бумаги (например, со стороны банков) и имеется избыточное предложение (недостаточный спрос) долгосрочных (это объяснение даёт теория сегментации рынка).

(iii) В силу (6.22) форвардная ставка $f_t\equiv f_{t,1}$ для займа на 1 год в момент t может быть вычислена через спотовые ставки y_t и y_{t+1} по формуле: $f_t=\dfrac{\left(1+y_{t+1}\right)^{t+1}}{\left(1+y_t\right)^{t}}-1$. Поскольку $y_{3.5}=7\%$, а $y_{4.5}=9\%$, искомая форвардная ставка $f_{3.5;1}\equiv f_{3.5}$ равна

$$\frac{\left(1+y_{4.5}\right)^{4.5}}{\left(1+y_{3.5}\right)^{3.5}}-1=\frac{1.09^{4.5}}{1.07^{3.5}}-1\approx 16.299010\%.$$

Задача 6.3 (CT1, 12 April 2016, Problem 3) В момент $t=0$ эффективная годовая доходность однолетней бескупонной облигации равна 4%, а эффективная годовая форвардная ставка для займа на 1 год в момент $t=1,2,\ldots$ даётся формулой $f_{t,1}=(4+t)\%$.

(i) В момент $t=0$ выпущена трёхлетняя купонная облигация, которая выплачивает купон в конце каждого года по ставке 4% и гасится по ставке 105%

от номинала. Определите цену этой облигации в момент размещения за £100 номинала.

(ii) Определите трёхлетнюю паритетную доходность в момент $t=0$.

Решение. (i) Для рассматриваемой облигации диаграмма денежного потока показана на рис.6.19.

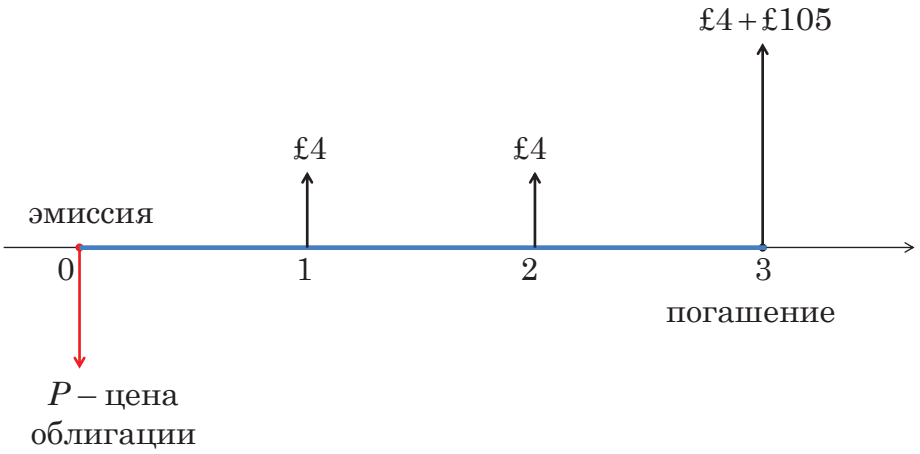


Рис. 6.19

В силу принципа эквивалентности цена P облигации равна $4P_1+4P_2+109P_3$ (фунтов), где, как обычно, P_t – спотовая цена единичной бескупонной облигации со сроком до погашения t лет.

По условию мы знаем, что $y_1=4\%$. Поэтому $P_1=(1+y_1)^{-1}=1.04^{-1}$. Чтобы найти P_2 и P_3 воспользуемся соотношением (6.17) при $u=1$:

$$P_{t+1}=P_t\left(1+f_{t,1}\right)^{-1}=P_t\left(1+\frac{4+t}{100}\right)^{-1},$$

откуда:

$$P_2=P_1\cdot 1.05^{-1}=1.04^{-1}\cdot 1.05^{-1},$$
$$P_3=P_2\cdot 1.06^{-1}=1.04^{-1}\cdot 1.05^{-1}\cdot 1.06^{-1}.$$

Теперь:

$$P=\frac{£4}{1.04}+\frac{£4}{1.04\cdot 1.05}+\frac{£109}{1.04\cdot 1.05\cdot 1.06}=£\frac{4\cdot 1.05\cdot 1.06+4\cdot 1.06+109}{1.04\cdot 1.05\cdot 1.06}$$
$$=£\frac{117.692}{1.15752}=£101.68.$$

(ii) Искомая трёхлетняя паритетная доходность определяется как ставка π_3 купонного дохода, при которой цена трёхлетней облигации с

фиксированным ежегодным купоном равна её номиналу (при этом мы считаем, что облигация гасится по номиналу). Считая, что номинал облигации равен 1, мы можем выразить принцип эквивалентности соотношением $1 = \pi_3 \cdot P_1 + \pi_3 \cdot P_2 + (\pi_3 + 1) \cdot P_3$, откуда (это частный случай формулы (6.13)):

$$\pi_3 = \frac{1 - P_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{1 - 1.04^{-1} \cdot 1.05^{-1} \cdot 1.06^{-1}}{1.04^{-1} + 1.04^{-1} \cdot 1.05^{-1} + 1.04^{-1} \cdot 1.05^{-1} \cdot 1.06^{-1}}$$
$$= \frac{1.04 \cdot 1.05 \cdot 1.06 - 1}{1.05 \cdot 1.06 + 1.06 + 1} = \frac{0.15752}{3.173} \approx 4.964387\%.$$

Задача 6.4 (CT1, September 2015, Problem 6) Три облигации, каждая из которых платит купон в конце года по ставке 3% и выплачивает при погашении £100 за £100 номинала, будут погашены в точности через один, два и три года соответственно. Цена каждой облигации равна £101 за £100 номинала.

(i) Определите доходность к погашению для трёхлетней облигации.

(ii) Вычислите однолетнюю, двухлетнюю и трёхлетнюю спотовые ставки, соответствующие приведённой информации.

(iii) Вычислите однолетнюю форвардную ставку для начала второго года.

Кривая доходности такова, что спотовые ставки всё время возрастают.

(iv) Объясните, ссылаясь на различные теории кривой доходности, почему кривая доходности может быть возрастающей.

Решение. (i) Доходность к погашению рассматриваемой трёхлетней облигации находится как корень уравнения

$$3(1+x)^{-1} + 3(1+x)^{-2} + 103(1+x)^{-3} = 101$$
$$\Updownarrow$$
$$300x^3 + 300x^2 + 294x - 8 = 0$$

Это уравнение имеет единственный корень $x_0 \approx 0.0264885376779$, который и будет искомой доходностью y. Округляя, можно принять $y = 2.649\%$.

(ii) Пусть P_n – цена бескупонной облигации со сроком до погашения n лет. Тогда цены рассматриваемых однолетней, двухлетней, трёхлетней облигаций должны быть равны $103P_1$, $3P_1 + 103P_2$, $3P_1 + 3P_2 + 103P_3$. С другой стороны, мы знаем, что эти цены равны 101. Из системы

$$\begin{cases} 103P_1 & = & 101 \\ 3P_1 + 103P_2 & = & 101 \\ 3P_1 + 3P_2 + 103P_3 & = & 101 \end{cases}$$

мы получим, что $P_1 = \frac{101}{103}$, $P_2 = \frac{101 \cdot 100}{103^2}$, $P_3 = \frac{101 \cdot 100^2}{103^3}$.

Теперь искомая спотовая ставка для займа на n лет, y_n, может быть вычислена из соотношения $y_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{P_n}} - 1$:

$$y_1 = \frac{2}{101} \approx 1.9802\%,\ y_2 = \frac{103}{10\sqrt{101}} - 1 \approx 2.4888\%,\ y_3 = \frac{103}{10\sqrt[3]{1010}} - 1 \approx 2.6589\%.$$

(iii) В силу соотношения (6.22) однолетняя форвардная ставка для начала второго года, $f_1 \equiv f_{1,1}$, равна $f_1 = \dfrac{P_1}{P_2} - 1 = \dfrac{3}{100} = 3\%$.

(iv) См. пункт (ii) решения Задачи 6.2.

Задача 6.5 (CT1, 6 April 2005, Problem 9) Эффективная однолетняя форвардная ставка в момент t = 1 (время измеряется годами) равна 5% годовых. Эффективная годовая доходность к погашению для двухлетней облигации номиналом £100 с фиксированным купоном, которая эмитирована в момент t = 0, платит купон раз в год по ставке 3% годовых и гасится за £102, равна 5.5%. Цена размещения в момент t = 0 трёхлетней облигации, которая платит купон раз в год по ставке 10% и гасится по номиналу, составляет £108.9 за £100 номинала.

(i) Вычислите спотовую ставку (процентов годовых) для займа на 1 год в момент $t = 0$.

(ii) Вычислите годовую форвардную ставку (процентов годовых) для займа на 1 год в момент $t = 2$.

(iii) Вычислите двухлетнюю паритетную доходность в момент $t = 0$.

Решение. (i) Зная доходность к погашению $y = 5.5\%$ двухлетней облигации номиналом 100, мы можем найти её цену; она равна $3v + 105v^2$, где $v = 1/(1+y)$.

С другой стороны, эта цена равна $3P_1 + 105P_2$, где P_1 и P_2 – спотовые цены единичных однолетней и двухлетней бескупонных облигаций соответственно. В силу (6.17), $P_2 = P_1/(1+f_1)$, где $f_1 = 5\%$ – эффективная однолетняя форвардная ставка в момент t = 1.

Теперь из равенства $3v + 105v^2 = 3P_1 + 105P_1/(1+f_1)$ мы найдём P_1:

$$P_1 = \frac{3v + 105v^2}{3 + 105(1+f_1)^{-1}} = \frac{3 \cdot 1.055 + 105}{3 + 105/1.05} \cdot 1.055^{-2} = \frac{108.165}{103} \cdot 1.055^{-2} \approx 0.94350588,$$

а значит и искомую спотовую ставку $y_1 = P_1^{-1} - 1$ для займа на 1 год в момент $t = 0$: $y_1 \approx 5.98768\%$.

Для последующих рассуждений вычислим и величину P_2:

$$P_2 = \frac{P_1}{1+f_1} \approx \frac{0.94350588}{1.05} \approx 0.89857703.$$

(ii) Теперь рассмотрим трёхлетнюю облигацию номиналом £100, которая платит купон раз в год по ставке 10% и гасится по номиналу. Как и в пункте (i), её цену $P = 108.9$ можно записать в виде: $P = 10P_1 + 10P_2 + 110P_3$. Поэтому

$$P_3 = \frac{P - 10P_1 - 10P_2}{110} \approx 0.82253792.$$

Теперь из равенства $1 + f_2 = P_2 / P_3$ мы найдём искомую форвардную ставку f_2: $f_2 \approx 9.24445\%$.

(iii) Двухлетняя паритетная доходность π_2 в момент $t = 0$ находится из равенства $\pi_2 P_1 + \pi_2 P_2 + P_2 = 1$, откуда

$$\pi_2 = \frac{1 - P_2}{P_1 + P_2} \approx 5.5059.$$

Задача 6.6 (CT1, September 2011, Problem 9) Спотовая доходность для правительственных облигаций даётся формулой $y_t = 0.02t$, $0 \le t \le 5$. Инвестор хочет определить цену корпоративной еврооблигации, которая платит купон раз в год по ставке 10% от номинала и будет погашена по номиналу через 5 лет. Для дисконтирования он решил использовать кривую доходности $y_t^* = y_t + 0.01 + 0.001t$.

(i) Вычислите цену облигации за 100 номинала и доходность к погашению.

(ii) Объясните, почему инвестор мог бы использовать приведённую формулу для дисконтирования выплат по облигации.

Решение. (i) Рассматриваемая еврооблигация номиналом 100 выплатит инвестору пять купонов размером 10 каждый в моменты 1,2,3,4,5 соответственно и номинал 100 в момент 5. Для платежа в момент t коэффициент дисконтирования равен $D_t = \left(1 + y_t^*\right)^{-t} = \left(1.01 + 0.021t\right)^{-t}$. Дальнейшие расчёты удобно оформить в виде таблицы 6.2.

Таблица 6.2

t	Выплата, C_t	D_t	$C_t D_t$
1	10	0.969932	9.699321
2	10	0.903584	9.03584
3	10	0.809470	8.094701
4	10	0.698121	6.98121
5	110	0.580264	63.82905
		Итого:	97.64012

Таким образом, цена облигации за 100 номинала равна 97.64.

Доходность к погашению находится как корень уравнения

$$97.64012 = 10\frac{1-(1+y)^{-5}}{y} + 100(1+y)^{-5}.$$

Его численное решение даёт: $YTM \approx 10.6325\%$

(ii) По сравнению с правительственными облигациями корпоративная облигация является более рисковым инструментом. Поэтому для дисконтирования выплаты в момент t по корпоративной облигации следует использовать ставку дохода y_t^*, которая больше y_t. Иначе говоря, к y_t следует добавить рисковую премию. Для дальних выплат риски больше, чем для ближних. Поэтому рисковая премия должна быть возрастающей функцией времени. Формула $0.01 + 0.001t$ учитывает все эти соображения.

Глава 7
Принцип отсутствия арбитража и форвардные контракты

7.1 Общее описание арбитражной сделки

Смысл термина «арбитраж» в финансах хорошо показан в следующем отрывке из романа «Финансист» Теодора Драйзера (события происходят в середине 19 века):

«На четырнадцатом году жизни Фрэнк Каупервуд впервые пустился в коммерческую авантюру. Однажды, проходя по Фронт-стрит, улице импортирующих и оптовых фирм, он заметил аукционный флажок над дверью оптово-бакалейного магазина; изнутри слышался голос аукциониста:

— Что мне предложат за партию превосходного яванского кофе? Оптовая рыночная цена на сегодняшний день семь долларов тридцать два цента за мешок. Сколько даете? Сколько даете? Партия идет только целиком. Сколько даете?

…Цена дошла до семидесяти пяти долларов, что составляло меньше половины настоящей стоимости кофе.

— Семьдесят пять долларов. Семьдесят пять, — выкрикивал аукционист. — Кто больше? Семьдесят пять долларов — раз. Кто даст восемьдесят? Семьдесят пять долларов два… — Он сделал паузу и драматическим жестом занес руку. Затем резко опустил ее. — Продано мистеру Сайласу Грегори за семьдесят пять долларов…

Юный Каупервуд быстро прикинул в уме. Рыночная цена кофе, если верить аукционисту, семь долларов тридцать два цента за мешок; значит, лавочник, купивший его за семьдесят пять долларов, может тут же заработать восемьдесят шесть долларов четыре цента …»

Описанный в этом эпизоде из «Финансиста» способ практически мгновенного зарабатывания денег за счёт разницы цен на некоторый товар в разных местах (товар покупается там, где цена ниже, и тут же продаётся там, где его цена выше) называется *арбитраж* (arbitrage [ˈɑːbɪtrɪdʒ, ˌɑːbɪˈtrɑːʒ]).

Это общее определение понятия «арбитраж» не является определением в формально-математическом смысле[1]. В ходе последующего изложения мы будем уточнять и обобщать его.

Человек (или финансовый институт), занимающийся арбитражем, называется *арбитражёром* (arbitrager [ˈɑːbɪtrɪdʒə], arbitrageur [ˌɑːbɪtraˈʒəː] или, кратко, arb [ɑːb]).

Термин «арбитраж» восходит к латинскому arbiter – арбитр. Этим словом в римском гражданском праве обозначали судью, который при рассмотрении споров руководствовался не буквой закона, а справедливостью. В современном английском языке слово arbiter ['ɑːbɪtə] означает «арбитр» в смысле «человек, который разрешает спор», «человек, который обладает высшим авторитетом в рассматриваемом вопросе». В русском языке слово «арбитр», кроме того, часто используется для обозначения судьи в спортивных соревнованиях (в английском языке спортивного судью в зависимости от вида спорта называют umpire ['ʌmpaɪə] или referee [ˌref(ə)'riː]).

Использование термина «арбитраж» для описания специфических финансовых операций связано с тем, что финансовый арбитраж помогает устанавливать «справедливые» рыночные цены.

В русском языке термин «арбитраж» обозначает не только особый вид финансовых операций, но и специальную процедуру для урегулирования независимыми арбитрами хозяйственных и юридических споров между странами, предприятиями и организациями, а также занимающийся этим орган (арбитражный или третейский суд; в качестве примера можно привести Арбитраж при Московской торгово-промышленной палате). В английском языке в этих случаях используют термины arbitration [ˌɑːbɪ'treɪʃ(ə)n] и arbitration body (arbitration board и т.п.) соответственно. В зависимости от ситуации арбитров (arbitrator ['ɑːbɪtreɪtə]) выбирают стороны спора по взаимному согласию или они назначаются в порядке, установленном законом.

Простейшая арбитражная сделка, описанная в приведённом выше отрывке из «Финансиста», состояла из двух этапов (сначала покупка товара, а затем его продажа), каждый из которых в англоязычной литературе называют leg (хотя основное значение этого слова – «нога», leg также означает «этап», «опора» и т.п.). Арбитражная сделка может состоять и из бóльшего числа одновременно реализуемых логически связанных финансовых операций.

---

[1] «…математическое определение … никогда не действует в реальном мире. … всё великолепие математики в том и состоит, что в ней мы не знаем, о чём толкуем». (Фейнман Ричард. Фейнмановские лекции по физике 1. Современная наука о природе, законы механики)

7.2 Примеры

7.2.1 Розничный арбитраж

Арбитражные сделки, похожие на описанную выше, не так уж редко встречаются и в настоящее время и являются источником небольших доходов для некоторых людей даже в странах с развитой экономикой. Местом продажи обычно является электронная площадка вроде eBay, Amazon, а покупают товар в местном магазине, когда по тем или иным причинам он продаётся очень дёшево. Поэтому этот вид арбитража называют ***r****etail* (['ri:teɪl] розничный) *arbitrage* (сокращённо, RA). Этому бизнесу посвящено большое число популярных книг; см., например, Chris Green. Retail Arbitrage, 2001, ISBN 978-1466303546, но, видимо, авторы этих книг зарабатывают на их продаже больше, чем читатели на практическом применении советов, содержащихся в этих книгах. В России розничный арбитраж был источником дохода многих людей в начале 90-годов, когда потребительские товары дёшево (из-за относительно низкого качества этих товаров) закупались в Турции «челноками» (сейчас мы бы их назвали «арбитражёры») и с большой выгодой (из-за дефицита товаров и отсутствия розничных сетей) перепродавались в России.

7.2.2 Параллельный импорт

Аналогичным по сути является арбитраж, связанный с тем, что большие транснациональные компании часто устанавливают разные цены на свою продукцию в разных странах. Иногда разница в цене настолько велика, что импортёр может купить товар у производителя или его официального дистрибьютера там, где цена ниже, затем ввезти этот товар в другую страну и продать его дешевле, чем производитель; разница в цене покроет все расходы по перевозке товара, таможенные пошлины, налоги и даст возможность заработать. Этот вид арбитража называют *параллельный импорт* (parallel import) или *серый импорт* (gray import). Последний термин означает только, что каналы распределения не контролируются производителем как владельцем права интеллектуальной собственности на товар. Однако сами товары являются оригинальными, новыми (т.е. в упаковке производителя), приобретены абсолютно легально через официальный канал продаж производителя, ввезены с уплатой всех пошлин и т.д.

Следует подчеркнуть, что международное право не запрещает параллельный импорт, оставляя его регулирование на усмотрение отдельных государств. В России с 2002 года принят *национальный принцип исчерпания прав* **(**exhaustion [ɪg'zɔ:stʃ(ə)n] doctrine ['dɔktrɪn]) *интеллектуально собственности***,** который означает, что

1. продажа товара производителем (или с его согласия) внутри России прекращает право производителя контролировать дальнейшее коммерческое использование этого товара внутри России.

2. импортировать товар в Россию для продажи или другого коммерческого использования можно только с разрешения производителя или уполномоченной им компании (иначе говоря, параллельный импорт запрещён).

Если в стране принят *международный* принцип исчерпания прав интеллектуальной собственности, эти права считаются исчерпанными, как только продукция была продана владельцем интеллектуальной собственности или с его согласия в любой стране мира. Соответственно, международный принцип разрешает параллельный импорт. Параллельный импорт способствует конкуренции и ведёт к снижению цен для конечных потребителей. Этой практике следуют, например, Швейцария, Китай, Япония, Индия, Южная Корея, Таиланд, Малайзия, Аргентина, Египет, Южная Африка. В ЕС принят *региональный* принцип исчерпания прав интеллектуальной собственности.

Единой точки зрения на то, какой принцип справедливее и обеспечивает лучший баланс интересов государства, потребителей, производителей, не существует. В соответствии с одной из них, при национальном принципе исчерпания прав суверенное государство фактически передаёт право на часть внешней торговли транснациональным корпорациям, что позволяет им устанавливать на некоторые виды товаров монопольно высокие цены. По некоторым оценкам, запрет параллельного импорта в России ежегодно обходится российским потребителям примерно в 24 млрд. долларов. Основным защитником национального принципа являются США.

Подробнее о параллельном импорте можно прочитать на сайте Всемирной органицации интеллектуальной собственности: http://www.wipo.int/sme/en/ip_business/export/international_exhaustion.htm.

7.2.3 Треугольный валютный арбитраж

Как бы интересны не были розничный арбитраж и параллельный импорт в бытовом смысле, реальный интерес для бизнеса представляют арбитражные сделки с биржевыми товарами (золото, нефть, зерно и пр.), ценными бумагами, валютами и т.п. на международных рынках.

В качестве примера можно привести тройной (или, треугольный) валютный арбитраж (triangular [traɪ'æŋgjələ] arbitrage). *Теоретически* эта возможность для мгновенного получения прибыли выглядит очень просто. Допустим, что в некоторый момент на бирже сложились следующие обменные курсы:

1. 1 единица валюты A может быть обменена на x единиц валюты B,
2. 1 единица валюты B может быть обменена на y единиц валюты C,
3. 1 единица валюты C может быть обменена на z единиц валюты A.

Если одновременно заключить три сделки:

1. продать 1 ед. валюты A за валюту B (это даст x ед. валюты B),
2. продать x ед. валюты B за валюту C (это даст xy ед. валюты C),

3. продать xy ед. валюты C за валюту A (это даст xyz ед. валюты A),

то при выполнении условия $xyz > 1$ мы получим прибыль в размере $xyz - 1$ (ед. валюты A) за 1 единицу валюты A.

Реальные статистические данные показывают, что для основных мировых валют произведение $\gamma = xyz$ как функция времени изменяется чрезвычайно быстро, главным образом, из-за объёма рынка форекс (несколько триллионов долларов в день) и его высокой ликвидности. Подавляющую долю времени величина γ находится на промежутке [0.9999;1). Неравенство $xyz < 1$ является следствием разницы между курсами покупки и продажи любой валюты, а близость к 1 – следствием почти идеальной сбалансированности международного валютного рынка. Тем не менее, на каждой бирже ежедневно появляется несколько тысяч возможностей для треугольного арбитража (arbitrage opportunities). Но существуют они только несколько секунд (бóльшей частью даже меньше 1 сек.), а величина γ в типичных случаях не превышает 1.0001. Для реализации такой арбитражной возможности трейдеры должны иметь специальное программное обеспечение, которое постоянно анализирует изменения курсов валют и при появлении арбитражной возможности автоматически заключает сделки. Кроме того, необходимо учитывать:

1. разницу между объявленными курсами покупки/продажи валюты (они описывают примерную текущую ситуацию на рынке и потому их называют индикативными – indicative [ɪn'dɪkətɪv]), и курсами, по которым реально исполняются сделки (executable ['eksɪkju:təbl] rate);
2. расходы на проведение транзакций,
3. стоимость оборудования и программного обеспечения,
4. налоги,
5. задержки в системах обработки и передачи информации (хотя они измеряются миллисекундами, за это время курсы могут измениться так, что арбитражная возможность исчезнет и торговец понесёт потери)

и другие факторы. Резюмируя можно сказать, что треугольный арбитраж, хотя и является *теоретически* очень привлекательным, *реально* нельзя считать способом зарабатывания денег даже для крупных игроков. Подробнее см., например, D.J. Fenn et al. The Miracle of triangular arbitrage in the spot foreing exchange market. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2009, vol.12, Issue 8, 1105-1123.

7.3 Дополнительные характеристики арбитража

7.3.1 Арбитраж и спекуляция

Арбитражная сделка является спекулятивной в том смысле, что «состоит в скупке и перепродаже товаров и иных предметов с целью наживы» (статья

«Спекуляция» из БСЭ). Однако определение спекулятивной сделки *в экономическом смысле* дополнительно включает наличие риска – наряду с возможностью дохода, на который и рассчитывает спекулянт, затевая такую операцию, должна быть и возможность потерь. Спекулятивная сделка растянута по времени, так что полная ясность существует только в отношении первого этапа спекулятивной сделки – спекулянт знает цену покупки товара. Продавать этот товар спекулянт будет через относительно большой промежуток времени и потому может только предполагать, какой будет цена купленного товара, когда он предложит его для продажи. Конечно, спекулянт рассчитывает, что цена существенно вырастет и он получит большую прибыль. Но есть и риск того, что цена упадёт; тогда спекулянт понесёт потери. Для арбитражной сделки практическая одновременность сделок купли/продажи означает, что *теоретически* арбитражёр совершенно точно знает как цену покупки, так и цену продажи, т.е. *теоретически* арбитраж является безрисковой операцией. Именно отсутствие риска (а также особое значение для экономики) отличает арбитражную сделку от спекулятивной. Соответственно, отсутствие риска включается в определение «теоретического» арбитража (в англоязычной литературе используют термин «true» arbitrage – «настоящий», «истинный» арбитраж).

В реальности в любой арбитражной возможности всегда присутствует определённый, но, как правило, очень незначительный, риск, который связан с тем, что в реальности этапы, из которых состоит арбитражная сделка, не выполняются одновременно. Поэтому может оказаться, что по завершении одного этапа условия для второго изменились так, что после его выполнения арбитражёр не только не сможет получить прибыль, но и понесёт потери. Этот риск называют *риском исполнения* (execution risk или leg risk).

7.3.2 Арбитраж и инвестиции

Одновременность сделок купли/продажи дополнительно означает, что *теоретически* арбитражная сделка не требует никаких инвестиций: арбитражёр расплачивается за купленный товар деньгами, полученными от его продажи. Таким образом, уточнённое *теоретическое* определение арбитража выглядит следующим образом:

Арбитраж – это финансовая операция, заключающаяся в покупке некоторого товара или актива на одном рынке и одновременной его продаже по бóльшей цене на другом рынке, что позволяет немедленно получить прибыль без всякого риска и инвестиций.

В ходе последующего изложения мы продолжим уточнять это общее определение.

7.4 Принцип «отсутствия арбитража»

В теории считается, что на развитом рынке арбитраж невозможен. Это утверждение называется принципом отсутствия арбитража (*no-arbitrage principle*). Обычные аргументы в его пользу заключаются в следующем. Предположим, что где-то на рынке возникла возможность для арбитража, например, в Москве банк А готов продать доллары США по курсу x рублей за 1 доллар, и в это же время банк Б готов купить доллары США по курсу $y > x$ рублей за 1 доллар. Тогда человек, у которого есть 1000 долларов США, может обменять эту сумму в банке Б на $1000y$ руб. и тут же купить на эту сумму доллары в банке А. В результате он получит $1000\,y/x$ долларов США, т.е. без всякого риска заработает $1000\big(y-x\big)/x$ долларов. Аналогично, человек, у которого есть 1000 руб., может обменять эту сумму в банке А на $1000/x$ долларов и тут же купить на эту сумму рубли в банке Б. В результате он получит $1000\,y/x$ руб., т.е. без всякого риска заработает $1000\big(y-x\big)/x$ руб. Очевидно, что в описанной ситуации много людей захочет воспользоваться этими арбитражными возможностями. Увеличение спроса на доллары в банке А и на рубли в банке Б приведёт к росту x и уменьшению y до уровней x', y' таких, что $x' = y'$. После этого на валютном рынке установится равновесие и описанная возможность делать деньги из воздуха исчезнет.

В реальности в описанном выше примере при определении дохода необходимо учитывать комиссии при осуществлении операций покупки/продажи вылюты и другие расходы, связанные с осуществлением сделки, например, транспортные расходы на переезд от банка к банку, стоимость капитала, если у вас нет первоначальной суммы в 1000 долларов (рублей) и вы должны взять её в долг на время проведения операции, и т.д. Крайне важно учитывать риск исполнения, который связан с тем, что в первом случае (USD-RUB-USD) банк А может увеличить курс продажи долларов до окончания операции, а во втором (RUB-USD-RUB) – банк Б может понизить курс покупки долларов до окончания операции.

Закон единой цены. Предположение об отсутствии арбитража влечёт, что цена любого товара, ценной бумаги и т.д. на всех рынках должна быть одной и той же. Это утверждение называют *законом единой цены* (law of one price). При этом, если речь идёт о рынках разных стран, то равенство цен понимается с учётом обменных курсов валют. Для товарных активов кроме того нужно учитывать стоимость транспортировки.

Применительно к финансам закон единой цены означает, что *если два инвестиционных портфеля созданы с помощью разных ценных бумаг и других активов, но генерируют идентичные денежные потоки, то они должны иметь одну цену*.

7.5 Расчёт форвардных контрактов с помощью принципа отсутствия арбитража

Предположение об отсутствии арбитража является основой многих доказательств в финансовой математике. В частности, оно позволяет рассчитывать разнообразные форвардные контракты. Ниже для простоты мы не будем учитывать операционные издержки и налоги. Однако разработанная методика позволяет проводить расчёты и с учётом этих факторов. Все облигации, о которых будет идти речь ниже, предполагаются безрисковыми (это могут быть, например, правительственные облигации).

7.5.1 Форвардная процентная ставка

Сейчас мы по-новому докажем формулу (6.18) для форвардной процентной ставки $f_{u,t}$. Напомним, что как мы установили в разделе 6.3.3 с помощью принципа эквивалентности обязательств,

$$P_u = \left(1+f_{u,t}\right)^t P_{u+t} \Leftrightarrow f_{u,t} = \left(\frac{P_u}{P_{u+t}}\right)^{1/t} - 1. \qquad (7.1)$$

Чтобы вывести эту формулу с помощью принципа отсутствия арбитража, рассмотрим две стратегии поведения инвестора, занимающего короткую позицию по forward-forward agreement (т.е. той стороны форварного контракта, которая в момент u даёт деньги в долг на срок t по согласованной в момент 0 форвардной ставке $f_{u,t}$).

Стратегия 1 (см. рис.7.1)**.** В момент $t_0 = 0$ приобрести бескупонную облигацию номиналом 1 со сроком до погашения $u+t$ по текущей цене P_{u+t}.

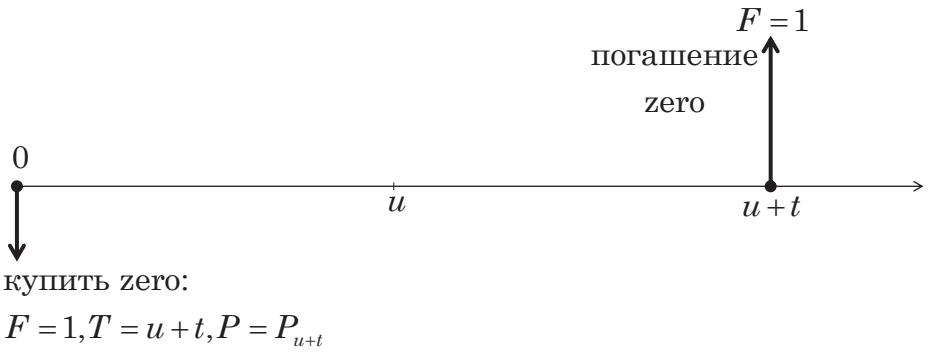


Рис. 7.1. Стратегия 1: купить zero, $F=1$, $T=u+t$, цена $P=P_{u+t}$

Стратегия 2 (см. рис.7.2)**.** В момент $t_0 = 0$:

1. приобрести бескупонную облигацию номиналом F (точное значение этого параметра мы укажем позже) со сроком до погашения u по текущей цене P_u за единицу номинала;
2. занять короткую позицию в форвардном контракте и дать в долг в момент u на срок t по ставке $f_{u,t}$ всю сумму F, полученную в момент u при погашении облигации.

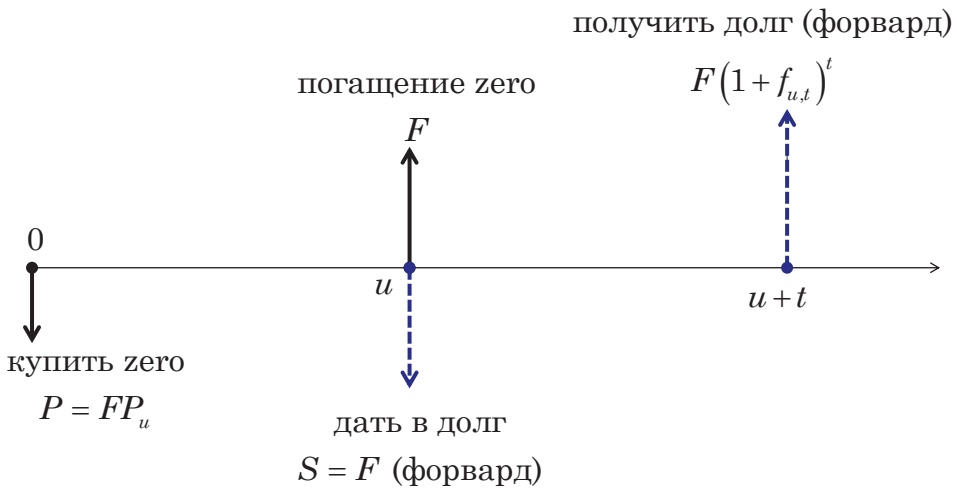


Рис. 7.2. Стратегия 2: (1) купить zero, F, $T = u$, цена $P = FP_u$; (2) дать в долг сумму $S = F$ в момент u на срок t по ставке $f_{u,t}$

Вторая стратегия потребует расходов в размере FP_u в момент 0 и обеспечит получение суммы $F\left(1+f_{u,t}\right)^t$ в момент $u+t$.

Выберем параметр F так, что $F\left(1+f_{u,t}\right)^t = 1$, т.е. возьмём $F = \left(1+f_{u,t}\right)^{-t}$. В этом случае обе стратегии будут генерировать один и тот же денежный поток (сумму 1 в момент $u+t$). Поэтому их цены должны быть равны, т.е.

$$P_{u+t} = FP_u \Leftrightarrow P_{u+t} = \left(1+f_{u,t}\right)^{-t} P_u,$$

что равносильно (7.1).

С равным успехом для доказательства соотношения (6.17) можно использовать и следующие аргументы.

Допустим, что соотношение (7.1) неверно и предположим вначале, что

$$f_{u,t} < \left(\frac{P_u}{P_{u+t}} \right)^{1/t} - 1, \qquad (7.2)$$

т.е. форвардная ставка меньше «правильной». Это означает, что кто-то готов дать деньги в долг в момент u на срок t на более выгодных (для заёмщика) условиях, чем предписывает теория. В этой ситуации возникает следующая возможность арбитража для инвестора, который готов занять длинную позицию в форвардном контракте (см. рис.7.3):

Стратегия 3. В момент $t_0 = 0$:

1. Взять в долг сумму 1 на срок u по спотовой процентной ставке y_u и тем самым взять на себя обязательство выплатить сумму $A = (1 + y_u)^u = 1/P_u$ в момент u.
2. На сумму 1, полученную по этому договору займа, приобрести бескупонную облигацию со сроком до погашения $T = u + t$ по спотовой цене P_{u+t} за единицу номинала (так что номинал F этой облигации равен $1/P_{u+t}$); в результате в момент $u + t$ инвестор получит сумму $F = 1/P_{u+t}$.
3. занять длинную позицию в форвардном контракте и взять в долг в момент u на срок t сумму A; это позволит в момент u погасить первый долг, но приведёт к необходимости выплатить в момент $u + t$ сумму $A(1 + f_{u,t})^t = (1 + f_{u,t})^t / P_u$.

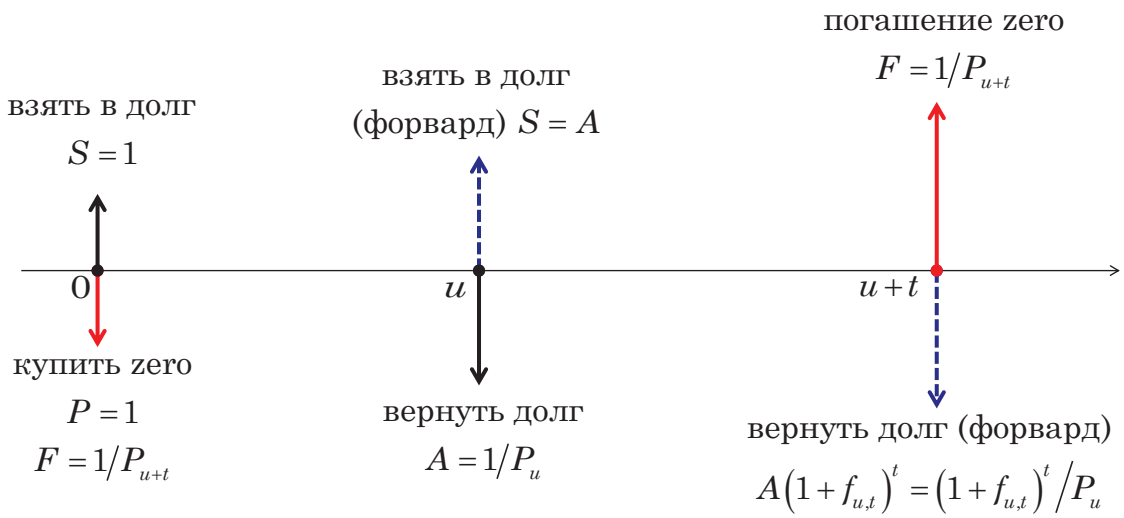


Рис. 7.3. Стратегия 3: (1) взять в долг $S = 1$ на срок u по ставке y_u; (2) купить zero, $F = 1/P_{u+t}$, $T = u + t$, цена $P = 1$; (3) взять в долг $S = 1/P_u$ в момент u на срок t по ставке $f_{u,t}$.

Эта сложная сделка не требует никаких инвестиций. В момент $u+t$ её завершения инвестор:

1. получит сумму $1/P_{u+t}$ при погашении бескупонной облигации;
2. будет обязан выплатить сумму $\left(1+f_{u,t}\right)^t/P_u$ для погашения долга по форвардному договору займа.

В силу (7.2) первая сумма больше второй, так что реализация описанного плана принесёт инвестору доход в размере $R=1/P_{u+t}-\left(1+f_{u,t}\right)^t/P_u$, причём эта стратегия не требует от инвестора никаких расходов и является абсолютно безрисковой. Принцип отсутствия арбитража влечёт, что неравенство (7.2) невозможно.

Если же допустить, что

$$f_{u,t}>\left(\frac{P_u}{P_{u+t}}\right)^{1/t}-1 \Leftrightarrow \left(1+f_{u,t}\right)^t/P_u>1/P_{u+t}, \qquad (7.3)$$

т.е. кто-то готов взять деньги в долг в момент u на срок t на менее выгодных условиях, чем предписывает теория, то возникает следующая возможность арбитража для инвестора, который готов занять короткую позицию в форвардном контракте (см. рис.7.4):

Стратегия 4.

1. взять в долг сумму 1 на срок $u+t$ по спотовой процентной ставке y_{u+t} и тем самым взять на себя обязательство выплатить сумму $B=\left(1+y_{u+t}\right)^{u+t}=1/P_{u+t}$ в момент $u+t$;
2. на сумму 1, полученную по этому договору займа, приобрести бескупонную облигацию со сроком до погашения u по спотовой цене P_u за единицу номинала (так что номинал этой облигации равен $1/P_u$).
3. занять короткую позицию в форвардном контракте и дать в долг в момент u на срок t по ставке $f_{u,t}$ сумму $1/P_u$, полученную при погашении облигации.

Форвардный контракт принесёт инвестору в момент $u+t$ сумму $\left(1+f_{u,t}\right)^t/P_u$, которая по исходному предположению больше, чем сумма $B=1/P_{u+t}$, которую нужно выплатить по первому договору займа. Таким образом, реализация описанного плана принесёт инвестору доход в размере $\left(1+f_{u,t}\right)^t/P_u-1/P_{u+t}$, причём эта стратегия не требует от инвестора никаких расходов и является абсолютно безрисковой. Принцип отсутствия арбитража влечёт, что неравенство (7.3) также невозможно. Таким образом, справедливо соотношение (7.1).

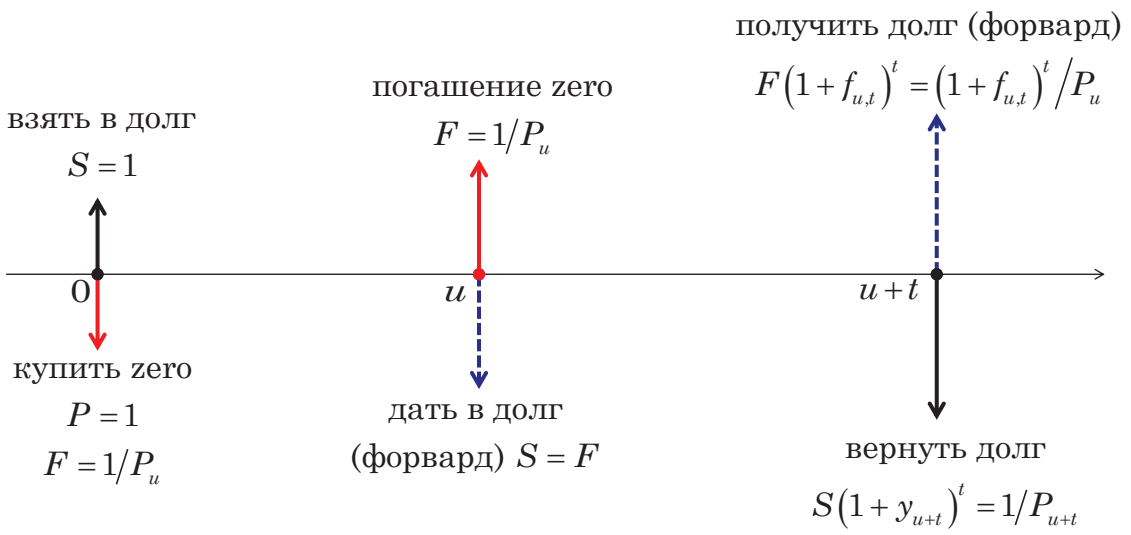


Рис. 7.4. Стратегия 4: (1) взять в долг $S=1$ на срок $u+t$ по ставке y_{u+t}; (2) купить zero, $F=1/P_u$, $T=u$, цена $P=1$; (3) дать в долг $S=1/P_u$ в момент u на срок t по ставке $f_{u,t}$.

7.5.2 Форвардная цена ценной бумаги, по которой не производятся денежные выплаты

В этом разделе мы рассмотрим контракт, который заключается в настоящий момент $t_0=0$ и в соответствии с которым в определённый момент T в будущем (см. рис. 7.5):

- одна сторона (продавец) обязуется продать другой стороне (покупателю) ценную бумагу (для определённости мы будем говорить об акции) по указанной в договоре форвардной цене K, вне зависимости от того, какова будет спотовая цена S_T этой акции в момент T;
- покупатель обязуется приобрести эту акцию у продавца по цене K, вне зависимости от того, какова будет спотовая цена S_T акции в момент T.

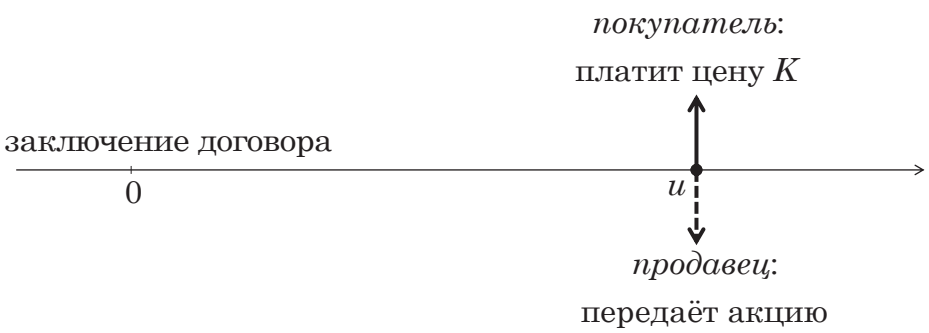


Рис. 7.5

Мы будем предпогагать, что до момента T исполнения форвардного контракта по рассмативаемой ценной бумаге не выплачиватся дивиденды или какие-либо другие денежные суммы.

Подчекнём ещё раз, что при заключении форвардного контракта ни одна сторона не платит никаких денег. Однако договор обязателен для исполнения сторонами в момент T на условиях, согласованных в настоящий момент $t_0 = 0$.

Чтобы найти форвардную цену K, рассмотрим две стратегии поведения стороны, занимающей в форвардном контракте короткую позицию (т.е. продавца).

Стратегия 1. В момент $t_0 = 0$:

1. купить рассматриваемую ценную бумагу по текущей цене S_0;
2. одновременно заключить форвардный контракт на поставку этой бумаги в момент T по форвардной цене K.

Поскольку форвардный контракт не предполагает выплаты денег в момент его заключения, реализация этой стратегии потребует от инвестора только выплаты суммы S_0 в момент 0. С другой стороны, имея в наличии рассматриваемую ценную бумагу, инвестор без всякого риска сможет выполнить условия форвардного контракта, что гарантирует получение суммы K в момент T.

Стратегия 2. В момент 0 купить бескупонную облигацию номиналом K со сроком до погашения T по текущей цене $K \cdot P_T = K \cdot (1 + y_T)^{-T}$.

В момент T обе стратегии обеспечат получение одной и той же суммы K. Поэтому их цены в момент 0 должны совпадать: $S_0 = K(1 + y_T)^{-T}$, откуда для форвардной цены мы имеем:

$$K = S_0 (1 + y_T)^T. \tag{7.4}$$

Таким образом, форвардная цена рассматриваемой ценной бумаги равна номиналу бескупонной облигации, которую можно приобрести в момент 0, заплатив сумму, равную текущей цене этой бумаги. Обратим внимание на то, что прогнозы относительно спотовой цены акции в момент T никак не влияют на её форвардную цену, вычисленную на основе принципа отсутствия арбитража.

Для доказательства формулы (7.4) можно рассмотреть и две стратегии поведения инвестора, занимающего в форвардном контракте длинную позицию.

Стратегия 1*. В момент $t_0 = 0$:

1. купить бескупонную облигацию номиналом K со сроком до погашения T по текущей цене P_T за единицу номинала;

2. одновременно заключить форвардный контракт на покупку рассматриваемой ценной бумаги в момент T по форвардной цене K.

Поскольку форвардный контракт не предполагает выплаты денег в момент его заключения, реализация этой стратегии потребует от инвестора только выплаты суммы $KP_T = K\left(1+y_T\right)^{-T}$ в момент 0. С другой стороны, сумма K, которую инвестор получит при погашении облигации, гарантирует получение в момент T рассматриваемой ценной бумаги.

Стратегия 2*. В момент 0 купить рассматриваемую ценную бумагу по текущей цене S_0 .

В момент T обе стратегии дают один и тот же результат – получение рассматриваемой ценной бумаги. Поэтому их цены в момент 0 должны совпадать, что даёт равенство $S_0 = K\left(1+y_T\right)^{-T}$.

С равным успехом для доказательства соотношения (7.4) можно использовать и следующие аргументы.

Допустим, что соотношение (7.4) неверно и предположим вначале, что форвардная цена меньше «правильной», т.е.

$$K < S_0\left(1+y_T\right)^T, \tag{7.5}$$

Это означает, что в момент T кто-то готов продать акцию дешевле, чем предписывает теория. В этой ситуации возникает следующая возможность арбитража для инвестора, владеющего акцией в момент $t_0 = 0$ и предполагающего держать её до момента T:

В момент $t_0 = 0$:

1. продать акцию по спотовой цене S_0.
2. На сумму S_0 приобрести бескупонную облигацию номиналом $F = S_0\left(1+y_T\right)^T$ со сроком до погашения T .
3. Занять длинную позицию в форвардном контракте на покупку в момент T акции по цене K .

В момент T при погашении бескупонной облигации инвестор получит сумму $F = S_0\left(1+y_T\right)^T$. На эти деньги он приобретёт акцию по форварной цене K и восстановит структуру своего портфеля; разница $S_0\left(1+y_T\right)^T - K > 0$ – это безрисковая прибыль инвестора.

Принцип отсутствия арбитража влечёт, что неравенство (7.5) невозможно.

Допустим теперь, что

$$K > S_0\left(1+y_T\right)^T. \qquad (7.6)$$

Иначе говоря, в момент T кто-то готов купить акцию за цену, бóльшую, чем предписывает теория. Тогда возникает следующая возможность арбитража для инвестора, который готов занять короткую позицию в форвардном контракте:

В момент $t_0 = 0$:

1. Взять в долг сумму S_0 на срок T по спотовой процентной ставке y_T;
4. Приобрести акцию по текущей цене S_0.
5. Занять короткую позицию в форвардном контракте на продажу акции в момент T по цене K.

В момент T инвестор продаст имеющуюся у него акцию и получит сумму K. Т.к. сумма долга с набежавшими процентами равна $S_0\left(1+y_T\right)^T$, инвестор сможет не только погасить долг, но и получит безрисковую прибыль в размере $K - S_0\left(1+y_T\right)^T > 0$.

Принцип отсутствия арбитража влечёт, что неравенство (7.6) невозможно.

Таким образом, справедливо соотношение (7.4).

С равным успехом для получения формулы (7.4) можно использовать принцип эквивалентности обязательств:

- Обязательство покупателя заключаются в выплате суммы K в момент T. Текущая стоимость этого обязательства равна $K\left(1+y_T\right)^{-T}$.
- Обязательство продавца заключается в поставке акции в момент T. Текущая стоимость этого обязательства – это текущая цена акции, т.е. S_0.

Применяя принцип эквивалентности обязательств, мы немедленно получаем формулу (7.4).

Отметим, что соотношение (7.4) даёт форвардную цену любого актива, который до момента T не приносит его владельцу доход и не требует расходов, например, на хранение или транспортировку.

7.5.3 Форвардная цена ценной бумаги, по которой до момента исполнения форварного контракта производятся денежные выплаты

Рассмотрим некоторую ценную бумагу, текущая цена которой (в данный момент $t_0 = 0$) равна S_0 и предположим, что в некоторые моменты $t_1,\ldots,t_n$ до момента T исполнения форвардного контракта по этой бумаге будут произведены выплаты в размере $C_1,\ldots,C_n$ соответственно – это могут быть,

например, купонные платежи по облигации. Чтобы найти её форвардную цену K, рассмотрим две стратегии поведения инвестора, занимающего в форвардном контракте короткую позицию.

Стратегия 1. В момент $t_0 = 0$:

1. купить рассматриваемую ценную бумагу по текущей цене S_0;
2. одновременно заключить форвардный контракт на продажу этой бумаги в момент T по форвардной цене K.

Поскольку форвардный контракт не предполагает выплаты денег в момент его заключения, реализация этой стратегии потребует от инвестора только выплаты суммы S_0 в момент 0. С другой стороны, имея в наличии рассматриваемую ценную бумагу, инвестор без всякого риска сможет выполнить условия форвардного контракта, что гарантирует получение суммы K в момент T. Кроме того, поскольку на промежутке $[0;T]$ он будет владеть этой бумагой, он получит и суммы $C_1,\ldots,C_n$ в моменты $t_1,\ldots,t_n$ соответственно.

Стратегия 2. В момент $t_0 = 0$ сформировать портфель из $n+1$ бескупонных облигаций номиналом K, $C_1,\ldots,C_n$ и сроками до погашения T, $t_1,\ldots,t_n$ соответственно, что обойдётся ему в сумму $KP_T + C_1P_{t_1} + \ldots + C_nP_{t_n}$.

Поскольку обе стратегии генерируют одинаковые денежные потоки, предположение об отсутствии арбитража влечёт, что в момент $t_0 = 0$ начальные инвестиции на их реализацию должны быть равны:

$$S_0 = KP_T + C_1P_{t_1} + \ldots + C_nP_{t_n}. \tag{7.7}$$

Это соотношение утверждает, что спотовая цена рассматриваемой ценной бумаги является суммой приведённой к настоящему моменту форвардной цены, KP_T, и суммой

$$I = \sum_{k=1}^{n} C_kP_{t_k} \equiv \sum_{k=1}^{n} C_k\left(1+y_{t_k}\right)^{-t_k}$$

приведённых значений всех денежных выплат. Этот факт можно выразить следующей фразой: «ценная бумага на руках равносильна денежному потоку, который она может генерировать, включая форвардную цену», где «равносильность» понимается в смысле равенства приведённых стоимостей.

Из (7.7) для форвардной цены K мы имеем формулу, которая обобщает соотношение (7.4):

$$K = \left(S_0 - I\right)\left(1+y_T\right)^T. \tag{7.8}$$

Равенство (7.8) можно получить и с помощью принципа эквивалентности обязательств:

- Обязательство покупателя заключаются в выплате суммы K в момент T. Текущая стоимость этого обязательства равна $K\left(1+y_T\right)^{-T}$.

- Обязательство продавца заключается в поставке акции в момент T. Однако теперь, в отличие от ситуации, изученной в разделе 7.5.2, текущая стоимость этого обязательства – это не спотовая цена акции в момент $t_0 = 0$. Дело в том, что с точки зрения прав, которыми обладает их владелец, акция в текущий момент и акция, поставляемая по форвардному контракту в момент T, являются разными ценными бумагами. В текущий момент времени акция даёт право на получение сумм $C_1,\ldots,C_n$ в моменты $t_1,\ldots,t_n$ соответственно, в то время как акция, получаемая по форвардному контракту, этот денежный поток не генерирует. Поэтому текущая цена S_0' акции, поставляемой по форвардному контракту, равна спотовой цене акции в текущий момент за вычетом текущей стоимости $I = \sum_{k=1}^{n} C_k \left(1 + y_{t_k}\right)^{-t_k}$ денежного потока $\left(C_1,t_1\right),\ldots,\left(C_n,t_n\right)$: $S_0' = S_0 - I.$

Применяя принцип эквивалентности обязательств, мы немедленно получаем формулу (7.8)

7.5.4 Оценивание форвардных контрактов

Предположим, что в момент $t_0 = 0$ был заключён форвардный контракт на поставку в момент T в будущем некоторого актива (например, ценной бумаги), спотовая цена которого в момент заключения контракта равна S_0. В соответствии с этим контрактом продавец в момент T исполнения форвардного контракта обязуется продать покупателю этот актив по согласованной в момент 0 форвардной цене K, а покупатель обязуется купить актив по этой цене, вне зависимости от того, какова будет спотовая цена S_T актива в момент T.

Как для продавца актива, так и для покупателя этот контракт не стоит ничего в момент его заключения. Поэтому они могут разорвать форвардный контракт немедленно после заключения без всяких компенсаций друг другу. Однако в момент исполнения контракта ситуация изменится. Если спотовая цена актива в этот момент, S_T, будет меньше форвардной цены K, то

- покупатель переплатит за актив сумму $K - S_T$, т.е. фактически понесёт убыток к размере $K - S_T$ (он заплатит за актив сумму K, хотя на спотовом рынке мог бы купить его за меньшую сумму S_T),
- а продавец фактически заработает эту же сумму (форвардный контракт позволит ему продать актив дороже, чем он мог бы продать на спотовом рынке).

Если же спотовая цена актива в момент исполнения форвардного контракта, S_T, будет больше форвардной цены K, то

- покупатель сэкономит сумму $S_T - K$, т.е. фактически получит прибыль к размере $S_T - K$ (форвардный контракт позволит ему заплатить за актив меньшем, чем требует спотовый рынок),
- а продавец фактически потеряет эту же сумму (из-за обязательства по форвардному контракту он вынужден продать актив дешевле, чем на спотовом рынке).

Поэтому, если стороны в момент T решат не исполнять контракт, то

- в случае $S_T < K$ покупатель должен выплать продавцу сумму $K - S_T$;
- в случае $S_T > K$ продавец должен выплать покупателю сумму $S_T - K$.

Иначе говоря, в момент T форвардный контракт для продавца (стороны, занимающей короткую позицию) равносилен сумме $V_T^{short} = K - S_T$, а для покупателя (стороны, занимающей длинную позицию) – сумме $V_T^{long} = S_T - K$. Величина V_T^{short} (V_T^{long}) называется ценностью форвардного контракта (value of the forward contract) в момент T для продавца (соответственно, покупателя).

По аналогии с этими величинами мы можем определить ценности V_t^{short} и V_t^{long} форвардного контракта для продавца и покупателя в любой момент $t \in [0,T]$, как денежную компенсацию, которую должен получить продавец (от покупателя) и покупатель (от продавца), если они решат разорвать форвардный контракт в момент t. Если продавец получает положительную сумму V_t^{short}, то покупатель теряет такую же сумму, т.е «получает» сумму $-V_t^{short}$. Поэтому $V_t^{long} = -V_t^{short}$ или, что то же самое, $V_t^{short} + V_t^{long} \equiv 0$ при всех $t \in [0,T]$.

Ниже мы будем ссылаться на покупателя актива, т.е. инвестора, занимающего по этому контракту длинную позицию, как на инвестора L, а на продавца актива, т.е. инвестора, занимающего по этому контракту короткую позицию, как на инвестора S.

Чтобы найти ценность в момент $t \in [0,T]$ форвардного контракта для инвестора L, предположим, что в этот момент два инвестора, S' и L', решили заключить новый форвардный контракт на поставку того же актива в момент T; инвестор S' занимает в этом новом контракте короткую позицию, а инвестор L' – длинную. Поскольку сейчас момент t является начальным, его форвардная цена в соответствии с (7.4) равна $K_t = S_t\left(1 + y_{T-t}(t)\right)^{T-t}$, где S_t – спотовая цена актива в момент t, $y_{T-t}(t)$ – спотовая годовая процентная ставка по займу на срок $T-t$ в момент t, так что $y_T(0) \equiv y_T$ – спотовая процентная ставку по займу на срок T в момент 0 заключения основного (первого) форвардного контракта. Этот новый контракт гарантирует инвестору L', занимающему в нём длинную позицию, покупку актива в момент T по цене K_t (так что $K_0 \equiv K$). Однако

инвестор L' может гарантированно получить этот актив в момент T, если в момент t вместо заключения нового форвардного контракта (Стратегия 1) заплатит инвестору L сумму V_t^{long} и тем самым приобретёт все его права и обязанности по первому контракту, включая право (и обязанность) купить актив в момент T по цене K (Стратегия 2).

Обе стратегии с точки зрения инвестора L' приводят к одному и тому же результату – гарантированному получению рассматриваемого актива в момент T. Поэтому они должны иметь одну цену. Стратетия 1 требует выплаты суммы K_t в момент T. Стратегия 2 требует выплаты суммы K в момент T и суммы V_t^{long} в момент t. Приведённая стоимость последней суммы в момент T равна $V_t^{long} \cdot \left(1 + y_{T-t}(t)\right)^{T-t}$ и потому принцип отсутствия арбитража требует справедливости равенства $K_t = K + V_t^{long} \cdot \left(1 + y_{T-t}(t)\right)^{T-t}$, откуда мы можем найти ценность в момент $t \in [0,T]$ форвардного контракта для инвестора L:

$$\begin{aligned} V_t^{long} &= \left(K_t - K_0\right) \cdot \left(1 + y_{T-t}(t)\right)^{-(T-t)} \\ &= S_t - K_0 \cdot \left(1 + y_{T-t}(t)\right)^{-(T-t)} \\ &= S_t - S_0 \left(1 + y_T(0)\right)^T \cdot \left(1 + y_{T-t}(t)\right)^{-(T-t)}. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Можно немного модифицировать описанные выше стратегии с тем, чтобы не использовать аргументы, основанные на понятии текущей стоимости. Именно, рассмотрим следующие стратегии инвестора L'.

Стратегия 1. В момент t:

1. заключить новый форвардный контракт на покупку в момент T рассматриваемого актива по цене K_t;
2. приобрести бескупонную облигацию номиналом K_t и сроком до погашения $T-t$ по спотовой цене $P_{T-t}(t)$ за единицу номинала;

Реализация этого плана обойдётся инвестору L' в сумму $K_t P_{T-t}(t)$ в момент t и позволит без дополнительных расходов получить требуемый актив в момент T (сумму K_t, требующуюся получения актива в рамках форвардного контракта, инвестор получит при погашении облигации).

Стратегия 2. В момент t:

1. приобрести бескупонную облигацию номиналом K и сроком до погашения $T-t$ по спотовой цене $P_{T-t}(t)$ за единицу номинала;
2. заплатить инвестору L сумму V_t^{long} и тем самым приобрести все его права и обязанности по первому контракту, включая право (и обязанность) купить актив в момент T по цене K.

Реализация этого плана обойдётся инвестору L' в сумму $KP_{T-t}(t) + V_t^{long}$ в момент τ и позволит без дополнительных расходов получить требуемый актив в

момент t (сумму K, требующуюся получения актива в рамках первого форвардного контракта, инвестор получит при погашении облигации).

Обе стратегии с точки зрения инвестора L' приводят к одному и тому же результату: позволяют гарантированно получить рассматриваемый актив в момент T. Поэтому они должны иметь одну цену: $K_t P_{T-t}(t) = KP_{T-t}(t) + V_t^{long}$, что немедленно влечёт (7.9).

7.5.5 «Плоская» кривая доходности

Если кривая доходности является горизонтальной прямой (flat yield curve), т.е. спотовая доходность не зависит от срока, то основные формулы (7.4), (7.8) и (7.9) примут гораздо более простой вид.

Форвардная цена ценной бумаги, по которой не производятся денежные выплаты, равна

$$K = S_0 \left(1 + y\right)^T = S_0 e^{\delta T}, \tag{7.10}$$

где y – (постоянная) безрисковая годовая спотовая процентная ставка в момент заключения контракта, $\delta = \ln(1+y)$ – соответствующая интенсивность процентов.

Форвардная цена ценной бумаги, по которой до момента T исполнения форварного контракта производятся денежные выплаты в размере $C_1,\ldots,C_n$ в моменты $t_1,\ldots,t_n$ соответственно, равна

$$K = \left(S_0 - I\right)\left(1 + y\right)^T = \left(S_0 - I\right)e^{\delta T}, \tag{7.11}$$

где $I = C_1 e^{-\delta t_1} + \ldots + C_n e^{-\delta t_n}$ – стоимость потока выплат, приведённая к моменту заключения форвардного контракта.

Ценность V_t^{long} простого форвардного контракта для покупателя

$$\begin{aligned} V_t^{long} &= \left(K_t - K_0\right)\cdot\left(1 + y'\right)^{-(T-t)} = \left(K_t - K_0\right)\cdot e^{-\delta'(T-t)} \\ &= S_t - K_0 \cdot \left(1 + y'\right)^{-(T-t)} = S_t - K_0 \cdot e^{-\delta'(T-t)} \\ &= S_t - S_0\left(1 + y\right)^T \cdot \left(1 + y'\right)^{-(T-t)} = S_t - S_0 e^{\delta T} \cdot e^{-\delta'(T-t)}, \end{aligned} \tag{7.12}$$

где y' – (постоянная) безрисковая годовая спотовая процентная ставка в момент t оценивания контракта, $\delta' = \ln(1+y')$ – соответствующая интенсивность процентов.

7.6 Задачи

Задача 7.1 (CT1, 3 October 2012, Problem 5)**.** На рынке торгуются два вида депозитных сертификатов некоторого банка. Одномесячный сертификат обеспечивает номинальную доходность 12 процентов годовых при ежемесячном начислении процентов. Двухмесячный сертификат обеспечивает номинальную доходность 24% годовых при ежемесячном начислении процентов. Предполагая отсутствие арбитража, рассчитайте номинальную годовую форвардную процентную ставку для второго месяца при ежемесячном начислении процентов.

Решение. Эффективная доходность при покупке сертификата со сроком до погашения 1 месяц равна $i_{\text{эфф-спот}}^{1\text{месяц}} = \dfrac{12\%}{12} = 1\%$. Если инвестор сегодня приобретёт таких сертификатов на сумму P, то через месяц он получит сумму $1.01P$.

При покупке сертификата со сроком до погашения 2 месяца проценты будут начисляться в конце каждого из двух месяцев в соответствии с эффективной месячной ставкой $\dfrac{24\%}{12} = 2\%$ (но выплачиваться они будут только при погашении сертификата). Поэтому при покупке сегодня таких сертификатов на сумму P инвестор получит через 2 месяца сумму $1.02^2 \cdot P$.

Искомая форвардная ставка f равна $12f_{\text{эфф}}$, где $f_{\text{эфф}}$ – эффективная ставка по займу сроком на 1 месяц, который будет сделан через месяц. Удобно считать, что этот заём будет оформлен покупкой через месяц одномесячного сертификата.

Если инвестор сегодня

1. купит одномесячный сертификат ценой P (что даст ему через месяц сумму $1.01P$);
2. заключит форвардный контракт на покупку через месяц одномесячного сертификата на сумму $1.01P$,

то по истечении двух месяцев он получит сумму $1.01P \cdot \left(1 + f_{\text{эфф}}\right)$. Поскольку арбитраж невозможен, эта стратегия должна давать тот же результат, что и покупка сегодня двухмесячного сертификата ценой P, т.е. должно быть справедливо равенство $1.01P \cdot \left(1 + f_{\text{эфф}}\right) = 1.02^2 P$. Отсюда

$$f_{\text{эфф}} = \frac{1.02^2}{1.01} - 1 = \frac{0.0304}{1.01}, \text{ так что } f = 12 \cdot \frac{0.0304}{1.01} \approx 36.1188\%.$$

Задача 7.2 (CT1, 3 October 2012, Problem 4)**.** 1 сентября 2012 года был заключён десятимесячный форвардный контракт на покупку акции, стоимость

которой в этот день составляла £10. Выплата дивидендов в размере £1 на акцию ожидается 1 декабря 2012, 1 марта 2013 и 1 июня 2013.

(i) Рассчитайте форвардную цену K, если номинальная безрисковая процентная ставка при начислении процентов каждое полугодие составляет 8% годовых, а арбитраж отсутствует.

(ii) Объясните, почему при расчёте форвардной цены нет необходимости использовать ожидаемую цену акции в момент исполнения форвардного контракта.

Решение. (i) Для расчётов примем полугодие в качестве единицы времени, а день заключения форвардного контракта в качестве начального момента $t_0 = 0$. Тогда эффективная безрисковая ставка за единичный промежуток времени равна $i = 4\%$, момент исполнения форвардного контракта – это $T = \dfrac{10}{6}$, дивиденды по акции должны быть выплачены в моменты $t_1 = \dfrac{3}{6}$ (1 декабря 2012), $t_2 = \dfrac{6}{6}$ (1 марта 2013), $t_3 = \dfrac{9}{6}$ (1 июня 2013), спотовая цена акции равна $S_0 = £10$, все три дивидендные выплаты D_1, D_2, D_3 равны £1.

Рассмотрим две инвестиционные стратегии в момент $t_0 = 0$:

1. Заключить форвардный контракт на поставку одной акции через 10 месяцев; одновременно с этим купить акцию и держать её до момента исполнения форвардного контракта. Эта стратегия обеспечит следующий положительный денежный поток: £1 – 1 декабря 2012, £1 – 1 марта 2013, £1 – 1 июня 2013, £K – 1 июля 2013.

2. Приобрести безрисковые активы, например, бескупонные правительственные облигации, со сроками до погашения 3 месяца (погашение 1 декабря 2012), 5 месяцев (погашение 1 марта 2013), 9 месяцев (погашение 1 июня 2013), 10 месяцев (погашение 1 июля 2013) и выплатой при погашении сумм £1, £1, £1, K соответственно.

Обе стратегии идентичны с точки зрения генерируемых ими денежных потоков. Поскольку арбитраж отсутствует, оба портфеля должны иметь одну цену.

Первый портфель (из акции и форвардного контракта) обойдётся инвестору в $S_0 = £10$ (поскольку форвардный контракт в момент заключения не предполагает выплат ни одной из сторон, заплатить нужно только за акцию). Второй портфель (из четырёх бескупонных облигаций) обойдётся инвестору в сумму

$$D_1(1+i)^{-t_1} + D_2(1+i)^{-t_2} + D_3(1+i)^{-t_3} + K(1+i)^{-T}.$$

Из равенства цен этих портфелей мы имеем получим следующее выражение для форвардной цены акции:

$$K = S_0(1+i)^T - D_1(1+i)^{T-t_1} - D_2(1+i)^{T-t_2} - D_3(1+i)^{T-t_3}.$$

Подставляя численные значения переменных, мы получим:

$$K = 10 \cdot 1.04^{\frac{10}{6}} - 1 \cdot 1.04^{\frac{7}{6}} - 1 \cdot 1.04^{\frac{4}{6}} - 1 \cdot 1.04^{\frac{1}{6}} \approx 7.5956 (\text{фунтов}).$$

В приведённом выше решении мы повторяли для рассматриваемой частной ситуации аргументы, использовавшиеся в Разделе 7.5.3 при выводе формулы (7.8). Если использовать полученные там общий результат о том, что «ценная бумага на руках равносильна денежному потоку, который она может генерировать, включая форвардную цену», то мы получим более простое решение.

Акция стоимостью £10 1 сентября 2012 года (момент 0) равносильна денежному потоку $\left(£1, \frac{3}{6}\right), \left(£1, \frac{6}{6}\right), \left(£1, \frac{9}{6}\right), \left(£K, \frac{10}{6}\right)$ в смысле равенства их стоимостей в момент 0, т.е. верно равенство

$$10 = 1 \cdot 1.04^{-\frac{3}{6}} + 1 \cdot 1.04^{-\frac{6}{6}} + 1 \cdot 1.04^{-\frac{9}{6}} + K \cdot 1.04^{-\frac{10}{6}},$$

что немедленно влечёт ответ.

(ii) Любой другой способ расчёта, кроме как по формуле, использовавшейся в (i), приведёт к возможности арбитража. Но в этой формуле ожидаемая цена акции в момент исполнения форвардного контракта не фигурирует. Ожидаемая цена акции в будущем важна инвестору при определении разумного значения её спотовой цены и принятии решения о том, покупать или нет её сейчас.

Задача 7.3 (CT1, 30 September 2015, Problem 4) 1 октября 2015 года был заключён девятимесячный форвардный контракт на покупку акции, стоимость которой в этот день составляла £10. Выплата дивидендов в размере 50 пенсов на акцию ожидается 1 ноября 2015 и 1 мая 2016. Безрисковая интенсивность процентов равна 5% в год.

(i) Рассчитайте форвардную цену K в день заключения контракта, точно указав все дополнительные предположения и приведя все вычисления. (ii) Объясните, почему ожидаемая цена акции через девять месяцев после заключения форвардного контракта не должна приниматься в расчёт при расчёте форвардной цены.

Решение. (i) Для расчётов примем год в качестве единицы времени, а день заключения форвардного контракта в качестве начального момента $t_0 = 0$. Тогда момент исполнения форвардного контракта – это $T = \frac{9}{12}$, дивиденды по акции должны быть выплачены в моменты $t_1 = \frac{1}{12}$ (1 ноября 2015) и $t_2 = \frac{7}{12}$ (1 мая 2016), спотовая цена акции равна $S_0 = £10$, обе дивидендные выплаты D_1, D_2 равны £0.5.

Рассмотрим две инвестиционные стратегии в момент $t_0 = 0$:

1. Заключить форвардный контракт на поставку одной акции через 9 месяцев; одновременно с этим купить акцию и держать её до момента исполнения форвардного контракта. Эта стратегия обеспечит следующий положительный денежный поток: £0.5 – 1 ноября 2015, £0.5 – 1 мая 2016, £K – 1 июля 2013.

2. Приобрести безрисковых активов (скажем государственных бескупонных облигаций) со сроками до погашения 1 месяц (погашение 1 ноября 2015), 7 месяцев (погашение 1 мая 2016), 9 месяцев (погашение 1 июля 2013) и выплатой при погашении сумм £0.5, £0.5, £K соответственно.

Обе стратегии идентичны с точки зрения генерируемых ими денежных потоков. Если предположить отсутствие арбитража, оба портфеля должны иметь одну цену.

Первый портфель (из акции и форвардного контракта) обойдётся инвестору в $S_0 = £10$ (поскольку форвардный контракт в момент заключения не предполагает выплат ни одной из сторон, заплатить нужно только за акцию).

Второй портфель (из трёх бескупонных облигаций) обойдётся инвестору в сумму

$$D_1 e^{-\delta t_1} + D_2 e^{-\delta t_2} + K e^{-\delta T}.$$

Из равенства цен этих портфелей мы имеем получим следующее выражение для форвардной цены акции:

$$K = S e^{\delta T} - D_1 e^{\delta (T - t_1)} - D_2 e^{\delta (T - t_2)}.$$

Подставляя численные значения переменных, мы получим:

$$K = 10 \cdot e^{0.05 \cdot \frac{9}{12}} - 0.5 \cdot e^{0.05 \cdot \frac{8}{12}} - 0.5 \cdot e^{0.05 \cdot \frac{2}{12}} \approx 9.360988 (\text{фунтов}).$$

(ii) См. пункт (ii) решения Задачи 7.2.

Задача 7.4 (CT1, 7 September 2005, Problem 9) (i) Объясните, что понимается под «теорией ожиданий» для вида кривой доходности.

(ii) Однолетние эффективные годовые процентные ставки в настоящий момент равны 8%. Ожидается, что через год они будут 7%, через два года – 6%, а через три года – 5%.

(a) Предполагая, что справедливо объяснение вида кривой доходности, даваемое теорией ожиданий, вычислите брутто-доходность к погашению для 1-летней, 2-летней, 3-летней и 4-летней бескупонных облигаций (т.е. спотовые процентные ставки).

(b) Цена купонной облигации рассчитывается дисконтированием индивидуальных выплат по этой облигации в соответствии с доходностями бескупонных облигаций из пункта (a). Вычислите брутто-доходность для

облигации, которая гасится по номиналу в точности через четыре года и платит купон по ставке 5 процентов годовых в конце каждого года.

(c) Только что был заключён двухлетний форвардный контракт на поставку акции, текущая цена которой 400р. Ровно через год ожидается выплата дивидендов в размере 4р. Рассчитайте форвардную цену, используя упомянутые выше спотовые процентные ставки и предполагая отсутствие арбитража.

Решение. (i) В соответствии с теорией ожиданий, доходность облигации определяется ожиданиями инвесторов относительно значений краткосрочных спотовых процентных ставок в будущем. Поэтому доходность облигации с большим сроком до погашения такая же, как доходность от эквивалентной серии краткосрочных инвестиций.

(ii) (a) Пусть y_t – спотовая доходность для займа на t лет, а f_t – форвардная ставка для займа на 1 год в момент t. По условию задачи: $y_1 = f_0 = 8\%$, $f_1 = 7\%$, $f_2 = 6\%$, $f_3 = 5\%$. Применяя формулу (6.24), мы можем найти требуемые брутто-доходности к погашению для 1-летней, 2-летней, 3-летней и 4-летней бескупонных облигаций, т.е. спотовые процентные ставки y_2, y_3, y_4 (ставка $y_1 = 8\%$ дана):

$$y_2 = \sqrt{(1+y_1)(1+f_1)} - 1 = \sqrt{1.08 \cdot 1.07} - 1 = \sqrt{1.1556} - 1 \approx 7.4988\%,$$

$$y_3 = \sqrt[3]{(1+y_1)(1+f_1)(1+f_2)} - 1 = \sqrt[3]{1.08 \cdot 1.07 \cdot 1.06} - 1 = \sqrt[3]{1.224936} - 1 \approx 6.9969\%,$$

$$y_4 = \sqrt[4]{(1+y_1)(1+f_1)(1+f_2)(1+f_3)} - 1 = \sqrt[4]{1.08 \cdot 1.07 \cdot 1.06 \cdot 1.05} - 1$$
$$= \sqrt[4]{1.2861828} - 1 \approx 6.4941\%.$$

(b) Если, как обычно, $P_k = 1/(1+y_k)^k = 1/(1+y_1)(1+f_1)\ldots(1+f_{k-1})$ – цена единичной бескупонной облигации, то цена рассматриваемой купонной облигации номиналом 1 равна

$$P = 5P_1 + 5P_2 + 5P_3 + 105P_4$$
$$= \frac{5}{1.08} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.07} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.06} \cdot \left(1 + \frac{21}{1.05}\right)\right)\right) \approx 94.67515.$$

Уравнение ценности для денежного потока, соответствующего этой облигации, имеет вид:

$$5(1+y)^{-1} + 5(1+y)^{-2} + 5(1+y)^{-3} + 105(1+y)^{-4} = P,$$

или, что то же самое,

$$P(1+y)^4 - 5(1+y)^3 - 5(1+y)^2 - 5(1+y) - 105 = 0.$$

Решая это уравнение любым численным методом, мы получим: $YTM \approx 6.55633\%$.

(c) По формуле (7.8) искомая форвардная цена равна $K=\left(S_0-I\right)\left(1+y_2\right)^2$, где $S_0=£4$ – спотовая цена акции, $I=£0.04\left(1+y_1\right)^{-1}$ – приведённая стоимость дивидендов, $1+y_1=1.08$, $\left(1+y_2\right)^2=1.08\cdot 1.07$. Поэтому

$$K=£4\cdot 1.08\cdot 1.07-£0.05\cdot 1.07=£4.5796.$$

Задача 7.5 (CT1, 12 April 2016, Problem 7) 1 сентября 2015 года, когда безрисковая интенсивность процентов была 7% годовых, а цена акции составляла £8.70, был заключён однолетний форвардный контракт на поставку этой акции. Ожидалось, что по акции через восемь месяцев будут выплачены дивиденды в размере £1.10. 1 февраля 2016 года цена акции выросла до £9.90, а безрисковая интенсивность процентов уменьшилась до 6.5% годовых. Ожидания относительно дивидендов не изменились. Вычислите, точно указав все дополнительные предположения и приведя все вычисления, ценность контракта 1 февраля 2016 года для стороны, занимающей длинную позицию.

Решение. Примем год в качестве единицы времени, а день заключения форвардного контракта, 1 сентября 2015 года, в качестве начального момента $t_0=0$. Тогда момент T исполнения форвардного контракта равен 1, ожидаемый день выплаты дивидентов $t_1=8/12$, их размер $C_1=£1.10$, спотовая цена акции $S_0=£8.70$.

Акция стоимостью $S_0=£8.70$ 1 сентября 2015 года (момент 0) равносильна денежному потоку $\left(£1.10,\frac{8}{12}\right),\left(£K,1\right)$ в смысле равенства их стоимостей в момент 0. По условию для дисконтирования мы должны использовать постоянную интенсивность процентов $\delta=7\%$. Таким образом, для форварной цены K верно равенство $8.70=1.10\cdot e^{-0.07\times\frac{8}{12}}+K\cdot e^{-0.07}$, откуда:

$$K=8.70\cdot e^{0.07}-1.10\cdot e^{0.07/3}\approx 8.204853,$$

Форвардная цена K' в день оценки контракта, 1 февраля 2016 года, рассчитывается аналогичным способом. Поскольку сейчас именно этот момент является начальным, а контракт должен быть исполнен 1 сентября 2015 года, теперь $T=7/12$. Выплата дивидендов ожидается 1 мая 2016 года, что соответствует $t=3/12$. Акция стоимостью £9.90 1 февраля 2016 года равносильна денежному потоку $\left(£1.10,\frac{3}{12}\right),\left(£K',\frac{7}{12}\right)$ в смысле равенства их стоимостей в момент 0. По условию для дисконтирования мы должны использовать постоянную интенсивность процентов $\delta'=6.5\%$. Таким образом, верно равенство $9.90=1.10\cdot e^{-0.065\times\frac{3}{12}}+K'\cdot e^{-0.065\times\frac{7}{12}}$, откуда:

$$K' = 9.90 \cdot e^{0.065 \times \frac{7}{12}} - 1.10 \cdot e^{0.065 \times \frac{4}{12}} \approx 9.158489.$$

Теперь мы можем найти ценность контракта 1 февраля 2016 года для стороны, занимающей длинную позицию; обозначим эту ценность V^{long}. С этой целью предположим, что в этот момент два инвестора, S' и L', решили заключить новый форвардный контракт на поставку акции 1 сентября 2016 года; инвестор S' занимает в этом новом контракте короткую позицию, а инвестор L' – длинную. Рассмотрим следующие стратегии инвестора L'.

Стратегия 1. 1 февраля 2016 года:

1. заключить новый форвардный контракт на покупку 1 сентября 2016 года рассматриваемого актива по цене K';
2. вложить сумму $K'e^{-0.065 \times \frac{7}{12}}$ на 7 месяцев в безрисковый актив по ставке $\delta' = 6.5\%$ (что принесёт 1 сентября 2016 года сумму K').

Для реализации этого плана инвестор L' должен потратить 1 февраля 2016 года сумму $K'e^{-0.065 \times \frac{7}{12}}$, которая, как мы установили, равна $9.90 - 1.10 \cdot e^{-0.065 \times \frac{3}{12}}$. После этого 1 сентября 2016 года он без дополнительных расходов получит акцию.

Стратегия 2. 1 февраля 2016 года:

1. вложить сумму $Ke^{-0.065 \times \frac{7}{12}}$ на 7 месяцев в безрисковый актив по ставке $\delta' = 6.5\%$ (что принесёт 1 сентября 2016 года сумму K);
2. заплатить инвестору L сумму V^{long} и тем самым приобрести все его права и обязанности по первому контракту, включая право (и обязанность) купить 1 сентября 2016 года акцию по цене K.

Реализация этого плана потребует 1 февраля 2016 года от инвестора L' расходов в размере $Ke^{-0.065 \times \frac{7}{12}} + V^{long}$ и позволит без дополнительных расходов получить 1 сентября 2016 года требуемую акцию (сумму K, требующуюся получения актива в рамках первого форвардного контракта, инвестор получит при погашении облигации).

Обе стратегии с точки зрения инвестора L' приводят к одному и тому же результату – гарантированному получению акции 1 сентября 2016 года. Поэтому они должны иметь одну цену: $K'e^{-0.065 \times \frac{7}{12}} = Ke^{-0.065 \times \frac{7}{12}} + V^{long}$, откуда мы имеем:

$$V^{long} = \left(K' - K\right)e^{-0.065 \times \frac{7}{12}} \approx \left(9.158489 - 8.204853\right)e^{-0.065 \times \frac{7}{12}} \approx 0.918154.$$

Округляя до целого числа пенсов, мы окончательно получим: $V^{long} = 92\text{p}$.

Приложение 1

Институт и Факультет Актуариев
Предмет CT1 – Финансовая математика
(ключевой технический)
Программа[1] для экзаменов 2017 г.

Цели

По завершении этого курса студент, который проходит подготовку для получения актуарной квалификации, сможет:

(i) Описывать, как использовать обобщённый денежный поток для моделирования финансовых операций.

1. Для заданного денежного потока определять поступающие и выплачиваемые суммы в любой будуший период времени и обсуждать, являются или нет эти суммы или моменты их выплат фиксированными или неопределёнными.
2. Моделировать с помощью денежных потоков бескупонные облигации, ценные бумаги с фиксированным процентом, индексируемые ценные бумаги, депозиты, акции, займы с выплатой «только процентов», займы с постепенной выплатой основной суммы и ренты.

(ii) Описывать, как учитывать изменение ценности денег с течением времени с помощью понятий сложных процентов и дисконтирования.

1. Рассчитывать накопление для разовой инвестиции при постоянной процентной ставке для:
   - простых процентов
   - сложных процентов
2. Давать определение текущей стоимости будущего платежа.
3. Дисконтировать одиночный платёж при простом (коммерческом) учёте по постоянной учётной ставке.
4. Описывать, как модель сложных процентов может использоваться для демонстрации результата инвестирования денежной суммы на значительный промежуток времени.

(iii) Показывать, как процентные или учётные ставки могут быть выражены в терминах разных промежутков времени.

1. Выводить соотношения, связывающие процентные и учётные ставки для одного промежутка времени, математическими преобразованиями и с помощью общих соображений.

---

[1] Institute and Faculty of Actuaries. Subject CT1 – Financial Mathematics Core Technical. Syllabus for the 2017 exams. Оригинальный текст на английском языке см. на сайте Иститута и Факультета Актуариев: https://www.actuaries.org.uk.

2. Выводить соотношения, связывающие процентную ставку при выплате процентов один раз за рассматриваемый промежуток времени, процентную ставку при выплате процентов p раз за рассматриваемый промежуток времени и интенсивность процентов.

3. Объяснять разницу между номинальными и эффективными процентными ставками и находить эффективные ставки из номинальных.

4. Вычислять эквивалентную годовую процентную ставку, характеризующую размер накопления от инвестирования денежной суммы на указанный промежуток времени, в случае, когда интенсивность процентов является функцией времени.

(iv) Демонстрировать знание и понимание реальных и денежных процентных ставок.

(v) Вычислять текущую и накопленную стоимости потока равных или неравных платежей, используя заданные процентные ставки и чистую текущую стоимость для реальной процентной ставки при постоянном уровне инфляции.

1. Дисконтировать и приводить к любому моменту времени денежную сумму или серию денежных потоков (возможно бесконечную), когда:

- процентная ставка или учётная ставка постоянна;
- процентная или учётная ставка меняется с течением времени, но не является непрерывной функцией времени.
- интенсивность денежного потока и/или интенсивность процентов являются непрерывными функциями времени.

2. Вычислять текущую и накопленную стоимости потока равных или неравных платежей, производимых через равные промежутки времени, при заданных процентных ставках, когда первый платёж

- отложен на некоторый промежуток времени;
- не отложен.

(vi) Определять и использовать более важные функции составных процентов, включая детерминированные ренты.

1. Выводить формулы для величин $a_{\overline{n}|}$, $s_{\overline{n}|}$, $a^{(p)}_{\overline{n}|}$, $s^{(p)}_{\overline{n}|}$, $\ddot{a}_{\overline{n}|}$, $\ddot{s}_{\overline{n}|}$, $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$, $\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|}$, $\bar{a}_{\overline{n}|}$ и $\bar{s}_{\overline{n}|}$ в терминах годовой процентой ставки i, коэффициента дисконтирования v, срока n, учётной ставки d, интенсивности процентов δ, номинальных ставок $i^{(p)}$ и $d^{(p)}$.

2. Выводить формулы для величин ${}_{m|}a_{\overline{n}|}$, ${}_{m|}a^{(p)}_{\overline{n}|}$, ${}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}$, ${}_{m|}\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$ и ${}_{m|}\bar{a}_{\overline{n}|}$ в терминах величин i, v, n, d, δ, $i^{(p)}$ и $d^{(p)}$.

3. Выводить формулы для величин $(Ia)_{\overline{n}|}$, $(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$, $(I\bar{a})_{\overline{n}|}$, $(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|}$ и для соответствующих величин для отложенных рент в терминах величин i, v, n, δ, $a_{\overline{n}|}$ и $\ddot{a}_{\overline{n}|}$.

(vii) Определять и выписывать уравнение ценности.

1. Определять и выписывать уравнение ценности в случае, когда выплачиваемые и поступающие суммы детерминированы.

2. Описывать, как можно модифицировать уравнение ценности, чтобы учесть неопределённость выплачиваемых или поступающих сумм.

3. Понимать два условия, которые требуются для существование решения уравнения ценности.

(viii) Описывать, как заём может быть погашен регулярными выплатами процентов и капитала.

1. Описывать усреднённую процентную ставку и годовую эффективную ставку.

2. Рассчитывать расписание погашения долга с помощью серии регулярных выплат, которые производятся один раз или p раз за основной промежуток времени, и определять, какая часть каждой выплаты идёт на выплату процентов, а какая – на погашение суммы займа, а также рассчитывать размер непогашенного долга в любой момент.

(ix) Показывать, как метод дискотированных денежных потоков может использоваться для оценки инвестиционных проектов.

1. Вычислять чистую текущую стоимость и накопленный доход для поступлений и платежей от инвестиционного проекта при заданных процентных ставках.

2. Вычислять внутреннюю ставку дохода, характеризующую поступления и платежи по инвестиционному проекту.

3. Описывать срок окупаемости и дисконтированный срок окупаемости и анализировать их пригодность для оценки разумности инвестиционного проекта.

4. Вычислять срок окупаемости и дисконтированный срок окупаемости для потока поступлений и платежей от инвестиционного проекта.

5. Вычислять эквивалентную по деньгам доходность, среднюю по времени эффективную годовую ставку дохода и объединённую внутреннюю ставку дохода инвестиционного проекта или фонда.

(x) Описывать инвестиционные свойства и риски следующих типов активов, которые могут использоваться для инвестиционных целей:

- правительственные заимствования с фиксированным доходом;
- заимствования с фиксированным доходом других юридических лиц;
- индексированные правительственные заимствования;
- акции и подобные им финансовые инструменты;
- производные финансовые инструменты.

(xi) Анализировать простые задачи теории сложных процентов.

1. Вычислять текущую стоимость выплат по ценной бумаге с фиксированным доходом в случае, когда купонная ставка постоянна, а погашение производится одним платежом.

2. Вычислять верхнюю и нижнюю границы для текущей стоимости ценной бумаги с фиксированным доходом, которая погашается внутри заданного промежутка времени в день, определяемый заёмщиком.

3. При заданной цене ценной бумаги с фиксированным доходом (упомянутой в п.1) вычислять текущую доходность и доходность к погашению.

4. Вычислять текущую стоимость или доходность для обычной акции и недвижимости при простых (но не обязательно постоянных) предположениях относительно роста дивидендов и арендной платы.

5. Решать уравнение ценности для реальной процентной ставки при заданном инфляционном росте.

6. Вычислять текущую стоимость или реальную доходность для индексированной облигации при заданных предположениях относительно уровня инфляции.

7. Вычислять цену или доходность для ценной бумаги с фиксированным доходом в случае, когда инвестор обязан платить подоходный налог на купонные платежи и налог на прирост капитала при погашении.

8. Вычислять ценность инвестиции при учёте налога на прирост капитала в простых ситуациях, когда ставка налога постоянна, разрешается индексация с использованием заданной динамики индекса, разрешается вычитать капитальные убытки из доходов от прироста капитала.

(xii) Вычислять цену поставки и стоимость форвардного контракта с использованием методов, основанных на принципе отсутствия арбитража.

1. Определять «арбитраж» и объяснять, почему на многих рынках можно считать, что арбитраж невозможен.

2. Вычислять цену форвардного контракта при отсутствии арбитража, предполагая, что:

- на протяжении всего срока контракта нет никаких поступлений или расходов, связанных с активом, лежащим в его основе;
- во время действия контракта есть фиксированный доход от актива;
- во время действия контракта актив приносит дивиденды по фиксированной ставке.

3. Объяснять, что понимается под термином «хеджирование» в случае форвардного контракта.

4. Предполагая отсутствие арбитража, вычислять стоимость форвардного контракта в любой момент времени на протяжении срока его действия для ситуаций, перечисленных выше в п.2.

(xiii) Демонстрировать понимание зависимости процентных ставок от срока займа.

1. Описывать главные факторы, влияющие на зависимость процентных ставок от срока.

2. Объяснять, что понимается под паритетной доходностью и доходностью к погашению.

3. Объяснять, что понимается под

- дискретной спотовыми ставками и форвардными ставками,
- непрерывными спотовыми ставками и форвардными ставками,

выводить соотношения, связывающие эти величины и вычислять их.

4. Определять продолжительность и выпуклость денежного потока, приводить примеры применения этих понятий для оценки чувствительности стоимости денежного потока к сдвигу процентных ставок.

5. Вычислять продолжительность и выпуклость денежного потока.

6. Объяснять, как продолжительность и выпуклость используются в теории иммунизации (Редингтона) портфеля обязательств.

(xiv) Показывать понимание простых стохастических моделей для инвестиционного дохода.

1. Описывать в общих чертах модель стохастических процентных ставок и фундаментальное отличие между этой моделью и детерминистической моделью.

2. Выводить алгебраически выражения для среднего значения и дисперсии накопления от разовой премии для модели с независимыми и одинаково распределёнными процентными ставками и других простых моделей.

3. Для модели с независимыми и одинаково распределёнными процентными ставками выводить алгебраически рекуррентные соотношения, позволяющие вычислять среднее значение и дисперсию накопления от ежегодной премии.

4. Для модели, в которой для каждого года случайные величины $(1+i)$ независимы и распределены по лог-нормальному закону, выводить аналитически функции распределения для накопления от разовой премии и для текущей стоимости суммы, которая должна быть выплачена в заданный момент в будущем.

5. Применять упомянутые выше результаты для вычисления вероятности того, что простая последовательность платежей даст заданную сумму в указанный момент в будущем.

Приложение 2

Институт и Факультет Актуариев
Предмет CT1 – Финансовая математика
(ключевой технический)
Экзамен 18 апреля 2017 г.

В этом разделе мы расскажем о недавнем (18 апреля 2017 года) экзамене по курсу CT1.

Экзамен проводится в традиционной письменной форме и длится 3 часа. За это время кандидат должен решить 10 задач, покрывающих основные темы курса.

Мы приводим как оригинальный текст каждой задачи на английском языке, так и перевод на русский язык. При переводе условия задач слегка отредактированы, чтобы облегчить их понимание. В квадратных скобках указано число баллов за правильно решённую задачу или часть задачи. В апреле 2017 года для успешной сдачи экзамена требовалось набрать не меньше 60 баллов.

На экзамене разрешается использовать справочник, содержащий сводку основных формул и результатов по математическому анализу, теории вероятностей, математической статистике, финансовой математике, которые могут потребоваться при решении экзаменационных задач. Кроме того, для упрощения расчётов в этот справочник включены детальные таблицы основных финансовых функций: $v, \delta, i^{(p)}, d, d^{(p)}$ и т.п., $a_{\overline{n}|}, s_{\overline{n}|}, \dfrac{1}{a_{\overline{n}|}}$ для эффективной годовой процентной ставки i от 1% до 25% (сначала шаг равен 0.5%, а затем увеличивается до 5%) и длины промежутка времени n от 1 до 100 (до 25 для $i = 12\%, 15\%, 20\%, 25\%$). Это, видимо, хорошо для подготовки актуариев к эффективной практической работе, но плохо для выработки навыков работы в новых ситуациях, когда нужно хорошо понимать и помнить принципы и методы, лежащие в основе стандартных финансовых моделей и формул.

На экзамене не разрешают использовать компьютеры, хотя в реальной работе несложные расчёты проводятся бóльшей частью с помощью Microsoft Excel. Все расчёты должны проводиться с помощью калькуляторов, причём только определённых моделей (их список публикует ИФА). В настоящее время разрешены: Casio FX82, 83, 85, Hewlett Packard HP12c, Sharp EL531, Texas Instruments BAII Plus, TI-30.

Стандартная плата за попытку сдать экзамен CT1 в 2017 году составляла 220 фунтов (для отдельных категорий экзаменующихся она может быть как больше, так и меньше: от 115 до 260 фунтов).

1. Calculate the nominal rate of discount per annum convertible monthly which is equivalent to:

(i) an effective rate of interest of 1% per quarter. [2]

(ii) a force of interest of 5% per annum. [2]

(iii) a nominal rate of discount of 4% per annum convertible every three months. [2]

[Total 6]

1. Вычислите номинальную годовую учётную ставку, начисляемую ежемесячно, которая эквивалентна:

(i) эффективной квартальной ставке 1%. [2]

(ii) интенсивности процентов 5% годовых. [2]

(iii) номинальной учётной ставке 4% годовых, начисляемой каждые три месяца. [2]

[Всего 6 баллов]

Ответ: (i) $d^{(12)} \approx 3.973539\%$; (ii) $d^{(12)} \approx 4.989598\%$; (iii) $d^{(12)} \approx 4.013408\%$.

2. A bank offers two repayment alternatives for a loan that is to be repaid over sixteen years:

Option 1: the borrower pays £7,800 per annum quarterly in arrear.

Option 2: the borrower makes payments at an annual rate of £8,200 every second year in arrear.

Determine which option would provide the better deal for the borrower at a rate of interest of 5% per annum effective. [5]

2. Банк предлагает два варианта выплаты займа, который должен быть погашен в течение шестнадцати лет:

Вариант 1: заёмщик платит £7,800 в год, равными долями в конце каждого квартала.

Вариант 2: заёмщик производит выплаты по ставке £8,200 за год в конце каждого второго года.

Определите, какой вариант предпочтительнее для заёмщика при эффективной годовой процентной ставке 5%. [5]

Ответ: первый (текущая стоимость выплат равна £86 103.52, в то время как для второго варианта она равна £86 702.16).

3. A one-year forward contract on a stock was agreed on 1 March 2017 when the stock price was £78 and the risk-free force of interest was 14% per annum. The stock was expected to pay dividends of £3.20 on 1 June and 1 December 2017.

On 1 April 2017, the price of the stock was £80 and the risk-free force of interest was 11% per annum. The dividend expectations were unchanged.

Determine the value of the contract to the holder of the long forward position on 1 April 2017. [7]

3. 1 марта 2017 года, когда цена облигации была £78, а безрисковая процентная ставка была 14% годовых, был заключён однолетний форвардный контракт на эту облигацию. Ожидается, что 1 июня и 1 декабря 2017 года по облигации будут выплачены дивиденды в размере £3.20 (всего £6.40).

1 апреля 2017 года цена облигации выросла до £80, а безрисковая процентная ставка снизилась до 11% годовых. Ожидания относительно дивидендов не изменились.

Определите ценность контракта 1 апреля 2017 года для стороны, занимающей длинную позицию. [7]

Ответ: –£1.02174.

4. An investor borrows money from a bank in order to invest in a business venture. The initial loan is £500,000, with further loans of £250,000 made in 6 months' time and £250,000 made in 12 months' time.

The business venture will provide the investor with an income of £2 million in exactly 10 years' time and £3 million in exactly 15 years' time.

The bank offers a force of interest, $\delta(t)$, as a function of time t (measured in years) which is given by:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0.04 & \text{для } 0 \le t \le 2, \\ 0.02 + kt & \text{для } t > 2. \end{cases}$$

(i) Derive expressions for $v(t)$ which cover all values of t. [5]

(ii) Determine the maximum value of k that would ensure that the discounted payback period is exactly 10 years. [4]

[Total 9]

4. Инвестор берёт взаймы деньги в банке и инвестирует их в бизнес-проект. Первоначальная сумма займа была £500,000. Через 6 месяцев инвестор взял в долг дополнительные £250,000, а через 12 месяцев – ещё £250,000.

Проект обеспечит инвестору доход в размере £2 миллиона ровно через 10 лет и £3 миллиона ровно через 15 лет.

Банк предлагает интенсивность процентов, $\delta(t)$, которая зависит от времени и в момент t (измеренный годами) даётся формулой:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0.04 & \text{для } 0 \le t \le 2, \\ 0.02 + kt & \text{для } t > 2. \end{cases}$$

(i) Получите выражение для $v(t)$, которое применимо при всех t. [5]

(ii) Определите максимальное значение параметра k, которое гарантирует, что дисконтированный период окупаемости проекта равен точно 10 лет. [4]

[Всего 9 баллов]

Ответ: (i) $v(t) = e^{-0.04t}$ для $0 \le t \le 2$, $v(t) = e^{-0.5kt^2 - 0.02t + 2k - 0.04}$ для $t > 2$; (ii) $k = 0.00975$.

5. An investment fund has liabilities of £11 million due in 7 years' time and £8.084 million in 11 years' time.

The manager of the fund will meet the liabilities by investing in zero-coupon bonds. The manager is able to buy zero-coupon bonds for whatever term is required and there are adequate funds at the manager's disposal.

(i) Explain whether it is possible for the manager to immunise the fund against small changes in the rate of interest by purchasing a single zero-coupon bond. [2]

The manager decides to purchase two zero-coupon bonds, one paying £15.363 million in 7.5 years' time and the other paying £3.787 million in 14.25 years' time. The current interest rate is 5.5% per annum effective.

(ii) Determine whether the investment fund satisfies the necessary conditions to be immunised against small changes in the rate of interest. [7]

[Total 9]

5. Инвестиционный фонд обязан выплатить £11 млн. через 7 лет и £8.084 млн. через 11 лет.

Чтобы выполнить эти обязательства управляющий фонда инвестирует средства в бескупонные облигации. Управляющий может купить бескупонные облигации с любым сроком до погашения и в его распоряжении имеется достаточно средств.

(i) Объясните, может ли управляющий защитить фонд от небольших изменений процентной ставки купив одну бескупонную облигацию? [2]

Управляющий решает купить две бескупонные облигации, одна из которых выплатит £15.363 млн. через 7.5 лет, а вторая – £3.787 млн. через 14.25 лет. В настоящий момент эффективная годовая процентная ставка равна 5.5%.

(ii) Объясните, удовлетворяет ли инвестиционный фонд условиям, необходимым для защиты от небольших изменений процентной ставки. [7]

[Всего 9 баллов]

Ответ: (i) нет, т.к. при приобретении одной облигации заведомо не могут выполнены все три условия теории Редингтона (для активов разброс будет меньше разброса для обязательств); (ii) да, т.к. (1) текущая стоимость активов равна текущей стоимости обязательств, (2) средние дисконтированные сроки активов и обязательств также равны друг другу, (3) выпуклость активов больше выпуклости обязательств.

6. Exactly three months ago an investor purchased an office building for £5.8 million with the intention of renting it out. In three months' time the investor will spend £850,000 on necessary refurbishments and improvements.

A tenant has agreed to lease the building in six months' time for 35 years. The tenant will pay an initial rent of £1.250 million per annum payable monthly in arrear. The rent will be increased at five-yearly intervals at a rate of 4.2% per annum compound. It has further been agreed that at the end of the lease period the tenant will buy the building from the investor for £11.5 million.

The investor pays income tax at a rate of 35% and is expecting a net effective rate of return of 8% per annum. Calculate, showing all workings, the net present value of the project to the investor at the time of purchase. [11]

6. Ровно три месяца тому назад инвестор купил офисное здание за £5.8 млн. с намерением сдавать его в аренду. Через три месяца инвестор потратит £850,000 на необходимые обновления и улучшения.

Арендатор согласился арендовать это здание через шесть месяцев на 35 лет. Арендатор будет вносить арендную плату в размере £1.250 млн. в год равными долями в конце каждого месяца. Арендная плата будет увеличиваться через каждые пять лет, исходя из роста на 4.2% в год. Кроме того, стороны договорились, что в конце срока аренды арендатор купит у инвестора это здание за £11.5 млн.

Инвестор платит подоходный налог по ставке 35% и ожидает чистую эффективную доходность проекта в размере 8% годовых. Вычислите, с исчерпывающими пояснениями, чистую текущую стоимость проекта для инвестора в момент покупки. [11]

Ответ: $NPV = £7.9425$ m.

7. A fixed interest bond was issued on 1 January 2017 with a term of 20 years and is redeemable at 105%. The security pays a coupon of 4% per annum, payable half-yearly in arrear.

An investor is liable to income tax at the rate of 30% and capital gains tax at the rate of 40%. Income tax and capital gains tax are both collected on 1 June each year in relation to gross payments made during the previous 12 months.

The investor bought £10,000 nominal of the stock at an issue price of £9,800.

(i) Show that the net redemption yield obtained by the investor will be between 3% and 4% per annum effective. [7]

The inflation rate over the term of the bond is assumed to be 2% per annum.

(ii) Calculate the net effective annual real redemption yield that would be obtained by the investor. [3]

(iii) Explain, without doing any further calculations, how your answers to parts (i) and (ii) would alter if the tax were collected on 1 April instead of 1 June each year. [2]

[Total 12]

7. 1 января 2017 года была выпущена 20-летняя облигация с постоянным полугодовым купоном. Купонная ставка равна 4% годовых, а выкупная сумма составляет 105% от номинала.

Инвестор должен платить 30% подоходный налог и 40% налог на прирост капитала. Оба налога взимаются 1 июня каждого года и начисляются на выплаты, сделанные на протяжеии 12 предшествующих месяцев.

Инвестор приобрёл облигацию номиналом £10,000 по цене размещения, равной £9,800.

(i) Покажите, что эффективная годовая чистая доходность к погашению лежит между 3% и 4%. [7]

Предположим, что на протяжении этого 20-летнего срока инфляция составит 2% в год.

(ii) Вычислите эффективную годовую реальную чистую доходность к погашению, которую получит инвестор. [3]

(iii) Объясните, не проводя никаких других вычислений, как изменились бы ваши ответы на вопросы (i) и (ii), если бы налоги взимались не 1 июня каждого года, а 1 апреля. [2]

[Всего 12 баллов]

Ответ: (i) для $i = 3\%$ чистая текущая стоимость потока платежей по облигации (включая выплату налогов) равна £9892.37, т.е. больше цены облигации, а для $i = 4\%$ эта величина равна £8551.92, т.е. меньше цены облигации; (ii) 1.05%; (iii) и денежная доходность, и чистая доходность уменьшатся.

8. Two investment funds A and B are administered by different managers. The initial values of the two funds on 1 January 2015 were £1.5 million and £2.3 million, respectively. The funds received additional net cash flows at the beginning of 2015 and 2016, as follows:

	Fund Net Cash Flows	
	1 January 2015	*1 January 2016*
Fund A	£300,000	£1,700,000
Fund B	£2,000,000	£200,000

The fund managers achieved the following annual returns during 2015 and 2016:

	Fund Annual Returns	
	2015	*2016*
Fund A	42%	3%
Fund B	36%	2%

(i) Calculate the annual effective time weighted rate of return for each fund for the period 1 January 2015 to 31 December 2016. [3]

(ii) Calculate the annual effective money weighted rate of return per annum for each fund for the period 1 January 2015 to 31 December 2016. [8]

(iii) Comment on your answers to parts (i) and (ii) by explaining which of the two measures is the better indicator of the comparative performance of the managers for the given two-year period. [3]

[Total 14]

8. Инвестиционными фондами А и Б руководят разные управляющие. Начальная стоимость этих фондов 1 января 2015 года была £1.5 млн. и £2.3 млн. соответственно. В начале 2015 и 2016 годов фонды получили дополнительные денежные средства, которые указаны в следующей таблице.

	1 января 2015 г.	1 января 2016 г.
Фонд А	£300,000	£1,700,000
Фонд Б	£2,000,000	£200,000

Управляющие фондами добились следующих годовых доходностей в 2015 и 2016 годах:

	2015 г.	2016 г.
Фонд А	42%	3%
Фонд Б	36%	2%

(i) Вычислите среднюю по времени эффективную годовую ставку дохода для каждого фонда с 1 января 2015 года по 31 декабря 2016 года. [3]

(ii) Вычислите эквивалентную по деньгам доходность для каждого фонда с 1 января 2015 года по 31 декабря 2016 года. [8]

(iii) Объясните, какую из этих двух мер доходности следует использовать при сравнении качества работы управляющих на протяжении рассматриваемого двухлетнего периода. [3]

[Всего 14 баллов]

Ответ: (i) $TWRR_A \approx 20.94\%$, $TWRR_B \approx 17.78\%$; (ii) $MWRR_A \approx 15.823\%$, $MWRR_B \approx 17.474\%$; (iii) *TWRR*, т.к. она не зависит от потока «новых денег».

9. Let f_t denote the one-year effective forward rate of interest over the year from time t to $(t + 1)$. Let i_t be the t-year effective spot rate over the period 0 to t.

The annual effective gross redemption yield from an n-year bond which pays coupons of 5% annually in arrear is given by:

$$g_n = 0.07 + 0.001n \quad \text{for } n = 1,\ 2 \text{ and } 3$$

Each bond is redeemed at par and is exactly one year from the next coupon payment. It is assumed that no arbitrage takes place.

(i) Calculate i_1, i_2 and i_3 as percentages to three decimal places. [7]

(ii) Calculate f_0, f_1 and f_2 as percentages to three decimal places. [4]

(iii) Explain why the one-year forward rates increase more quickly with term than the spot rates. [2]

[Total 13]

9. Пусть f_t обозначает однолетнюю эффективную форвардную процентную ставку для года, который начинается в момент t и заканчивается в момент $(t + 1)$. Пусть i_t – эффективная годовая спотовая ставка для промежутка $[0;t]$.

В момент $t = 0$ выпущены три облигации со сроками до погашения 1, 2 и 3 года соответственно. Все три облигации платят купон раз в год по ставке 5% и гасятся по номиналу. Годовая эффективная брутто-доходность к погашению для n-летней облигации для $n = 1$, 2 и 3 даётся формулой:

$$g_n = 0.07 + 0.001n.$$

Предполагается, что справедлива гипотеза об отсутствии арбитража.

(i) Вычислите i_1, i_2 и i_3. Ответ запишите в виде процентов с тремя знаками после запятой. [7]

(ii) Вычислите f_0, f_1 и f_2. Ответ запишите в виде процентов с тремя знаками после запятой. [4]

(iii) Объясните, почему при росте срока однолетние форвардные ставки растут быстрее, чем спотовые. [2]

[Всего 13 баллов]

Ответ: (i) $i_1 = g_1 = 7.100\%$, $i_2 \approx 7.203\%$, $i_3 \approx 7.307\%$; (ii) $f_0 = i_1 = 7.100\%$, $f_1 \approx 7.306\%$, $f_2 \approx 7.516\%$.

10. An individual aged exactly 65 intends to retire in five years' time and receive an annuity-certain. The annuity will be payable monthly in advance and will cease after 20 years. The annuity will increase at each anniversary of the commencement of payment at the rate of 3% per annum.

The individual would like the initial level of annuity to be £20,000 per annum. The price of the annuity will be the present value of the payments on the date it commences using an interest rate of 7% per annum effective.

(i) Calculate the price of the annuity. [4]

In order to purchase the annuity described in part (i), the individual invests £200,000 on his 65th birthday in a particular fund.

The investment return on the fund in any given year is independent of returns in all other years and the annual return is:

- 4% with a probability of 60%.
- 7% with a probability of 40%.

(ii) Calculate, showing all workings, the expected accumulation of the investment at the time of retirement. [3]

(iii) Calculate, showing all workings, the standard deviation of the investment at the time of retirement. [4]

(iv) Determine the probability that the individual will have sufficient funds to purchase the annuity. [3]

[Total 14]

10. Человек, которому сейчас ровно 65 лет, намеревается выйти на пенсию через 5 лет. Сразу после выхода на пенсию он хочет приобрести 20-летнюю детерминированную ренту с выплатами в начале каждого месяца. В первый год общая сумма ежемесячных выплат должна быть £20,000, а затем ежегодно она должна возрастать на 3%. На протяжении каждого года размер ежемесячной выплаты должен быть неизменным. Цена этой ренты в момент её начала определяется как приведённая стоимость всех выплат при эффективной годовой процентной ставке 7%.

(i) Вычислите цену ренты. [4]

Для того, чтобы накопить средства для покупки ренты, описанной выше, человек в свой 65-й день рождения инвестирует £200,000 в некоторый фонд.

Годовая доходность, которую обеспечивает фонд, в любой данный год является случайной величиной, которая принимает значения

- 4% с вероятностью 60%,
- 7% с вероятностью 40%.

Для разных лет эти величины независимы в совокупности.

(ii) Вычислите, с исчерпывающими пояснениями, ожидаемый размер накопления к моменту выхода на пенсию. [3]

(iii) Вычислите, с исчерпывающими пояснениями, стандартное отклонение этого накопления от его среднего значения. [4]

(iv) Найдите вероятность того, что человек будет иметь достаточно средств для покупки ренты. [3]

[Всего 14 баллов]

Литература

1. Stephen G. Kellison. The Theory of Interest. 3rd edition. McGraw-Hill, 2008.

2. J.J. McCutcheon, W.F. Scott. An Introduction to the Mathematics of Finance. Oxford, Butterworth-Heinemann Ltd, 1986.

3. Subject CT1 – Financial Mathematics Core Technical. Syllabus for the 2017 exams. Institute and Faculty of Actuaries, 2017.

4. Pacrick J. Brown. Bond Market Structures and Yield Calculations. International Securities Market Association, 1998

5. ISDA 2006 Definitions. International Swap and Derivatives Association, 2006.

6. Методика определения кривой бескупонной доходности государственных облигаций, ПАО Московская биржа, 2017.

7. UK Government Securities: a Guide to 'Gilts'. United Kingdon Debt Management Office. 10th ed., June 2012.

8. A Private Investor's Guide to Gilts. United Kingdon Debt Management Office. 4th ed., December 2004.

9. Formulae for Calculating Gilt Prices from Yields. United Kingdon Debt Management Office. 3rd ed., 16 March 2005.

10. The Official Gilt Strips Facility. Bank of England. October 1997.

11. Joanna Place. Basic Bond Analysis. Bank of England 2000.

12. Nicola Anderson, John Sleath. New estimates of the UK real and nominal yield curves. Bank of England, 2001.

13. Trading Bonds on the London Stock Exchange: A Guide for Private Investors, London Stock Exchange plc., January 2010.

14. Calculation of the Annual Equivalent Rate (AER). Appendix to Code of Conduct for the Advertising of Interest Bearing Accounts. British Bankers' Association, March 2011.

15. Jacob Ejsing, Magdalena Grothe, Oliver Grothe. Liquidity and credit risk premia in government bond yields. European Central Bank, Working paper No.1440, June 2012.

16. The New Euro Area Yield Curve. ECB Monthly Bulletin, February 2008, 95-102.

17. David Bolder, David Stréliski. Yield Curve Modelling at the Bank of Canada. Technical Report No. 84, Bank of Canada, 1999.

18. An Empirical Analysis of the Canadian Term Structure of Zero-Coupon Interest Rates. Bank of Canada Working Paper 2004-48, December 2004.

19. Code of Federal Regulation, Title 31, Subtitle B, Chapter II, Subchapter B, §356.31 «How does the STRIPS program work?»

20. Code of Federal Regulation, Title 31, Subtitle B, Chapter II, Subchapter B, Appendix B to Part 356 «Formulas and Tables».

21. Waggoner, D. Spline methods for extracting interest rate curves from coupon bond prices, Federal Reserve Bank of Atlanta, 1997, Working Paper series, 97-10.

22. Mark Fisher. Forces That Shape the Yield Curve. Federal Reserve Bank of Atlanta Economic Review, First Quarter 2001.

23. Refet S. Gurkaynak, Brian Sack, and Jonathan H. Wright. The U.S. Treasury Yield Curve: 1961 to the Present. Finance and Economics Discussion Series, 2006-28, Federal Reserve Board, Washington, D.C.

24. Lars E.O. Svensson. Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994. National Bureau of Economic Research, Working Paper No. 4871, September 1994.

25. Zero-coupon yield curves: technical documentation. Bank for International Settlements, Monetary and Economic Department, BIS Papers No 25, October 2005.

26. Charles R. Nelson, Andrew F. Siegel. Parsimonious Modeling of Yield Curves. The Journal of Business, 1987, vol. 60, No. 4, pp. 473-489.

27. D.J. Fenn et al. The Miracle of triangular arbitrage in the spot foreing exchange market. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2009, vol.12, Issue 8, 1105-1123.

28. W.F.Scott. A generalisation of G.F.Hardy's formula for the yield on a fund. Transactions of Faculty of Actuaries, v.34 (1973-1975), No.246, pp. 450-454

Об авторах

Фалин Андрей Геннадьевич – Родился 15 ноября 1982г. Образование: МГУ им.М.В.Ломоносова, географический факультет (1999-2004) и Финансовый Университет при Правительстве РФ, экономический ф-т (2013-2016). С 2003 года работает в страховом, консалтинговом и банковском бизнесе. В настоящее время – генеральный директор ООО «Сити Оценка». Автор научных работ по страхованию и финансам.

Фалин Геннадий Иванович – Родился 22 октября 1951г. Образование: МГУ им.М.В.Ломоносова, механико-математический факультет (1968-1973, 1976-1979). С 1979 года работает на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета МГУ, доктор физико-математических наук, профессор. В МГУ читает лекции по актуарной математике, теории риска, математике финансов и инвестиций, исследованию операций и т.п. Автор ряда учебников по этим предметам. Преподавал в университетах Канады, Великобритании, Испании. Член Общества Актуариев (США), член Совета по актуарной деятельности при ЦБ РФ.