О дизъюнктных суммах в решётке линейных топологий

В. И. АРНАУТОВ, К. М. ФИЛИППОВ
Институт математики и информатики
Академии наук Республики Молдова

УДК 512.556.5

Ключевые слова: топологическое линейное пространство, базис окрестностей нуля, фактор-топология, решётка, дизъюнктная сумма, коатом.

Аннотация

Пусть M — линейное пространство над телом, снабжённым дискретной топологией, $\mathcal{L}(M)$ — решётка всех линейных топологий на M, упорядоченная по включению, и $\tau_*, \tau_0, \tau_1 \in \mathcal{L}(M)$. Будем говорить, что τ_1 является дизъюнктной суммой τ_* и τ_0, и обозначать это соотношение $\tau_1 = \tau_* \sqcup \tau_0$, если $\tau_1 = \inf\{\tau_0, \tau_*\}$ и $\sup\{\tau_0, \tau_*\}$ — дискретная топология.

Пусть $\tau_1, \tau_0 \in \mathcal{L}(M)$. Говорим, что τ_0 является дизъюнктным слагаемым τ_1, если $\tau_1 = \tau_* \sqcup \tau_0$ для некоторого элемента $\tau_* \in \mathcal{L}(M)$. В статье доказаны некоторые необходимые и некоторые достаточные условия того, что τ_0 является дизъюнктным слагаемым τ_1.

Abstract

V. I. Arnautov, K. M. Filippov, On disjoint sums in the lattice of linear topologies, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 1, pp. 3—18.

Let M be a vector space over a skew-field equipped with the discrete topology, $\mathcal{L}(M)$ be the lattice of all linear topologies on M ordered by inclusion, and $\tau_*, \tau_0, \tau_1 \in \mathcal{L}(M)$. We write $\tau_1 = \tau_* \sqcup \tau_0$ or say that τ_1 is a disjoint sum of τ_* and τ_0 if $\tau_1 = \inf\{\tau_0, \tau_*\}$ and $\sup\{\tau_0, \tau_*\}$ is the discrete topology.

Given $\tau_1, \tau_0 \in \mathcal{L}(M)$, we say that τ_0 is a disjoint summand of τ_1 if $\tau_1 = \tau_* \sqcup \tau_0$ for a certain $\tau_* \in \mathcal{L}(M)$. Some necessary and some sufficient conditions are proved for τ_0 to be a disjoint summand of τ_1.

Введение. Если топология $\tau_0 \in \mathcal{L}(M)$ (см. замечание 1, пункт b)) является дизъюнктным слагаемым (см. замечание 1, пункт e)) отделимой топологии $\tau_1 \in \mathcal{L}(M)$, то $\tau_1 \leqslant \tau_0$ и в силу предложения 4 существует замкнутое подпространство B топологического линейного пространства (M, τ_1), такое что $\tau_0 = \tau_1(B)$ (см. замечание 1, пункт d)).

В статье исследуется вопрос, когда верно обратное утверждение. Известно, что ответ на него не всегда положителен даже для случая, когда $\tau_1 \prec \tau_0$, т. е. когда $\{\tau \in \mathcal{L}(M) \mid \tau_1 < \tau < \tau_0\} = \varnothing$ (см. [2, теорема 5]).

Доказано, что ответ на поставленный вопрос положителен в следующих случаях:

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 1, с. 3—18.

— топологическое линейное пространство (M, τ_0) полно и метризуемо (теорема 6);

— топологическое линейное пространство (M, τ_0) метризуемо и B является подпространством счётной коразмерности в M (теорема 8);

— топологическое линейное пространство (M, τ_0) локально линейно компактно (теорема 11).

Замечание 1.

a) Обозначим через 1_A тождественное отображение множества A; через $f|Z$ — сужение отображения $f\colon X \to Y$ на подмножество $Z \subseteq X$; через $\tau|_Y$ — топологию, индуцированную топологией τ на множестве $Y \subseteq X$, где (X, τ) — топологическое пространство.

Зафиксируем тело R, снабжённое дискретной топологией. Все линейные пространства в настоящей работе являются левыми линейными пространствами над R. Будем обозначать через $\bigoplus\limits_{i \in I} H_i$ прямую сумму множества $\{H_i \mid i \in I\}$ линейных пространств; через $\pi_{H_j}\colon \bigoplus\limits_{i \in I} H_i \to H_j$ — естественную проекцию; через $\rho_{H_j}\colon H_j \to \bigoplus\limits_{i \in I} H_i$ — естественное вложение.

Если M — линейное пространство и $X \subseteq M$, будем обозначать через $\langle X \rangle$ линейную оболочку множества X.

Пусть $\alpha\colon P \to Q$, $\beta\colon P \to Q$ и $\gamma\colon P \to Q$ — гомоморфизмы линейных пространств. Определим отображения $\alpha + \beta\colon P \to Q$ и $-\gamma\colon P \to Q$ следующим образом: $(\alpha + \beta)(p) = \alpha(p) + \beta(p)$ и $(-\gamma)(p) = -\gamma(p)$. Очевидно, что $(\alpha + \beta)$ и $-\gamma$ — гомоморфизмы.

b) Для произвольного линейного пространства P обозначим через $\mathcal{L}(P)$ множество всех R-модульных топологий на P, допускающих базис окрестностей нуля, состоящих из подпространств линейного пространства.

c) Пусть P и Q — линейные пространства, $\omega\colon P \to Q$ — гомоморфизм и τ — модульная топология на P. Если $\mathcal{P}$ — некоторый базис окрестностей нуля в (P, τ), то множество $\mathcal{Q} = \{\omega(U) \mid U \in \mathcal{P}\}$ является базисом окрестностей нуля в некоторой модульной топологии на Q (см. п. 1.5.32 в [1]), которую мы обозначим через τ/ω. В силу п. 1.5.7 в [1] эта топология не зависит от выбора базиса окрестностей нуля в (P, τ).

d) Пусть Q — линейное пространство и P — его подпространство. Если $i_P\colon P \to Q$ — естественное вложение и τ — модульная топология на P, будем обозначать через $\tau(P)$ топологию $(\tau|_P)/i_P$ на Q.

e) Пусть P — линейное пространство и $\tau_0, \tau_1, \tau_* \in \mathcal{L}(P)$. Будем говорить, что топология τ_1 — дизъюнктная сумма топологий τ_* и τ_0, и обозначать это соотношение через $\tau_1 = \tau_* \sqcup \tau_0$, если $\tau_1 = \inf\{\tau_0, \tau_*\}$ и топология $\sup\{\tau_0, \tau_*\}$ дискретна.

f) Будем говорить, что топология τ_0 является дизъюнктным слагаемым топологии τ_1, если существует топология $\tau_* \in \mathcal{L}(P)$, такая что $\tau_1 = \tau_0 \sqcup \tau_*$.

Замечание 2.

a) Пусть P — линейное пространство. Известно, что множество $\mathcal{L}(P)$, упорядоченное по включению, является полной модулярной решёткой. Известно, что дискретная (антидискретная) топология является наибольшим (наименьшим) элементом в $\mathcal{L}(P)$.

b) Пусть P и Q — линейные пространства и $\omega\colon P \to Q$ — их гомоморфизм. Очевидно, что $\tau/\omega \in \mathcal{L}(Q)$ для любой топологии $\tau \in \mathcal{L}(P)$.

c) Пусть $\alpha, \beta\colon P \to Q$ — гомоморфизмы, и пусть $\tau \in \mathcal{L}(P)$. Легко доказать, что $\inf\{\tau/\alpha, \tau/\beta\} \leqslant \tau/(\alpha+\beta)$ и что $\tau/\alpha = \tau/(-\alpha)$.

d) Пусть Q — линейное пространство, P — его подпространство. Если τ — модульная топология на Q и $\mathcal{Q}$ — некоторый базис окрестностей нуля в (Q,τ), то очевидно, что множество $\{U \cap P \mid U \in \mathcal{Q}\}$ является базисом окрестностей нуля в $(Q, \tau(P))$.

e) Легко проверить, что для любой модульной топологии τ на Q и для любых двух подпространств P_1, P_2 линейного пространства Q верно равенство $(\tau(P_1))(P_2) = \tau(P_1 \cap P_2)$.

Замечание 3. Зафиксируем линейное пространство M и топологии $\tau_i \in \mathcal{L}(M)$ с базисами окрестностей нуля $\mathcal{B}_i$ в (M,τ_i), состоящими из подпространств линейного пространства M для $i \in \{0,1\}$.

Предложение 4. *Если $\tau_1 \in \mathcal{L}(M)$ — отделимая топология и $\tau_0 \in \mathcal{L}(M)$ — её дизъюнктное слагаемое, то существует подпространство B линейного пространства M, замкнутое в (M,τ_1) и такое что $\tau_0 = \tau_1(B)$.*

Доказательство. По условию $\tau_1 = \inf\{\tau_*, \tau_0\}$ для некоторой топологии $\tau_* \in \mathcal{L}(M)$, которая, очевидно, отделима, так как отделима τ_1. Пусть $\mathcal{B}_*$ — некоторый базис окрестностей нуля в (M,τ_*). Не ограничивая общности, считаем, что $\mathcal{B}_1 = \{W + V \mid W \in \mathcal{B}_*,\ V \in \mathcal{B}_0\}$. Так как топология $\sup\{\tau_*, \tau_0\}$ дискретна, существуют окрестности нуля $A \in \mathcal{B}_*$ и $B \in \mathcal{B}_0$, такие что $A \cap B = \{0\}$.

Не ограничивая общности, считаем, что для любого $W \in \mathcal{B}_*$ выполнено включение $W \subseteq A$ и для любого $V \in \mathcal{B}_0$ — включение $V \subseteq B$.

Чтобы доказать, что $\tau_0 = \tau_1(B)$, достаточно, в силу замечания 1, пункт e), проверить, что $\mathcal{B}_0 = \{(W+V)\cap B \mid W \in \mathcal{B}_*,\ V \in \mathcal{B}_0\}$. Возьмём произвольные элементы $W \in \mathcal{B}_*$ и $V \in \mathcal{B}_0$. Пользуясь включением $V \subseteq B$ и модулярным законом для решётки всех подпространств, получаем

$$V \subseteq (W+V)\cap B = (W \cap B) + V \subseteq (A \cap B) + V = \{0\} + V = V.$$

Тогда $(W+V)\cap B = V$, что означает, что $\tau_0 = \tau_1(B)$.

Докажем, что подпространство B замкнуто в (M,τ_1). Используя предложение 1.2.25 в [1] и включения $V \subseteq B$ для каждого $V \in \mathcal{B}_0$ и $W \subseteq A$ для каждого $W \in \mathcal{B}_*$, получаем, что

$$[B]_{(M,\tau_1)} = \bigcap_{\substack{W\in\mathcal{B}_*\\ V\in\mathcal{B}_0}} (B+W+V) = \bigcap_{W\in\mathcal{B}_*} (B+W) \subseteq B + A.$$

Определим отображение $\varepsilon\colon B \oplus A \to B \times A$ следующим образом: $\varepsilon(b+a) = (b,a)$. Из равенства $B \cap A = \{0\}$ следует, что отображение ε определено корректно и является биекцией. Тогда

$$\varepsilon\big([B]_{(M,\tau_1)}\big) = \varepsilon\Bigg(\bigcap_{W\in\mathcal{B}_*}(B+W)\Bigg) = \bigcap_{W\in\mathcal{B}_*}\varepsilon(B+W) = \\ = \bigcap_{W\in\mathcal{B}_*}(B\times W) = B\times\Bigg(\bigcap_{W\in\mathcal{B}_*}W\Bigg) = B\times\{0\} = \varepsilon(B),$$

и значит, $[B]_{(M,\tau_1)} = B$. □

Лемма 5. *Если существуют*

(i) *подпространства A и B линейного пространства M, такие что $M = A\oplus B$;*

(ii) *топология $\tau_2 \in \mathcal{L}(M)$, такая что $\tau_2 \leqslant \tau_1$ и $\tau_2(B) = \tau_0$;*

(iii) *гомоморфизм $\sigma\colon A \to M$, такой что $\pi_A\sigma = 1_A$ и что отображение $\sigma\pi_A\colon (M,\tau_2)\to(M,\tau_2)$ непрерывно,*

то τ_0 является дизъюнктным слагаемым τ_1.

Доказательство. Обозначим через τ_* топологию $\tau_1/(\sigma\pi_A)$. Для доказательства равенства $\tau_1 = \tau_0 \sqcup \tau_*$ докажем следующие три утверждения.

a) $\tau_2/(1_M - \sigma\pi_A) \geqslant \tau_0$.

Из того, что отображение $\sigma\pi_A\colon (M,\tau_2)\to(M,\tau_2)$ непрерывно, следует неравенство $\tau_2 \leqslant \tau_2/(1_M-\sigma\pi_A)$. Пользуясь равенствами $\pi_A(1_M-\sigma\pi_A) = \pi_A - (\pi_A\sigma)\pi_A = \pi_A - \pi_A = 0$, получаем включение $(1_M-\sigma\pi_A)(M) \subseteq \ker\pi_A = B$. Тогда $\tau_2/(1_M-\sigma\pi_A) = (\tau_2/(1_M-\sigma\pi_A))(B) \geqslant \tau_2(B) = \tau_0$.

b) $\tau_1 = \inf\{\tau_0,\tau_*\}$.

В самом деле, в силу утверждения a) текущего доказательства и замечания 2 пункт c) получаем:

$$\tau_1 = \tau_1/1_M = \tau_1/((1_M-\sigma\pi_A)+\sigma\pi_A) \geqslant \inf\{\tau_1/(1_M-\sigma\pi_A),\tau_1/\sigma\pi_A\} \geqslant \\ \geqslant \inf\{\tau_2/(1_M-\sigma\pi_A),\tau_*\} \geqslant \inf\{\tau_0,\tau_*\} \geqslant \inf\{\tau_0,\tau_1/((\sigma\pi_A-1_M)+1_M)\} \geqslant \\ \geqslant \inf\{\tau_0,\inf\{\tau_1/(\sigma\pi_A-1_M),\tau_1/1_M\}\} \geqslant \inf\{\tau_0,\inf\{\tau_2/(1_M-\sigma\pi_A),\tau_1\}\} \geqslant \\ \geqslant \inf\{\tau_0,\inf\{\tau_0,\tau_1\}\} = \tau_1.$$

c) $\sup\{\tau_0,\tau_*\}$ — дискретная топология.

В силу пункта ii) условия леммы B есть окрестность нуля (M,τ_0). Тогда для доказательства утверждение c) достаточно доказать равенство $\sigma\pi_A(M)\cap B = \{0\}$, ибо $\sigma\pi_A(M)$ есть окрестность нуля в (M,τ_*).

В самом деле, пусть $b \in \sigma\pi_A(M)\cap B$ — произвольный элемент. Тогда $b = \sigma\pi_A(m)$ для некоторого $m\in M$. Следовательно, $0 = \pi_A(b) = (\pi_A\sigma)(\pi_A(m)) = 1_A(\pi_A(m)) = \pi_A(m)$. Тогда $0 = \pi_A(m) = b$. □

Теорема 6. *Пусть τ_1 — отделимая топология. Если топологическое линейное пространство (M,τ_0) полно и метризуемо, то топология τ_0 является дизъюнктным слагаемым топологии τ_1 тогда и только тогда, когда существует замкнутое* *подпространство B топологического линейного пространства (M, τ_1), такое что $\tau_1(B) = \tau_0$.*

Доказательство. Необходимость следует из предложения 4.

Докажем достаточность. Пусть B — замкнутое подпространство топологического линейного пространства (M, τ_1), такое что $\tau_1(B) = \tau_0$.

a) В силу метризуемости топологического линейного пространства (M, τ_0) мы считаем множество $\mathcal{B}_0$ имеющим вид $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, где $B = V_1 \supseteq V_2 \supseteq \ldots \supseteq \supseteq V_n \supseteq \ldots$.

В силу равенства $\tau_0 = \tau_1(B)$ существует множество $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{B}_1$, такое что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно равенство $U_n \cap B = V_n$. Не ограничивая общности, считаем, что $M = U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots \supseteq U_n \supseteq \ldots$.

Множество $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, очевидно, является базисом окрестностей нуля в некоторой топологии $\tau_2 \in \mathcal{L}(M)$.

b) Пусть A — некоторое подпространство линейного пространства M, такое что $M = A \oplus B$ и $\pi_A \colon M \to A$ — естественная проекция.

Обозначим через W_i множество $\pi_A(U_i)$ для $i \in \mathbb{N}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через H_n подпространство линейного пространства в A, такое что $W_{n-1} = H_n \oplus W_n$. Легко проверяется, что для любого $k \in \mathbb{N}$, такого что $k \leqslant n$, выполнено равенство

$$W_k = \left(\bigoplus_{i=k+1}^{n} H_i \right) \oplus W_n,$$

в частности

$$A = W_0 = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} H_i \right) \oplus W_n.$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим естественные проекции

$$\xi_{j,n} \colon A = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} H_i \right) \oplus W_n \to H_j, \quad \zeta_n \colon A = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} H_i \right) \oplus W_n \to W_n.$$

Очевидно, что для любых $i, k \in \mathbb{N}$, таких что $i \leqslant k \leqslant n$, выполнено равенство $\xi_{i,k} = \xi_{i,n}$.

Зафиксируем базисы X_i и Y_n в каждом из подпространств H_i и W_n соответственно. Очевидно, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множество

$$Z_n = \left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i \right) \cup Y_n$$

является базисом линейного пространства A.

c) Существует отображение (не обязательно гомоморфизм) $\delta \colon A \to M$, такое что $\pi_A \delta = 1_A$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено включение $\delta(W_n) \subseteq U_n$.

В самом деле, легко проверяется, что $A = W_1 = \pi_A(M)$ есть объединение дизъюнктного множества множеств

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} W_i, \quad W_1 \setminus W_2, \ldots, \; W_{n-1} \setminus W_n, \ldots.$$

Если $i > 1$ и $a \in W_{i-1} \setminus W_i$, то $U_{i-1} \cap \pi^{-1}(a) \neq \varnothing$, ибо $W_i = \pi(U_i)$. Для любого $a \in A$ выберем элемент $\delta(a)$ так, что

$$\delta(a) \in \begin{cases} U_i \cap \pi_A^{-1}(a), & \text{если } a \in W_{i-1} \setminus W_i, \\ \pi_A^{-1}(a), & \text{если } a \in \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} W_i. \end{cases}$$

Легко проверяется, что отображение $\delta \colon A \to M$ определено корректно и имеет требуемые свойства.

d) Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует единственный гомоморфизм линейных пространств $\sigma_n \colon A \to M$, продолжающий отображение $\delta | Z_n$. Докажем, что σ_n обладает следующими свойствами:

1) $\pi_A \sigma_n = 1_A$;

2) если $n \geqslant k$, то $\sigma_n | H_k = \sigma_k | H_k$;

3) если $n \geqslant k$, то $\sigma_n(H_k) \subseteq U_{k-1}$;

4) $\sigma_n(W_n) \subseteq U_n$;

5) если $n \geqslant k$, то $\sigma_n(W_k) \subseteq U_k$.

Свойство 1) следует из равенств $(\pi_A \sigma_n)|Z_n = (\pi_A \delta)|Z_n = 1_A|Z_n$ и единственности продолжения отображения, определённого на базисе линейного пространства, до гомоморфизма.

Свойство 2) доказывается аналогично свойству 1) с использованием равенств $\sigma_n|X_k = \delta|X_k = \sigma_k|X_k$.

Докажем свойство 3). Включение $\sigma_n(X_k) \subseteq \delta(W_{k-1}) \subseteq U_{k-1}$ выполнено в силу равенства $\sigma_n|X_k = \delta|X_k$ для $n \geqslant k$ и определения отображения δ (см. пункт c) текущего доказательства). Тогда включение 3) выполнено, ибо σ_n — гомоморфизм, X_k — базис в линейном пространстве H_k и U_{k-1} — подпространство линейного пространства M.

Свойство 4) доказывается аналогично свойству 3) с использованием того, что $\sigma_n(Y_n) \subseteq \delta_n(W_n) \subseteq U_n$ и что U_n — подпространство линейного пространства M.

Пользуясь свойствами 3) и 4), докажем свойство 5):

$$\sigma_n(W_k) = \sigma_n\left(\left(\sum_{i=k+1}^{n} H_i\right) + W_n\right) \subseteq \\ \subseteq \left(\sum_{i=k+1}^{n} \sigma_n(H_i)\right) + \sigma_n(W_n) \subseteq \sum_{i=k}^{n-1} U_i + U_n \subseteq U_k.$$

e) Для любого $a \in A$ и $k, l \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $\sigma_k(a) - \sigma_l(a) \in V_{\min\{k,l\}}$.

В самом деле, пусть $a \in A$ и $k, l \in \mathbb{N}$ таковы, что $k \leqslant l$. Применяя последовательно определения отображений $\xi_{i,k}$, ζ_k и свойства 2), 3) и 4) пункта d), получаем

$$\sigma_k(a) - \sigma_l(a) = \sigma_k\left(\left(\sum_{i=1}^{k} \xi_{i,k}(a)\right) + \zeta_k(a)\right) - \sigma_l\left(\left(\sum_{i=1}^{l} \xi_{i,l}(a)\right) + \zeta_l(a)\right) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_k(\xi_{i,k}(a))\right) + \sigma_k(\zeta_k(a)) - \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_l(\xi_{i,l}(a))\right) -$$
$$- \left(\sum_{i=k+1}^{l} \sigma_l(\xi_{i,l}(a))\right) - \sigma_l(\zeta_l(a)) =$$
$$= \sigma_k(\zeta_k(a)) - \left(\sum_{i=k+1}^{l} \sigma_l(\xi_{i,l}(a))\right) - \sigma_l(\zeta_l(a)) \in U_k + \left(\sum_{i=k}^{l-1} U_i\right) + U_l \subseteq U_k.$$

Тогда, учитывая утверждение 1 пункта d), получаем

$$\pi_A(\sigma_k(a) - \sigma_l(a)) = \pi_A(\sigma_k(a)) - \pi_A(\sigma_l(a)) = a - a = 0,$$

т. е. $\sigma_k(a) - \sigma_l(a) \in \ker \pi_A = B$. Из определения множества V_i (см. пункт b)) следует, что $\sigma_k(a) - \sigma_l(a) \in B \cap U_k = V_k$, что и требовалось.

f) Заметим, что в силу равенства $\tau_0 = \tau_1(B)$ выполнено неравенство $\tau_0 \geqslant \tau_1$. В силу того, что топология τ_1 отделима, отделима и топология τ_0.

Возьмём $a \in A$. Так как топологическое линейное пространство (M, τ_0) полно и отделимо, а последовательность $\{\sigma_n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$ является в силу пункта e) последовательностью Коши в нём, то у неё есть единственный предел в (M, τ_0), который мы обозначим $\sigma(a)$.

Обозначим через $\sigma\colon A \to M$ отображение, определённое следующим образом: $\sigma(a) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(a)$.

g) Заметим, что отображение $\sigma\colon A \to M$ обладает следующими свойствами:

1) $\sigma\pi_A = 1_A$;

2) для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено включение $\sigma(W_k) \subseteq U_k$.

Равенство 1) получается переходом к пределу в равенстве 1) пункта d), если принять во внимание отделимость топологического линейного пространства (M, τ_0) и единственность предела последовательности в нём.

Докажем включение 2). Пусть $w \in W_k$. Используя утверждение 5) пункта d) и замкнутость множеств U_k в (M, τ_0), получаем, что $\sigma(w) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(w) \in U_k$, что и требовалось.

h) Для завершения доказательства теоремы достаточно проверить, что топология τ_2 (см. пункт a)), подпространства линейного пространства A, B и отображение σ удовлетворяют условию леммы 5.

Условия i) и ii) выполнены в силу выбора подпространства A и топологии τ_2.

Равенство $\pi_A\sigma = 1_A$ из условия iii) в лемме 5 доказано в пункте g).

Из утверждения 2) пункта g) следует, что отображение $\sigma\colon (A, \tau_2/\pi_A) \to \to (M, \tau_2)$ непрерывно. Тогда непрерывно и отображение $\sigma\pi_A\colon (M, \tau_2) \to (M, \tau_2)$, что завершает проверку выполнения условий леммы 5.

Тогда (в силу леммы 5) τ_0 — дизъюнктное слагаемое топологии τ_1. □

Лемма 7. *Пусть A — линейное пространство и $\{W_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — убывающая последовательность его подпространств с нулевым пересечением. Если линейное пространство A имеет счётный базис $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, то существуют последовательности $\{i_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ попарно различных натуральных чисел и $\{H_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ подпространств линейного пространства A, такие что $A = \bigoplus\limits_{k \in \mathbb{N}} H_k$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $W_{i_n} = \bigoplus\limits_{k>n} H_k$.*

Доказательство. Определим по индукции такую последовательность $\{H_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ подпространств линейного пространств в A и такую последовательность $\{i_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ попарно различных натуральных чисел, что

i) для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $W_{i_n} = H_n \oplus W_{i_{n+1}}$;

ii) для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено выключение $\{a_1 \dots a_n\} \subseteq \bigoplus\limits_{i=1}^{n} H_i$;

iii) $A = \bigoplus\limits_{n \in \mathbb{N}} H_n$.

Заметим, что для любого ненулевого элемента $a \in A$ существует число $n \in \mathbb{N}$, такое что $a \notin W_n$, ибо $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} W_i = \{0\}$.

Возьмём $i_1 = \min\{k \mid a_1 \notin W_k\}$ и подпространство H_1 линейного пространства A, такое что $a_1 \in H_1$ и $A = H_1 \oplus W_{i_1}$.

Пусть $n \geqslant 1$, $H_1, \dots, H_n$ и $i_1, \dots, i_n$ уже определены. По индуктивному предположению

$$A = H_1 \oplus W_{i_1} = (H_1 \oplus H_2) \oplus W_{i_2} = \dots = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} H_i \right) \oplus W_{i_n}.$$

Обозначим

$$i_{n+1} = \begin{cases} i_n + 1, & \text{если } \pi_W(a_{n+1}) \neq 0, \\ \min\{k \mid \pi_W(a_{n+1}) \notin W_k\} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и пусть H_{n+1} — такое подпространство линейного пространства A, что $\pi_W(a_{n+1}) \in H_{n+1}$ и $W_{i_n} = H_{n+1} \oplus W_{i_{n+1}}$. Очевидно, что $i_{n+1} > i_n$, т. е. все числа $\{i_1, \dots, i_{n+1}\}$ попарно различны. Проверим выполнение утверждений i), ii) и iii) для $\{i_1, \dots, i_{n+1}\}$ и $\{H_1, \dots, H_{n+1}\}$.

Утверждение i) очевидно для $\{i_1, \dots, i_{n+1}\}$ и $\{H_1, \dots, H_{n+1}\}$.

Докажем утверждение ii). В самом деле, по индуктивному предположению $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} H_i \right) \oplus H_{n+1}$. Если $H = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} H_i$ и $W = W_{i_n}$, то $a_{n+1} = \pi_H(a_{n+1}) + \pi_W(a_{n+1}) \in \left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} H_i \right) \oplus H_{n+1}$, что и требовалось.

Докажем утверждение iii). В самом деле, в силу утверждения ii) выполнено включение $\langle \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \rangle \subseteq \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{N}} H_i$. Принимая во внимание, что $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — базис в A, получаем, что $A = \langle \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \rangle \subseteq \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{N}} H_i \subseteq A$, что и требовалось.

Для завершения доказательства леммы достаточно проверить равенство $\bigoplus\limits_{k>n} H_k = W_{i_n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Включение $\bigoplus\limits_{k>m} H_k \subseteq W_{i_m}$ очевидно.

Докажем обратное включение. Допустим, что оно неверно, т. е. $\bigoplus\limits_{k>m} H_k \neq$ $\neq W_{i_m}$. Пусть P — некоторое подпространство линейного пространства A, такое что $W_{i_m} = \left(\bigoplus\limits_{k>m} H_k\right) \oplus P$. Тогда в силу утверждений i) и iii)

$$A = \left(\bigoplus_{k=1}^{m} H_i\right) \oplus W_{i_m} = \left(\bigoplus_{k=1}^{m} H_i\right) \oplus \left(\bigoplus_{k>m} H_k\right) \oplus P = A \oplus P,$$

т. е. $P = \{0\}$. □

Теорема 8. *Если (M, τ_0) — метризуемое топологическое линейное пространство и существует замкнутое подпространство B линейного пространства (M, τ_1) счётной коразмерности, такое что $\tau_1(B) = \tau_0$, то топология τ_0 является дизъюнктным слагаемым топологии τ_1.*

Доказательство.

a) В силу условия теоремы мы можем зафиксировать подпространство A линейного пространства M со счётным базисом $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, такое что $M = A \oplus B$. Зафиксируем также естественный гомоморфизм $\pi_A \colon M \to A$.

Не ограничивая общности, считаем, что $\mathcal{B}_0 = \{V_n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ и что $B = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \ldots \supseteq V_n \supseteq \ldots$, ибо (M, τ_0) метризуемо.

Из равенства $\tau_0 = \tau_1(B)$ следует, что существует множество $\{\bar{U}_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq$ $\subseteq \mathcal{B}_1$, такое что для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено равенство $\bar{U}_n \cap B = V_n$. Не ограничивая общности, считаем, что $M = \bar{U}_0 \supseteq \bar{U}_1 \supseteq \ldots \supseteq \bar{U}_n \supseteq \ldots$.

b) Для любого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через A_n подпространство $\langle\{a_1, \ldots, a_n\}\rangle$ и через A_0 — $\{0\}$. Докажем по индукции, что подмножество $A_n + B$ замкнуто в (M, τ_1) для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

В самом деле, вышеназванное утверждение выполнено для $n = 0$ по условию теоремы.

Предположим, что оно выполнено для всех $k \leqslant n$. В силу замкнутости множества $A_n + B$ в (M, τ_1) и того, что $a_{n+1} \notin A_n + B$, существует окрестность нуля $U \in \mathcal{B}_1$, такая что $a_{n+1} \notin A_n + B + U$.

Пусть $\omega_n \colon M \to M/(A_n + B)$ — естественный гомоморфизм. Докажем, что $\omega_n(\langle\{a_{n+1}\}\rangle)$ — дискретное подпространство линейного пространства $(M/(A_n + B), \tau_1/\omega_n)$. Для этого докажем, что $\omega_n(\langle\{a_{n+1}\}\rangle) \cap \omega_n(U) = \{0\}$. В самом деле, если $y \in \omega_n(\langle\{a_{n+1}\}\rangle) \cap \omega_n(U)$, то существует элемент $m \in \omega_n^{-1}\{y\}$, такой что

$$m \in (\langle\{a_{n+1}\}\rangle + A_n + B) \cap (U + A_n + B).$$

Тогда

$$m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \mu a_{n+1} + b = u + \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i a_i + b'$$

для некоторых $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_n, \mu \in R$, $b, b' \in B$ и $u \in U$. Если $\mu \neq 0$, то

$$a_{n+1} = \mu^{-1}\left(u + \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i - \lambda'_i)a_i + b' - b\right) \in A_n + B + U,$$

что противоречит выбору U. Следовательно, $\mu = 0$ и тогда $m \in A_n + B$, т. е. $y = \omega_n(m) = 0$, что доказывает дискретность подпространства $\omega_n(\langle\{a_{n+1}\}\rangle)$ топологического линейного пространства в $(M/(A_n + B), \tau_1/\omega_n)$.

Так как по индуктивному предположению множество $A_n + B$ замкнуто в (M, τ_1), то топологическое линейное пространство $(M/(A_n + B), \tau_1/\omega_n)$ отделимо. Тогда множество $\omega_n(\langle\{a_{n+1}\}\rangle)$ замкнуто в нём, и значит, $\omega_n^{-1}(\langle\{a_{n+1}\}\rangle) = A_{n+1} + B$ замкнуто в (M, τ_1), что и требовалось.

c) В силу пункта b) для любого $n \in \mathbb{N}$ существует окрестность нуля $\tilde{U}_n \in \mathcal{B}_1$, такая что $a_n \notin A_{n-1} + B + \tilde{U}_n$. Не ограничивая общности, считаем, что $\tilde{U}_1 \supseteq \tilde{U}_2 \supseteq \ldots \supseteq \tilde{U}_n \supseteq \ldots$. Положим $\tilde{U}_0 = B$.

Докажем, что для любого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено равенство $B = (A_k + B) \cap (B + \tilde{U}_k)$. Очевидно, что $B \subseteq (A_k + B) \cap (B + \tilde{U}_k)$.

Докажем включение $B \supseteq (A_k + B) \cap (B + \tilde{U}_k)$ индукцией по k.

Для $k = 0$ включение очевидно. Пусть оно выполнено для любого $k < n$. Пусть $m \in (A_n + B) \cap (B + \tilde{U}_n)$. Тогда $m = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + b = b' + \tilde{u}_n$, где $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subseteq R$, $b, b' \in B$, $\tilde{u}_n \in \tilde{U}_n$.

Заметим, что $\lambda_n = 0$. В самом деле, предположим противное. Тогда легко доказать, что $a_n = \lambda_n^{-1}\Big(-\sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i - b + b' + \tilde{u}_n\Big) \in A_{n-1} + B + \tilde{U}_n$, что противоречит выбору окрестности $\tilde{U}_n$.

Так как $\lambda_n = 0$, то $m \in (A_{n-1} + B) \cap (B + \tilde{U}_n) \subseteq (A_{n-1} + B) \cap (B + \tilde{U}_{n-1})$ и по индуктивному предположению $m \in B$, что и требовалось.

d) Докажем, что $B = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} (B + \tilde{U}_k)$. В самом деле, используя пункт c) и равенство $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} (A_n + B) = \langle\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}\rangle + B = M$, получаем

$$\begin{aligned} B &\subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (B + \tilde{U}_k) = M \cap \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} (B + \tilde{U}_k)\right) = \\ &= \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n + B)\right) \cap \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} (B + \tilde{U}_k)\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left((A_n + B) \cap \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} (B + \tilde{U}_k)\right)\right) \subseteq \\ &\subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ((A_n + B) \cap (B + \tilde{U}_n)) \subseteq B, \end{aligned}$$

что завершает доказательство пункта d).

e) Для любого $n \in \mathbb{N}$ обозначим множество $\bar{U}_n \cap \tilde{U}_n$ через U_n и $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — через $\mathcal{B}_2$. Очевидно, что $\mathcal{B}_2$ является базисом окрестностей нуля в некоторый топологии $\tau_2 \in \mathcal{L}(M)$.

f) Для любого $n \in \mathbb{N}$ обозначим множество $\pi_A(U_n)$ через W_n. Докажем, что последовательность $\{W_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет условию леммы 7.

Очевидно, что $W_1 \supseteq W_2 \supseteq \ldots \supseteq W_n \supseteq \ldots$. Заметим, что

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \pi_A(U_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \pi_A(U_n + B) = \\ = \pi_A\Bigl(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (U_n + B)\Bigr) \subseteq \pi_A\Bigl(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\tilde{U}_n + B)\Bigr) = \pi_A(B) = \{0\}.$$

g) В силу пункта f) и леммы 7 мы можем взять последовательность натуральных чисел $\{i_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и последовательность $\{H_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ подпространств линейного пространства A, удовлетворяющие заключению леммы 7. Для любого $n \in \mathbb{N}$ зафиксируем некоторый базис X_n в линейном пространстве H_n. Легко доказать, что множество $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ является базисом в линейном пространстве A и множество $\bigcup_{i>n} X_i$ — базисом в линейном пространстве W_{i_n} для любого $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\delta\colon X \to M$ — отображение, определённое следующим образом: для любого $x \in X_n$ мы выберем элемент $\delta(x)$, такой что

$$\delta(x) \in \begin{cases} {\pi_A}^{-1}(\{x\}) & \text{для } n = 1, \\ {\pi_A}^{-1}(\{x\}) \cap U_{i_n} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(Определение корректно, так как $X_i \cap X_j = \varnothing$ для $i \neq j$.)

Так как $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ — базис в линейном пространстве A, то существует единственный гомоморфизм линейных пространств $\sigma\colon A \to M$, продолжающий отображение δ.

h) Для завершения доказательства проверим, что A, B, σ и τ_2 удовлетворяют условию леммы 5.

Условия i) и ii) выполняются тривиально. Проверим выполнение условия iii) леммы 5.

Докажем, что $\sigma\pi_A = 1_A$. В самом деле, легко доказать, что $(\pi_A\sigma)|X = 1_A|X$. Тогда $\pi_A\sigma = 1_A$ в силу единственности продолжения отображения, определённого на базисе линейного пространства, до гомоморфизма.

Докажем, что отображение $\sigma\pi_A\colon (M, \tau_2) \to (M, \tau_2)$ непрерывно. Чтобы это сделать, докажем сперва непрерывность отображения $\sigma\colon (A, \tau_2/\pi_A) \to (M, \tau_2)$.

Так как все числа $\{i_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ попарно различны, то для любого $m \in \mathbb{N}$ существует число $n \in \mathbb{N}$, такое что $i_n \geqslant m$. Из включений $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots$ следует, что для любого $m \in \mathbb{N}$ существует число $n \in \mathbb{N}$, такое что $U_{i_n} \subseteq U_m$. Тогда множество $\{U_{i_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ является базисом окрестностей нуля в (M, τ_2) и множество $\{W_{i_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ — базисом окрестности нуля в $(A, \tau_2/\pi_A)$.

Чтобы доказать непрерывность отображения σ, достаточно проверить, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено включение $\sigma(W_{i_n}) \subseteq U_{i_n}$. В самом деле, пусть $m \in \mathbb{N}$. В силу выбора отображения σ выполнены включения $\sigma\Big(\bigcup\limits_{k>m} X_k\Big) \subseteq$ $\subseteq \bigcup\limits_{k>m} \sigma(X_k) \subseteq \bigcup\limits_{k>m} U_{i_k} \subseteq U_{i_m}$. Так как $\bigcup\limits_{k>m} X_k$ является базисом в линейном пространстве W_{i_m}, то $\sigma(W_{i_m}) \subseteq U_{i_m}$, что и требовалось.

Теперь непрерывность отображения $\sigma\pi_A\colon (M,\tau_2) \to (M,\tau_2)$ следует из непрерывности отображений $\pi_A\colon (M,\tau_2) \to (A,\tau_2/\pi_A)$ и $\sigma\colon (A,\tau_2/\pi_A) \to (M,\tau_2)$. $\square$

Определение 9. Пусть (K,μ) — топологическое кольцо. Топологический (K,μ)-модуль называется

— линейно-компактным, если он допускает базис окрестностей нуля, состоящий из подмодулей, и у любого базиса фильтра классов вычетов по его подмодулям есть точка прикосновения;

— локально линейно-компактным, если он содержит открытый линейно компактный подмодуль.

Лемма 10. *Пусть $\tau \in \mathcal{L}(M)$ — отделимая топология и B — подпространство линейного пространства M. Если $(B,\tau|_B)$ линейно компактно, то существует замкнутое подпространство A топологического линейного пространства (M,τ), такое что $A + B = M$ и $A \cap B = \{0\}$.*

Доказательство.

a) Пусть $\mathcal{B}$ — базис окрестностей нуля в (M,τ) и δ — такой предельный трансфинит, что множество $\{\alpha \mid \alpha < \delta\}$ имеет ту же мощность, что и множество $\mathcal{B}$. Заметим, что множество $\{\alpha + 1 \mid \alpha < \delta\}$ имеет ту же мощность, что и $\mathcal{B}$. Тогда существует нумерация $\{U_{\alpha+1} \mid \alpha < \delta\}$ элементов множества $\mathcal{B}$.

Определим трансфинитные последовательности A_α и J_α подпространств линейного пространства M для $\alpha \leqslant \delta$ следующим образом:

$A_0 = M$;

если A_α уже определено, в качестве J_α берём произвольное подпространство линейного пространства A_α, такое что $A_\alpha = J_\alpha \oplus ((A_\alpha \cap B) + (A_\alpha \cap U_{\alpha+1}))$;

если A_β и J_β уже определены для всех $\beta < \alpha$, положим

$$A_\alpha = \begin{cases} \bigcap\limits_{\beta<\alpha} A_\beta, & \text{если } \alpha = \sup\{\beta \mid \beta < \alpha\}, \\ J_\beta + (A_\beta \cap U_{\beta+1}), & \text{если } \alpha = \beta + 1 \text{ для некоторого } \beta < \delta. \end{cases}$$

Легко проверяется, что $\{A_\alpha \mid 0 \leqslant \alpha < \delta\}$ является убывающей последовательностью подпространств линейного пространства M.

b) Множество A_α замкнуто в (M,τ_1) для любого $\alpha \leqslant \delta$. Докажем это утверждение по трансфинитной индукции.

В самом деле, для $\alpha = 0$ это утверждение тривиально. Пусть $\alpha \leqslant \delta$ — некоторый трансфинит, такой что все A_β замкнуты в (M,τ_1) для любого $\beta < \alpha$.

Если $\alpha = \sup\{\beta \mid \beta < \alpha\}$, то $A_\alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} A_\beta$, очевидно, является замкнутым в (M, τ_1) по индуктивному предположению.

Пусть теперь $\alpha = \beta + 1$ для некоторого $\beta < \alpha$. Тогда множество $A_\beta \cap U_{\beta+1}$ открыто в $(A_\beta, \tau_{A_\beta})$, и значит, $A_\alpha = J_\beta + (A_\beta \cap U_{\beta+1})$ тоже открыто в $(A_\beta, \tau|_{A_\beta})$. Следовательно, A_α замкнуто в $(A_\beta, \tau|_{A_\beta})$ в силу следствия 1.4.19 из [1]. Так как A_β замкнуто в (M, τ_1), то и A_α замкнуто в (M, τ_1).

c) Для любого $\alpha < \delta$ выполнено включение $(A_{\alpha+1} \cap B) \subseteq U_{\alpha+1}$.

В самом деле, пусть $b \in A_{\alpha+1} \cap B$. Тогда $b = j_\alpha + a_\alpha$ для некоторого $j_\alpha \in J_\alpha$ и $a_\alpha \in A_\alpha \cap U_{\alpha+1}$. Следовательно,

$$j_\alpha = b - a_\alpha \in (A_\alpha \cap B) + (A_\alpha \cap U_{\alpha+1}) = (A_\alpha \cap B) + (A_\alpha \cap U_{\alpha+1}).$$

В силу выбора подпространства J_α выполнено равенство $j_\alpha = 0$, и тогда $b = a_\alpha \in U_{\alpha+1}$.

d) Для любого $\alpha \leqslant \delta$ выполнено равенство $A_\alpha + B = M$. Докажем это утверждение по трансфинитной индукции.

Утверждение очевидно для $\alpha = 0$. Пусть оно уже доказано для всех $\beta < \alpha$.

Если $\alpha = \beta+1$, то по индуктивному предположению $M = A_\beta + B$. В силу выбора подпространства J_β выполнено равенство $A_\beta = J_\beta + (A_\beta \cap B) + (A_\beta \cap U_{\beta+1})$. Тогда

$$\begin{aligned} M = A_\beta + B = J_\beta + (A_\beta \cap B) + (A_\beta \cap U_{\beta+1}) + B = \\ = J_\beta + (A_\beta \cap U_{\beta+1}) + B = A_{\beta+1} + B = A_\alpha + B. \end{aligned}$$

Если же $\alpha = \sup\{\beta \mid \beta < \alpha\}$ и $x \in M$, то по индуктивному предположению для любого $\beta < \alpha$ существуют $a_\beta \in A_\beta$ и $b_\beta \in B$, такие что $x = a_\beta + b_\beta$.

Рассмотрим множество $\{b_\beta + (A_\beta \cap B) \mid \beta < \alpha\}$. Докажем, что оно является базисом фильтра. В самом деле, пусть $\beta_1 < \beta_2 < \alpha$. Пользуясь включением $A_{\beta_2} \subseteq A_{\beta_1}$, мы получаем, что $b_{\beta_1} - b_{\beta_2} = a_{\beta_2} - a_{\beta_1} \in A_{\beta_2} + A_{\beta_1} = A_{\beta_1}$. Из соотношения $b_{\beta_2} - b_{\beta_1} \in B$ следует, что $b_{\beta_2} - b_{\beta_1} \in A_{\beta_1} \cap B$. Тогда $b_{\beta_2} \in b_{\beta_1} + (A_{\beta_1} \cap B)$. Из включения $A_{\beta_1} \subseteq A_{\beta_2}$ следует, что $b_{\beta_2} + (A_{\beta_2} \cap B) \subseteq b_{\beta_1} + (A_{\beta_1} \cap B)$, т. е. что множество $\{b_\beta + (A_\beta \cap B) \mid \beta < \alpha\}$ является базисом фильтра.

В силу линейной компактности подпространства B существует элемент $b_\alpha \in \bigcap\limits_{\beta<\alpha} b_\beta + (A_\beta \cap B)$.

Рассмотрим элемент $a_\alpha = x - b_\alpha$. Докажем, что $a_\alpha \in A_\alpha$. В самом деле, для любого $\beta < \alpha$ выполнены соотношения

$$a_\alpha = x - b_\alpha = (x - b_\beta) + (b_\beta - b_\alpha) = a_\beta + (b_\beta - b_\alpha) \in A_\beta + (A_\beta \cap B) \subseteq A_\beta.$$

Следовательно, $a_\alpha \in \bigcap\limits_{\beta<\alpha} A_\beta = A_\alpha$.

Так как $x = a_\alpha + b_\alpha$, то утверждение d) доказано.

e) $A = A_\sigma$ — искомое подпространство.

В самом деле, A замкнуто в (M, τ) в силу пункта b) и $A + B = M$ в силу пункта d). Известно, что последовательность $\{A_\alpha \mid 0 \leqslant \alpha < \sigma\}$ убывающая.

Тогда $A = \bigcap\limits_{\alpha<\delta} A_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha<\delta} A_{\alpha+1}$. В силу пункта c)

$$A \cap B = \left(\bigcap_{\alpha<\delta} A_{\alpha+1}\right) \cap B = \bigcap_{\alpha<\delta} (A_{\alpha+1} \cap B) \subseteq \bigcap_{\alpha<\delta} U_{\alpha+1} = \bigcap_{U\in\mathcal{B}} U = \{0\}.$$

□

Теорема 11. *Если τ_0, τ_1 — отделимые топологии, $\tau_1 \leqslant \tau_0$ и (M, τ_0) локально линейно компактно, то τ_0 — дизъюнктное слагаемое τ_1.*

Доказательство. Пусть B — некоторое линейно компактное открытое подпространство топологического линейного пространства (M, τ_0).

a) Докажем, что $\tau_1(B) = \tau_0$. Так как $\tau_1 \leqslant \tau_0$, то $\tau_1|_B \leqslant \tau_0|_B$. В силу упражнения 28.3 в [4] линейно компактная топология $\tau_0|_B$ является минимальной отделимой модульной линейной топологией на B. Тогда $\tau_1|_B = \tau_0|_B$. Так как B открыто в (M, τ_0), то, очевидно, $\tau_1(B) = \tau_0$.

b) Так как в силу пункта a) B является линейно компактным подпространством в (M, τ_1), то в силу леммы 10 существует замкнутое подпространство A в (M, τ_1), такое что $A \oplus B = M$.

c) Докажем, что отображение $\rho_A\pi_A \colon (M, \tau_1) \to (M, \tau_1)$ (см. замечание 1, пункт a)) непрерывно. В самом деле, топология τ_1/π_B отделима, ибо подпространство $A = \ker \pi_B$ замкнуто в (M, τ_1). Снова пользуясь упражнением 28.3 из [4], получаем, что топология $\tau_1|_B$ является минимальной линейной отделимой модульной топологией на B. Тогда в силу соотношения $\tau_1/\pi_B \leqslant \tau_1|_B$ выполнено равенство $\tau_1/\pi_B = \tau_1|_B$. Иначе говоря, отображение $\rho_B \colon (B, \tau_1/\pi_B) \to (M, \tau_1)$ непрерывно. Отсюда следует, что отображение $\rho_B\pi_B \colon (M, \tau_1) \to (M, \tau_1)$ непрерывно. Тогда непрерывно и отображение $\rho_A\pi_A = 1_M - \rho_B\pi_B \colon (M, \tau_1) \to (M, \tau_1)$.

d) Заметим, что линейные пространства A и B, топология τ_1, взятая в качестве τ_2 и отображение ρ_A, взятое в качестве σ, удовлетворяют условию леммы 5. Тогда в силу леммы 5 τ_0 — дизъюнктное слагаемое τ_1. □

Определение 12. Пусть $\mathcal{L}$ — решётка и $\tau_0, \tau_1 \in \mathcal{L}$. Будем говорить, что τ_1 предшествует τ_0 в $\mathcal{L}$ (обозначим это соотношение через $\tau_0 \prec \tau_1$), если $\{\tau \in \mathcal{L} \mid \tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_0\} = \{\tau_0, \tau_1\}$.

Следствие 13. *Пусть $\tau_1 \prec \tau_0$ в $\mathcal{L}(M)$. Тогда $\tau_1 = \tau_0 \sqcup \tau_*$ для некоторого коатома $\tau_* \in \mathcal{L}(M)$, если выполнено одно из следующих утверждений:*

i) *топологии τ_0, τ_1 отделимы и топологическое линейное пространство (M, τ_0) полно и метризуемо;*

ii) *топологии τ_0, τ_1 и некоторое подпространство B линейного пространства M удовлетворяет условию теоремы 8;*

iii) *τ_0 и τ_1 удовлетворяет условию теоремы 11.*

Доказательство.

a) Докажем, что τ_0 — дизъюнктное слагаемое τ_1.

Пусть утверждение i) выполнено. Тогда в силу утверждения a) в доказательстве теоремы 6 в [2] существует подпространство B линейного пространства M, такое что $\tau_1(B) = \tau_0$, и значит, в силу теоремы 6 τ_0 — дизъюнктное слагаемое τ_1.

Если же выполнено утверждение ii) (или iii)), то доказательство утверждения a) следует из теоремы 8 (соответственно 11).

b) Таким образом, $\tau_1 = \tau_0 \sqcup \tau_*$ для некоторого элемента $\tau_* \in \mathcal{L}(M)$. Докажем, что τ_* — коатом в $\mathcal{L}(M)$.

Обозначим через τ_d дискретную топологию на M. Из модулярности решётки $\mathcal{L}(M)$ и теоремы 13 главы I в [3] вытекает, что существует биекция

$$\varphi\colon \{\tau \mid \inf\{\tau_0, \tau_*\} \leqslant \tau \leqslant \tau_0\} \to \{\mu \mid \tau_* \leqslant \mu \leqslant \sup\{\tau_*, \tau_0\}\},$$

сохраняющая порядок. Из соотношений $\sup\{\tau_*, \tau_0\} = \tau_d$ и $\tau_1 \prec \tau_0$ следует, что $\tau_* \prec \tau_d$. □

Замечание 14. Обозначим через $\mathcal{T}(M)$ множество всех R-модульных топологий на M. Известно, что $\mathcal{T}(M)$ — полная модулярная решётка по включению и что $\mathcal{L}(M)$ — её подрешётка.

В случае, когда M — абелева группа простого периода p, она рассматривается как линейное пространство, где $R = \mathbb{Z}_p$. В этом случае $\mathcal{T}(M)$ ($\mathcal{L}(M)$) является решёткой всех групповых топологий на M (соответственно, допускающих базис окрестностей нуля из подгрупп).

Следствие 15. *Пусть M — абелева группа простого периода, $\mathcal{L} \in \{\mathcal{T}(M), \mathcal{L}(M)\}$, τ_0, τ_1 — отделимые топологии, такие что $\tau_0 \in \mathcal{L}$, $\tau_1 \in \mathcal{L}(M)$ и $\tau_1 \prec \tau_0$ в $\mathcal{L}$. Если топология τ_0 локально компактна, то топология τ_1 является дизъюнктной суммой τ_0 и некоторый топологии $\tau_* \in \mathcal{L}(M)$, являющейся коатомом в $\mathcal{L}$.*

Доказательство. В силу замечания 14 мы рассматриваем M как линейное пространство, где $R = \mathbb{Z}_p$.

Заметим, что топологическое линейное пространство (M, τ_0) вполне несвязно, ибо его аддитивная группа является локально компактной абелевой группой простого периода. Тогда $\tau_0 \in \mathcal{L}(M)$ в силу следствия 1.4.47 в [1]. Тогда топологическое линейное пространство (M, τ_0) локально линейно компактно и, следовательно, топологии τ_0 и τ_1 удовлетворяет условию теоремы 11.

В случае, когда $\tau_1 \prec \tau_0$ в $\mathcal{L}(M)$, доказательство немедленно следует из следствия 13 пункт iii).

Пусть теперь $\tau_1 \prec \tau_0$ в $\mathcal{T}(M)$. Тогда $\tau_1 \prec \tau_0$ в $\mathcal{L}(M)$, и в силу теоремы 11 $\tau_1 = \tau_0 \sqcup \tau_*$ для некоторой топологии $\tau_* \in \mathcal{L}(M)$.

Доказательство того, что τ_* — коатом в $\mathcal{T}(M)$, получается из пункта b) доказательства следствия 13 заменой $\mathcal{L}(M)$ на $\mathcal{T}(M)$. □

Литература

[1] Arnautov V. I., Glavatski S. T., Mikhalev A. V. Introduction to the theory of topological rings and modules. — New York: Marcel Dekker, 1996.

[2] Arnautov V. I., Filippov K. M. On coverings in the lattice of module topologies // Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica. — 1999. — No. 2 (30). — P. 7—18.

[3] Birkhoff G. Lattice theory. — Providence, Rhode Island, 1967.

[4] Warner S. Topological rings. — Amsterdam: North-Holland, 1993.