Градуированные первичные PI-алгебры*

И. Н. БАЛАБА
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: bi240458@uic.tula.ru

УДК 512.552

Ключевые слова: градуированные кольца, PI-алгебры, теорема Познера.

Аннотация

Доказана градуированная версия теоремы Познера для gr-первичных PI-алгебр, градуированных произвольной группой.

Abstract

I. N. Balaba, Graded prime PI-algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 1, pp. 19—26.

The graded version of Posner's theorem for gr-prime PI-algebras graded by an arbitrary group is proved.

Одним из основных результатов теории PI-алгебр является теорема Познера, утверждающая, что первичная PI-алгебра A обладает простой конечномерной над своим центром алгеброй частных $Q(A)$, причём алгебры A и $Q(A)$ удовлетворяют одним и тем же полиномиальным тождествам (см., например, [1, 2]).

В настоящее время всё более возрастает роль колец, градуированных группой, а потому градуированная версия теоремы Познера нашла бы широкое применение. Целью настоящей работы и является доказательство градуированного аналога теоремы Познера, частным случаем которой является теорема, полученная К. Настасеску и Ф. ван Ойстаэеном для Z-градуированных колец [3, теорема C.I.2.8].

Пусть A — алгебра над полем k, G — группа с единицей e, A называется *G-градуированной* (или просто *градуированной*) алгеброй, если $A = \bigoplus\limits_{g\in G} A_g$, где A_g — k-подпространства в A и $A_gA_h \subseteq A_{gh}$.

Обозначим через $h(A) = \bigcup\limits_{g\in G} A_g$ множество однородных элементов алгебры A. Идеал I называется *градуированным*, если $I = \bigoplus\limits_{g\in G}(I \cap A_g)$. Для любого (левого, правого или двустороннего) идеала I в A всюду далее I_{gr} — наибольший градуированный идеал, содержащийся в I.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант № 02-01-00584.

Если M и N — градуированные правые A-модули, то $\mathrm{HOM}_A(M,N) = \bigoplus_{g\in G} \mathrm{HOM}_A(M,N)_g$, где

$$\underset{A}{\mathrm{HOM}}(M,N)_g = \{f \in \mathrm{Hom}_A(M,N) \mid f(M_h) \subseteq N_{gh},\ h \in G\}.$$

Хорошо известно, что если G конечна или M конечно порождён, то $\mathrm{HOM}_A(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)$ [3, следствие A.I.2.11], в общем случае может иметь место строгое включение. Ясно, что $\mathrm{END}_A(M)$ является градуированной алгеброй, которая называется *градуированной алгеброй эндоморфизмов* градуированного модуля M.

Всюду далее, следуя стандартной практике, градуированные аналоги стандартных определений будем обозначать приставкой gr-. Таким образом, *gr-неприводимый* модуль означает градуированный модуль, не имеющий нетривиальных градуированных подмодулей.

Алгебра A называется *PI-алгеброй*, если существует нетривиальный многочлен $f \in k[x_1,\ldots,x_n]$, такой что $f(a_1,\ldots,a_n) = 0$ для любого набора элементов $a_1,\ldots,a_n \in A$. Казалось бы естественным назвать градуированную алгебру *gr-PI-алгеброй*, если тождество $f(a_1,\ldots,a_n) = 0$ выполняется для любого набора однородных элементов $a_1,\ldots,a_n \in h(A)$. Если группа G конечна, то gr-PI-алгебра будет являться PI-алгеброй, поскольку в этом случае достаточным условием выполнимости тождества в алгебре A является выполнимость тождественного соотношения в единичной компоненте A_e (см. [4,5]). В [4] была дана оценка степени такого тождества по степени тождества, выполнимого в единичной компоненте.

Это неверно в случае бесконечной группы.

Пример 1. Пусть k — поле, $R = k[x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots]$ — кольцо многочленов от счётного числа переменных, G — счётно порождённая абелева группа, каждый элемент которой второго порядка, т. е.

$$G = \{e, g_1, g_2, \ldots \mid g_i^2 = e,\ g_i g_j = g_j g_i,\ i,j = 1,2\ldots\}.$$

Рассмотрим гомоморфизм $\sigma\colon G \to \mathrm{Aut}_k R$, для которого

$$g_n(x_n) = y_n, \quad g_n(x_i) = x_i\ (i \neq n), \quad g_n(y_n) = x_n, \quad g_n(y_i) = y_i\ (i \neq n),$$

и косую групповую алгебру $A = R_\sigma G$. Так как σ — мономорфизм, а все внутренние автоморфизмы алгебры R тождественны, то $\sigma^{-1}(\mathrm{Inn}(R)) = e$.

В работе [6] было доказано, что $A = R_\sigma G$, где R — полупервичная PI-алгебра Голди над полем F, будет PI-алгеброй тогда и только тогда, когда $\sigma^{-1}(\mathrm{Inn}(R))$ — подгруппа конечного индекса в G и алгебра FG является PI-алгеброй.

Таким образом, $A = R_\sigma G$ не является PI-алгеброй.

С другой стороны, рассмотрев естественную градуировку на алгебре $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$, где $A_g = \{rg \mid r \in R\}$, получим, что тождество $x^2y^2 - y^2x^2 = 0$ выполняется для любых однородных элементов алгебры A.

В дальнейшем градуированную алгебру будем считать PI-алгеброй, если она является PI-алгеброй как алгебра без градуировки.

Градуированная алгебра A, обладающая точным gr-неприводимым правым A-модулем, называется *gr-примитивной* (*справа*). Если M — gr-неприводимый правый A-модуль, то $D = \mathrm{END}_A(M) = \mathrm{End}_A(M)$ является градуированным телом (обратимы ненулевые однородные элементы).

Заметим, что единичная компонента R_e gr-примитивного кольца R не обязательно примитивна (см. [7, пример 2.6]).

Следующая теорема является градуированным вариантом теоремы плотности Джекобсона.

Теорема 1 ([7, теорема 2.5]). *Для градуированного кольца R следующие условия эквивалентны:*

(1) R gr-примитивное;

(2) R — gr-плотное подкольцо в $\mathrm{END}_D(M)$ для некоторого градуированного тела D и градуированного левого D-модуля M, то есть для каждого D-линейно независимого множества однородных элементов $\{m_1 \ldots, m_n\} \in h(M)$ и каждого $\{y_1, \ldots, y_n\} \in M$ найдётся элемент $r \in R$, такой что $m_i r = y_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Пусть A — градуированная алгебра, $M_n(A)$ — алгебра матриц порядка n над A и $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$. Тогда $M_n(A)$ можно рассматривать как G-градуированную алгебру $M_n(A)(g_1, \ldots, g_n)$ с градуировкой

$$M_n(A)_h(g_1, \ldots, g_n) = \begin{pmatrix} A_{g_1 h g_1^{-1}} & A_{g_1 h g_2^{-1}} & \ldots & A_{g_1 h g_n^{-1}} \\ A_{g_2 h g_1^{-1}} & A_{g_2 h g_2^{-1}} & \ldots & A_{g_2 h g_n^{-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{g_n h g_1^{-1}} & A_{g_n h g_2^{-1}} & \ldots & A_{g_n h g_n^{-1}} \end{pmatrix}.$$

Замечание. Если $\dim_A M = n$, то

$$\mathrm{END}_A M = \mathrm{End}_A(M) \approx M_n(A)(g_1, \ldots, g_n)$$

для некоторых $g_1, \ldots, g_n \in G$ [3, лемма A.1.5.4].

Аналогично неградуированному случаю имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть A — gr-примитивная градуированная алгебра. Тогда:*

либо (1) A изоморфна $M_n(D)(g_1, \ldots, g_n)$ для некоторых $g_1, \ldots, g_n \in G$ и некоторого градуированного тела D;

либо (2) для всякого целого положительного числа m существует градуированная подалгебра S_m в A, которая гомоморфно отображается на $M_m(D)(g_1, \ldots, g_n)$.

Центр $Z(A)$ градуированной алгебры A может не быть градуированным.

Пример 2. Пусть k — поле, G — неабелева группа порядка n. Ясно, что групповая алгебра $k[G]$ является градуированным телом, но её центр $Z(k[G])$ не является градуированным полем, так как $g_1 + \ldots + g_n \in Z(k[G])$, но $g_i \notin Z(k[G])$, если $g_i \notin Z(G)$.

Для градуированной алгебры A через $Z_{\mathrm{gr}}(A)$ обозначим максимальную градуированную подалгебру центра $Z(A)$ алгебры A. Ясно, что она порождена элементами $Z(A) \cap h(A)$ и

$$\mathrm{supp}(Z_{\mathrm{gr}}(A)) = \{g \in G \mid (Z_{\mathrm{gr}}(A))_g \neq 0\} \subseteq Z(G).$$

В дальнейшем $Z_{\mathrm{gr}}(A)$ будем называть *градуированным центром* алгебры A.

Заметим, что в случае упорядоченной или абелевой группы G $Z_{\mathrm{gr}}(A) = Z(A)$ [3, лемма С.1.5.4].

Напомним некоторые определения. Пусть $E(R)$ — множество эндоморфизмов аддитивной группы кольца R, $B(R)$ — подкольцо в $E(R)$, порождённое правыми и левыми умножениями ($l_a \colon R \to R$, $l_a(x) = ax$, $r_a \colon R \to R$, $r_a(x) = xa$), называемое *кольцом умножений*. *Центроидом* $C(R)$ кольца R называется множество элементов из $E(R)$, коммутирующие с элементами из $B(R)$.

Если R — градуированное кольцо, то *градуированным центроидом* $C_{\mathrm{gr}}(R)$ кольца R назовём градуированное подкольцо кольца $E(R)$, порождённое однородными эндоморфизмами кольца $E(R)$, коммутирующими с элементами из $B(R)$. Ясно, что $C_{\mathrm{gr}}(R)$ является градуированным кольцом эндоморфизмов градуированного бимодуля ${}_RR_R$ и $C_{\mathrm{gr}}(R) \subseteq C(R)$.

Теорема 3. *Если R — gr-простое градуированное кольцо, то его градуированный центроид $C_{\mathrm{gr}}(R)$ является градуированным полем. Если, кроме того, $Z_{\mathrm{gr}}(R) \neq 0$, то $Z_{\mathrm{gr}}(R) = C_{\mathrm{gr}}(R)$.*

Доказательство. Поскольку R является gr-простым кольцом, то $R^2 = R$ и из [8, лемма 2.1.4] следует, что $C(R)$ коммутативен. А так как R не содержит нетривиальных градуированных идеалов, то каждый однородный элемент из $C_{\mathrm{gr}}(R)$ обратим. Таким образом, $C_{\mathrm{gr}}(R)$ является градуированным полем.

Пусть $z \in h(Z_{\mathrm{gr}}(R))$, $z \neq 0$, тогда $zR = R$. Отсюда следует, что кольцо R имеет единицу 1 и градуированные кольца $C_{\mathrm{gr}}(R)$ и $Z_{\mathrm{gr}}(R)$ изоморфны. Действительно, если $a \in h(Z_{\mathrm{gr}}(R))$, то $r_a \in h(C_{\mathrm{gr}}(R))$ и $\Phi \colon Z_{\mathrm{gr}}(R) \to C_{\mathrm{gr}}(R)$, где $\Phi(a) = r_a$, является мономорфизмом нулевой степени из $Z_{\mathrm{gr}}(R)$ в $C_{\mathrm{gr}}(R)$. Если $f \in h(C_{\mathrm{gr}}(R))$, то для любого $r \in R$ имеем $f(r) = f(1r) = f(r1) = f(1)r = r(f(1))$. Обозначив $a = f(1)$, получим, что $a \in h(Z_{\mathrm{gr}}(R))$ и $f(r) = ra$, то есть $f = r_a$.

С помощью теоремы 1 в работе [9] получен градуированный аналог теоремы Капланского, доказательство которого приведём здесь для удобства.

Теорема 4 ([9]). *Пусть A — gr-примитивная градуированная алгебра, удовлетворяющая полиномиальному тождеству степени d. Тогда A является конечномерной над своим градуированным центром $Z_{\mathrm{gr}}(A)$ gr-простой алгеброй и $\dim_{Z_{\mathrm{gr}}(A)}(A) \leqslant [d/2]^2$, где $[d/2]$ — целая часть d.*

Доказательство. Поскольку A — gr-примитивная алгебра, то по теореме 2 либо $A \approx M_n(D)(g_1, \ldots, g_n)$ для некоторых $g_1, \ldots, g_n \in G$ и градуированного тела D, либо в A для любого $m > 0$ существует градуированная подалгебра S_m, которая гомоморфно отображается на $M_m(D)$. Последнее невозможно.

Действительно, поскольку алгебра A удовлетворяет полиномиальному тождеству, то данному тождеству удовлетворяют все её подалгебры и гомоморфные образы. Следовательно, данному тождеству удовлетворяет и алгебра $M_m(F)$ для любого $m > 0$, где F — центр тела D_e, что противоречит [8, лемма 6.3.1].

Таким образом, $A \approx M_n(D)(g_1, \ldots, g_n)$ для некоторых $g_1, \ldots, g_n \in G$, и следовательно, A — gr-простая алгебра.

Пусть далее $Z = Z_{\mathrm{gr}}(D) = Z_{\mathrm{gr}}(A)$ и L — максимальное градуированное подполе в D. Рассмотрим тензорное произведение $D \otimes_Z L$, оно является G-градуированной PI-алгеброй. Аналогично неградуированному случаю можно показать, что $D \otimes_Z L$ является gr-плотным кольцом в $\mathrm{END}_L(D)$. Следовательно, $D \otimes_Z L \approx M_m(L)$ для некоторого натурального m. Отсюда

$$A \otimes_Z L \approx M_n(D) \otimes_Z L \approx M_{mn}(L).$$

Тогда $d \geqslant 2mn$ и $mn \leqslant [d/2]$.

Но $\dim_L(A \otimes_Z L) = \dim_Z A = (mn)^2$, что и требовалось доказать.

Градуированный идеал P градуированного кольца R называется *gr-первичным*, если для любых однородных элементов $a, b \in h(R)$ из включения $aRb \subset P$ следует, что либо $a \in P$, либо $b \in P$. *Градуированным первичным радикалом* $N_{\mathrm{gr}}(R)$ градуированного кольца R назовём пересечение всех его gr-первичных идеалов. Градуированное кольцо называется *gr-первичным*, если (0) — gr-первичный идеал, и *gr-полупервичным*, если $N_{\mathrm{gr}}(R) = 0$.

Из [10, леммы 5.1, 5.2] следует, что $N_{\mathrm{gr}}(R)$ является градуированным нижним ниль-радикалом и $N_{\mathrm{gr}}(R) = N(R)_{\mathrm{gr}}$ — наибольший градуированный идеал, содержащийся в первичном радикале $N(R)$.

Предложение 1. *Пусть A — gr-первичная PI-алгебра и S — множество однородных регулярных элементов центра $Z(A)$ алгебры A. Тогда:*

(1) *$S = h(Z(A))$;*

(2) *алгебра частных A_S является gr-первичной G-градуированной PI-алгеброй;*

(3) *$Z_{\mathrm{gr}}(A_S) = Z_{\mathrm{gr}}(A)_S$.*

Доказательство. Пусть $c \in h(Z_{\mathrm{gr}}(A))$, $c \neq 0$, и $ac = 0$ для некоторого $a \in h(A)$, тогда $aAc = 0$ и из gr-первичности алгебры A следует, что $a = 0$, и, таким образом, $S = h(Z(A))$.

Из [3, предложение A.1.6.2] следует, что A_S является G-градуированной алгеброй с градуировкой $(A_S)_g = \{as^{-1} \in A_S \mid g = \deg a (\deg s)^{-1}\}$.

Покажем, что A_S gr-первичная. Действительно, если $as^{-1}A_S bt^{-1} = 0$ для $as^{-1}, bt^{-1} \in h(A_S)$, то $as^{-1}ch^{-1}bt^{-1} = 0$ для любого $ch^{-1} \in A_S$, следовательно, $acb = 0$ для всех $c \in A$, откуда в силу gr-первичности алгебры A следует, что либо $a = 0$, либо $b = 0$.

Из [1, § 10, теорема 2] следует, что A и A_S удовлетворяют одним и тем же тождествам.

Наконец, из [1, § 10, теорема 3] следует, что $Z(A_S) = Z(A)_S$, а следовательно, $Z_{\mathrm{gr}}(A_S) = Z_{\mathrm{gr}}(A)_S$, что и завершает доказательство предложения.

Предложение 2. *Пусть A — gr-первичная PI-алгебра, Z_{gr} — её градуированный центр, I — ненулевой градуированный идеал в A. Тогда $I \cap Z_{\mathrm{gr}} \neq 0$.*

Доказательство. Поскольку A является PI-алгеброй, то верхний $B(A)$, локально нильпотентный $L(A)$ и нижний $N(A)$ ниль-радикалы совпадают (см. [2, п. 3.4, теорема 2]. Верхний ниль-радикал $B(A)$ является суммой всех ниль-идеалов, следовательно, градуированный верхний ниль-радикал $B_{\mathrm{gr}}(A)$, являющийся суммой всех градуированных ниль-идеалов, содержится в $B(A)$. Легко видеть, что $B_{\mathrm{gr}}(A) = B(A)_{\mathrm{gr}}$. Таким образом, $N_{\mathrm{gr}}(A) = N(A)_{\mathrm{gr}} = B(A)_{\mathrm{gr}} = B_{\mathrm{gr}}(A)$.

Так как A — gr-первичная алгебра, то она не содержит ненулевых нильпотентных градуированных идеалов, а следовательно, в ней нет и ненулевых градуированных ниль-идеалов. Тогда градуированная алгебра $A[x] = \bigoplus\limits_{g \in G} A_g[x]$ является gr-полупростой [10, следствие 4.5]. Ясно, что она является и PI-алгеброй. Тогда из теоремы 4 следует, что $A[x]$ является подпрямым произведением gr-примитивных PI-алгебр ограниченной степени. Тогда для любого gr-примитивного идеала P алгебры $A[x]$ либо $P + I[x] = A[x]$, либо $I[x] \subset P$. Так как пересечение всех gr-примитивных идеалов равно нулю, то найдутся идеалы, для которых $P + I[x] = A[x]$. Выберем среди них такой идеал P_0, для которого степень матричной алгебры $A[x]/P_0 \approx M_{n_0}(K)$ максимальна, где K — градуированное поле. Пусть q — центральный полином Размыслова для алгебры $M_{n_0}(K_e)$ (см. [11]).

Так как K — коммутативное кольцо, а полином Размыслова полилинеен, то q будет являться центральным полиномом и для матричной алгебры $M_{n_0}(K)$. Следовательно, q является либо центральным полиномом, либо тождеством для любой gr-примитивной алгебры степени $n \leqslant n_0$. Тогда для любых $a_1, \ldots, a_n \in A[x]$ и любого gr-примитивного идеала P элемент $(q(a_1, \ldots, a_n) + P)/P$ лежит в центре алгебры $A[x]/P$, а следовательно и в центре алгебры $A[x]$. Так как q центральный для $A[x]/P_0$ и $P_0 + I[x] = A[x]$, то найдутся такие $a_1^0, \ldots, a_n^0 \in I[x]$, для которых $q(a_1^0, \ldots, a_n^0) \neq 0$. В силу полилинейности q элементы $a_1^0, \ldots, a_n^0$ можно выбрать однородными, а значит $q(a_1^0, \ldots, a_n^0)$ — однородный центральный элемент из $I[x]$.

Заметим, далее, что если Z_{gr} — градуированный центр алгебры A, то $Z_{\mathrm{gr}}[x]$ — градуированный центр алгебры $A[x]$. Так как $Z_{\mathrm{gr}}[x] \cap I[x] \neq 0$ и $Z_{\mathrm{gr}}[x] \cap I[x] = (Z_{\mathrm{gr}} \cap I)[x]$, то $Z_{\mathrm{gr}} \cap I \neq 0$. Предложение доказано.

Следствие. Пусть A — gr-первичная PI-алгебра, градуированный центр которой является градуированным полем. Тогда A — gr-простая алгебра.

Назовём *градуированной центральной алгеброй частных* градуированной алгебры A алгебру A_S, где S — множество однородных элементов центра $Z(A)$ алгебры A.

Алгебру $Q(A) \supseteq A$ назовём *левой* (*правой*) *градуированной алгеброй частных* для A, если:

(1) каждый однородный регулярный элемент из A обратим в $Q(A)$;

(2) каждый однородный элемент $x \in Q(A)$ представим в виде $a^{-1}b$ (ba^{-1}), где $a, b \in h(A)$ и a — регулярный элемент.

Если $Q(A)$ — левая (правая) градуированная алгебра частных для A, то A называется *левым* (*правым*) *градуированным порядком* в $Q(A)$.

Перейдём к доказательству градуированного аналога теоремы Познера.

Теорема 5. *Пусть A — gr-первичная G-градуированная PI-алгебра, A_0 — градуированная центральная алгебра частных алгебры A. Тогда:*

(1) *A_0 — конечномерная над своим градуированным центром F gr-простая алгебра, причём F — градуированное поле частных для $Z_{\mathrm{gr}}(A)$;*

(2) *A_0 является (левой и правой) градуированной алгеброй частных для A;*

(3) *A и A_0 удовлетворяют одним и тем же тождествам.*

Доказательство. Из предложения 1 следует, что A_0 — gr-первичная PI-алгебра и её градуированный центр F является градуированным полем. В силу следствия имеем, что A_0 — gr-простая алгебра, а следовательно и gr-примитивная. Из теоремы 4 получим, что A_0 является конечномерной над своим градуированным центром, что доказывает (1).

Поскольку A_0 изоморфна градуированному кольцу матриц над градуированным телом, то каждый однородный регулярный элемент из A_0 обратим. Так как любой элемент из A_0 имеет вид $s^{-1}a = as^{-1}$, $a \in A$, $s \in S$, то любой регулярный элемент из A регулярен и в A_0, а значит и обратим в A_0. Таким образом, A_0 является градуированной алгеброй частных для A.

Утверждение (3) было доказано в предложении 1.

В качестве следствия получаем следующую теорему для Z-градуированных колец из [3].

Теорема 6 ([3, теорема C.I.2.8]). *Z-градуированное gr-первичное кольцо R является PI-кольцом тогда и только тогда, когда R является градуированным порядком $M_n(K)(d_1, \ldots, d_n)$ для некоторого градуированного тела K и некоторых $d_1, \ldots, d_n \in Z$.*

В заключение приношу благодарность А. В. Михалёву за внимание к работе и полезные советы и С. А. Пихтилькову за обсуждения.

Литература

[1] Jacobson N. PI-algebras. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1975.

[2] Бахтурин Ю. А. Основные структуры современной алгебры. — М.: Наука, 1990.

[3] Năstăsescu C., van Oystaeyen F. Graded Ring Theory. — Amsterdam, 1982.

[4] Bahturin Y., Giambruno A., Riley D. Group-graded algebra with polinomial identity // Izr. J. Math. — 1998. — Vol. 104. — P. 145—155.

[5] Bergen J., Cohen M. Action of commutative Hopf algebra // Bull. London Math. Soc. — 1986. — Vol. 18. — P. 159—164.

[6] Handelman D., Lawrence J., Schelter W. Skew group rings // Houston J. Math. — 1978. — Vol. 4, no. 2. — P. 175—198.

[7] Liu Shaoxue, Beattie M., Fang Hongjin. Graded division rings and the Jacobson density theorem // Journal of Beijing Normal University (Natural Science). — 1991. — Vol. 27, no. 2. — P. 129—134.

[8] Херстейн И. Некоммутативные кольца. — М.: Мир, 1971.

[9] Zhu, Bin. Graded primitive ring and Kaplansky's theorem // Beijing Shuifan Daxue Xuebao. — 1998. — Vol. 34, no. 1. — P. 1—5.

[10] Cohen M., Montgomery S. Group-graded ring, smash products, and group action // Trans. Amer. Math. Soc. — 1984. — Vol. 282, no. 1. — P. 237–258. Addendum: Trans. Amer. Math. Soc. — 1987. — Vol. 300, no. 2. — P. 810—811.

[11] Размыслов Ю. П. Об одной проблеме Капланского // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1973. — Т. 31. — С. 483—501.