Теоремы плотности для градуированных колец

И. Н. БАЛАБА
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого

С. В. ЗЕЛЕНОВ, С. В. ЛИМАРЕНКО, А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 512.552

Ключевые слова: теорема плотности, градуированное кольцо, градуированный модуль, суперкольцо, супермодуль.

Аннотация

Целью настоящей работы является доказательство трёх теорем плотности в случае, когда кольца градуированы по полугруппам, а модули — по полигонам над этими полугруппами, и в этой конструкции выполняются некоторые условия сокращения, а также теоремы плотности для суперколец и супермодулей.

Abstract

I. N. Balaba, S. V. Limarenko, A. V. Mikhalev, S. V. Zelenov, Density theorems for graded rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 1, pp. 27—49.

The main purpose of this paper is to prove three density theorems for rings graded by semigroups and modules graded by acts over these semigroups with some cancellation conditions. In addition, the density theorem for superrings and supermodules is proved.

Введение

В теории колец широко известна и находит многочисленные применения теорема плотности Джекобсона: примитивное кольцо является плотным подкольцом кольца линейных преобразований векторного пространства над некоторым телом (см. [3] и [7]).

За последние десятилетия появилось много обобщений этой теоремы на всё более широкие классы колец.

В работе Джонсона [12] было показано, что первичное кольцо, обладающее минимальными ненулевыми правым первичным и левым первичным идеалами, является слабо транзитивным кольцом линейных преобразований.

Затем Кох и Мьюборн в [15] распространили результат Джонсона на первичные антисингулярные справа кольца с однородным правым идеалом.

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 1, с. 27—49.

Они же в работе [16] показали, что кольцо, обладающее правым почти максимальным идеалом, первично и является слабо транзитивным кольцом линейных преобразований некоторого векторного пространства над телом.

В [14] Кох и Лу вплотную приблизились к вершине в первичном случае, доказав теорему плотности для квази-простого модуля.

Этап первичных колец венчает теорема плотности Зельмановича для слабо примитивного кольца, опубликованная в [20] и [21].

Наконец, в [1] О. Д. Авраамова доказала теорему плотности для обобщённого слабо примитивного ортогонально полного кольца. Обобщённые слабо примитивные кольца являются полупервичными, но не все из них первичны.

В 90-е годы получен ряд результатов, касающихся теорем плотности для градуированных по группе колец. Так, в [19] была доказана теорема плотности для градуированных примитивных колец, в [10] получена теорема плотности для градуированных полупростых модулей, а в [2] опубликовано сообщение о градуированном варианте теоремы плотности Зельмановича. В [22] доказан градуированный аналог теоремы Капланского и дана характеризация градуированных по группе простых артиновых колец.

В то же время Настасеску, Раиану и ван Ойстаэен в [18] занялись рассмотрением колец, градуированных по группе, и модулей, градуированных по множеству, на котором действует эта группа, а в [8] рассматривались градуированные по полугруппе кольца и модули.

В работе [4] одним из авторов опубликовано сообщение о теореме плотности для вполне приводимых градуированных колец.

Целью настоящей работы является доказательство трёх теорем плотности в случае, когда кольца градуированы по полугруппам, а модули — по полигонам над этими полугруппами, и в этой конструкции выполняются некоторые условия сокращения (см. ниже), а также теоремы плотности для суперколец и супермодулей.

В первом разделе вводятся необходимые понятия и даются предварительные сведения о градуированных кольцах и модулях.

Во втором разделе рассматривается наиболее общая ситуация — градуированный правый S-контекст и доказывается для него теорема слабой плотности (см. её неградуированный аналог в [9], см. также [5]).

В третьем разделе вводятся понятия градуированного критически-сжимаемого модуля, квазиинъективной оболочки, (см. аналоги для неградуированного случая в [21] и [11]) и изучается их строение.

Далее доказываются два варианта теоремы плотности Зельмановича (см. [20] и [21]) для градуированных слабо примитивных колец (см. сообщение в [6]). Отличие между ними заключается в том, какими берутся наборы элементов в условиях — произвольными или однородными.

Рассмотрев тривиальную градуировку, убеждаемся, что из любого варианта теоремы плотности для градуированного слабо примитивного кольца следует теорема плотности Зельмановича, а значит и классическая теорема плотности

Джекобсона. Проградуировав всё по группе и применив несложные рассуждения, видим, что из этой теоремы следует также и теоремы плотности, опубликованные в работах [19] и [2].

В пятом разделе изучаются свойства слабо примитивных колец.

В заключение в работе рассматривается случай суперколец. Его специфика состоит в том, что при работе с суперкольцами условия обычно формулируют в терминах «ровной» однородности. Поскольку механически «выровненные» условия теоремы плотности оказались слишком слабыми, этот случай потребовал дополнительного исследования.

1. Предварительные сведения

1.1. Пусть H и G — две полугруппы.

Множество A называется (H,G)-*полигоном*, если H действует на A слева, а G — справа, причём это действие является согласованным в том смысле, что для любых $a \in A$, $h \in H$ и $g \in G$ выполняется следующее свойство ассоциативности:

$$(ha)g = h(ag).$$

Пусть далее H — моноид с единицей e_H, G — произвольная полугруппа. Пусть A и B — (H,G)-полигоны, которые являются точными H-полигонами. Пусть $\theta\colon B \to A$ — гомоморфизм (H,G)-полигонов.

1.2. Кольцо R называется *градуированным* по полугруппе G, если существует семейство $\{R_g \mid g \in G\}$ аддитивных подгрупп кольца, таких что $R = \bigoplus\limits_{g\in G} R_g$ и $R_g R_h \subseteq R_{gh}$ для всех $g, h \in G$.

Элементы множества $h(R) = \bigcup\limits_{g\in G} R_g$ называются *однородными элементами* кольца, а ненулевой $r_g \in R_g$ называется *однородным элементом степени* g.

Любой ненулевой r имеет единственное представление в виде суммы однородных элементов $r = \sum\limits_{g\in G} r_g$, где r_g является ненулевым лишь для конечного числа $g \in G$. Ненулевые r_g в таком разложении называются *однородными компонентами* элемента r.

1.3. Пусть кольцо R градуировано по полугруппе G. Модуль M называется *градуированным* по A правым R-модулем, если существует семейство $\{M_a \mid a \in A\}$ аддитивных подгрупп модуля M, таких что $M = \bigoplus\limits_{a\in A} M_a$ и $M_a R_g \subseteq M_{ag}$ для всех $a \in A$ и $g \in G$.

Элементы множества $h(M) = \bigcup\limits_{a\in A} M_a$ называются *однородными элементами* модуля, а ненулевой $m_a \in M_a$ называется *однородным элементом степени* a.

Любой ненулевой m имеет единственное представление в виде суммы однородных элементов $m = \sum\limits_{a\in A} m_a$, где m_a является ненулевым лишь для конечного числа $a \in A$. Ненулевые m_a в таком разложении называются *однородными компонентами* элемента m.

1.4. Подмодуль N модуля M называется *градуированным подмодулем*, если $N = \bigoplus\limits_{a \in A} (N \cap M_a)$, или, эквивалентно, для любого элемента $x \in N$ его однородные компоненты также принадлежат N.

1.5. Рассмотрим правые R-модули M и N, которые градуированы соответственно по полигонам A и B. Гомоморфизм $f\colon N \to M$ правых R-модулей называется *градуированным морфизмом степени* h, где $h \in H$, если $f(N_b) \subseteq M_{h\theta(b)}$ для всех $b \in B$. Градуированные морфизмы степени h образуют аддитивную подгруппу $\mathrm{HOM}(N_R, M_R)_h$ группы $\mathrm{Hom}(N_R, M_R)$.

Если $N = M$ и $\theta = \mathrm{id}_A$, то, положив $\mathrm{END}(M_R)_h = \mathrm{HOM}(M_R, M_R)_h$, имеем, очевидно, что подкольцо $\mathrm{END}(M_R) = \bigoplus\limits_{h \in H} \mathrm{END}(M_R)_h$ кольца эндоморфизмов $\mathrm{End}(M_R)$ является градуированным по H кольцом, а модуль M естественным образом оказывается градуированным левым модулем над этим кольцом.

Условимся гомоморфизмы из $\bigoplus\limits_{h \in H} \mathrm{HOM}(N_R, M_R)_h$ называть *градуированными*, а гомоморфизмы из $\bigcup\limits_{h \in H} \mathrm{HOM}(N_R, M_R)_h$ — *однородными*.

1.6. Пусть M — градуированный модуль и N — его градуированный подмодуль. Тогда M/N может быть превращён в градуированный модуль, если положить $(M/N)_a = (M_a + N)/N$. Из этого определения следует, что каноническая проекция $M \to M/N$ является градуированным морфизмом степени e_H.

1.7. Градуированное кольцо $R = \bigoplus\limits_{g \in G} R_g$ называется *градуированным кольцом с делением*, если каждый его ненулевой однородный элемент обратим. Заметим, что при этом носителем $\{g \in G \mid R_g \neq 0\}$ оказывается подгруппа полугруппы G.

Более глубокие сведения о кольцах и модулях, градуированных по группам можно найти в [17]. Читатель без труда перенесёт вводимые там основные понятия на случай градуировки по полугруппам и полигонам.

Везде далее все кольца подразумеваются ассоциативными. Единица в кольцах не предполагается.

2. Теорема слабой плотности

2.1. Пусть H — моноид, G — произвольная полугруппа. Пусть A и B — (H, G)-полигоны, которые являются точными H-полигонами и точными G-полигонами. Пусть $\theta\colon B \to A$ — гомоморфизм (H, G)-полигонов.

2.2. Пусть $S = \bigoplus\limits_{g \in G} S_g$ — градуированное по G кольцо, $N = \bigoplus\limits_{a \in A} N_a$ — градуированный по A правый S-модуль, $\Delta = \bigoplus\limits_{h \in H} \Delta_h = \mathrm{END}(N_S)$ — градуированное по H кольцо, $M = \bigoplus_{b\in B} M_b$ — градуированный по B левый Δ-модуль, $T = \bigoplus_{g\in G} T_g$ — градуированный S-подмодуль градуированного по G правого S-модуля $\mathrm{HOM}({}_\Delta M, {}_\Delta N)$, причём $M_b T_g \subseteq N_{\theta(b)g}$.

Будем называть построенную систему (правым) S-контекстом. В рамках S-контекста дадим ещё три определения.

Определение 2.3. N называется *квазиинъективным*, если для каждого градуированного морфизма $f\colon U_S \to N_S$, где $U_S \neq 0$ — градуированный подмодуль модуля N_S, существует морфизм $d \in \Delta$ с $du = f(u)$ для всех $u \in U$.

Определение 2.4. T называется *тотальным*, если для любого ненулевого $m \in h(M)$ имеем $mT \neq 0$.

Определение 2.5. T называется *слабо плотным*, если для любых однородных $m_1, m_2, \ldots, m_k \in M$, где $m_1 \notin \sum_{i=2}^{k} \Delta m_i$, существует такой $t \in T$, что $m_1 t \neq 0$, $m_i t = 0$ для $i > 1$.

2.6. Для подмножеств $V \subset M$ и $W \subset T$ рассмотрим соответствующие аннуляторы $V^r = \{t \in T \mid Vt = 0\}$ и $W^l = \{m \in M \mid mW = 0\}$. Вообще говоря, эти подмодули не являются градуированными.

Лемма 2.7. *Пусть зафиксирован определённый выше S-контекст, такой что N_S квазиинъективен, а T тотален.*

Пусть, кроме того, выполняются следующие два условия:

(1) *если V — градуированный Δ-подмодуль в M, то подмодуль V^r является градуированным в T;*

(2) *для каждого градуированного S-подмодуля $W \subset T_S$ пусть W^l является градуированным подмодулем модуля M.*

Пусть, далее, $K = \sum_{i=1}^{k} \Delta m_i$, где $m_1, m_2, \ldots, m_k \in h(M)$ (при $k = 0$ положим $K = \{0\}$). Тогда $K = \Bigl(\bigcap_{l=1}^{n} m_l^r\Bigr)^l$.

Доказательство. Индукция по k.

При $k = 0$ получаем $\{0\} = T^l$, что верно в силу тотальности T.

Предположим, что для $K = \sum_{i=1}^{k} \Delta m_i$ утверждение леммы выполнено, и докажем, что $K + \Delta m = (K^r \cap m^r)^l$, где $m \in h(M)$. Очевидно, $K^r \cap m^r = (K + \Delta m)^r$, а значит и $(K^r \cap m^r)^l = (K + \Delta m)^{rl}$. Очевидно также, что $K + \Delta m \subset (K + \Delta m)^{rl}$. Следовательно, $K + \Delta m \subset (K^r \cap m^r)^l$.

Докажем включение в обратную сторону. Очевидно, K и Δm — градуированные подмодули в M. Отсюда, согласно условию (1), множества K^r и $m^r = (\Delta m)^r$ являются градуированными подмодулями в T, то есть их пересечение — тоже градуированный подмодуль. Из условия (2) получаем, что $(K^r \cap m^r)^l$ является градуированным подмодулем в M, а значит, достаточно доказать, что однородные элементы из $(K^r \cap m^r)^l$ лежат в $K + \Delta m$.

Итак, пусть фиксирован $\mu \in h((K^r \cap m^r)^l)$, т. е. $\mu t = 0$ при $Kt = 0$ и $mt = 0$. Отсюда следует, что можно корректно определить отображение $f\colon mK^r \to \mu K^r$ по правилу $mt \mapsto \mu t$ для всех $t \in K^r$. В силу сделанного выше замечания о градуированности подмодулей, а также из однородности m и μ заключаем, что f является градуированным морфизмом $mK^r \to N$. Поскольку N квазиинъективен, то существует $d \in \Delta$ — такой эндоморфизм модуля N, что $\mu t = dmt$ для всех $t \in K^r$, то есть $(\mu - dm)K^r = 0$, а значит $(\mu - dm) \in K^{rl}$. Так как по предположению индукции $K^{rl} = K$, то $(\mu - dm) \in K$. Следовательно, $\mu \in K + \Delta m$. □

2.8. Пусть H и G — две полугруппы, A и B — (H, G)-полигоны, $\theta\colon B \to A$ — гомоморфизм (H, G)-полигонов.

Наложим на полигоны A и B и полугруппу G следующие ограничения:

«условие левого сокращения в правом G-полигоне»: пусть для всяких $a \in \operatorname{Im}\theta$ и для любых $g_1, g_2 \in G$ при $ag_1 = ag_2$ выполняется $g_1 = g_2$;

«условие правого сокращения в правом G-полигоне»: пусть для любого $g \in G$ и любых $b_1, b_2 \in B$ при $b_1 \neq b_2$ выполняется $\theta(b_1)g \neq \theta(b_2)g$.

Лемма 2.9. *Пусть зафиксирован правый S-контекст. Тогда:*

(1) *если выполнено условие левого сокращения в правых G-полигонах, то для всякого градуированного Δ-подмодуля V в M подмодуль V^r является градуированным в T;*

(2) *если выполнено условие правого сокращения в правых G-полигонах, то для всякого градуированного S-подмодуля W в T подмодуль W^l является градуированным в M.*

Теорема 2.10 (теорема слабой плотности). *Пусть выполнены условия сокращения. Фиксируем правый S-контекст, такой что N_S квазиинъективен, а T тотален. Тогда T слабо плотен.*

Доказательство. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_k \in h(M)$, где $m_1 \notin \sum\limits_{i=2}^{k} \Delta m_i$. Предположим от противного, что для любого $t \in T$, если $m_i t = 0$ при $i = 2, 3, \ldots, k$, то также и $m_1 t = 0$. Это означает, что $m_1 \in \left(\bigcap\limits_{l=2}^{k} m_l^r\right)^l$. В силу леммы 2.9 выполнены все условия леммы 2.7, откуда $\sum\limits_{i=2}^{k} \Delta m_i = \left(\bigcap\limits_{i=2}^{n} m_i^r\right)^l$. Из полученного противоречия вытекает слабая плотность T. □

Замечание 2.11. В теореме 2.10 элемент, аннулирующий все m_i, кроме m_1, можно выбрать однородным.

3. Критически-сжимаемые модули

3.1. Пусть H и G — две полугруппы, A — (H, G)-полигон.

3.2. Пусть выполнены условия правого и левого сокращения в правом G-полигоне A (общее определение было дано в п. 2.8):

«условие левого сокращения в правом G-полигоне»: пусть для всяких $a \in A$ и для любых $g_1, g_2 \in G$ при $ag_1 = ag_2$ выполняется $g_1 = g_2$;

«условие правого сокращения в правом G-полигоне»: пусть для любого $g \in G$ и любых $a_1, a_2 \in A$ при $a_1 g = a_2 g$ выполняется $a_1 = a_2$.

3.3. Кроме того, наложим на полигон A и полугруппу H следующие ограничения:

«условие правого сокращения в левом H-полигоне»: пусть для любого $a \in A$ и для всяких $h_1, h_2 \in H$ при $h_1 a = h_2 a$ выполняется $h_1 = h_2$;

«условие левого сокращения в левом H-полигоне»: пусть для любого $h \in H$ и любых $a_1, a_2 \in A$ при $ha_1 = ha_2$ выполняется $a_1 = a_2$.

Замечание 3.4. Условия правого и левого сокращения, выполненные в правом G-полигоне A, означают, что полигон A является *строго точным* G-полигоном, на котором полугруппа G *действует инъективно* (см. [13]). Аналогично из условия сокращения, наложенного на полигон A и полугруппу H, следует, что A является *строго точным* H-полигоном и полугруппа H также *действует на A инъективно.*

3.5. Пусть далее R — градуированное по G кольцо, M — градуированный по A правый R-модуль.

Замечание 3.6. Пусть N и M — градуированные по A правые R-модули, пусть $\Gamma = \mathrm{HOM}_R(N, M)$ является градуированным по H, и пусть выполнены условия правого и левого сокращения в левом H-полигоне A.

Тогда для любого $f \in h(\Gamma)$ и любого градуированного подмодуля $K \subseteq \subseteq f(N) \subseteq M$ подмодули $\operatorname{Ker} f$ и $f^{-1}(K)$ являются градуированными в N.

Определение 3.7. *Частичным эндоморфизмом* градуированного модуля M называется гомоморфизм $N \to M$, где N — градуированный подмодуль в M.

Определение 3.8. Градуированный модуль называется *униформным*, если любая пара его ненулевых градуированных подмодулей имеет ненулевое пересечение.

Определение 3.9. Ненулевой градуированный R-модуль M называется *сжимаемым*, если он может быть вложен однородным мономорфизмом в каждый свой ненулевой градуированный подмодуль.

Определение 3.10. Ненулевой градуированный R-модуль M называется *критически-сжимаемым*, если он сжимаем и, кроме того, не может быть вложен ни в один из своих собственных градуированных фактор-модулей.

Предложение 3.11. *Для сжимаемого градуированного модуля M эквивалентны следующие условия:*

(1) *M критически-сжимаем;*

(2) *каждый ненулевой однородный частичный эндоморфизм модуля M является мономорфизмом.*

Кроме того, любой градуированный модуль, удовлетворяющий условию (2), *является униформным.*

Доказательство.

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $f\colon N \to M$ — ненулевой частичный градуированный эндоморфизм модуля M. Поскольку M сжимаем, то существует мономорфизм $g\colon M \to f(N)$. Но тогда композиция

$$M \xrightarrow{g} f(N) \cong N/\operatorname{Ker} f \subseteq M/\operatorname{Ker} f$$

влечёт мономорфизм M в $M/\operatorname{Ker} f$. В силу критической сжимаемости M имеем $\operatorname{Ker} f = 0$, то есть f — мономорфизм

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $f\colon M \to M/N$ — мономорфизм, где N — градуированный подмодуль в M. Положим $f(M) = L/N$ для некоторого подмодуля L в M, $N \subsetneqq L \subseteq M$. Если обозначить $\pi\colon L \to L/N$ канонический гомоморфизм, то $h = f^{-1}\pi$ представляет собой ненулевой градуированный частичный эндоморфизм M, а значит является мономорфизмом. Но $N \subseteq \operatorname{Ker} \pi \subseteq \operatorname{Ker} h$, и таким образом $N = 0$.

Наконец, если M удовлетворяет условию (2) и K и L — его ненулевые градуированные подмодули, то $K \cap L \neq 0$.

В самом деле, если $K \cap L = 0$, то проекция $K + L$ на L будет ненулевым градуированным частичным эндоморфизмом модуля M с ненулевым ядром.

Предложение доказано. □

Определение 3.12. Модуль, который удовлетворяет условию (2) доказанного предложения, называется *моноформным*.

3.13. Ясно, что каждый модуль M может быть вложен в наименьший градуированный квазиинъективный модуль $\bar{M}$, называемый *квазиинъективной оболочкой* модуля M.

Пусть градуированный модуль $\hat{M}$ является инъективной оболочкой модуля M, а $\Lambda = \mathrm{END}(\hat{M})$ — ее градуированное кольцо эндоморфизмов.

Предложение 3.14. *Пусть M — градуированный правый R-модуль. Тогда в выше указанных обозначениях выполняются следующие свойства:*

(1) *ΛM является пересечением всех градуированных квазиинъективных подмодулей модуля $\hat{M}$, содержащих M;*

(2) *ΛM является градуированным квазиинъективным модулем;*

(3) *градуированный модуль M является квазиинъективным тогда и только тогда, когда $M = \Lambda M$*

Доказательство.

(2) Градуированность модуля ΛM очевидна. Докажем его квазиинъективность.

Пусть N — градуированный подмодуль модуля ΛM. Если $f\colon N \to \Lambda M$ — какой-нибудь градуированный гомоморфизм, то f индуцируется некоторым

$\lambda \in \Lambda$. Поскольку $\lambda(\Lambda M) \subseteq \Lambda M$, то λ индуцирует градуированный гомоморфизм $\bar{\lambda} \in \mathrm{END}_R(\Lambda M)$ и $\bar{\lambda}$ также индуцирует f, что и показывает, что ΛM является квазиинъективным.

(1) Пусть P — произвольный градуированный квазиинъективный подмодуль модуля $\hat{M}$, содержащий M. Мы хотим показать, что $P \supseteq \Lambda M$. Для этого, очевидно, достаточно проверить, что $\alpha P \subseteq P$ для любого $\alpha \in h(\Lambda)$.

Заметим, что $Q(\alpha) = \{x \in P \mid \alpha x \in P\}$ является градуированным подмодулем в P, и нам нужно лишь убедиться, что $Q(\alpha) = P$ для любого $\alpha \in h(\Lambda)$.

Фиксируем $\alpha \in h(\Lambda)$ и обозначим $Q = Q(\alpha)$. Рассмотрим однородный гомоморфизм $Q \to P\colon q \mapsto \alpha q$. Поскольку P квазиинъективен, то существует $\alpha_1 \in \mathrm{END}_R(P)$, такой что $\alpha_1 q = \alpha q$ для всех $q \in Q$, причём степени α и α_1 совпадают из-за наличия правого сокращения в левом H полигоне, по которому производится градуировка. Из инъективности $\hat{M}$ следует существование морфизма $\alpha' \in \Lambda$, такого что $\alpha' x = \alpha_1 x$ для любого $x \in P$, причём степени α_1 и α' совпадают (по той же причине). Так как $\alpha' P \subseteq P$, то если $(\alpha' - \alpha)P = 0$, имеем $\alpha P \subseteq P$.

Итак, если $Q(\alpha) \neq P$, то $(\alpha' - \alpha)P \neq 0$. Поскольку M — существенный подмодуль модуля $\hat{M}$, то и P является существенным подмодулем в $\hat{M}$, а следовательно, $(\alpha' - \alpha)P \cap P \neq 0$. Но если $x \in P$ и $0 \neq y \in P$ таковы, что $y = (\alpha' - \alpha)x \in (\alpha' - \alpha)P \cap P$, то из $\alpha' x = \alpha_1 x \in P$ получаем, что $\alpha x = \alpha_1 x - y \in P$. Но тогда $x \in Q(\alpha)$, так что $\alpha x = \alpha_1 x$, а значит $y = 0$, что противоречит выбору y.

(3) Вытекает из (1) и (2).

Предложение доказано. □

3.15. В качестве следствия из доказанного предложения получаем, что $\bar{M} = \Lambda M$. Отсюда сразу вытекает такое свойство: *градуированный модуль является квазиинъективным тогда и только тогда, когда он является вполне инвариантным градуированным подмодулем своей инъективной оболочки.* Из этого в свою очередь следует, что $\bar{M} = \Delta M$, где $\Delta = \mathrm{END}(\bar{M}_R)$.

Предложение 3.16.

(1) *Если M_R — градуированный моноформный модуль, то однородные элементы кольца $D = \mathrm{END}(M_R)$ единственным образом продолжаются до элементов кольца Δ, причём Δ оказывается градуированным кольцом с делением.*

(2) *Если M_R критически-сжимаем, то D является градуированной правой областью Оре с кольцом частных Δ.*

Доказательство.

(1) Пусть сначала $\lambda \in h(\mathrm{HOM}_R(M, \bar{M}))$ и при этом $\operatorname{Ker} \lambda \neq 0$. Докажем, что тогда $\lambda = 0$.

Пусть от противного $\lambda \neq 0$. Тогда, положив $\lambda_1 = \lambda|_{\lambda^{-1}(M \cap \lambda M)}$, имеем $\lambda_1 \neq 0$. Поскольку λ_1 является ненулевым однородным частичным эндоморфизмом модуля M, то λ_1 — мономорфизм. Но с другой стороны, $\operatorname{Ker} \lambda_1 = \operatorname{Ker} \lambda \cap \lambda^{-1}(M \cap \lambda M) \neq 0$, так как M униформен. Полученное противоречие и доказывает, что $\lambda \neq 0$.

Пусть теперь $\lambda \in h(\mathrm{END}(\bar{M}_R))$ и $\mathrm{Ker}\,\lambda \neq 0$. Докажем, что и в этом случае $\lambda = 0$. Пусть μ — произвольный ненулевой однородный элемент кольца Λ. Тогда $\lambda\mu|_M \in \mathrm{HOM}_R(M, \bar{M})$, поскольку $\bar{M}$ — вполне инвариантный подмодуль в $\hat{M}$; к тому же $\lambda\mu|_M$ является однородным.

Далее, если $\mu(M) \neq 0$, то $\mu(M) \cap \mathrm{Ker}\,\lambda \neq 0$, так как $\bar{M}_R$ униформен. Таким образом, $\mathrm{Ker}(\lambda\mu|_M) \neq 0$. Отсюда из доказанного выше получаем, что $\lambda\mu(M) = 0$. Поскольку $0 \neq \mu \in h(\Lambda)$ выбирался произвольно, то заключаем, что $\lambda\bar{M} = \lambda\Lambda M = 0$.

Из всего сказанного прямо вытекает, что элементы $h(D)$ имеют единственное продолжение в Δ. Итак, можно рассматривать D как градуированное подкольцо в Δ.

Покажем теперь, что Δ является градуированным кольцом с делением.

Рассмотрим произвольный $0 \neq \lambda \in h(\Delta)$. Из рассуждений, проведённых выше, вытекает, что λ является мономорфизмом. Пусть λ_1 обозначает расширение λ до эндоморфизма модуля $\hat{M}_R$; λ_1 также является мономорфизмом, причём степени λ и λ_1 совпадают (опять-таки из-за наличия правого сокращения в левом H-полигоне, по которому производится градуировка). Из того, что M_R униформен, следует, что $\hat{M}_R$ неприводим, таким образом, $\lambda_1\hat{M} = \hat{M}$ и λ_1 обратим. Пусть $\mu_1 \in \Lambda$ обозначает обратный элемент к λ_1, то есть $\mu_1\lambda_1 = 1 = \lambda_1\mu_1$ на $\hat{M}$. Поскольку $\bar{M}$ является вполне инвариантным подмодулем модуля $\hat{M}$, то $\mu\lambda = 1 = \lambda\mu$, где $\mu = \mu_1|_{\hat{M}}$.

(2) Пусть теперь вдобавок M_R сжимаем. Покажем, что в этом случае Δ является градуированным правым кольцом частных кольца D.

Пусть $0 \neq \lambda \in h(\Delta)$. Тогда $N = M \cap \lambda^{-1}M \neq 0$ — градуированный подмодуль в M, и мы можем выбрать $0 \neq \mu \in \mathrm{HOM}_R(M, N) \subseteq D$. Следовательно, $0 \neq \lambda\mu \in D$, что и завершает доказательство.

Предложение доказано. □

4. Аналоги теоремы Зельмановича

4.1. Для кольца R пусть R^1 обозначает теоретико-множественное объединение R и рациональных чисел.

Пусть G — произвольная полугруппа.

Определение 4.2. Назовём градуированное по G кольцо *слабо примитивным*, если оно обладает точным критически-сжимаемым градуированным по некоторому G-полигону модулем.

4.3. Пусть R — градуированное по G кольцо. Назовём R-решёткой тройку $(\Delta, {}_\Delta V_R, M_R)$, где Δ — градуированное по моноиду H кольцо с делением, V — градуированный по точному (H, G)-полигону A (Δ, R)-бимодуль, M — градуированный по A правый R-модуль, $\Delta M = V$ и R действует точно на M (а значит, мы можем положить $R \subseteq \mathrm{END}({}_\Delta V)$).

Заметим, что поскольку Δ является кольцом с делением, то оно на самом деле оказывается градуированным по подгруппе H^Δ полугруппы H.

Лемма 4.4. *Пусть для градуированного кольца R существует R-решётка $(\Delta, {}_\Delta V_R, M_R)$, такая что для $\tau \in h(\mathrm{END}({}_\Delta V))$ и $m, m' \in h(M)$ существуют $r \in R$ и $s \in h(R)$, что $(\tau r - s)|_{\Delta m} = 0$ и $r|_{\Delta m'}$ является градуированным автоморфизмом.*

Тогда R слабо примитивно.

Доказательство. Покажем, что каждый нетривиальный циклический R-подмодуль, порождённый однородным элементом модуля M является точным критически-сжимаемым модулем.

Для любого $0 \neq m \in h(M)$ модуль mR^1 точен. Действительно, пусть $0 \neq t \in R$. Тогда $Mt \neq 0$, поскольку M_R точен. Итак, мы можем выбрать такой $0 \neq n \in h(M)$, что $nt \neq 0$. Выберем $\tau \in h(\mathrm{END}({}_\Delta V))$, чтобы $m\tau = n$, а затем возьмём такие $r, s \in R$, что $\tau r = s$ на Δm и $r|_{\Delta n}$ — градуированный автоморфизм. Тогда $mst = m\tau rt = nrt \neq 0$, поскольку $0 \neq nr \in \Delta n$ и $nt \neq 0$. Следовательно, $mR^1 t \neq 0$.

Покажем, что mR^1 сжимаем. Действительно, пусть N_R — его ненулевой градуированный подмодуль. Положим $0 \neq n \in h(N)$ и возьмём $\tau \in h(\mathrm{END}({}_\Delta V))$ так, чтобы $n\tau = m$. Далее, выберем такие $r \in R$ и $s \in h(R)$, что $\tau r = s$ на Δn и $r|_{\Delta m}$ — градуированный автоморфизм. Тогда существует такой $a \in \Delta$, что $0 \neq mr = am$, а значит, $0 \neq am = mr = n\tau r = ns \in N$. Из однородности элементов m, n и s следует, что и a также можно выбрать однородным. Следовательно, $0 \neq a \in h(\mathrm{HOM}_R(mR^1, N))$.

Наконец, требуется показать, что mR^1 моноформен. Для этого достаточно проверить, что моноформным является M_R. Итак, пусть N_R — градуированный подмодуль модуля M_R, и пусть дан частичный эндоморфизм $0 \neq \lambda \in h(\mathrm{HOM}_R(N, M))$. Рассмотрим $\lambda m \neq 0$ для некоторого $m \in h(N)$. Для произвольного элемента $0 \neq n \in h(N)$ выберем $\tau \in h(\mathrm{END}({}_\Delta V))$, чтобы $n\tau = m$, и возьмём такие $r, s \in R$, что $\tau r = s$ на Δn и $r|_{\Delta \lambda m}$ — градуированный автоморфизм. Тогда $(\lambda n)s = \lambda(ns) = \lambda(n\tau r) = \lambda(mr) = (\lambda m)r \neq 0$, а значит, $\lambda n \neq 0$. Поскольку $\operatorname{Ker}\lambda$ — градуированный подмодуль (согласно замечанию 3.6), то отсюда следует, что λ является мономорфизмом.

Лемма доказана. □

Докажем теперь градуированный вариант теоремы плотности Зельмановича.

Теорема 4.5. *Пусть R — градуированное по полугруппе G кольцо. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *R слабо примитивно;*

(2) *существует R-решётка $(\Delta, {}_\Delta V_R, M_R)$, такая что для данных Δ-независимых элементов $v_1, \ldots, v_k \in h(V)$ существует $0 \neq a \in h(\Delta)$, такой что для любых элементов $n_1, \ldots, n_k \in M$ найдётся такой $r \in R$, что $an_i = v_i r \in M$ для каждого $i = 1, \ldots, k$, причём при $k = 1$ и $n_1 \in h(M)$ элемент r оказывается однородным;*

(3) *существует R-решётка $(\Delta, {}_\Delta V_R, M_R)$, такая что для данных $\tau \in \mathrm{END}({}_\Delta V)$ и конечномерных градуированных Δ-подпространств U и $U' = \sum_{i=1}^{k} \Delta m_i$ модуля V, где $m_1, \ldots, m_k \in h(M)$, существуют такие $r, s \in R$, что*

$(\tau r - s)|_U = 0$ и $r|_{U'}$ является градуированным автоморфизмом, причём, если $U = \Delta m$ и $U' = \Delta m'$ при $m, m' \in h(M)$, а $m\tau$ — однороден, то и элемент s оказывается однородным.

Доказательство.

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть M_R — точный критически-сжимаемый градуированный модуль. Ранее (см. п. 3.15 и предложение 3.16) было доказано, что кольцо $D = \mathrm{END}(M_R)$ является градуированной правой областью Оре с градуированным кольцом частных $\Delta = \mathrm{END}(\bar{M}_R)$, где $\bar{M} = \Delta M$. Таким образом, мы получаем R-решётку $(\Delta, {}_\Delta\bar{M}_R, M_R)$, а также можем рассматривать R в качестве градуированного подкольца кольца $\mathrm{END}({}_\Delta\bar{M})$.

Сначала покажем, что $vR \neq 0$ для любого $0 \neq v \in h(\bar{M})$.

Так как M_R сжимаем и $vR^1 \cap M \neq 0$, можно выбрать мономорфизм $a \in \mathrm{HOM}_R(M, vR^1 \cap M)$. Поскольку M_R точен, существуют $m \in M$ и $r \in R$, такие что $mr \neq 0$. Далее, $0 \neq am = vs$ для некоторого $s \in R^1$, и таким образом $0 \neq a(mr) = (am)r = vsr \in R$.

Пусть теперь даны линейно независимые над Δ элементы $v_1, \ldots, v_k \in h(\bar{M})$. Для $i = 1, \ldots, k$ положим $A_i = \bigcap\limits_{j \neq i} v_j^r$ — правый градуированный (по лемме 2.9) идеал в R. По теореме слабой плотности 2.10 $v_i A_i \neq 0$ для каждого i, и отсюда следует, что $\bigcap\limits_{i=1}^{k} v_i A_i \cap M \neq 0$. Поскольку M_R сжимаем, можно выбрать мономорфизм $a \in h\Big(\mathrm{HOM}_R\Big(M, \bigcap\limits_{i=1}^{k} v_i A_i \bigcap M\Big)\Big)$. Таким образом, для данных $n_1, \ldots, n_k \in M$ существуют $r_i \in A_i$ для $i = 1, \ldots, k$, что $an_i = v_i r_i \in M$ для всех i. Полагая $r = \sum\limits_{i=1}^{k} r_i$, получаем $an_i = v_i r \in M$.

При $k = 1$ из однородности элементов a, v_1 и n_1 немедленно вытекает, что требуемый r можно также выбрать однородным.

(2) $\Rightarrow$ (3). Без ограничения общности можно предполагать в ситуации, описанной в (3), что элементы $m_1, \ldots, m_k$ линейно независимы над Δ. Из соотношения $V = \Delta M$ имеем $U \subseteq \sum\limits_{i=k+1}^{l} \Delta m_i = V'$ для некоторого выбора $m_{k+1}, \ldots, m_l \in h(M)$. Выбросив, если необходимо, некоторые m_i для $k+1 \leqslant i \leqslant l$, можно предполагать, что $m_1, \ldots, m_k, m_{k+1}, \ldots, m_l$ образуют Δ-базис для $W = U' + V'$. Найдём элементы r, s в R, такие что $(\tau r - s)|_W = 0$ и $r|_{U'}$ является градуированным автоморфизмом.

Положим $W_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i$. Покажем индукцией по n существование таких $r, s \in R$, что $(\tau r - s)|_{W_n} = 0$ и $r|_{U'}$ — градуированный автоморфизм.

При $n = 0$, пользуясь (2), можно выбрать такой $r \in R$, что $m_i r = am_i$ для каждого $i = 1, \ldots, k$ и некоторого $0 \neq a \in h(\Delta)$; а поскольку $W_0 = 0$, то элемент $s \in h(R)$ выбирается произвольно.

Пусть теперь $1 \leqslant n \leqslant l$. По индуктивному предположению существуют такие $r', s' \in R$, что $(\tau r' - s')|_{W_{n-1}} = 0$ и $r'|_{U'}$ — градуированный автоморфизм. Положим $\tau' = \tau r' - s'$; достаточно найти такие $r, s \in R$, что $(\tau' r - s)|_{W_n} = 0$ и $r|_{U'}$ — градуированный автоморфизм. Действительно, тогда для любого $v \in W_n$ имеем $v\tau(r'r) = v(\tau' + s')r = v(s + s'r)$, а $r'r$ является градуированным автоморфизмом.

Рассмотрим элемент $m_n\tau'$.

Если $m_n\tau' = 0$, выберем $0 \neq a \in h(\Delta)$ и $r \in R$ так, чтобы $am_i = m_i r$ для $1 \leqslant i \leqslant k$, и возьмём $s = 0$.

Итак, можно предполагать, что $m_n\tau' \neq 0$. Обозначим $j = \max\{n, k\}$ и положим $I = \{1, \ldots, j\}$. Пусть $\tau' = \tau'_1 + \ldots + \tau'_q + \tau''$, где $\tau'_1, \ldots, \tau'_q \in h(\mathrm{END}(_\Delta V))$ — такие однородные компоненты τ', что элементы множества $\{m_i \mid i \in I\} \cup \cup \{m_n\tau'_{g_i} \mid i = 1, \ldots, q\}$ являются линейно независимыми над Δ, а элемент $m_n\tau''$ лежит в их линейной оболочке. Положим $I' = \{1, \ldots, q\}$.

Случай I: $\tau'' = 0$. Тогда, пользуясь (2), найдём элемент $0 \neq a \in h(\Delta)$, относящийся к линейно независимым элементам $m_1, \ldots, m_j, m_n\tau'_{g_1}, \ldots, m_n\tau'_{g_q}$, где $j = \max(n, k)$. Следовательно, существует такой $r \in R$, что

$$am_i = m_i r \quad (1 \leqslant i \leqslant j), \quad a0 = (m_n\tau'_{g_p})r \quad (p = 1, \ldots, q).$$

Тогда, очевидно, $r|_{U'}$ — градуированный автоморфизм. Далее, положим $s = 0$, тогда для $1 \leqslant i < n$ имеем $m_i\tau' r = 0 = m_i s$, а также $m_n\tau' r = 0 = m_n s$. Таким образом, $(\tau' r - s)|_{W_n} = 0$.

Случай II: $\tau'' \neq 0$.

Пусть $0 \neq m_n\tau'' = \sum\limits_{\mu=1}^{\lambda} c_{i_\mu} m_{i_\mu} + \sum\limits_{i=1}^{q} d_i m_n \tau'_i$, где все d_i принадлежат Δ и каждый $0 \neq c_{i_\mu}$ принадлежит Δ при $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\lambda \leqslant j = \max(n, k)$. Положим $\hat{I} = \{i_1, \ldots, i_\lambda\}$. Пусть $c_{i_\mu} = c_{i_\mu,1} + \ldots + c_{i_\mu,q_\mu}$, где все $c_{i_\mu,p}$ принадлежат $h(\Delta)$, — разложения для всех μ элементов c_{i_μ} на однородные компоненты. Обозначим $\tilde{q} = \max\{q_\mu\}_{\mu=1}^{\lambda}$ и для каждого $k = 1, \ldots, \tilde{q}$ положим $I_k = \{i \in \hat{I} \mid c_{i,k} \neq 0\}$.

Опять используем (2), чтобы выбрать элемент $0 \neq a \in h(\Delta)$, относящийся к линейно независимым элементам $\{m_i \mid i \in I\}$; аналогично для всех $k = 1, \ldots, \tilde{q}$ индуктивно определим линейно независимую систему элементов S_k, для которой выберем элемент $0 \neq b_k \in h(\Delta)$. Для $k = 1$ положим

$$S_1 = \{a^{-1}c_{i,1}m_i \mid i \in I_1\} \cup \{m_i \mid i \in I \setminus I_1\} \cup \{m_n\tau'_i \mid i \in I'\},$$

выберем соответствующий элемент b_1 и для всех $i \in I_1$ обозначим

$$f_{i,1} = c_{i,1}^{-1} a b_1 \in h(\Delta).$$

Для $k > 1$ положим

$$S_k = \left\{ a^{-1} \left(\prod_{\alpha=1}^{k-1} f_{i,\alpha} \right) c_{i,k} m_i \;\middle|\; i \in I_k \right\} \cup \{m_i \mid i \in I \setminus I_k\} \cup \{m_n\tau'_i \mid i \in I'\},$$

выберем соответствующий элемент b_k и для всех $i \in I_k$ обозначим

$$f_{i,k} = \left(\prod_{\alpha=k-1}^{1} f_{i,\alpha}^{-1} \right) c_{i,k}^{-1} a b_k \in h(\Delta).$$

Тогда для каждого $k = 1, \ldots, \tilde{q}$ существует такой $r_k \in R$, что

$$\begin{cases} b_k m_i = \Big(a^{-1} c_{i,k} \Big(\prod\limits_{\alpha=1}^{k-1} f_{i,\alpha}\Big) m_i\Big) r_k & (i \in I_k), \\ b_k m_i = m_i r_k & (i \in I \setminus I_k), \\ b_k 0 = m_n \tau_i' r_k & (i \in I'), \end{cases}$$

причём для всех k и всех $i \in \hat{I}$ верно равенство $m_i r_k = f_{i,k} m_i$, а также по условию (2) выполнено включение $b_k m_i \in M$, в силу которого элемент

$$\sum_{\mu=1}^{\lambda} \Big(\sum_{l=1}^{q_\mu} b_l m_{i_\mu} \cdot r_{l+1} \cdot \ldots \cdot r_{\tilde{q}} \Big)$$

также принадлежит правому R-модулю M, а следовательно, существует такой $s \in R$, что

$$\begin{cases} a0 = m_i s & (i \neq n), \\ a\Big(\sum\limits_{\mu=1}^{\lambda} \Big(\sum\limits_{l=1}^{q_\mu} b_l m_{i_\mu} \cdot r_{l+1} \cdot \ldots \cdot r_{\tilde{q}} \Big)\Big) = m_n s. \end{cases}$$

Положим $r = r_1 \cdot \ldots \cdot r_{\tilde{q}}$. Снова очевидно, что $r|_{U'}$ — градуированный автоморфизм. Далее, для $1 \leqslant i < n$ имеем $m_i \tau' r = 0 = m_i s$, а также

$$\begin{aligned} m_n \tau' r &= \sum_{\mu=1}^{\lambda} c_{i_\mu} m_{i_\mu} r + \sum_{i=1}^{q} d_i m_n \tau_i' r = \\ &= \sum_{\mu=1}^{\lambda} \Big(\sum_{l=1}^{q_\mu} c_{i_\mu, l} m_{i_\mu} \cdot r_1 \cdot \ldots \cdot r_l \cdot r_{l+1} \cdot \ldots \cdot r_{\tilde{q}} \Big) = \\ &= a \sum_{\mu=1}^{\lambda} \Big(\sum_{l=1}^{q_\mu} a^{-1} c_{i_\mu, l} \Big(\prod_{\alpha=1}^{l-1} f_{i_\mu, \alpha} \Big) m_{i_\mu} r_l \cdot r_{l+1} \cdot \ldots \cdot r_{\tilde{q}} \Big) = \\ &= a \sum_{\mu=1}^{\lambda} \Big(\sum_{l=1}^{q_\mu} b_l m_{i_\mu} \cdot r_{l+1} \cdot \ldots \cdot r_{\tilde{q}} \Big) = m_n s. \end{aligned}$$

Таким образом, и в этом случае $(\tau' r - s)|_{W_n} = 0$.

Пусть теперь $U = \Delta m$ и $U' = \Delta m'$ при $m, m' \in h(M)$ и $m\tau$ однороден. Покажем, что тогда существуют такие $r \in R$ и $s \in h(R)$, что $(\tau r - s)|_U = 0$ и $r|_{U'}$ — автоморфизм.

Следуя вышеизложенному доказательству базы индукции, найдём такой $r_0 \in h(R)$, что $m' r_0 = a m'$ для некоторого $0 \neq a \in h(\Delta)$. Заметим, что r_0 оказывается однородным в силу однородности m'. В качестве же элемента s_0 выберем 0.

Далее, пусть $\tau' = \tau r_0$. Поскольку $m\tau$ однороден, то однороден и $m\tau'$.

Если $\Delta m = \Delta m'$, то дословно повторим вышеизложенное доказательство индукционного перехода для $n = 1$, положив $m_n = m$, и найдём элементы

$r_1, s_1 \in R$ с требуемым свойством для гомоморфизма τ'. В силу однородности m и $m\tau'$, а также из уточнения к пункту (2) формулировки теоремы видим, что элемент $s_1 \in R$ можно выбрать однородным. А поскольку $s_0 = 0$, то искомый s оказывается равным s_1, искомый же элемент r равен произведению $r_0 r_1$.

Итак, можно считать, что m и m' линейно независимы над Δ.

Случай I: $m\tau' \notin U' + U$. Тогда, пользуясь (2), найдём элемент $0 \neq a \in h(\Delta)$, относящийся к линейно независимым элементам $m, m', m\tau'$. Следовательно, существует такой $r_1 \in R$, что $am' = m'r_1$, $a0 = (m\tau')r_1$, и возьмём $s_1 = 0$.

Тогда, очевидно, $r_1|_{U'}$ — градуированный автоморфизм. Далее, имеем $m\tau' r_1 = 0 = ms_1$. Таким образом, $(\tau' r_1 - s_1)|_U = 0$.

Опять, поскольку $s_0 = 0$, искомый s оказывается равным s_1, искомый же элемент r равен произведению $r_0 r_1$.

Случай II: $m\tau' \in U' + U$. Если $m\tau' = 0$, выберем $0 \neq a \in h(\Delta)$ и $r_1 \in R$ так, чтобы $am' = m'r_1$, и возьмём $s_1 = 0$.

Итак, можно предполагать, что $0 \neq m\tau' = c\mu$, где $0 \neq c \in h(\Delta)$ и μ есть либо m, либо m'. Опять используем (2), чтобы выбрать элемент $0 \neq a \in h(\Delta)$, относящийся к линейно независимым элементам m и m'; аналогично выберем $0 \neq b \in h(\Delta)$, относящийся к линейно независимым элементам $a^{-1}c\mu$ и ν, где ν есть либо m, либо m', так что $\nu \neq \mu$. Тогда существует такой $r_1 \in R$, что $b\mu = (a^{-1}c\mu)r_1 \in M$, $b\nu = \nu r_1$, причём по условию (2) выполнено включение $b\mu \in M$ и, следовательно, существует такой $s_1 \in h(R)$, что $a0 = m's_1$, $ab\mu = ms_1$.

Снова очевидно, что $r_1|_{U'}$ — градуированный автоморфизм. Далее, имеем $m\tau' r_1 = c\mu r_1 = ab\mu = ms_1$. Таким образом, и в этом случае $(\tau' r_1 - s_1)|_U = 0$.

Опять, поскольку $s_0 = 0$, искомый s оказывается равным s_1, искомый же элемент r равен произведению $r_0 r_1$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Согласно лемме 4.4.

Теорема доказана. □

4.6. Для полугруппы G пусть G^1 обозначает теоретико-множественное объединение G и единичного элемента.

4.7. Наложим на группу H^Δ, полугруппу G и (H^Δ, G)-полигон A такое ограничение: пусть для любых $a_1, \ldots, a_n \in A$, $h \in H^\Delta$ существует такой $g \in G$, что $ha_i = a_i g$ для всех i. Заметим, что из-за условий сокращений такой g единственен.

Теперь мы готовы доказать однородный вариант теоремы плотности Зельмановича.

Теорема 4.8. *В указанных ограничениях следующие условия на градуированное кольцо R эквивалентны:*

(1) *R слабо примитивно;*

(2) *существует R-решётка $(\Delta, {}_\Delta V_R, M_R)$, такая что для данных Δ-независимых элементов $v_1 \in V_{\alpha_1}, \ldots, v_k \in V_{\alpha_k}$ существует $0 \neq a \in \Delta_h$, такой что для любого $g' \in G^1$ и любых $n_1 \in M_{\alpha_1 g'}, \ldots, n_k \in M_{\alpha_k g'}$ найдётся $r \in R_{gg'}$* (где *$h\alpha_i = \alpha_i g$ для всех i*) *с $an_i = v_i r \in M$ для каждого $i = 1, \ldots, k$;*

(3) *существует* R-*решётка* $(\Delta, {}_\Delta V_R, M_R)$, *такая что для данных* $\tau \in \mathrm{END}({}_\Delta V)_g$ *и конечномерных градуированных* Δ-*подпространств* U *и* $U' = \sum_{i=1}^{k} \Delta m_i$ *модуля* V, *где* $m_1, \ldots, m_k \in h(M)$, *существуют* $g' \in G$, $r \in R_{g'}$ *и* $s \in R_{gg'}$, *что* $(\tau r - s)|_U = 0$ *и* $r|_{U'}$ *является градуированным автоморфизмом.*

Доказательство.

(1) $\Rightarrow$ (2). Существование $r \in R$, такого что $an_i = v_i r \in M$ для каждого $i = 1, \ldots, k$, следует из теоремы 4.5. В силу выбора элементов n_i при $i = 1, \ldots, k$ и условий, наложенных на полигон, имеем, что у найденного при доказательстве теоремы 4.5 элемента $r = \sum_{i=1}^{k} r_i$ все слагаемые r_i лежат в одной однородной компоненте $R_{gg'}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Без ограничения общности можно предполагать, что элементы $m_1, \ldots, m_k$ линейно независимы над Δ. Из соотношения $V = \Delta M$ имеем $U \subseteq \sum_{i=k+1}^{l} \Delta m_i = V'$ для некоторого выбора $m_{k+1}, \ldots, m_l \in h(M)$. Выбросив, возможно, некоторые m_i для $k+1 \leqslant i \leqslant l$, можно предполагать, что $m_1, \ldots, m_k, m_{k+1}, \ldots, m_l$ образуют Δ-базис для $W = U' + V'$. Пусть $\deg m_i = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, l)$. Найдём элементы $r \in R_{g'}$, $s \in R_{gg'}$, такие что $(\tau r - s)|_W = 0$ и $r|_{U'}$ является градуированным автоморфизмом.

Пусть $W_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i$. Покажем индукцией по n существование таких $r \in R_{g'}$, $s \in R_{gg'}$, что $(\tau r - s)|_{W_n} = 0$ и $r|_{U'}$ — градуированный автоморфизм.

При $n = 0$, пользуясь (2), можно выбрать такой $r \in h(R)$, что $m_i r = am_i$ для каждого $i = 1, \ldots, k$ и некоторого $0 \neq a \in h(\Delta)$; а поскольку $W_0 = 0$, то элемент $s \in h(R)$ выбирается произвольно.

Пусть теперь $1 \leqslant n \leqslant l$. По индуктивному предположению существуют такие $r' \in R_{g'}$, $s' \in R_{gg'}$, что $(\tau r' - s')|_{W_{n-1}} = 0$ и $r'|_{U'}$ — градуированный автоморфизм. Положим $\tau' = \tau r' - s'$; достаточно найти такие $r \in R_{\tilde g}$, $s \in R_{gg'\tilde g}$, что $(\tau' r - s)|_{W_n} = 0$ и $r|_{U'}$ — градуированный автоморфизм. Действительно, тогда для любого $v \in W_n$ имеем $v\tau(r'r) = v(\tau' + s')r = v(s + s'r)$, а $r'r$ является градуированным автоморфизмом.

Случай I: $m_n\tau' \notin U' + W_n$. Пользуясь (2), найдём $0 \neq a \in h(\Delta)$, относящийся к линейно независимым элементам $m_1, \ldots, m_j, m_n\tau'$, где $j = \max(n, k)$. Тогда существует такой $r \in R_{\tilde g}$, что $am_i = m_i r$ $(1 \leqslant i \leqslant j)$ и $a0 = (m_n\tau')r$. Положим $s = 0$. Тогда, очевидно, $r|_{U'}$ — градуированный автоморфизм. Далее, для $1 \leqslant i < n$ по предположению имеем $m_i\tau' r = 0 = m_i s$, а также $m_n\tau' r = 0 = m_n s$. Таким образом, $(\tau' r - s)|_{W_n} = 0$.

Случай II: $m_n\tau' \in U' + W_n$. Если $m_n\tau' = 0$, выберем $0 \neq a \in h(\Delta)$ и $r \in h(R)$ так, чтобы $am_i = m_i r$ для $1 \leqslant i \leqslant k$, и возьмём $s = 0$.

Итак, можно предполагать, что $0 \neq m_n\tau' = \sum_{\mu=1}^{\lambda} c_{i_\mu} m_{i_\mu}$, где каждый $0 \neq c_{i_\mu} \in h(\Delta)$ и $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\lambda \leqslant j = \max(n, k)$. Кроме того, из соображений однородности и линейной независимости $\deg c_{i_\mu} m_{i_\mu} = \deg m_n\tau' =$

$= \alpha_n gg'$ для всех μ. Опять используем (2), чтобы выбрать элемент $0 \neq a \in \in h(\Delta)$, относящийся к линейно независимым элементам $m_1, \ldots, m_j$; аналогично выберем $0 \neq b \in h(\Delta)$, относящийся к линейно независимым элементам $a^{-1}c_{i_1}m_{i_1}, \ldots, a^{-1}c_{i_\lambda}m_{i_\lambda}$, и $a^{-1}m_i$ для оставшихся m_i ($1 \leqslant i \leqslant j$, где i не равен никакому i_μ для $\mu = 1, \ldots, \lambda$). Тогда существует $r \in R_{\tilde{g}}$, что для $1 \leqslant \mu \leqslant \lambda$ выполняется $bc_{i_\mu}m_{i_\mu} = (a^{-1}c_{i_\mu}m_{i_\mu})r$, $bm_i = a^{-1}m_i r$ ($i \neq i_\mu$, $1 \leqslant \mu \leqslant \lambda$) и существует $s \in R_{gg'\tilde{g}}$, что $a0 = m_i s$ ($i \neq n$), $abm_n\tau' = m_n s$. Снова очевидно, что $r|_{U'}$ — градуированный автоморфизм. Далее, для $1 \leqslant i < n$ имеем $m_i\tau' r = 0 = m_i s$, а также $m_n\tau' r = \sum\limits_{\mu=1}^{\lambda} c_{i_\mu}m_{i_\mu}r = \sum\limits_{\mu=1}^{\lambda} abc_{i_\mu}m_{i_\mu} = abm_n\tau' = m_n s$. Таким образом, и в этом случае $(\tau' r - s)|_{W_n} = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Согласно лемме 4.4.

Теорема доказана. □

5. Свойства градуированных слабо примитивных колец

5.1. Пусть G — произвольная полугруппа, H — группа и A — (H, G)-полигон, удовлетворяющий условиям сокращения.

Определение 5.2. Градуированное по G кольцо R назовём *первичным*, если для любых градуированных идеалов I и J кольца R из того, что $IJ = 0$, следует, что либо $I = 0$, либо $J = 0$.

Предложение 5.3. *Градуированное слабо примитивное кольцо первично.*

Доказательство. Пусть R — градуированное слабо примитивное кольцо и M_R — точный критически-сжимаемый градуированный модуль.

Пусть I и J — ненулевые градуированные идеалы кольца R. Из точности модуля M следует,что MI и MJ — ненулевые градуированные подмодули в M. Так как M_R сжимаем, то существует мономорфизм $f \in h(\mathrm{HOM}_R(M, MI))$. Тогда $0 \neq f(MJ) = f(M)J \subseteq MIJ$. Таким образом, $IJ \neq 0$ и, следовательно, R — первичное кольцо. □

5.4. Пусть, далее, (H, G)-полигон A обладает следующим свойством: для любых $a_1, \ldots, a_n \in A$, $h \in H$ существуют такие элементы $g_{ij} \in G$, что $ha_i = a_j g_{ij}$.

Легко видеть, что в этом случае кольцо матриц $M_n(S)$ над H-градуированным кольцом S можно рассматривать как G-градуированное кольцо $M_n(S)(a_1, \ldots, a_n)$, где

$$M_n(S)_g(a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} S_{a_1 g a_1^{-1}} & S_{a_1 g a_2^{-1}} & \ldots & S_{a_1 g a_n^{-1}} \\ S_{a_2 g a_1^{-1}} & S_{a_2 g a_2^{-1}} & \ldots & S_{a_2 g a_n^{-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{a_n g a_1^{-1}} & S_{a_n g a_2^{-1}} & \ldots & S_{a_n g a_n^{-1}} \end{pmatrix},$$

здесь через $a_i g a_j^{-1}$ обозначен такой элемент $h \in H$, для которого $ha_j = a_i g$, если же такого h не существует, то положим $S_{a_i g a_j^{-1}} = 0$.

Предложение 5.5. *Пусть* $V = \bigoplus\limits_{a \in A} V_a$ *— конечномерное A-градуированное векторное пространство над H-градуированным телом Δ с базисом $v_1, \ldots, v_n$, где $v_i \in V_{a_i}$.*

Тогда $\mathrm{End}({}_\Delta V) = \mathrm{END}({}_\Delta V) \approx M_n(\Delta)(a_1, \ldots, a_n)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{End}({}_\Delta V)$, тогда $(v_i)f = \sum\limits_{j=1}^{n} d_{ij} v_j$, где $d_{ij} \in \Delta$, и пусть $d_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{tij} d_{ij}^k$, где $d_{ij}^k \in \Delta_{h_{ij}^k}$. В силу условий, наложенных на полигон, существуют такие $g_{ij}^k \in G$, что $h_{ij}^k a_j = a_i g_{ij}^k$. Легко проверить, что $(V_a)f \subseteq \sum\limits_{g \in T} V_{ag}$, где $T = \{g_{ij}^k\}$, и, следовательно, $\mathrm{End}({}_\Delta V) = \mathrm{END}({}_\Delta V)$.

Если же $f \in \mathrm{END}({}_\Delta V)_g$, то в представлении $(v_i)f = \sum\limits_{j=1}^{n} d_{ij} v_j$ все элементы d_{ij} можно считать однородными и $\deg(d_{ij}) a_j = a_i g$. Таким образом, отображение $\Phi\colon f \mapsto (d_{ij})$ определяет изоморфизм градуированных колец $\mathrm{END}({}_\Delta V)$ и $M_n(\Delta)(a_1, \ldots, a_n)$. ☐

5.6. Напомним, что подкольцо R кольца Q называется *правым порядком кольца* Q, если Q содержит единицу и для любого $q \in Q$ найдутся такие $r, s \in R$, причём s обратим в Q, для которых $q = rs^{-1}$.

Определение 5.7. Градуированное подкольцо R градуированного кольца Q назовём *градуированным правым порядком кольца* Q, если Q содержит единицу и для любого $q \in h(Q)$ найдутся такие $r, s \in h(R)$, причём s обратим в Q, для которых $q = rs^{-1}$.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 5.8. *Пусть R — градуированное слабо примитивное кольцо. Тогда:*

либо (1) *R — правый порядок в матричном кольце $M_n(\Delta)$ для некоторого градуированного тела Δ. В этом случае R содержит градуированное подкольцо, изоморфное $M_n(D)$* (*с подходящей градуировкой*) *для некоторого градуированного правого порядка D в Δ;*

либо (2) *для каждого положительного целого числа n существует градуированный правый порядок D тела Δ и градуированное подкольцо кольца R, которое гомоморфно отображается на $M_n(D)$.*

Доказательство. Пусть M_R — точный критически-сжимаемый градуированный модуль, тогда $\Delta = \mathrm{END}(\bar{M}_R)$ — градуированное тело и $\bar{M} = \Delta M$.

Предположим, что $\dim_\Delta \bar{M} \geqslant n$, тогда можно выбрать элементы $m_1, \ldots, m_n \in h(M)$, которые линейно независимы над Δ, и пусть $m_i \in M_{a_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Для каждого $i = 1, \ldots, n$ положим $A_i = \bigcap\limits_{j \neq i} m_j^r$, A_i является правым градуированным идеалом в R (по лемме 2.9). По теореме слабой плотности 2.10

$m_iA_i \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, n$, тогда $N = \bigcap\limits_{i=1}^{n} m_iA_i$ является ненулевым градуированным подмодулем в M.

Положим $D_h = \{a \in \Delta_h \mid aM \subseteq N\}$. Тогда $D = \bigoplus\limits_{h \in H} D_h$ — ненулевое градуированное по H кольцо (в силу сжимаемости M_R).

Покажем, что D является градуированным правым порядком в Δ. Действительно, пусть $0 \neq \lambda \in h(\Delta)$, тогда $\lambda^{-1}(N) \cap N \neq 0$ и существует градуированный мономорфизм $a \in h(D)$, такой что $aM \subseteq \lambda^{-1}(N) \cap N$. Следовательно, $0 \neq \lambda a \in D$.

Пусть, далее, $W_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Dm_i$ и $W'_n = \sum\limits_{i=1}^{n} D^1 m_i$, и пусть теперь $\varphi \in (\mathrm{HOM}_D(W', W))_g$, тогда $(m_i)\varphi = \sum\limits_{j=1}^{n} d_{ij} m_j$ для подходящих $d_{ij} \in h(D)$ (в силу условий сокращения на полигон). Поскольку каждое $d_{ij} m_j \in h(N)$, то $d_{ij} m_j = m_i r_{ij}$ для некоторых $r_{ij} \in (A_i)_g$. Таким образом, $(m_i)\varphi = \sum\limits_{j=1}^{n} m_i r_{ij} = m_i r$, где $r_i = \sum\limits_{i=j}^{n} r_{ij} \in (A_i)_g$. Положив $r = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i$, получим, что $(m_i)\varphi = m_i r$ для всех $i = 1, \dots, n$. Поскольку $(m_i)\varphi \in (W_n)_{a_i g}$, то $r \in R_g$. Из предложения 5.5 следует, что $\mathrm{HOM}_D(W', W) \approx M_n(D)(a_1, \dots, a_n)$.

Легко видеть, что $S = \{s \in R \mid W's \subseteq W\}$ является градуированным подкольцом кольца R. Отображение $s \mapsto r_s|_{W'}$, где r_s — правое умножение на элемент s, определяет гомоморфизм кольца S на $\mathrm{HOM}_D(W', W) \approx M_n(D)(a_1, \dots, a_n)$ с ядром $K = \{r \in R \mid W'r = 0\}$.

Если же $\dim_\Delta \bar{M} = n$, то элементы $m_1, \dots, m_n \in h(M)$, образуют базис ${}_\Delta\bar{M}$, а $K = 0$ в силу точности модуля M_R. Таким образом, в этом случае R содержит градуированное подкольцо, изоморфное $M_n(D)(a_1, \dots, a_n)$ для некоторого градуированного правого порядка D в Δ;

Полагая $U = U' = \bar{M}$ в условии (3) теоремы 4.5, получим, что для любого $f \in \mathrm{END}\,{}_\Delta\bar{M}$ существуют такие $r, s \in R$, что $(fr - s)|_U = 0$ и $r|_{U'}$ является градуированным автоморфизмом. Таким образом, R является правым порядком в кольце

$$\mathrm{END}({}_\Delta\bar{M}) = \mathrm{End}({}_\Delta\bar{M}) \approx M_n(\Delta). \quad \square$$

6. Теоремы плотности для суперколец

6.1. Ассоциативным суперкольцом называется $\mathbb{Z}_2$-градуированное ассоциативное кольцо. Будем обозначать индекс однородности элемента малыми греческими буквами. Если индекс двойной, то первое число обозначает номер элемента, а второе — его индекс однородности.

6.2. Будем называть набор элементов *ровным*, если все элементы набора лежат в одной однородной компоненте. Набор, про который такого свойства не предполагается, будем называть *неровным*.

Теорема 6.3. *Следующие условия на суперкольцо $R = R_0 + R_1$ эквивалентны:*

(1) *R слабо примитивно;*

(2) *существует точный супермодуль $M_R = M_0 + M_1$, $\bar{M}$ — его квазиинъективная оболочка, $\Delta = \mathrm{End}_R(\bar{M})$ — супертело, такие что для данного Δ-независимого набора $v_{1,\phi_1}, \ldots, v_{k,\phi_k} \in \bar{M}$ найдётся такой $0 \neq a_\alpha \in \Delta_\alpha$, что для всякого неровного однородного набора $n_{1,\phi_1+\rho}, \ldots, n_{k,\phi_k+\rho} \in M$ существует такой $r_{\rho+\alpha} \in R_{\rho+\alpha}$, что $a_\alpha n_{i,\phi_i+\rho} = v_{i,\phi_i} r_{\alpha+\rho} \in M$, $i = 1, \ldots, k$;*

(3) *существует точный супермодуль $M_R = M_0 + M_1$, $\bar{M}$ — его квазиинъективная оболочка, $\Delta = \mathrm{End}_R(\bar{M})$ — супертело, такие что для произвольного $f_\tau \in \mathrm{End}_\Delta(\bar{M}_R)$ и произвольного неровного однородного Δ-независимого набора $m_{1,\mu_1}, \ldots, m_{k,\mu_k} \in M$ найдутся такие $r_\rho, s_{\tau+\rho} \in R$, что $m_{i,\mu_i} f_\tau r_\rho = m_{i,\mu_i} s_{\tau+\rho}$ и $0 \neq m_{i,\mu_i} r_\rho \in \Delta_\rho m_{i,\mu_i}$ $\forall i$.*

Доказательство. Применить теорему 4.8. □

Наша следующая цель — «выравнивание» однородности. Сформулируем соответствующие аналоги условий (2) и (3):

(2′) существует точный супермодуль $M_R = M_0 + M_1$, $\bar{M}$ — его квазиинъективная оболочка, $\Delta = \mathrm{End}_R(\bar{M})$ — супертело, такие что для данного Δ_0-независимого набора $v_{1\phi}, \ldots, v_{k\phi} \in \bar{M}$ найдётся такой $0 \neq a_\alpha \in \Delta_\alpha$, что для всякого однородного набора $n_{1\nu}, \ldots, n_{k\nu} \in M$ существует такой $r_{\alpha+\nu+\phi} \in R_{\alpha+\nu+\phi}$, что $a_\alpha n_{i\nu} = v_{i\phi} r_{\alpha+\nu+\phi} \in M_{\alpha+\nu}$, $i = 1, \ldots, k$;

(3′) существует точный супермодуль $M_R = M_0 + M_1$, $\bar{M}$ — его квазиинъективная оболочка, $\Delta = \mathrm{End}_R(\bar{M})$ — супертело, такие что для произвольного $f_\tau \in \mathrm{End}_\Delta(\bar{M}_R)$ и данного однородного Δ_0-независимого набора $m_{1\mu}, \ldots, m_{k\mu} \in M$ найдутся такие $r_\rho, s_{\tau+\rho} \in R$, что $m_{i\mu} f_\tau r_\rho = m_{i\mu} s_{\tau+\rho}$ и $0 \neq m_{i\mu} r_\rho \in \Delta_\rho m_{i\mu}$ $\forall i$.

Эти условия слабее условий (2) и (3). Более того, они не равносильны.

Лемма 6.4. *Справедливы следующие соотношения:* (1) $\Leftrightarrow$ (2′) $\Rightarrow$ (3′).

Доказательство.

(1) $\Rightarrow$ (2′) есть ослабление теоремы 6.3.

(2′) $\Rightarrow$ (1) Покажем, что любой ненулевой циклический суперподмодуль $m_\mu R^1$ супермодуля $M_R = M_0 + M_1$, удовлетворяющего (2′), будет точным критически-сжимаемым R-супермодулем. Во-первых, для произвольного $0 \neq m_\mu$ $m_\mu R^1$ точный. Действительно, пусть $0 \neq t_\tau \in R_\tau$. Поскольку M_R точен, существует такой $n_\nu \in M_\nu$, что $n_\nu t_\tau \neq 0$. Применим условие (2′). Получим $a_\alpha n_\nu = m_\mu r_{\mu+\nu+\alpha}$ для некоторых $a_\alpha \in \Delta_\alpha$, $r_{\mu+\nu+\alpha} \in R_{\mu+\nu+\alpha}$. Тогда $m_\mu r_{\mu+\nu+\alpha} t_\tau = a_\alpha n_\nu t_\tau \neq 0$.

Докажем теперь сжимаемость супермодуля $m_\mu R^1$. Пусть N_R — некий ненулевой суперподмодуль. Пусть $0 \neq n_\nu \in N_R$. По условию (2′), существуют такие $a_\alpha \in \Delta_\alpha$, $r_{\mu+\nu+\alpha} \in R_{\mu+\nu+\alpha}$, что $a_\alpha m_\mu = n_\nu r_{\mu+\nu+\alpha}$. Следовательно, a_α — искомое вложение.

Наконец, докажем, что любой ненулевой однородный частичный эндоморфизм супермодуля M_R является мономорфизмом. Это следует из того, что $\bar{M}$ — квазиинъективный и поэтому любой ненулевой однородный частичный эндоморфизм продолжается до элемента из Δ (причём единственным образом, из-за обратимости ненулевых элементов из Δ) и, следовательно, является мономорфизмом.

$(2') \Rightarrow (3')$ следует из доказанной импликации и теоремы 6.3. $\square$

Рассмотрим три условия на суперкольцо $R = R_0 + R_1$ и супермодуль $M = M_0 + M_1$ над ним (в прежних обозначениях).

(A) $0 \neq n_\nu r_1 = d_1 n_\nu$ для некоторых $n_\nu \in M_\nu$, $r_1 \in R_1$, $d_1 \in \Delta_1$.

(B) Существует полностью ненулевая тройка $\tilde{m}_{\mu+1}, m_\mu, \hat{m}_{\mu+1} \in M$, такая что $\tilde{m}_{\mu+1}\tilde{r}_1 = m_\mu$, $m_\mu r_1 = \hat{m}_{\mu+1}$ для некоторых $\tilde{r}_1, r_1 \in R_1$.

(C) $R_1^2 \neq 0$.

Всегда выполняются импликации (A) $\Rightarrow$ (B) $\Rightarrow$ (C). При условии точности на супермодуль M_R имеет место также (C) $\Rightarrow$ (B).

Лемма 6.5. *Пусть $M_R = M_0 + M_1$ — точный супермодуль над суперкольцом $R = R_0 + R_1$, $\bar{M}$ — его квазиинъективная оболочка, $\Delta = \mathrm{End}_R(\bar{M})$ — супертело. Пусть для произвольного $f_\tau \in \mathrm{End}_\Delta(\bar{M}_R)$ и произвольного однородного Δ_0-независимого набора $m_{1\mu}, \ldots, m_{k\mu} \in M$ найдутся такие $r_\rho, s_{\tau+\rho} \in R$, что $m_{i\mu} f_\tau r_\rho = m_{i\mu} s_{\tau+\rho}$ и $0 \neq m_{i\mu} r_\rho \in \Delta_\rho m_{i\mu}$ $\forall i$. Предположим также, что имеет место одно из условий* (A), (B) *или* (C).

Тогда R — слабо примитивное суперкольцо.

Доказательство. Поскольку M_R точен, можно считать, что выполняется условие (B). Тогда циклический супермодуль $m_\mu R^1$ является точным критически-сжимаемым над суперкольцом R. Покажем точность. Пусть $0 \neq t_\tau \in R_\tau$. Так как M_R точен, существует такой $n_\nu \in M_\nu$, что $n_\nu t_\tau \neq 0$. Если $\nu = \mu$, то положим $v_\nu = m_\mu$, иначе $v_\nu = \hat{m}_{\mu+1}$. Далее, выберем $f_0 \in \mathrm{End}_R(\bar{M})$ таким, чтобы $v_\nu f_0 = n_\nu$. Если $n_\nu = d_0 v_\nu$, где $0 \neq d_0 \in \Delta_0$, то $v_\nu f_0 r_\rho = v_\nu s_\rho$ и $0 \neq v_\nu r_\rho \in \Delta_\rho v_\nu$ для некоторых $r_\rho, s_\rho \in R_\rho$. Следовательно, $0 \neq n_\nu r_\rho = d_0 v_\nu r_\rho \in \Delta_\rho n_\nu$. Если же v_ν и n_ν Δ_0-независимы, то $v_\nu f_0 r_\rho = v_\nu s_\rho$ и $0 \neq v_\nu r_\rho \in \Delta_\rho v_\nu$, $n_\nu f_0 r_\rho = n_\nu s_\rho$ и $0 \neq n_\nu r_\rho \in \Delta_\rho n_\nu$ для некоторых $r_\rho, s_\rho \in R_\rho$. Итак, $v_\nu s_\rho t_\tau = v_\nu f_0 r_\rho t_\tau = n_\nu r_\rho t_\tau \neq 0$. Получаем точность супермодуля $m_\mu R^1$, поскольку $v_\nu s_\rho \in m_\mu R^1$. Покажем сжимаемость супермодуля $m_\mu R^1$. Пусть N_R — его суперподмодуль и $0 \neq n_\nu \in N_\nu$. Если $\nu = \mu$, то положим $v_\nu = m_\mu$, иначе $v_\nu = \tilde{m}_{\mu+1}$. Далее, выберем $f_0 \in \mathrm{End}_R(\bar{M})$ таким, чтобы $n_\nu f_0 = v_\nu$. Опять отдельно рассматриваем случаи зависимости и независимости n_ν и v_ν. В итоге получаем, что $n_\nu f_0 r_\rho = n_\nu s_\rho$, $0 \neq n_\nu r_\rho \in \Delta_\rho n_\nu$ и $0 \neq v_\nu r_\rho \in \Delta_\rho v_\nu$ для некоторых $r_\rho, s_\rho \in R_\rho$. Пусть $v_\nu r_\rho = a_\rho v_\nu$ для некоторого $a_\rho \in \Delta_\rho$. Тогда имеем $0 \neq a_\rho v_\nu = v_\nu r_\rho = n_\nu f_0 r_\rho = n_\nu s_\rho \in N$. Так как $m_\mu R^1 \subseteq v_\nu R^1$, то a_ρ и есть искомое вложение супермодуля $m_\mu R^1$ в N. Осталось показать, что любой ненулевой однородный частичный эндоморфизм является мономорфизмом. Пусть N_R — суперподмодуль супермодуля $m_\mu R^1$ и $0 \neq f_\gamma \in \mathrm{Hom}_R(N, m_\mu R^1)$. Пусть $f_\gamma(n_\nu) \neq 0$ для некоторого $n_\nu \in N_\nu$ и $0 \neq l_\lambda \in N_\lambda$. Покажем, что $f_\gamma(l_\lambda) \neq 0$. Если $\lambda + \gamma = \mu$, то положим

$v_{\lambda+\gamma} = m_\mu$, иначе $v_{\lambda+\gamma} = \tilde{m}_{\mu+1}$. Поскольку $n_\nu = v_{\lambda+\gamma} r_{\lambda+\gamma+\nu}$, то $f_\gamma(v_{\lambda+\gamma}) \neq 0$. Выберем $g_\gamma \in \mathrm{End}_R(\bar{M})$ таким, чтобы $l_\lambda g_\gamma = v_{\lambda+\gamma}$. Опять отдельно рассматриваем случаи зависимости и независимости l_λ и $f_\gamma(v_{\lambda+\gamma})$ над Δ_0. В итоге получаем, что $l_\lambda g_\gamma r_\rho = l_\lambda s_{\rho+\gamma}$, $0 \neq l_\lambda r_\rho \in \Delta_\rho l_\lambda$ и $0 \neq f_\gamma(v_{\lambda+\gamma}) r_\rho \in \Delta_\rho f_\gamma(v_{\lambda+\gamma})$. Итак, $f_\gamma(l_\lambda) s_{\rho+\gamma} = f_\gamma(l_\lambda s_{\rho+\gamma}) = f_\gamma(l_\lambda g_\gamma r_\rho) = f_\gamma(v_{\lambda+\gamma} r_\rho) = f_\gamma(v_{\lambda+\gamma}) r_\rho \neq 0$. Следовательно, $f_\gamma(l_\lambda) \neq 0$ и f_γ — мономорфизм. □

Теорема 6.6. *Условия* (1), (2′), (3′) + (B) *и* (3′) + (C) *на суперкольцо* $R = R_0 + R_1$ *эквивалентны.*

Доказательство. Принимая во внимание полученные выше результаты, мы должны лишь показать, что (1) ⇒ (C).

Если супермодуль над суперкольцом является точным сжимаемым, то носителем любого его ненулевого подмодуля является вся группа $\mathbb{Z}_2$ (мы считаем, что носителями самих суперкольца и супермодуля является вся группа $\mathbb{Z}_2$).

Если суперкольцо R удовлетворяет условию $R_1^2 = 0$, то оно не является слабо примитивным. Действительно, пусть существует точный критически-сжимаемый супермодуль $M_R = M_0 + M_1$. Пусть $m_\mu r_1 \neq 0$, где $m_\mu \in M_\mu, r_1 \in R_1$. Тогда носитель суперподмодуля $m_\mu r_1 R$ не совпадает с $\mathbb{Z}_2$. □

Литература

[1] Авраамова О. Д. Обобщенная теорема плотности // Абелевы группы и модули, выпуск 8. — Томск: Издательство Томского университета, 1989. — С. 3—16.

[2] Балаба И. Н. Градуированные слабопримитивные кольца // Тезисы докладов III Международной конференции «Современные проблемы теории чисел и ее приложения». — Тула, 1996. — С. 12.

[3] Джекобсон Н. Строение колец. — М.: Издательство иностранной литературы, 1961.

[4] Зеленов С. В. Теорема плотности в градуированном случае // Kurosh Algebraic Conference ’98, Abstracts of Talks. — М.: МГУ, Механико-математический факультет, 1998. — С. 174.

[5] Зеленов С. В. Теорема слабой плотности в градуированном случае // Труды 6-х математических чтений МГСУ. — М., 1999. — С. 107—110.

[6] Зеленов С. В. Градуированная версия теоремы плотности Зельмановича // Тезисы докладов, представленных на международный семинар, посвященный 70-летию кафедры высшей алгебры МГУ (10—12 февраля 1999 г.). — М.: Издательство механико-математического факультета МГУ, 1999. — С. 25—26.

[7] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.

[8] Abrams G., Menini C., del Rio A. Realization theorems for categories of graded modules over semigroup-graded rings // Comm. Algebra. — 1994. — Vol. 22, no. 13. — P. 5343—5388.

[9] Beidar K. I., Martindale W. S., III, Mikhalev A. V. Rings with Generalized Identities. — New York: Marcel Dekker, Inc., 1996.

[10] Gomez Pardo J. L., Nastasescu C. Topological aspect of graded rings // Comm. Algebra. — 1993. — Vol. 21, no. 12. — P. 4481—4493.

[11] Faith C. Lectures on injective modules and quotient rings. — Lecture Notes in Math., vol. 49. — Berlin, New York: Springer-Verlag, 1967.

[12] Johnson R. E. Representations of prime rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1953. — Vol. 74, no. 2. — P. 351—357.

[13] Kilp M., Knauner U., Mikhalev A. V. Monoids, acts and categories with applications to wreath products and graphs. — Berlin, New York: de Gruyter, 2000.

[14] Koh K., Luh J. On a finite dimensional quasi-simple module // Proc. Amer. Math. Soc. — 1970. — Vol. 25, no. 4. — P. 801—807.

[15] Koh K., Mewborn A. C. Prime rings with maximal annihilator and maximal complement right ideals // Proc. Amer. Math. Soc. — 1965. — Vol. 16, no. 5. — P. 1073—1076.

[16] Koh K., Mewborn A. C. A class of prime prime rings // Canad. Math. Bull. — 1966. — Vol. 9, no. 1. — P. 63—72.

[17] Năstăsescu C., van Oystaeyen F. Graded Ring Theory. — Mathematical Library, vol. 28. — Amsterdam: North-Holland, 1982.

[18] Năstăsescu C., Raianu S., van Oystaeyen F. Modules graded by G-sets // Math. Z. — 1990. — Vol. 203, no. 4. — P. 605—627.

[19] Liu Shaoxue, Beattie M., Fang Hongjin. Graded division rings and the Jacobson density theorem // Journal of Beijing Normal University (Natural Science). — 1991. — Vol. 27, no. 2. — P. 129—134.

[20] Zelmanowitz J. An extension of the Jacobson density theorem // Bull. Amer. Math. Soc. — 1976. — Vol. 88, no. 4. — P. 551—553.

[21] Zelmanowitz J. Weakly primitive rings // Comm. Algebra. — 1981. — Vol. 9, no. 1. — P. 23—45.

[22] Zhu, Bin. Graded primitive ring and Kaplansky's theorem // Beijing Shuifan Daxue Xuebao. — 1998. — Vol. 34, no. 1. — P. 1—5.