Первичный радикал специальных супералгебр Ли*

И. Н. БАЛАБА, С. А. ПИХТИЛЬКОВ
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого

УДК 512.554.36

Ключевые слова: градуированная алгебра, супералгебра Ли, разрешимый радикал, первичный радикал.

Аннотация

Введено понятие обобщённой специальной супералгебры Ли. Доказано, что для обобщённо специальных супералгебр Ли локально разрешимый градуированный радикал совпадает с первичным градуированным радикалом.

Abstract

I. N. Balaba, S. A. Pikhtilkov, Prime radicals of special Lie superalgebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 1, pp. 51—60.

The concept of a generally special Lie superalgebra was introduced. It was proved that the locally solvable graded radical of a generally special Lie superalgebra coincides with its prime graded radical.

1. Введение

В конце XX века была создана теория абстрактных супералгебр Ли. Различные аспекты этой теории исследовались в работах Ю. А. Бахтурина, М. В. Зайцева, А. А. Михалёва, М. Шейнерта и других. Была развита теория конечномерных супералгебр Ли. Монография [1] посвящена бесконечномерным супералгебрам Ли.

По своему строению супералгебры Ли во многом похожи на алгебры Ли. Поэтому представляется естественным рассмотреть класс специальных супералгебр Ли, аналогичный классу специальных алгебр Ли [2].

Скажем, что ассоциативная супералгебра A является PI-алгеброй, если она удовлетворяет тождественному соотношению как алгебра без градуировки. Известно, что достаточным условием выполнимости тождества в градуированной конечной группой алгебре является выполнимость тождественного соотношения в единичной компоненте алгебры [3]. В [4] была дана оценка степени такого тождества.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант № 02-01-00584.

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 1, с. 51—60.

Назовём супералгебру Ли L над полем F специальной, если существует ассоциативная PI-супералгебра A, такая что $L \subseteq [A]$, где $[A]$ — это алгебра A по отношению к операции коммутирования, определённой на однородных элементах по формуле

$$[x, y] = xy - (-1)^{\alpha(x)\alpha(y)} yx,$$

здесь $\alpha(x)$ — степень элемента x. Ассоциативная супералгебра A по отношению к такой операции коммутирования является супералгеброй Ли $[A]$. Понятие специальных цветных супералгебр Ли исследовалось в работе [5].

Пусть L – супералгебра Ли, $a \in L$. Через $\operatorname{ad} a$ обозначим линейное отображение $\operatorname{ad} a\colon L \to L$, заданное формулой $x \operatorname{ad} a = [x, a]$. Обозначим через $\operatorname{Ad} L$ ассоциативную алгебру, порождённую в $\operatorname{End} L$ множеством $\{\operatorname{ad} a \mid a \in L\}$.

Алгебра $\operatorname{Ad} L$ является ассоциативной супералгеброй.

Для супералгебр Ли справедлив следующий аналог теоремы из [6].

Теорема 1. *Пусть L — специальная супералгебра Ли над полем F. Тогда присоединённая супералгебра $\operatorname{Ad} L$ является PI-алгеброй.*

Так же, как и для случая алгебр Ли, скажем, что супералгебра Ли L является обобщённо специальной, если присоединённая алгебра $\operatorname{Ad} L$ является PI-алгеброй.

Для супералгебр Ли можно доказать аналог теоремы Ю. А. Бахтурина из [7].

Теорема 2. *Пусть L — специальная супералгебра Ли над полем F и супералгебра V лежит в многообразии, порождённом супералгеброй L. Тогда присоединённая супералгебра $\operatorname{Ad} V$ лежит в многообразии, порождённом присоединённой супералгеброй $\operatorname{Ad} L$.*

Из теорем 1 и 2 получим утверждение.

Следствие 1. *Любая супералгебра Ли, лежащая в многообразии, порождённом специальной супералгеброй Ли, является обобщённо специальной.*

Определение разрешимости даётся для супералгебр Ли так же, как для алгебр Ли.

Градуированные аналоги стандартных определений для градуированных алгебр можно найти в монографии [8]. Их без труда можно перенести на супералгебры Ли.

Для обобщённо специальных супералгебр Ли можно доказать аналоги теорем из [9].

Теорема 3. *Любая обобщённо специальная супералгебра Ли L над полем содержит наибольший локально разрешимый градуированный идеал, который обозначим через $R(L)$.*

Теорема 4. *Пусть L — обобщённо специальная супералгебра Ли. Тогда $R(L/R(L)) = 0$.*

Теоремы 3 и 4 означают, что локально разрешимые супералгебры Ли образуют радикальный класс в классе всех обобщённо специальных супералгебр Ли.

Скажем, что обобщённо специальная супералгебра Ли L полупростая, если $R(L) = 0$.

Скажем, что коммутативная супералгебра является суперполем, если все её ненулевые однородные элементы обратимы.

Теорема 5. *Пусть L — обобщённо специальная полупростая супералгебра Ли и d — степень тождества, выполненного в супералгебре $\mathrm{Ad}\, L$. Тогда алгебра L является подпрямым произведением первичных супералгебр Ли L_α, $\alpha \in I$, размерности не выше $[d/2]^2$ над суперполями F_α, которые являются расширениями основного поля F.*

Следствие 2. *Для обобщённо специальных супералгебр Ли первичный градуированный и локально разрешимый радикалы совпадают.*

2. Основные определения

Супералгеброй Ли L над полем F называется Z_2-градуированное векторное пространство $L = L_0 \oplus L_1$ над полем F, на котором определена билинейная операция $[x, y]$, причём для однородных элементов x, y, z справедливы тождества

$$\alpha([x, y]) = \alpha(x) + \alpha(y),$$
$$[x, y] = (-1)^{\alpha(x)\alpha(y)+1}[y, x],$$
$$[x, [y, z]](-1)^{\alpha(x)\alpha(z)} + [z, [x, y]](-1)^{\alpha(z)\alpha(y)} + [y, [z, x]](-1)^{\alpha(y)\alpha(x)} = 0,$$

где $\alpha(x)$ — степень однородного элемента x [10].

Назовём Z_2-градуированную ассоциативную алгебру ассоциативной супералгеброй.

Идеал I ассоциативной супералгебры или супералгебры Ли называется градуированным, если $I = I_0 \oplus I_1$, где $I_i = I \cap A_i$, $i = 0, 1$. Фактор-алгебра по градуированному двустороннему идеалу является ассоциативной супералгеброй или супералгеброй Ли соответственно.

Для доказательства основных результатов нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Назовём градуированным радикалом Джекобсона $J_{\mathrm{gr}}(A)$ супералгебры A пересечение аннуляторов всех градуированных неприводимых правых A-модулей. Известно, что $J_{\mathrm{gr}}(A)$ является также пересечением максимальных градуированных правых идеалов и определение является лево-право симметричным [8].

Лемма 1 ([11]). *Пусть $A = A_0 \oplus A_1$ — ассоциативная супералгебра. Тогда $J_{\mathrm{gr}}(A)_0 = J(A_0)$.*

Лемма 2. *Пусть $A = A_0 \oplus A_1$ — ассоциативная супералгебра, нулевая однородная компонента которой нильпотентна. Тогда супералгебра A также является нильпотентной.*

Доказательство. Пусть c — это степень нильпотентности алгебры A_0. Тогда $x_1x_2\ldots x_c = 0$ для любых $x_i \in A_0$.

Покажем, что

$$z_1z_2\ldots z_{2c^2} = 0, \quad z_1,\ldots,z_{2c^2} \in A_0 \cup A_1. \tag{1}$$

Если в это произведение входит не меньше $2c$ элементов из A_1, оно равно нулю.

Предположим, что в произведении (1) элементов из A_1 меньше $2c$.

Пусть их $2c-1$ (для меньшего числа также получим нуль, как это будет видно из дальнейших рассуждений).

Рассмотрим произведение (1). Тогда на $2c$ мест между, левее и правее элементов из A_1 приходится

$$2c^2 - (2c-1) = 2c^2 - 2c + 1 = (c-1)2c + 1$$

элементов. Согласно принципу Дирихле на одном из мест будет не меньше c элементов из A_0.

Следовательно, произведение (1) равно нулю. □

Нам потребуется понятие градуированного первичного радикала.

Градуированный идеал P ассоциативной супералгебры или супералгебры Ли называется gr-первичным, если для любых двух градуированных идеалов U и V из включения $UV \subseteq P$ следует, что $U \subseteq P$ или $V \subseteq P$.

Супералгебра называется gr-первичной, если нулевой идеал является gr-первичным.

Пересечение всех gr-первичных идеалов называется первичным градуированным радикалом $P_{\mathrm{gr}}(A)$ алгебры A.

Лемма 3. *Пусть A — ассоциативная супералгебра. Тогда её первичный градуированный радикал $P_{\mathrm{gr}}(A)$ является локально нильпотентной ассоциативной супералгеброй.*

Доказательство. Согласно [11] имеем $P_{\mathrm{gr}}(A) \cap A_0 = P(A_0)$, где $P(A_0)$ — первичный радикал нулевой однородной компоненты A_0.

Известно, что первичный радикал ассоциативной алгебры является локально нильпотентным [12].

Рассмотрим конечное подмножество элементов $z_1,\ldots,z_n \in P_{\mathrm{gr}}(A)$, и пусть $z_i = x_i + y_i$, где $x_i \in P_{\mathrm{gr}}(A)_0$, $y_i \in P_{\mathrm{gr}}(A)_1$.

Из локальной нильпотентности $P_{\mathrm{gr}}(A)_0$ следует, что существует максимальное натуральное m, при котором произведение $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_m}$ может быть отлично от нуля.

Следовательно, алгебра B, порождённая множеством $X \cup U$, где U — множество всех элементов вида

$$y_{j_1} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} y_{j_2}, \quad 0 \leqslant r \leqslant m,$$

нильпотентна.

Эта алгебра является нулевой компонентой супералгебры V, порождённой элементами x_i, y_j и содержащей элементы $z_1, \ldots, z_n$. Из леммы 2 следует нильпотентность супералгебры V. $\square$

Известно, что центр градуированной абелевой группой ассоциативной алгебры A является градуированным [8]. То же можно утверждать про супералгебры Ли.

3. Доказательство теорем 1 и 2

Для доказательства теоремы 1 применим идеи из [6].

Доказательство теоремы 1. Пусть L вкладывается в $[A]$, где A — ассоциативная PI-супералгебра с единицей. Пусть a_r и a_l — такие эндоморфизмы A, что $xa_r = xa$ и $xa_l = ax$, $x, a \in A$.

Если элементы x и a принадлежат к одной однородной компоненте алгебры A, то $x \operatorname{ad} a = x(a_r - a_l)$. Если же они принадлежат к разным однородным компонентам, то $x \operatorname{ad} a = x(a_r + a_l)$.

Пусть A_r и A_l — алгебры эндоморфизмов, порождённые множествами $\{a_r\}$ и $\{a_l\}$ соответственно. Нетрудно заметить, что алгебра A изоморфна алгебре A_r и антиизоморфна A_l.

Рассмотрим алгебру A как супералгебру Ли $[A]$. Получим вложение $\mathrm{Ad}[A] \subseteq \subseteq A_r A_l$.

Так как элементы алгебр A_r и A_l коммутируют, алгебра $(A_r)_0(A_l)_0$ является гомоморфным образом алгебры $(A_r)_0 \otimes_F (A_l)_0$. Так как тензорное произведение PI-алгебр над основным полем является PI-алгеброй [13], то $(A_r)_0 \otimes_F (A_l)_0$ является PI-алгеброй. Следовательно, $\mathrm{Ad}[A]$ — ассоциативная PI-алгебра.

Рассмотрим подалгебру S алгебры $\mathrm{Ad}[A]$, порождённую множеством $\{\mathrm{ad}_A x \mid x \in L\}$. Элементы алгебры S отображают L в L. Ограничивая действие элементов алгебры S на L, получим алгебру $\mathrm{Ad}\, L$.

Следовательно, $\mathrm{Ad}\, L$ — ассоциативная PI-супералгебра. $\square$

Доказательство теоремы 2 можно провести, дословно повторяя доказательство из [7].

4. Доказательство теорем 3, 4 и 5

В работе [14] доказан градуированный аналог теоремы плотности Джекобсона.

Градуированная алгебра, обладающая точным gr-неприводимым правым A-модулем, называется gr-примитивной (справа).

Теорема A ([14]). *Пусть A — градуированное группой G кольцо и M — точный gr-неприводимый правый A-модуль Тогда*

1) *центроид D модуля M_A является градуированным телом;*

2) *для любых линейно независимых над D однородных элементов модуля $m_1, \ldots, m_n \in M$ и произвольных $y_1, \ldots, y_n \in M$ существует элемент $a \in A$, такой что $m_i a = y_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

Пример. Множество матриц вида

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in F \right\}$$

является суперполем, если положить

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right\}, \; A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{где } a, b \in F.$$

С помощью теоремы A в [15] доказан градуированный аналог теоремы Капланского.

Теорема B ([15]). *Пусть A — градуированная группой G gr-примитивная PI-алгебра, удовлетворяющая полиномиальному тождеству степени d. Тогда A является центральной gr-простой конечномерной над своим градуированным центром алгеброй размерности не выше $[d/2]^2$.*

Замечание. Единичная компонента примитивной градуированной PI-алгебры может не быть примитивной [14].

В качестве примера можно рассмотреть ассоциативную супералгебру, реализованную в алгебре матриц порядка $2n$ над полем F:

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ S & T \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ S & 0 \end{pmatrix},$$

где P, Q, S, T — произвольные матрицы порядка n над F.

Её нулевая компонента A_0 является прямой суммой простых алгебр и не является примитивной.

Для ассоциативных супералгебр справедлив аналог теоремы Познера.

Теорема C ([16]). *Пусть A — gr-первичная ассоциативная градуированная группой G алгебра, которая удовлетворяет полиномиальному тождеству степени d; S — множество однородных регулярных элементов градуированного центра Z алгебры A и A_S — её градуированная алгебра частных. Тогда:*

(1) *A_S — конечномерная над своим градуированным центром F gr-простая алгебра, причём F — градуированное поле частных для Z;*

(2) *размерность A_S над F не превосходит $[d/2]^2$.*

Следующие две леммы помогают исследовать радикал обобщённо специальной супералгебры Ли.

Лемма 4. *Пусть L — конечно порождённая обобщённо специальная супералгебра Ли, I — её локально разрешимый градуированный идеал и L/I — разрешимая алгебра. Тогда L — разрешимая алгебра.*

Доказательство. Хорошо известно, что расширение разрешимой алгебры при помощи разрешимой является разрешимой алгеброй. Достаточно показать, что идеал I является разрешимым.

Так как L — обобщённо специальная супералгебра, фактор супералгебры по центру $L/Z(L)$ вложен в ассоциативную PI-супералгебру $[S]$, которую можно считать конечно порождённой. Обозначим через $\bar{I}$ образ идеала I в фактор-алгебре $L/Z(L)$, и пусть R — градуированный радикал Джекобсона алгебры S. Из леммы 1 следует, что $R_0 = J(S_0)$. Согласно теореме Кемера—Размыслова—Брауна [17–19], R_0 является нильпотентным, откуда в силу леммы 2 получим нильпотентность градуированного радикала Джекобсона R.

Фактор супералгебры S по градуированному радикалу Джекобсона S/R является подпрямым произведением gr-примитивных градуированных PI-супералгебр P_α, $\alpha \in K$, которые, согласно теореме B, являются gr-простыми, конечномерными над центром Z_α. Их размерности ограничены в совокупности числом $[d/2]^2$, где d — степень полиномиального тождества, выполненного в ассоциативной супералгебре S.

Обозначим через $\tilde{I}$ образ идеала $\bar{I}$ в фактор-супералгебре Ли $[S/R]$. Пусть π_α — проектор алгебры S на P_α. Тогда размерность идеала $\pi_\alpha(\tilde{I})$ над суперполем Z_α не превосходит $[d/2]^2$. Рассмотрим его базис $Y_\alpha \subseteq \pi_\alpha(\tilde{I})$. Подалгебра, порождённая множеством Y_α, разрешима, и её ступень разрешимости не превосходит $[d/2]^2$. Следовательно, идеал $\tilde{I}$ является разрешимым.

Идеал $\bar{I}$ лежит в расширении нильпотентного идеала R при помощи разрешимой супералгебры Ли $\tilde{I}$. Из этого следует разрешимость алгебры $\bar{I}$. Факторизация по центру не влияет на разрешимость. Поэтому идеал I разрешим, что и требовалось доказать. □

Замечание. Доказательство леммы 4 можно упростить для полей, имеющих характеристику, отличную от 2, так как в этом случае градуированный радикал Джекобсона совпадает с неградуированным радикалом [11].

Лемма 5. *Пусть L — обобщённо специальная супералгебра Ли, I — локально разрешимый градуированный идеал в L и фактор-алгебра L/I локально разрешима. Тогда супералгебра Ли L является локально разрешимой.*

Доказательство. Пусть $X \subseteq L$ — конечное подмножество и A — супералгебра Ли, порождённая множеством X.

Покажем, что супералгебра Ли A разрешима. Пусть $\tilde{I} = A \cap I$. Тогда

$$\bar{A} = (A + I)/I \simeq A/\tilde{I}.$$

Так как $\bar{A} \subseteq L/I$, то супералгебра Ли $\bar{A}$ конечно порождена, а следовательно и разрешима.

Таким образом, согласно лемме 4 супералгебра Ли A разрешима. □

Из леммы 5 легко получим следующее утверждение.

Лемма 6. *Сумма локально разрешимых градуированных идеалов обобщённо специальной супералгебры Ли является локально разрешимым идеалом.*

Доказательство теоремы 3. Пусть L — обобщённо специальная супералгебра. Обозначим через $R(L)$ сумму всех её локально разрешимых градуированных идеалов. Докажем, что идеал $R(L)$ локально разрешим.

Пусть $X \subseteq R(L)$ — произвольное конечное подмножество. Тогда найдётся конечное множество локально разрешимых идеалов супералгебры L, таких что

$$X \subseteq I_1 + \ldots + I_n.$$

Согласно лемме 6 сумма $I_1 + \ldots + I_n$ является локально разрешимым идеалом, и следовательно, супералгебра, порождённая множеством X, разрешима. $\square$

Из леммы 6 непосредственно следует теорема 4.

Доказательство теоремы 5. Так как $R(L) = 0$, имеет место вложение $L \subseteq \mathrm{Ad}\, L$.

Пусть $P = P(\mathrm{Ad}\, L)$ — первичный градуированный радикал присоединённой ассоциативной супералгебры $\mathrm{Ad}\, L$. Из леммы 3 следует его локальная нильпотентность.

Тогда алгебра $\mathrm{Ad}\, L/P$ является подпрямым произведением gr-первичных ассоциативных супералгебр P_α, $\alpha \in I$.

Пусть d — степень полиномиального тождества, выполненного в супералгебре $\mathrm{Ad}\, L$.

Согласно теореме C супералгебра P_α является конечномерной над градуированным полем частных K_α центра Z_α размерности не выше $[d/2]^2$.

Используя локальную нильпотентность идеала P и полупростоту алгебры L, легко заметить, что алгебра L представима в виде подпрямого произведения полупростых супералгебр Ли L_α, конечномерных над соответствующими суперполями размерности не выше $[d/2]^2$.

Осталось показать, что полупростую супералгебру Ли L_α, конечномерную над суперполем, можно представить в виде подпрямого произведения gr-первичных супералгебр Ли. В этом доказательстве используется рассуждение из [17].

Покажем по индукции, что алгебра L_α имеет конечное число gr-минимальных идеалов.

Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_m$ — gr-минимальные идеалы алгебры L_α, такие что их сумма прямая $\rho_1 + \ldots + \rho_m = \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_m$ и ρ_{m+1} — ещё один gr-минимальный идеал.

Возможны два случая.

i) $\rho_{m+1} \subseteq \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_m$. Из полупростоты алгебры L_α следует, что

$$[\rho_{m+1}, \rho_1 + \ldots + \rho_m] = [\rho_{m+1}, \rho_1] + \ldots + [\rho_{m+1}, \rho_m] \neq 0.$$

Так как $[\rho_i, \rho_j] \subseteq \rho_i \cap \rho_j$, коммутатор различных gr-минимальных идеалов равен нулю. Следовательно, ρ_{m+1} совпадает с одним из идеалов ρ_i, $i = 1, \ldots, m$.

ii) $\rho_{m+1} \cap (\rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_m) = 0$ и сумма идеалов $\rho_1, \ldots, \rho_{m+1}$ прямая. Из конечномерности алгебры L_α следует конечность числа gr-минимальных идеалов.

Обозначим через $\rho_1, \ldots, \rho_k$ gr-минимальные идеалы супералгебры Ли L_α. Обозначим через M_i gr-максимальный идеал, содержащий идеалы

$$\rho_1, \ldots, \rho_{i-1}, \rho_{i+1}, \ldots, \rho_k,$$

такой что $M_i \cap \rho_k = 0$. Из леммы Цорна следует, что такой идеал M_i существует.

Тогда $M_1 \cap \ldots \cap M_k = 0$ и супералгебра Ли L_α раскладывается в подпрямое произведение супералгебр Ли $L_{\alpha,i} = L_\alpha / M_i$, $i = 1, \ldots, k$. Заметим, что супералгебра $L_{\alpha,i}$ конечномерна над суперполем K_α и обладает единственным gr-минимальным идеалом $\bar{\rho}_i$.

Пусть U и V — два ненулевых градуированных идеала супералгебры $L_{\alpha,i}$. Тогда $\bar{\rho}_i \subseteq U \cap V$.

Из полупростоты супералгебры L_α следует, что $[\rho_i, \rho_i] \neq 0$. Следовательно, $[U, V] \neq 0$. Мы доказали gr-первичность супералгебры Ли $L_{\alpha,i}$.

Теорема доказана. □

Доказательство следствия 2. Из теоремы 5 следует, что для обобщённо специальных супералгебр Ли первичный градуированный радикал содержится в локально разрешимом.

Мы уже отмечали, что gr-первичная специальная супералгебра Ли конечномерна над некоторым градуированным расширением основного поля F.

Образ локально разрешимого радикала в факторе по gr-первичному идеалу является разрешимым идеалом и, следовательно, равен нулю. Поэтому локально разрешимый радикал содержится в первичном. □

Авторы выражают признательность В. Н. Латышеву и А. В. Михалёву за внимание к работе и также М. В. Зайцеву за полезные замечания.

Литература

[1] Bakhturin Yu. A., Mikhalev A. A., Petrogradskij V. M., Zajtsev M. V. Infinite dimensional Lie superalgebras. — De Gruyter Expositions in Mathematics. Vol. 7. — 1992.

[2] Латышев В. Н. Об алгебрах Ли с тождественными соотношениями // Сиб. мат. журнал. — 1963. — Т. 4, № 4. — С. 821—829.

[3] Bergen J., Cohen M. Action of Commutative Hopf Algebras // Bull. Lond. Math. Soc. — 1986. — Vol. 18. — P. 159—164.

[4] Bahturin Yu., Giambruno A., Riley D. Group-graded algebras with polynomial identity // Israel J. Math. — 1998. — Vol. 104. — P. 145—155.

[5] Bahturin Yu., Montgomery S. PI-envelopes of Lie syperalgebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 127, no. 10. — P. 2829—2939.

[6] Пихтильков С. А. О специальных алгебрах Ли // Успехи мат. наук. — 1981. — Т. 36, № 6. — С. 225—226.

[7] Bahturin Yu. On Lie subalgebras of associative PI-algebras // J. Algebra. — 1980. — Vol. 67, no. 2. — P. 257—271.

[8] Năstăsescu C., Van Oystayen F. Graded Ring Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1982.

[9] Бейдар К. И., Пихтильков С. А. Первичный радикал специальных алгебр Ли // Фундам. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, вып. 3. — С. 643—648.

[10] Scheunert M. The Theory of Lie Superalgebras. — Lect. Notes in Math. No. 716. — 1979.

[11] Cohen M., Montgomery S. Group-graded rings, smash products, and group action // Trans. Amer. Math. Soc. — 1984. Vol. 282, no. 1. — P. 237—258; addendum: Trans. Amer. Math. Soc. — 1987. — Vol. 300, no. 2. — P. 810—811.

[12] Андрунакиевич В. А„ Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука, 1979.

[13] Regev A. Existence of identities in $A \otimes_F B$ // Israel J. Math. — 1972. — Vol. 11, no. 2. — P. 131—152.

[14] Lin Shaoxue, Beattie M., Fang Hangjin. Graded division rings and the Jacobson density theorem // J. of Beijing Normal University (Natural Science). — 1991. — Vol. 27, no. 2. — P. 129—134.

[15] Zhu, Bin. Graded primitive rings and Kaplansky's theorem // Beijing Shifan Daxue Xuebao. — 1988. — Vol. 34, no. 1. — P. 1—5.

[16] Балаба И. Н. Градуированные первичные PI-алгебры. — В печати.

[17] Размыслов Ю. П. О радикале Джекобсона в PI-алгебрах // Алгебра и логика. — 1974. — Т. 13, № 3. — С. 337—360.

[18] Кемер А. Р. Тождества Капелли и нильпотентность радикала конечно порожденной PI-алгебры // ДАН СССР. — 1980. — Т. 245, № 4. — С. 793—797.

[19] Braun A. The nilpotency of the radical in a finitely generated PI-ring // J. Algebra. — 1984. — Vol. 89, no. 2. — P. 375—396.