Примеры ненильпотентных ниль-почтиколец индекса 2*

И. И. БОГДАНОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

УДК 512.558

Ключевые слова: ниль-почтикольцо, теорема Нагаты—Хигмана, теорема о высоте.

Аннотация

Приведены примеры конечнопорождённых ненильпотентных почтиколец с тождеством $x^2 = 0$.

Abstract

I. I. Bogdanov, Examples of nonnilpotent nil-near-rings of nil degree 2, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 1, pp. 61—69.

Examples of finitely generated nonnilpotent near-rings satisfying the identity $x^2 = 0$ are constructed.

1. Введение

Теорема Нагаты—Хигмана [1,2], гарантирующая нильпотентность (при некоторых дополнительных условиях) кольца с тождеством $x^n = 0$, была доказана для алгебр над полем характеристики 0 или большей, чем n, а затем обобщена на произвольные кольца без $n!$-кручения [3, Теорема 6.1.1]. Из теоремы Ширшова о высоте [3, § 5.2] следует, что нильпотентность следует также из конечной порождённости кольца с тем же тождеством. Все эти результаты обобщаются на случай полуколец [4, 5].

Возникает вопрос [4] об обобщении этих фактов для почтиколец. В данной работе мы даём отрицательный ответ на этот вопрос. Именно, мы строим пример 2-порождённой ненильпотентной ниль-почтиалгебры индекса 2 над произвольным полем нулевой характеристики, а также однопорождённого ненильпотентного ниль-почтикольца индекса 2.

Определение 1.1. (Левым) почтикольцом называется множество N с определёнными на нём операциями $+$ и $\circ$, если выполнены следующие условия.

1. $(N, +)$ — группа с нейтральным элементом 0.
2. $(N, \circ)$ — полугруппа.

*Работа частично поддержана грантом РФФИ «Ведущие научные школы» № 00-15-96128.

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 1, с. 61—69.

3. Умножение дистрибутивно слева относительно сложения: $(a+b)\circ c = a\circ c + b\circ c$.

Почтиалгеброй над (коммутативным и ассоциативным) кольцом $\mathbf{K}$ называется почтикольцо, являющееся одновременно модулем над $\mathbf{K}$, если операции умножения согласованы:

$$k(a\circ b) = (ka)\circ b = a\circ (kb) \quad \forall a,b\in N,\ k\in\mathbf{K}. \tag{1.1}$$

Все почтикольца в данной работе имеют коммутативное сложение.

На протяжении всей работы мы используем следующие обозначения: $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счётный алфавит, $S' = \langle X\rangle/(x_ix_j = 0,\ i\geqslant j)$ — полугруппа (с нулём) всех слов, в которых буквы идут в порядке возрастания, $S = \langle X\rangle_\Lambda/(x_ix_j = 0,\ i\geqslant j)$ — моноид, полученный из S' присоединением нейтрального элемента Λ. Введём обозначение $S\ni s(i) = x_1x_2\ldots x_i$ при $i\geqslant 1$, $s(0)=\Lambda$, $s(-1)=0$.

На множестве S введём линейный порядок

$$\begin{aligned} &x_{i_1}\ldots x_{i_n} \prec x_{j_1}\ldots x_{j_m} \iff \\ &\qquad \iff \exists k\colon\ \forall l = \overline{0, k-1}\ \ i_{n-l} = j_{m-l} \wedge (k = n \vee i_{n-k} < j_{m-k}); \\ &0 \prec \Lambda \prec s \ \ \forall s\in S'. \end{aligned}$$

Таким образом, введённый порядок является лексикографическим «с конца»; если слово r является концом слова s, то $r\prec s$. Пустое слово является наименьшим ненулевым словом. Заметим, что условия $s(i)\prec s\preceq s(i+1)$ задают элементы s с последним символом x_{i+1} при $i\geqslant 0$, условие $s(-1)\prec s\preceq s(0)$ задаёт $s=\Lambda$.

Построим сначала пример бесконечнопорождённой почтиалгебры без кручения. Он имеет гораздо более простой вид, чем последующие.

Пусть $\mathbf{K}$ — произвольное поле нулевой характеристики, $N = (\mathbf{K}S', +, \cdot)$ — полугрупповая алгебра полугруппы с нулём. Мы будем записывать элементы N в виде $r = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i\cdot r_i$, где $k_i\in\mathbf{K}$, $0\neq r_i\in S'$, $r_1\prec r_2\prec\ldots\prec r_n$. Введём на N умножение $\circ$ следующим образом:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\cdot r_i\right)\circ\left(\sum_{i=1}^{m} l_i\cdot s_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_il_1\cdot r_is_1. \tag{1.2}$$

Правая часть может уже не быть канонической записью элемента.

Легко видеть, что $(N,+,\circ)$ — почтиалгебра. Действительно, все аксиомы, кроме ассоциативности умножения, выполняются очевидным образом. Пусть $r = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i\cdot r_i$, $s = \sum\limits_{i=1}^{p} l_i\cdot s_i$, $t = \sum\limits_{i=1}^{q} m_i\cdot t_i$, $k_i, l_i, m_i\in\mathbf{K}$, $r_i, s_i, t_i\in S'$. Покажем, что $(r\circ s)\circ t = r\circ(s\circ t)$.

Если $s\circ t\neq 0$, то последняя буква в каком-то s_i меньше первой буквы в t_1; поскольку $s_1\preceq s_i$, то это верно и для s_1, то есть $s_1t_1\neq 0$. Более того, легко видеть, что в этом случае $s_1\prec s_j$ влечёт $s_1t_1\prec s_jt_1$ или $s_jt_1 = 0$, откуда $r \circ (s \circ t) = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i l_1 m_1 \cdot r_i s_1 t_1 = (r \circ s) \circ t$. Если же $s_1 t_1 = 0$, то и $(r \circ s) \circ t = r \circ (s \circ t) = 0$, и умножение ассоциативно.

Покажем, что построенная почтиалгебра требуемая. Рассмотрим произвольный $0 \neq r \in N$. Тогда в любом r_i последняя буква не меньше, чем последняя буква r_1, поэтому $r_i r_1 = 0$ и $r \circ r = 0$, то есть N — ниль-почтикольцо индекса 2. С другой стороны, $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = x_1 \ldots x_n \neq 0$.

2. Конечнопорождённые почтикольца

Сначала опишем общую конструкцию, из которой получаются оба приведённых здесь примера. Конструкция при любой спецификации даёт ниль-почтикольцо, которое при достаточно слабых условиях оказывается ненильпотентным.

Мы сначала построим аддитивную группу нашего почтикольца. Она будет иметь вид

$$N = \bigoplus_{0 \neq s \in S} N_s = \bigoplus_{i=0}^{\infty} D_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} T_i, \tag{2.1}$$

$$D_i = \bigoplus_{s(i-1) \prec s \preceq s(i)} N_s, \quad T_i = \bigoplus_{0 \leqslant j \leqslant i} D_j = \bigoplus_{0 \prec s \preceq s(i)} N_s.$$

Напомним, что $s(0) = \Lambda$, $s(-1) = 0$, $0 \prec s$ при любом $s \neq 0$. Мы всегда будем считать, что при $s(i-1) \prec s \preceq s(i)$ группа N_s естественно вложена в D_i, а при $j \leqslant i$ D_j естественно вложена в T_i.

Группы N_s мы будем определять индукцией по последнему символу в s. При этом для любого s мы будем определять множество $N_s^{\mathrm{n}} \subseteq N_s$, $0 \notin N_s^{\mathrm{n}}$, а для любого i — множество

$$D_i^{\mathrm{f}} \subseteq N_{s(i)} \setminus (N_{s(i)}^{\mathrm{n}} \cup \{0\}). \tag{2.2}$$

Для $s = \Lambda$ определим $N_\Lambda = D_0 = T_0$ и выделим подмножества $\varnothing \neq N_\Lambda^{\mathrm{n}} \not\ni 0$, $\varnothing \neq D_0^{\mathrm{f}} \subseteq N_\Lambda \setminus (N_\Lambda^{\mathrm{n}} \cup \{0\})$.

Пусть при $0 \prec s \preceq s(i)$ группы N_s определены. Положим теперь для любого $0 \prec s \preceq s(i)$

$$N_{sx_{i+1}} = \bigoplus_{r \in D_i^{\mathrm{f}}} N_s^{(r)}, \quad N_s^{(r)} \cong N_s \quad \text{при } s \neq s(i); \tag{2.3}$$

$N_{s(i+1)}$ же будет суммой (не обязательно прямой!) групп $N_{s(i)}^{(r)} = \varphi_{s(i)}^{(r)}(N_{s(i)})$, $r \in D_i^{\mathrm{f}}$, при некоторых сюръективных гомоморфизмах $\varphi_{s(i)}^{(r)} \colon N_{s(i)} \to N_{s(i)}^{(r)}$, удовлетворяющих условию $\varphi_{s(i)}^{(r)}(r) = 0$. Мы всегда будем считать, что группы $N_s^{(r)}$ естественно вложены в $N_{sx_{i+1}}$.

Обозначим

$$N_{sx_{i+1}}^{\mathrm{n}} = \bigcup_{r \in D_i^{\mathrm{f}}} N_s^{(r)} \subseteq N_{sx_{i+1}}, \tag{2.4}$$

определим множества D_{i+1}, T_{i+1} согласно (2.1) и выберем множество D^{f}_{i+1} так, чтобы выполнялось (2.2). «Произвол» конструкции состоит в выборе N_Λ, N^{n}_Λ, D^{f}_i и построении групп $N_{s(i+1)}$ при всех i.

Таким образом, группа $(N,+)$ полностью определена. Любой её ненулевой элемент единственным образом представляется в виде

$$r = \sum_{i=\mu(r)}^{\nu(r)} r_i, \quad r_i \in D_i,\ r_{\mu(r)} \neq 0 \neq r_{\nu(r)}. \tag{2.5}$$

Любой же элемент $r_i \in D_i$ имеет единственное представление вида

$$r_i = \sum_{s(i-1) \prec s \preceq s(i)} r_s, \quad r_s \in N_s. \tag{2.6}$$

Для $0 \neq r \in N$ обозначим $s_r = \min_\prec\{s \preceq s(\mu(r))\colon\ r_s \neq 0\}$ ($\min_\prec$ означает минимальный элемент относительно порядка $\prec$; s_r существует, ибо $r_{\mu(r)} \neq 0$), $m(r) = r_{s_r}$. Положим $s_0 = 0_S$, $m(0) = 0_N$.

Заметим, что при $r \in D^{\mathrm{f}}_i \subseteq N_{s(i)}$ из (2.1), (2.3) легко следует

$$\bigoplus_{0 \prec s \preceq s(i)} N_s^{(r)} \cong T_i/A^{(r)}, \tag{2.7}$$

откуда получаем

$$D_{i+1} = \bigoplus_{s(i) \prec s \preceq s(i+1)} N_s \cong \bigoplus_{0 \prec s \preceq s(i)} \sum_{r \in D^{\mathrm{f}}_i} N_s^{(r)} \cong \sum_{r \in D^{\mathrm{f}}_i} \bigoplus_{0 \prec s \preceq s(i)} N_s^{(r)} \cong \sum_{r \in D^{\mathrm{f}}_i} T_i/A^{(r)}, \tag{2.8}$$

где $A^{(r)} = \operatorname{Ker} \varphi^{(r)}_{s(i)}$. Поэтому при любом $r \in D^{\mathrm{f}}_i$ существует естественный гомоморфизм групп $\varphi^{(r)}\colon T_i \to T_i/A^{(r)} \subseteq D_{i+1}$ (заметим, что $\varphi^{(r)}$ продолжает $\varphi^{(r)}_{s(i)}$), причём для любого $0 \prec s \preceq s(i)$ ограничение $\varphi^{(r)}_s = \varphi^{(r)}\big|_{N_s}$ переводит N_s в $N^{(r)}_s$; при $s \neq s(i)$ отображение $\varphi^{(r)}_s\colon N_s \to N^{(r)}_s$ является изоморфизмом. Будем считать, что гомоморфизм $\varphi^{(r)}$ определён на N, положив $\varphi^{(r)}\Bigl(\bigoplus\limits_{k=i+1}^{\infty} D_k\Bigr) = 0$.

Назовём элемент a *мономом*, если $a = m(a)$; назовём s_a *носителем* монома a. В частности, 0 — моном с носителем 0. Согласно (2.5), (2.6), каждый ненулевой элемент представляется единственным образом в виде суммы ненулевых мономов с различными носителями.

Определим теперь на группе N умножение $\circ$. Если $a = 0$ или $b = 0$, то положим $a \circ b = 0$; иначе обозначим $\mu(b) = i$ и положим

$$a \circ b = a \circ m(b). \tag{2.9}$$

Таким образом, теперь достаточно определить элемент $a \circ b$ при $b \in N_{s_b} \subseteq D_i$. Будем определять элемент $a \circ b$ индукцией по i. Мы различаем два случая.

(1) $s_b = s(i)$. Если $b \notin D_i^{\mathrm{f}}$, то положим $a \circ b = 0$ (в частности, если $b \in N_{s(i)}^{\mathrm{n}}$, то $a \circ b = 0$); в противном случае $b \in D_i^{\mathrm{f}}$, и тогда положим $a \circ b = \varphi^{(b)}(a) \in D_{i+1}$. Заметим, что мы, в частности, определили умножение при $i = 0$.

(2) $s_b \prec s(i)$. Если $b \notin N_{s_b}^{\mathrm{n}}$, то $a \circ b = 0$; иначе положим $s_b = s' x_i$. Тогда $b = \varphi_{s'}^{(u)}(b')$ для некоторых $u \in D_{i-1}^{\mathrm{f}}$, $b' \in N_{s'}$, элементы u и b' определены однозначно. Поскольку $\mu(b') < \mu(b)$, то элемент $a \circ b'$ уже определён. Тогда положим $a \circ b = \varphi^{(u)}(a \circ b')$.

Выделим несколько свойств введённой операции.

Лемма 2.1. *Пусть $a, b, c \in N$, $\mu(c) = i$. Тогда:*

(i) *если $s_c \prec s(j)$ при некотором j, то $b \circ c \in T_j$;*

(ii) $(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c$;

(iii) *если a — моном, то и $a \circ c$ — моном;*

(iv) *пусть a, b — мономы с носителями $s_a \prec s_b$. Тогда из $a \circ c \neq 0 \neq b \circ c$ следует $s_{a \circ c} \prec s_{b \circ c}$;*

(v) *если $a \circ c = 0$, то $a_s \circ c = 0$ для любого s;*

(vi) *если $a \neq 0 \neq c$, $s_a \succ s_c$, то $a \circ c = 0$;*

(vii) *если $a \circ c \neq 0$, то $s_{a \circ c} \succ s_c$;*

(viii) $m(a \circ c) = m(a) \circ m(c)$;

(ix) *если $b \circ c \in N_{s(j)}$ при некотором j, то $(a \circ b) \circ c = 0$;*

(x) *если $b \circ c = 0$, то $(a \circ b) \circ c = 0$;*

(xi) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

Доказательство. Все доказательства, кроме (i), (v) и (x), будут вестись индукцией по i. Кроме того, во всех доказательствах можно сразу предположить, что c — моном согласно (2.9).

(i). Если $s_c = s(i)$, то $b \circ c \in T_{i+1}$, $j \geqslant i + 1$. Если же $s_c \prec s(i)$, то $b \circ c \in T_i$, $j \geqslant i$.

(ii). Если $s_c = s(i)$, то либо оба выражения равны 0, либо $c \in D_i^{\mathrm{f}}$, а тогда утверждение следует из того, что $\varphi^{(c)}$ — гомоморфизм. В частности, утверждение доказано при $i = 0$. (Подобные замечания в дальнейшем опускаются.) Если же $s(c) \prec s(i)$ и хотя бы одно выражение не нуль, то $c = \varphi_{s'}^{(u)}(c')$, $(a + b) \circ c = \varphi^{(u)}((a + b) \circ c')$, $a \circ c + b \circ c = \varphi^{(u)}(a \circ c') + \varphi^{(u)}(b \circ c')$ и утверждение следует из индукционного предположения и того, что $\varphi^{(u)}$ — гомоморфизм.

(iii). Если $s_c = s(i)$, то $a \circ c \in N_{s_a x_{i+1}}$ — моном; если же $s(c) \prec s(i)$ и $a \circ c \neq 0$, то $c = \varphi_{s'}^{(u)}(c')$, $c' \in N_{s'}$. Тогда $m(a \circ c') = a \circ c'$ по предположению индукции и $a \circ c = \varphi_{s_{a \circ c'}}^{(u)}(a \circ c') \in N_{s_{a \circ c'} x_i}$.

(iv). $a \circ c$ и $b \circ c$ — мономы согласно (iii). Если $s_c = s(i)$, то ненулевые $s_{a \circ c} = s_a x_{i+1} \prec s_b x_{i+1} = s_{b \circ c}$; иначе если $a \circ c \neq 0 \neq b \circ c$, то $c = \varphi^{(u)}(c')$, $s_{a \circ c'} \prec s_{b \circ c'}$ по предположению индукции, поэтому $s_{a \circ c} = s_{a \circ c'} x_i \prec s_{b \circ c'} x_i = s_{b \circ c}$.

(v). Сразу следует из (ii), (iv) и того, что сумма в (2.1) прямая.

(vi). Если $s_c = s(i)$, то $\mu(a) > \mu(c)$ и $a \circ c = 0$ по определению $\varphi^{(c)}$. Если же $s_c \prec s(i)$, то $a \circ c$ может быть не равным нулю лишь в случае $c = \varphi^{(u)}_{s'}(c')$, $\mu(c') < \mu(c)$, и тогда $a \circ c = \varphi^{(u)}(a \circ c') = 0$ по предположению индукции.

(vii). Если $s_c = s(i)$, то утверждение очевидно, ибо $\mu(a \circ c) > \mu(c)$. Если $s_c \prec s(i)$, имеем $c = \varphi^{(r)}_{s'}(c')$, $s_{c'} = s'$, $s_c = s'x_i$. Но тогда $s_{a\circ c'} \succ s'$ по предположению индукции, и $s_{a\circ c} = s_{a\circ c'}x_i \succ s'x_i = s_c$.

(viii). Если $a = 0$, $c = 0$ или $s_a \succ s_c$, то утверждение очевидно (в последнем случае применяется (vi)). Предположим, что $s_c = s(i)$; если $c \notin D^{\mathrm{f}}_i$, то $m(a) \circ c = a \circ c = 0$. Иначе $m(a) \circ c = \varphi^{(c)}_{s_a}(m(a)) \in N_{s_a x_i}$. Если $s_a \neq s(i)$, то $\varphi^{(c)}_{s_a}$ — изоморфизм, и поэтому $m(a) \circ c \neq 0$. Иначе же $a = a_{s(i)} + a'$, $\mu(a') > i$ и $a \circ c = a_{s(i)} \circ c + a' \circ c = a_{s(i)} \circ c$. В любом случае получаем, что если $a \circ c \neq 0$, то $0 \neq m(a) \circ c \in N_{s_a x_i}$. Осталось применить (iv).

Если же $s_c \neq s(i)$, то согласно определению $\circ$ $a \circ c \neq 0$ может быть лишь в случае $c = \varphi^{(r)}_{s'}(c')$ при некоторых $s' \prec s(i-1)$, $r \in D^{\mathrm{f}}_{i-1}$, $c' \in T_{i-1}$, и тогда $a \circ c = \varphi^{(r)}(a \circ c') = (a \circ c') \circ r$. Осталось применить предположение индукции и получить $m(a)\circ c = \varphi^{(r)}(m(a)\circ c') = \varphi^{(r)}(m(a\circ c')) = m(a\circ c')\circ r = m((a\circ c')\circ r) = m(\varphi^{(r)}(a \circ c')) = m(a \circ c)$.

(ix). Можно предположить, что $b \neq 0 \neq c$, b — моном (последнее — согласно (viii)). Если $s_c = s(i)$, то $b \circ c \in N_{s(j)}$ может быть лишь в случае $s_b \succeq s_c$, ибо иначе $0 \neq b \circ c \in N_{s_b x_{i+1}}$. Но в этом случае либо $a \circ b = 0$, либо $s_{a\circ b} \succ s_b \succeq s_c$ и $(a \circ b) \circ c = 0$. Если же $s_c \prec s(i)$, то требуемое произведение может не быть нулем лишь при $c = \varphi^{(u)}(c')$, $u \in D^{\mathrm{f}}_{i-1}$, c' — моном, $s_{c'} \preceq s(i-1)$. Тогда если $s_{c'} = s(i-1)$, то либо $c' \notin D^{\mathrm{f}}_{i-1}$ и $(a\circ b)\circ c' = 0$, либо $c' \in D^{\mathrm{f}}_{i-1}$ и $(a\circ b)\circ c' \in D_i$, откуда $(a \circ b) \circ c = \varphi^{(u)}((a \circ b) \circ c') = 0$.

Если же $s_{c'} \prec s(i-1)$, то $b\circ c = \varphi^{(u)}(b\circ c') \in N_{s(j)}$, $\mu(u) = j-1$, $b\circ c' \in N_{s(j-1)}$. Тогда $(a\circ b)\circ c' = 0$ по предположению индукции и $(a\circ b)\circ c = \varphi^{(u)}((a\circ b)\circ c') = 0$.

(x). Сразу следует из (ix).

(xi). Согласно (x) можно предположить $b \circ c \neq 0$, откуда $s_b \preceq s_c$. Тогда $a \circ (b \circ c) = a \circ m(b \circ c) = a \circ (m(b) \circ m(c))$, $(a \circ b) \circ c = (a \circ m(b)) \circ m(c)$. Поэтому достаточно доказать утверждение для случая, когда b, c — мономы. Кроме того, из левой дистрибутивности достаточно доказать его для $a = m(a)$.

Пусть $s_c = s(i)$, тогда $b \circ c = \varphi^{(c)}(b)$. Если $s_b = s(i)$, то $b \circ c \in N^{\mathrm{n}}_{s(i+1)}$, и $a \circ (b \circ c) = 0$; но тогда $(a \circ b) \circ c = 0$ по (ix). Если же $s_b \prec s(i)$, то $a \circ (b \circ c) = a \circ \varphi^{(c)}_{s_b}(b) = \varphi^{(c)}(a \circ b) = (a \circ b) \circ c$.

Пусть, напротив, $s_c \prec s(i)$. Тогда из $b \circ c \neq 0$ получаем $c = \varphi^{(u)}_{s'}(c')$, $c' \in N_{s'}$, $u \in D^{\mathrm{f}}_{i-1}$, $b \circ c = \varphi^{(u)}(b \circ c') \in N^{\mathrm{n}}_{s_{b\circ c}}$ согласно (iii), при этом $s_{b\circ c'} \preceq s(i-1)$. Если $s_{b\circ c'} = s(i-1)$, то $a \circ (b \circ c') = 0$, ибо $b \circ c' \in N^{\mathrm{n}}_{s_{b\circ c'}}$; поэтому по предположению индукции $(a \circ b) \circ c' = 0$ и $(a \circ b) \circ c = \varphi^{(u)}((a \circ b) \circ c') = 0$; с другой стороны, $b\circ c = \varphi^{(u)}(b\circ c') \in N^{\mathrm{n}}_{s(i)}$, поэтому $a\circ(b\circ c) = 0$. Если же, наконец, $s_{b\circ c'} \prec s(i-1)$, то $s(i-1) \prec s_{b\circ c} \prec s(i)$ и $a\circ(b\circ c) = a\circ\varphi^{(u)}_{s_{b\circ c'}}(b\circ c') = \varphi^{(u)}(a\circ(b\circ c')) = \varphi^{(u)}((a\circ b)\circ c') = (a\circ b)\circ c$. □

Теорема 2.2. $(N,+,\circ)$ — *ниль-почтикольцо индекса* 2, *порождённое* N_Λ. *При этом при любом* $i \geqslant 1$ $N_{s(i)}$ *порождается (как абелева группа) множеством элементов из* $N_{s(i)}$, *каждый из которых раскладывается в произведение* $i+1$ *элементов. В частности, если при любом* $i \geqslant 1$ $N_{s(i)} \neq 0$, *то* N *ненильпотентно.*

Доказательство. То, что это — почтикольцо, следует из предыдущих утверждений. Рассмотрим $a \neq 0$. $a\circ a = a\circ m(a) = m(a)\circ m(a)$, ибо для остальных $a_s \neq 0$ имеем $s_{a_s} \succ s_a$. Если $s_a = s(\mu(a))$, то либо $a \in N^{\mathrm{n}}_{s_a}$ и $a\circ a = 0$, либо $m(a)\circ m(a) = \varphi^{(m(a))}_{s(\mu(a))}(m(a)) = 0$, ибо $\varphi^{(m(a))}_{s(\mu(a))}\colon N_{s(\mu(a))} \to N_{s(\mu(a))}/A^{(m(a))}$ и $m(a) \in A^{(m(a))}$. Если же $s_a \prec s(\mu(a))$, то $a\circ a = 0$ или $a = \varphi^{(u)}(a')$, $\mu(a') < \mu(a)$, откуда $a\circ a' = 0$ и $a\circ a = 0$. Поэтому квадрат любого элемента в N равен нулю.

Покажем, что $N_{s(i)}$ порождается множеством его элементов, разлагающихся в произведение $i+1$ сомножителя. Действительно, $N_{s(1)}$ порождается элементами $\varphi^{(r)}(a) = a\circ r$, где $a \in N_\Lambda$, $r \in D^{\mathrm{f}}_0 \subseteq N_\Lambda$. Пусть $N_{s(i)}$ порождается множеством $\{a_k\}$, тогда $N_{s(i+1)}$ порождается элементами из всех $N^{(u)}_{s(i)} = \varphi^{(u)}(N_{s(i)})$ при $u \in D^{\mathrm{f}}_i$, которые в свою очередь порождаются элементами вида $\varphi^{(u)}(a_k) = a_k\circ u$, а эти элементы разлагаются в произведение $i+2$ сомножителей.

Осталось доказать, что N_Λ порождает N. Докажем индукцией по i, что T_i порождено N_Λ. При $i = 0$ это верно; далее, пусть это верно для i; тогда $D_{i+1} = \bigoplus_{r\in D^{\mathrm{f}}_i} T_i\circ r$, поэтому D_{i+1} также порождено N_Λ, а вместе с ним и $T_{i+1} = T_i \oplus D_{i+1}$. □

Приведём теперь примеры ненильпотентных конечнопорождённых ниль-почтиколец индекса 2.

Следствие 2.3. *Существует однопорождённое ненильпотентное ниль-почтикольцо индекса* 2.

Доказательство. Пусть $N_\Lambda = D_0 = T_0 = \mathbf{Z}$, $N^{\mathrm{n}}_\Lambda = \{-1,1\}$, $D^{\mathrm{f}}_0 = N_\Lambda \setminus \{-1,0,1\}$ и

$$N_{s(i+1)} = \bigoplus_{r\in D^{\mathrm{f}}_i} N^{(r)}_{s(i)}, \quad N^{(r)}_{s(i)} = N_{s(i)}/\langle r\rangle,$$

где $\langle r\rangle$ — группа, порождённая r. При $i \geqslant 1$ положим $D^{\mathrm{f}}_i = N_{s(i)} \setminus (N^{\mathrm{n}}_{s(i)} \cup \{0\})$. Покажем, что при любом $i \geqslant 1$ и для любого n, имеющего по крайней мере 2^i различных простых делителей, в D^{f}_i есть элементы аддитивного порядка n. Для $i = 1$ $n = kl$, $k, l > 1$ и взаимно просты. Тогда элемент $a_k = \varphi^{(k)}(1)$ имеет порядок k, элемент $a_k + a_l \in D^{\mathrm{f}}_1$ имеет порядок kl. Пусть $i \geqslant 2$. Тогда $n = kl$, k, l взаимно просты и имеют хотя бы по 2^{i-1} простых делителей. Тогда в D^{f}_{i-1} есть элементы a_k и a_l порядков k и l соответственно. Элементы $\varphi^{(a_k)}(a_l)$ и $\varphi^{(a_l)}(a_k)$ имеют порядки l и k, а их сумма лежит в D^{f}_i и имеет порядок n.

Таким образом, $N_{s(i)} \neq \{0\}$, поэтому N ненильпотентно. Кроме того, оно порождается $N_\Lambda = \mathbf{Z}$, которое однопорождено; поэтому и N однопорождено. $\square$

Следствие 2.4. *Пусть $\mathbf{K}$ — поле нулевой характеристики. Тогда существует двупорождённая ненильпотентная ниль-$\mathbf{K}$-полуалгебра индекса 2.*

Доказательство. Все группы N_s в этом примере будут $\mathbf{K}$-пространствами, все гомоморфизмы — гомоморфизмами пространств. Кроме того, при любых $i \geqslant 0$, $0 \neq q \in \mathbf{K}$, $r \in D_i^{\mathrm{f}}$ будут выполняться равенства $kr \in D_i^{\mathrm{f}}$ и $\varphi^{(kr)} = k\varphi^{(r)}$. Заметим, что N_s^{n} будет объединением пространств.

Пусть $N_\Lambda = D_0 = T_0 = \langle x\rangle_{\mathbf{K}} \oplus \langle y\rangle_{\mathbf{K}}$, $\langle x\rangle_{\mathbf{K}} \cong \langle y\rangle_{\mathbf{K}}$ — одномерные $\mathbf{K}$-пространства. Положим $N_\Lambda^{\mathrm{n}} = \langle x\rangle_{\mathbf{K}} \cup \langle y\rangle_{\mathbf{K}}$.

Пусть в пространстве $N_{s(i)}$ лежат линейно независимые элементы $v, w \in N_{s(i)}^{\mathrm{n}}$, причём при любых $a \neq 0 \neq b$ $av + bw \notin N_{s(i)}^{\mathrm{n}}$. Положим $D_i^{\mathrm{f}} = \{av + bw,\ a \neq 0 \neq b\}$ и определим группу $N_{s(i+1)}$ так:

$$N_{s(i+1)} = \bigoplus_{(a:b)\in\mathbf{K}P^1\setminus\{(0:1),(1:0)\}} N_{s(i)}^{(a:b)}, \quad N_{s(i)}^{(a:b)} = N_{s(i)}/\langle av + bw\rangle_{\mathbf{K}};$$

$\mathbf{K}P^1$ есть проективная прямая над $\mathbf{K}$. Определим $N_{s(i)}^{(av+bw)} = N_{s(i)}^{(a:b)}$, а гомоморфизмы $\varphi_{s(i)}^{(av+bw)}$ устроены так:

$$\varphi_{s(i)}^{(av+bw)}(z) = az + \langle av + bw\rangle_{\mathbf{K}} \in N_{s(i)}^{(av+bw)};$$

при этом все требования выполнены. Тогда в пространстве $N_{s(i+1)}$ элементы $v' = \varphi^{(v+w)}(v)$, $w' = \varphi^{(v+2w)}(v)$ линейно независимы и любая их линейная комбинация с ненулевыми коэффициентами не лежит в $N_{s(i+1)}^{\mathrm{n}}$. Таким образом, пространства $N_{s(i)}$ ненулевые при любом i.

Осталось показать, что N является $\mathbf{K}$-почтиалгеброй, т. е. $k(a\circ b) = (ka)\circ b = a\circ(kb)$. Достаточно проверить это для случая, когда b — моном, пусть $\mu(b) = i$. Проведём индукцию по i. Если $s_b = s(i)$, то интересен лишь случай $b \in D_i^{\mathrm{f}}$, так как $kD_i^{\mathrm{f}} = D_i^{\mathrm{f}}$. Тогда $(ka)\circ b = \varphi^{(b)}(ka) = k\varphi^{(b)}(a) = k(a\circ b)$, так как $\varphi^{(b)}$ — гомоморфизм; с другой стороны, $a\circ(kb) = \varphi^{(kb)}(a) = k\varphi^{(b)}(a)$ по построению.

Если же $s_b \prec s(i)$, то, поскольку $N_{s_b}^{\mathrm{n}}$ есть объединение пространств, интересен лишь случай, когда $b \in N_{s_b}^{\mathrm{n}}$, $b = \varphi^{(u)}(b')$. Тогда $k(a\circ b) = k\varphi^{(u)}(a\circ b') = \varphi^{(u)}(k(a\circ b')) = \varphi^{(u)}((ka)\circ b') = (ka)\circ b$ и $k(a\circ b) = \varphi^{(u)}(a\circ(kb')) = a\circ\varphi^{(u)}(kb') = a\circ(kb)$, что и требовалось. $\square$

Замечание 1. Легко показать, что однопорождённое ниль-почтикольцо индекса 2 без кручения нильпотентно индекса 2.

Замечание 2. Заметим, что построенное почтикольцо в первом примере счётно, а во втором является счётномерной почтиалгеброй. Легко показать, что конечное ниль-почтикольцо (или конечномерная ниль-почтиалгебра) нильпотентно.

Автор благодарен В. Т. Маркову за постоянное внимание к работе.

Литература

[1] Nagata M. On the nilpotency of nilalgebras // J. Math. Soc. Japan. — 1952. — Vol. 4. — P. 296—301.

[2] Higman G. On a conjecture of Nagata // Proc. Cam. Phil. Soc. — 1956. — Vol. 52. — P. 1—4.

[3] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[4] Белов А. Я. Теорема Нагаты—Хигмана для полуколец // Фундам. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, вып. 2. — С. 523—527.

[5] Богданов И. И. Теорема Нагаты—Хигмана для полуколец // Фундам. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7, вып. 3. — С. 651—658.