О суммах радикальных и регулярных колец

М. В. ВОЛКОВ, Г. В. ТАНАНА
Уральский государственный университет

УДК 512.55

Ключевые слова: ассоциативное кольцо, радикал Джекобсона, присоединённое умножение, регулярное кольцо, присоединённо регулярное кольцо.

Аннотация

Указаны условия, обеспечивающие присоединённую регулярность кольца, представимого в виде суммы радикального подкольца и присоединённо регулярного подкольца. Найден критерий присоединённой регулярности для кольца, являющегося суммой своего радикала и регулярного подкольца.

Abstract

M. V. Volkov, G. V. Tanana, On sums of radical and regular rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 1, pp. 71—75.

We find conditions which ensure that a ring is adjoint regular provided that it is a sum of a radical subring with an adjoint regular subring. We also provide a criterion of adjoint regularity for a ring which is a sum of its radical and a regular subring.

Слово «кольцо» в настоящей заметке всегда означает ассоциативное кольцо, а радикальность понимается в смысле радикала Джекобсона.

В любом кольце $\langle R, +, \cdot\rangle$ можно определить *присоединённое умножение* $\circ$ по правилу $a \circ b = a + b - ab$ для любых $a, b \in R$. Легко проверяется, что присоединённое умножение ассоциативно, и таким образом кольцу $\langle R, +, \cdot\rangle$ сопоставляется его *присоединённая полугруппа* $\langle R, \circ\rangle$. Известно, что ряд важных свойств колец допускает изящную характеризацию в терминах присоединённой полугруппы: примером может служить тот классический факт, что кольцо будет радикальным тогда и только тогда, когда его присоединённая полугруппа является группой (см., например, [1, с. 76—78]). Встречная идея выделять классы колец, налагая те или иные условия на их присоединённые полугруппы, также представляется заслуживающей внимания. В рамках такого подхода Кларк [2] и Ду Ксиянкун [3] обстоятельно исследовали кольца, у которых присоединённые полугруппы являются объединением групп, а в [4] Ду Ксиянкун ввёл в рассмотрение *присоединённо регулярные* кольца, т. е. кольца, для которых полугруппа $\langle R, \circ\rangle$ регулярна. (Напомним, что полугруппа $\langle S, \cdot\rangle$ называется *регулярной*, если для любого $a \in S$ найдётся такой элемент $b \in S$, что $aba = a$.) Класс присоединённо регулярных колец весьма широк. Действительно, поскольку каждая группа очевидно является регулярной полугруппой, присоединённо регулярными будут все радикальные кольца. С другой стороны, присоединённо регулярным будет любое *регулярное* кольцо, т. е. кольцо, для которого полугруппа $\langle R, \cdot\rangle$ регулярна, см. [4, теорема 1].

В настоящей заметке показано, что кольцо R, являющееся суммой своего радикала $J(R)$ и регулярного подкольца S, будет присоединённо регулярным тогда и только тогда, когда $eJ(R)e = 0$ для любого идемпотента $e \in S$. Этот результат выводится из следующего достаточного условия присоединённой регулярности кольца, раскладывающегося в сумму радикального подкольца и присоединённо регулярного подкольца.

Предложение 1. *Пусть $R = K + S$, где K — радикальное, а S — присоединённо регулярное подкольцо, причём $SKS = 0$. Тогда кольцо R присоединённо регулярно.*

Доказательство. Произвольный элемент кольца R представим в виде суммы $x + \alpha$, где $x \in K$, $\alpha \in S$. В силу присоединённой регулярности подкольца S найдётся элемент $\beta \in S$, такой что $\alpha \circ \beta \circ \alpha = \alpha$. Далее, из радикальности подкольца K следует, что в группе $\langle K, \circ\rangle$ для элемента x имеется обратный, т. е. такой элемент $\bar{x} \in K$, что $x \circ \bar{x} = x + \bar{x} - x\bar{x} = 0$ и $\bar{x} \circ x = \bar{x} + x - \bar{x}x = 0$. Положим $y = \bar{x} - \beta\bar{x} - \bar{x}\beta + \bar{x}\beta\bar{x}$ и убедимся, что

$$(x + \alpha) \circ (y + \beta) \circ (x + \alpha) = x + \alpha. \tag{1}$$

Раскрывая скобки в левой части (1), получим выражение

$$\begin{aligned} x + \alpha + y + \beta - xy - \alpha y - x\beta - \alpha\beta + x + \alpha - x^2 - x\alpha - \alpha x - \alpha^2 - yx - y\alpha -\\ - \beta x - \beta\alpha + xyx + xy\alpha + \alpha yx + \alpha y\alpha + x\beta x + x\beta\alpha + \alpha\beta x + \alpha\beta\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

Поскольку $SKS = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \alpha y &= \alpha\bar{x} - \alpha\beta\bar{x} - \alpha\bar{x}\beta + \alpha\bar{x}\beta\bar{x} = \alpha\bar{x} - \alpha\beta\bar{x},\\ y\alpha &= \bar{x}\alpha - \beta\bar{x}\alpha - \bar{x}\beta\alpha + \bar{x}\beta\bar{x}\alpha = \bar{x}\alpha - \bar{x}\beta\alpha,\\ \alpha y\alpha &= \alpha\bar{x}\alpha - \alpha\beta\bar{x}\alpha - \alpha\bar{x}\beta\alpha + \alpha\bar{x}\beta\bar{x}\alpha = 0. \end{aligned}$$

Далее, группируя в (2) слагаемые, в которых участвуют только элементы из S, получаем $2\alpha + \beta - \alpha\beta - \beta\alpha - \alpha^2 + \alpha\beta\alpha = \alpha \circ \beta \circ \alpha = \alpha$ в силу выбора β. С учётом всего этого, выражение (2) можно переписать таким образом:

$$\begin{aligned} &2x + y - xy - yx - x^2 + xyx - (x\alpha + \bar{x}\alpha - x\bar{x}\alpha) - (\alpha x + \alpha\bar{x} - \alpha\bar{x}x) +\\ &\quad + (\bar{x}\beta\alpha + x\beta\alpha - x\bar{x}\beta\alpha) + (\alpha\beta\bar{x} + \alpha\beta x - \alpha\beta\bar{x}x) - x\beta - \beta x + x\beta x + \alpha =\\ &\quad = 2x + y - xy - yx - x^2 + xyx - x\beta - \beta x + x\beta x + \alpha. \end{aligned} \tag{3}$$

Подставив в правую часть (3) вместо y его выражение через $\bar{x}$, получим

$$\begin{aligned} 2x + \bar{x} - x\bar{x} - \bar{x}x - x^2 + x\bar{x}x - \beta\bar{x} - \bar{x}\beta + \bar{x}\beta\bar{x} + x\beta\bar{x} + x\bar{x}\beta - x\bar{x}\beta\bar{x} +\\ + \beta\bar{x}x + \bar{x}\beta x - \bar{x}\beta\bar{x}x - x\beta\bar{x}x - x\bar{x}\beta x + x\bar{x}\beta\bar{x}x - x\beta - \beta x + x\beta x + \alpha. \end{aligned} \tag{4}$$

Первые шесть слагаемых, в которых участвуют только элементы из K, можно заменить на $x \circ \bar{x} \circ x = x$. Учтя это, перегруппируем выражение (4):

$$x-(\beta x+\beta\bar{x}-\beta\bar{x}x)-(x\beta+\bar{x}\beta-x\bar{x}\beta)+(\bar{x}\beta\bar{x}+x\beta\bar{x}-x\bar{x}\beta\bar{x})+ \\ +(x\beta x+\bar{x}\beta x-x\bar{x}\beta x)-(x\beta\bar{x}x+\bar{x}\beta\bar{x}x-x\bar{x}\beta\bar{x}x)+\alpha=x+\alpha.$$

Тем самым равенство (1) установлено. □

Заметим, что в предложении 1 вместо $SKS=0$ можно требовать, чтобы $\alpha K\alpha=0$ для всех $\alpha\in S$. Действительно, приведённое выше доказательство проходит при этом условии, если дополнительно потребовать, чтобы для каждого $\alpha\in S$ и некоторого $\beta\in S$, такого что $\alpha\circ\beta\circ\alpha=\alpha$, выполнялись равенства $\alpha K\beta=\beta K\alpha=0$. Выберем элемент β так, чтобы наряду с соотношением $\alpha\circ\beta\circ\alpha=\alpha$ выполнялось и соотношение $\beta\circ\alpha\circ\beta=\beta$. (Такой выбор β всегда возможен: если β' — произвольный элемент S, удовлетворяющий $\alpha\circ\beta'\circ\alpha=\alpha$, то в роли β годится $\beta'\circ\alpha\circ\beta'$.) Из соотношения $\alpha=\alpha\circ\beta\circ\alpha= 2\alpha+\beta-\alpha\beta-\beta\alpha-\alpha^2+\alpha\beta\alpha$ можно выразить β как $\beta=-\alpha+\alpha\beta+\beta\alpha+\alpha^2-\alpha\beta\alpha$, откуда для каждого $x\in K$ имеем

$$\alpha x\beta=-\alpha x\alpha+\alpha x\alpha\beta+\alpha x\beta\alpha+\alpha x\alpha^2-\alpha x\alpha\beta\alpha=\alpha x\beta\alpha. \tag{5}$$

Аналогично, выражая α из соотношения $\beta=\beta\circ\alpha\circ\beta$, получаем $\alpha x\beta=\beta\alpha x\beta$. Комбинируя последнее равенство с (5), получаем

$$\alpha x\beta=\alpha x\beta\alpha=\beta\alpha x\beta\alpha=(\beta\alpha)x(\beta\alpha)=0,$$

т. е. $\alpha K\beta=0$. В силу симметрии и $\beta K\alpha=0$.

Теорема 2. *Кольцо R, являющееся суммой своего радикала $J(R)$ и регулярного подкольца S, будет присоединённо регулярным тогда и только тогда, когда $eJ(R)e=0$ для любого идемпотента $e\in S$.*

Доказательство. Необходимость следует из предложения 2 работы [4], где отмечено, что произвольное присоединённо регулярное кольцо R обладает тем свойством, что $eJ(R)e=0$ для любого идемпотента $e\in R$. Обратно, пусть α — произвольный элемент регулярного подкольца S, и пусть элемент $\beta\in S$ таков, что $\alpha\beta\alpha=\alpha$. Тогда $e=\alpha\beta$ — идемпотент и

$$\alpha J(R)\alpha=\alpha\beta\alpha J(R)\alpha\beta\alpha=e(\alpha J(R))e\alpha=0.$$

Поскольку каждое регулярное кольцо присоединённо регулярно [4, теорема 1], по предложению 1 и замечанию, сделанному после его доказательства, кольцо R будет присоединённо регулярным. □

Отметим, что в [4] есть утверждения, близкие к нашей теореме 2, но предложение 1 не имеет аналогов в [4]. В действительности предложение 1, доказательство которого, как читатель мог видеть, кратко и вполне элементарно, позволяет легко получить многие результаты из [4].

Мы не знаем, останется ли теорема 2 верной, если ослабить условие на подкольцо S до присоединённой регулярности. Однако справедливо

Предложение 3. *Пусть $R=K+S$, где K — радикальный идеал, а S — присоединённо регулярное подкольцо, и $fKg=0$ для любых идемпотентов $f,g\in S$. Тогда кольцо R присоединённо регулярно.*

Доказательство. Рассмотрим идеал I кольца S, порождённый всеми идемпотентами из S. Тогда кольцо $Q = K+I$ удовлетворяет условиям предложения 1. В самом деле, I — присоединённо регулярное подкольцо как идеал присоединённо регулярного кольца S (см. [4, предложение 1]); K — радикальное подкольцо; наконец, из того, что $fKg = 0$ для любых идемпотентов $f, g \in S$, следует, что $IKI = 0$. По предложению 1 кольцо Q присоединённо регулярно.

Легко видеть, что Q — идеал в R. Имеем

$$R/_{Q} = {S+K}/_{I+K} \cong S/_{S \cap (I+K)} = S/_{I + S \cap K}.$$

Кольцо $S/_{I + S\cap K}$ является гомоморфным образом кольца $S/_{I}$, которое радикально как фактор-кольцо присоединённо регулярного кольца по идеалу, порождённому его идемпотентами (см. [4, теорема 3]). Следовательно, и кольцо $R/_{Q}$ радикально. Итак, в кольце R имеется присоединённо регулярный идеал, фактор по которому радикален. По теореме 3 из [4] отсюда следует, что R — присоединённо регулярное кольцо. □

В заключение приведём ещё один пример ситуации, в которой применимо предложение 1. Пусть R — произвольное присоединённо регулярное кольцо, R_n — кольцо всех $(n \times n)$-матриц над R. Для любого числа p, такого что $1 \leqslant p \leqslant n$, рассмотрим подкольцо $R_n(p)$ в R_n, состоящее из всех матриц, ненулевые элементы которых сосредоточены в первых p строках и последних $n+1-p$ столбцах. Если, как обычно, обозначить через e_{ij} матричные единицы, то можно записать

$$R_n(p) = \sum_{i \leqslant p \leqslant j} Re_{ij} = Re_{pp} + K,$$

где $K = R_n(p) \cap \sum\limits_{i<j} Re_{ij}$. Подкольцо Re_{pp} изоморфно R, и стало быть присоединённо регулярно, а K — нильпотентный идеал в $R_n(p)$, причём легко видеть, что $Re_{pp}KRe_{pp} = 0$. По предложению 1 кольцо $R_n(p)$ будет присоединённо регулярным.

Указанный пример, в частности, влечёт, что для любого присоединённо регулярного кольца R кольцо R_n является прямой суммой присоединённо регулярных правых идеалов, изоморфных $R_n(1)$. Это наблюдение представляет интерес в связи с высказанной в [4] гипотезой, что кольцо матриц над присоединённо регулярным кольцом присоединённо регулярно. Отметим ещё, что из теоремы 2 легко вытекает справедливость упомянутой гипотезы для присоединённо регулярных колец, представимых в виде суммы радикала и регулярного подкольца.

Литература

[1] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука, 1979.

[2] Clark W. E. Generalized radical rings // Canad. J. Math. — 1968. — Vol. 20, no. 1. — P. 88—94.

[3] Du Xiankun. The structure of generalized radical rings // Northeastern Math. J. — 1988. — Vol. 4, no. 1. — P. 101—114.

[4] Du Xiankun. The rings with regular adjoint semigroups // Northeastern Math. J. — 1988. — Vol. 4, no. 4. — P. 483—488.