О двойственности в алгебре гомологий комплекса Козюля*

Е. С. ГОЛОД
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 512.717+512.664.2

Ключевые слова: комплекс Козюля, модуль Коэна—Маколея, алгебра с двойственностью Пуанкаре.

Аннотация

Алгебра гомологий комплекса Козюля $K(x_1, \ldots, x_n; R)$ локального кольца Горенштейна R обладает двойственностью Пуанкаре, если идеал $I = (x_1, \ldots, x_n)$ в R является сильно коэн-маколеевым (т. е. все модули гомологий этого комплекса Козюля являются модулями Коэна—Маколея), а при условии, что $\dim R - \operatorname{grade} I \leqslant 4$, верно и обратное утверждение.

Abstract

E. S. Golod, On duality in the homology algebra of a Koszul complex, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 1, pp. 77—81.

The homology algebra of the Koszul complex $K(x_1, \ldots, x_n; R)$ of a Gorenstein local ring R has Poincaré duality if the ideal $I = (x_1, \ldots, x_n)$ of R is strongly Cohen—Macaulay (i.e., all homology modules of the Koszul complex are Cohen—Macaulay) and under the assumption that $\dim R - \operatorname{grade} I \leqslant 4$ the converse is also true.

Под алгеброй с двойственностью Пуанкаре над нётеровым коммутативным кольцом R понимается градуированная R-алгебра $A = \bigoplus\limits_{i \geqslant 0} A_i$, такая что для некоторого целого $n \geqslant 0$ умножение $A_i \times A_j \to A_n$ в A индуцирует изоморфизмы $\Delta_i \colon A_i \to \operatorname{Hom}_R(A_j, A_n)$ и $\Delta'_j \colon A_j \to \operatorname{Hom}_R(A_i, A_n)$ для всех пар (i, j), $i + j = n$. Ясно, что если это выполняется, то $n = \max\{i\colon\ A_i \neq 0\}$. Для R-модуля M пусть M^* обозначает R-модуль $\operatorname{Hom}_R(M, A_n)$. Так как Δ'_j представляет собой композицию $A_j \longrightarrow A_j^{**} \xrightarrow{\Delta_i^*} A_i^*$, то из того, что Δ_i, Δ'_j — изоморфизмы, следует, что R-модули A_i и A_j рефлексивны относительно A_n. Обратно, если Δ_i — изоморфизм и A_j рефлексивен, то Δ'_j также изоморфизм (и A_i рефлексивен). Примером алгебры Пуанкаре служит внешняя алгебра $\bigwedge F$ конечно порождённого свободного R-модуля F.

Пусть A — алгебра гомологий $H_*(x_1, \ldots, x_n; R)$ комплекса Козюля $K_*(x_1, \ldots, x_n; R)$ для некоторых $x_1, \ldots, x_n \in R$. В этой заметке рассматривается вопрос об условиях, при которых алгебра $H_*(x_1, \ldots, x_n; R)$ является

*Эта работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 02-01-00468.

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 1, с. 77—81.

алгеброй Пуанкаре. Когда R — локальное кольцо и $I=(x_1,\dots,x_n)$ — его максимальный идеал, то ответ был дан в [1]: $H_*(x_1,\dots,x_n;R)$ является алгеброй Пуанкаре (в этом случае она представляет собой алгебру над полем R/I), если и только если R — кольцо Горенштейна.

Обратимся к общему случаю. Сначала заметим, что свойство алгебры $H_*(x_1,\dots,x_n;R)$ быть (или не быть) алгеброй Пуанкаре зависит только от идеала $I=(x_1,\dots,x_n)$, а не от выбора порождающего множества. Это вытекает из следующих двух лемм, доказательство которых не представляет затруднений.

Лемма 1. *Пусть A — градуированная R-алгебра и F — конечнопорождённый свободный R-модуль. A является алгеброй Пуанкаре, если и только если этим свойством обладает алгебра $A\otimes_R\bigwedge F$.*

Лемма 2. *Пусть $I=(x_1,\dots,x_n)$ — идеал в R и $y_1,\dots,y_m\in I$. Тогда существует изоморфизм градуированных R-алгебр*

$$H_*(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m;R)\cong H_*(x_1,\dots,x_n;R)\otimes_R\bigwedge R^m.$$

Далее, заметим, что рассматриваемый вопрос может быть сведён к случаю, когда идеал I состоит целиком из делителей нуля. Пусть $y_1,\dots,y_g$ — максимальная R-регулярная последовательность, содержащаяся в I, $Q=(y_1,\dots,y_g)$, $\bar R=R/Q$ и $\bar x_i$ — образ x_i при каноническом гомоморфизме $R\to\bar R$. В этих обозначениях можно сформулировать следующий хорошо известный факт [3].

Предложение 3. *Существует изоморфизм градуированных R-алгебр*

$$H_*(\bar x_1,\dots,\bar x_n;\bar R)\cong H_*(x_1,\dots,x_n;R)\otimes_R\bigwedge R^g.$$

В частности, $H_i(x_1,\dots,x_n;R)=0$ при $i>n-g$ и

$$H_{n-g}(x_1,\dots,x_n;R)\cong H_n(\bar x_1,\dots,\bar x_n;\bar R).$$

Хорошо известно, что последний модуль ненулевой и может быть отождествлён с $\operatorname{Ann}_{\bar R}\bar I$.

Введём обозначения: $\bar K_i=K_i(\bar x_1,\dots,\bar x_n;\bar R)$, $\bar B_i$ — подмодуль границ в $\bar K_i$ и $\bar H_i$ — модуль гомологий $H_i(\bar x_1,\dots,\bar x_n;\bar R)$. В [1] было дано необходимое и достаточное условие для того, чтобы алгебра $H_*(\bar x_1,\dots,\bar x_n;\bar R)$ (а следовательно, и $H_*(x_1,\dots,x_n;R)$) была алгеброй Пуанкаре.

Предложение 4 ([1]). *Отображение*

$$\bar H_{n-i}\to\bar H_i^*=\operatorname{Hom}_{\bar R}(\bar H_i,\bar H_n)$$

биективно, если и только если

$$\operatorname{Ext}^1_{\bar R}(\bar K_{i-1}/\bar B_{i-1},\bar R)=\operatorname{Ext}^2_{\bar R}(\bar K_{i-1}/\bar B_{i-1},\bar R)=0.$$

Принимая во внимание изоморфизм из предложения 3, получаем (в прежних обозначениях)

Предложение 5. *$H_*(x_1, \ldots, x_n; R)$ является алгеброй Пуанкаре, если и только если*

$$\mathrm{Ext}^1_{\bar{R}}(\bar{K}_i/\bar{B}_i, \bar{R}) = \mathrm{Ext}^2_{\bar{R}}(\bar{K}_i/\bar{B}_i, \bar{R}) = 0 \tag{1}$$

для $i = 0, \ldots, n-g-1$ (эквивалентно для $i = 0, \ldots, n-1$).

Однако условия (1) не представляются вполне удовлетворительными, так как они формулируются не в терминах внутренних свойств кольца R и идеала I, а в терминах плохо понимаемых модулей $\bar{K}_i/\bar{B}_i$.

Напомним, что идеал $I = (x_1, \ldots, x_n)$ в локальном кольце Коэна—Маколея R называется сильно коэн-маколеевым, если все ненулевые модули гомологий Козюля $H_i(x_1, \ldots, x_n; R)$ являются модулями Коэна—Маколея (размерности, равной $\dim R/I$). В случае горенштейнова кольца R это условие эквивалентно тому, что

$$\mathrm{Ext}^j_R(H_i(x_1, \ldots, x_n; R), R) = 0$$

для $i = 0, \ldots, n-g$ и $j \geqslant g+1$, где $g = \mathrm{grade}\, I$.

В настоящей заметке доказывается следующее предложение, которое показывает существование некоторых связей между свойством алгебры гомологий Козюля $H_*(x_1, \ldots, x_n; R)$ быть алгеброй Пуанкаре и свойством идеала $I = (x_1, \ldots, x_n)$ в R быть сильно коэн-маколеевым.

Предложение 6. *Пусть R — локальное кольцо размерности d и $I = (x_1, \ldots, x_n)$ — идеал в R, $\mathrm{grade}\, I = g$. Если модули гомологий Козюля удовлетворяют условию*

$$\mathrm{Ext}^j_R(H_i(x_1, \ldots, x_n; R), R) = 0 \tag{2}$$

для $i = 0, \ldots, n-g-1$, $g+1 \leqslant j \leqslant n-i+1$, то $H_*(x_1, \ldots, x_n; R)$ является алгеброй Пуанкаре. Обратно, в предположении, что R горенштейново и $d \leqslant g+4$, из того, что $H_*(x_1, \ldots, x_n; R)$ — алгебра Пуанкаре, следует, что идеал I сильно коэн-маколеев.

Доказательство. Предположим, что выполнено условие (2), и покажем, что удовлетворяется условие (1). Так как $H_i(x_1, \ldots, x_n; R)$ являются $\bar{R}$-модулями и для всякого $\bar{R}$-модуля M и любого $j \geqslant 0$ имеет место

$$\mathrm{Ext}^j_{\bar{R}}(M, \bar{R}) \cong \mathrm{Ext}^{j+g}_R(M, R),$$

то

$$\mathrm{Ext}^j_{\bar{R}}(H_i(x_1, \ldots, x_n; R), \bar{R}) = 0$$

для $i = 0, \ldots, n-g-1$ и $1 \leqslant j \leqslant n-g-i+1$.

В силу предложения 3 это условие эквивалентно условию

$$\mathrm{Ext}^j_{\bar{R}}(H_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n; \bar{R}), \bar{R}) = 0 \tag{3}$$

для $i = 0, \ldots, n-g-1$ и $1 \leqslant j \leqslant n-g-i+1$.

Покажем индукцией по $i = 0, \ldots, n-g+1$, что

$$\mathrm{Ext}^j_{\bar{R}}(\bar{K}_i/\bar{B}_i, \bar{R}) = 0 \tag{4}$$

для $1 \leqslant j \leqslant n-g-i+1$ и, в частности, что удовлетворяется условие (1). Для $i=0$ условия (4) и (3) совпадают, так как $\bar{K}_0/\bar{B}_0 = H_0(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n;\bar{R})$. Если (4) удовлетворяется для $i-1$, то

$$\operatorname{Ext}^j_{\bar{R}}(\bar{B}_{i-1},\bar{R}) \cong \operatorname{Ext}^{j+1}_{\bar{R}}(\bar{K}_{i-1}/\bar{B}_{i-1},\bar{R}) = 0 \tag{5}$$

для $1 \leqslant j \leqslant n-g-i+1$. Тогда выполнение условия (4) для i следует из (3), (5) и длинной точной последовательности

$$\begin{aligned}\ldots \longrightarrow \operatorname{Ext}^j_{\bar{R}}(\bar{B}_{i-1},\bar{R}) \longrightarrow \operatorname{Ext}^j_{\bar{R}}(\bar{K}_i/\bar{B}_i,\bar{R}) \longrightarrow \\ \longrightarrow \operatorname{Ext}^j_{\bar{R}}(\bar{H}_i,\bar{R}) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{j+1}_{\bar{R}}(\bar{B}_{i-1},\bar{R}) \longrightarrow \ldots,\end{aligned} \tag{6}$$

ассоциированной с короткой точной последовательностью

$$0 \longrightarrow \bar{H}_i \longrightarrow \bar{K}_i/\bar{B}_i \longrightarrow \bar{B}_{i-1} \longrightarrow 0.$$

Теперь предположим, что R горенштейново и $d-g \leqslant 4$. Чтобы доказать обратное утверждение, мы должны показать, что

$$\operatorname{Ext}^j_R(H_i(x_1,\dots,x_n;R),R) = 0$$

для $i=0,\dots,n-g$ и $j \geqslant g+1$ или, что эквивалентно,

$$\operatorname{Ext}^j_{\bar{R}}(\bar{H}_i,\bar{R}) = 0$$

для $i=0,\dots,n$ и $j \geqslant 1$. Но из точной последовательности (6) и изоморфизма (5) мы видим, что это следует из выполнения условия

$$\operatorname{Ext}^j_{\bar{R}}(\bar{K}_i/\bar{B}_i,\bar{R}) = 0 \tag{7}$$

для $i=0,\dots,n-1$ и $j \geqslant 1$ (и согласно первой части доказательства эквивалентно этому условию). Так как $H_*(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n;\bar{R})$ предполагается алгеброй Пуанкаре, то в силу предложения 5 обращение в нуль $\operatorname{Ext}^j_{\bar{R}}(\bar{K}_i/\bar{B}_i,\bar{R})$ для $j=1,2$ уже доказано.

Напомним определение транспозита $\operatorname{Tr}(M)$ для конечнопорождённого модуля M [2]. Пусть M включён в точную последовательность

$$F_1 \xrightarrow{\delta} F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

где F_0, F_1 — конечнопорождённые свободные R-модули. Тогда $\operatorname{Tr}(M) = \operatorname{coker}\delta^*$ для сопряжённого гомоморфизма $\delta^*\colon F_0^* \to F_1^*$. Хорошо известно, что модуль M рефлексивен в том и только том случае, если

$$\operatorname{Ext}^1_R(\operatorname{Tr}(M),R) = \operatorname{Ext}^2_R(\operatorname{Tr}(M),R) = 0.$$

В нашей ситуации для всякого $i=0,\dots,n-1$ из точной последовательности

$$\bar{K}_{i+1} \xrightarrow{\delta} \bar{K}_i \longrightarrow \bar{K}_i/\bar{B}_i \longrightarrow 0$$

получаем точную последовательность

$$\bar{K}_i^* \xrightarrow{\delta^*} \bar{K}_{i+1}^* \longrightarrow \operatorname{Tr}(\bar{K}_i/\bar{B}_i) \longrightarrow 0.$$

В силу двойственности для умножения во внешней алгебре модуль $\bar{K}_i^*$ может быть отождествлён с $\bar{K}_{n-i}$, а отображение δ^* — с дифференциалом $\bar{K}_{n-1} \to \bar{K}_{n-i-1}$ в комплексе Козюля $K(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n; \bar{R})$, откуда получаем изоморфизм

$$\mathrm{Tr}(\bar{K}_i/\bar{B}_i) \cong \bar{K}_{n-i-1}/\bar{B}_{n-i-1}.$$

В силу (7) для $j = 1, 2$ получаем, что модули $\bar{K}_i/\bar{B}_i$, $i = 0, \ldots, n-1$, рефлексивны и, следовательно, являются вторыми модулями сизигий. Так как $\bar{R}$ горенштейново, то (7) выполняется для $j \geqslant d - g - 2$. Согласно предположению $d - g \leqslant 4$ получаем, что (7) выполняется для всех $j \geqslant 1$, откуда следует, что модули $H_i(x_1, \ldots, x_n; R)$ являются модулями Коэна—Маколея.

Литература

[1] Аврамов Л. Л., Голод Е. С. Об алгебре гомологий комплекса Козюля локального кольца Горенштейна // Мат. заметки. — 1971. — Т. 9, № 1. — С. 53—58.

[2] Auslander M., Bridger M. Stable module theory. — Mem. Amer. Math. Soc., vol. 94. — 1969.

[3] Tate J. Homology of Noetherian rings and local rings // Illinois J. Math. — 1957. — Vol. 1, no. 1. — P. 14—27.