Общая алгебра и линейные отображения, сохраняющие матричные инварианты*

А. Э. ГУТЕРМАН, А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 512.643

Ключевые слова: общая алгебра, линейные инварианты.

Аннотация

Исследуется взаимосвязь теории линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты, с различными областями общей алгебры.

Abstract

A. E. Guterman, A. V. Mikhalev, General algebra and linear transformations preserving matrix invariants, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 1, pp. 83—101.

The interrelations between the theory of linear transformations preserving matrix invariants and different branches of mathematics are surveyed here. The preferences are given for those methods and motivations to study these transformations that arise from general algebra.

1. Введение

Теория линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты, восходит к следующему вопросу, который поставил Дедекинд в 1880 г., см. [14]. Пусть G — конечная группа порядка n. Рассмотрим конечное множество независимых попарно коммутирующих переменных $\{x_g\}_{g\in G}$. Групповой матрицей группы G называется квадратная матрица X_G порядка n, столбцы и строки которой заиндексированы элементами группы G так, что (g,h)-й коэффициент есть $x_{gh^{-1}}$. Определитель матрицы X_G — это однородный многочлен степени n от переменных $\{x_g\}_{g\in G}$. Дедекинд назвал этот многочлен групповым определителем и установил, что если G — абелева группа, то её групповой определитель раскладывается в произведение линейных множителей над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$. Более того, коэффициент при переменной x_g в каждом линейном множителе совпадает со значением группового характера на элементе $g\in G$. Например, если $G=\mathbf{Z}_3$ — циклическая группа порядка 3, то её групповая матрица имеет вид

*Работа частично поддержана грантами РФФИ № 00-15-96128 и 99-01-00382.

$\mathbf{Z}_3$	e	a	a^2
a^2	x	y	z
a	z	x	y
e	y	z	x

Таблица характеров для группы $\mathbf{Z}_3$ такова:

$\mathbf{Z}_3$	e	a	a^2
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ε	ε^2
χ_3	1	ε^2	ε

Здесь $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$. Разложение для группового определителя выглядит следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = (x+y+z)(x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z)(x+\varepsilon^2 y+\varepsilon z).$$

Отсюда видно, что любая строка таблицы характеров группы $\mathbf{Z}_3$ определяется однозначно по соответствующему множителю в разложении для группового определителя. Для некоторых некоммутативных групп, в частности для симметрической группы третьего порядка S_3, и для группы кватернионов Q_8, Дедекинд также разложил их групповые определители в произведение неприводимых множителей, среди которых были уже нелинейные. Однако общая ситуация оставалась неясной, и Дедекинд поставил вопрос о разложении для группового определителя конечной неабелевой группы в произведение неприводимых множителей. Работая над этой проблемой, Георг Фробениус создал несколько новых плодотворных теорий, одна из которых была теория представлений конечных групп, а другая — теория линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты, которой посвящена данная работа. В качестве приложения этих идей Фробениусу [21] удалось полностью решить проблему Дедекинда. Фробениус доказал, что групповой определитель конечной группы G разлагается над полем комплексных чисел в произведение вида $P_1^{i_1}\ldots P_k^{i_k}$, где многочлены P_j, $j=1,\ldots,k$, неприводимы и $i_j=\deg(P_j)$, $j=1,\ldots,k$, т. е. кратность вхождения каждого неприводимого многочлена в разложение совпадает со степенью этого многочлена. Более того, любой неприводимый многочлен в этом разложении соответствует некоторому неприводимому представлению группы G и размерность этого представления совпадает со степенью соответствующего неприводимого многочлена. Для того чтобы установить, что класс эквивалентных представлений соответствует единому множителю в разложении для группового определителя, Фробениусу понадобилось охарактеризовать биективные линейные преобразования, сохраняющие определитель матриц над полем комплексных чисел.

Легко видеть, что транспонирование и подобие принадлежат описанному классу линейных преобразований. Определим на основе этих двух примеров следующий класс стандартных преобразований.

Пусть $M_{m,n}(R)$ обозначает множество матриц порядка $m \times n$ с кольцом коэффициентов R. В случае, когда $m = n$, $M_n(R)$ обозначает $M_{n,n}(R)$, $\mathrm{GL}_n(R)$ обозначает группу обратимых матриц.

Определение 1.1. Линейное преобразование $T\colon M_{m,n}(\mathbf{F}) \to M_{m,n}(\mathbf{F})$ называется стандартным, если оно представимо в следующем виде: найдутся матрицы $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{F})$, $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{F})$, такие что $T(X) = PXQ$ для всех матриц $X \in M_n(\mathbf{F})$. В случае $m = n$ преобразование $T(X) = P({}^tX)Q$ для всех $X \in M_n(\mathbf{F})$, где ${}^tX$ обозначает транспонированную матрицу, тоже называется стандартным.

Следующая теорема Фробениуса даёт полную характеризацию линейных отображений, сохраняющих определитель.

Теорема 1.2 ([21], Фробениус). *Пусть $T\colon M_n(\mathbf{C}) \to M_n(\mathbf{C})$ — биективное линейное преобразование, для которого $\det T(X) = \det X$ для всех матриц $X \in M_n(\mathbf{C})$. Тогда преобразование T стандартно с условием $\det(PQ) = 1$.*

В 1925 г. И. Шур [66] обобщил теорему Фробениуса: он заменил условие инвариантности определителя на условие инвариантности всех миноров некоторого фиксированного порядка r. Воспроизведём формулировку его теоремы, принадлежащую М. Маркусу и Ф. Мэю [53]. Для произвольной матрицы $X \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ рассматривается r-я матрица дополнений $C_r(X) \in M_{\binom{m}{r},\binom{n}{r}}(\mathbf{C})$, состоящая из миноров матрицы X порядка r, упорядоченных лексикографически по строкам и столбцам.

Теорема 1.3 ([66], Шур, см. также [53]). *Пусть $T\colon M_n(\mathbf{C}) \to M_n(\mathbf{C})$ — биективное линейное преобразование. Для заданного параметра r, $2 \leqslant r \leqslant \min(m,n)$, предположим, что существует такое биективное линейное преобразование $S\colon M_{\binom{m}{r},\binom{n}{r}}(\mathbf{C}) \to M_{\binom{m}{r},\binom{n}{r}}(\mathbf{C})$, что для любой матрицы $X \in M_{m,n}(\mathbf{C})$*

$$C_r(T(X)) = S(C_r(X)).$$

Тогда преобразование T стандартное.

Теоремы Фробениуса и Шура имеют сложные комбинаторные доказательства. В 1949 г. Ж. Дьёдонне [16] предложил новый подход к классификации биективных линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты, базирующийся на основной теореме проективной геометрии. Дьёдонне получил стандартную характеризацию биективных линейных отображений, сохраняющих вырожденные матрицы над произвольным полем.

Теорема 1.4 ([16], Дьёдонне, см. также [17, лемма 1]). *Пусть $\mathbf{F}$ — произвольное поле и T — обратимое линейное отображение на $M_n(\mathbf{F})$, удовлетворяющее условию: из $\det X = 0$ следует $\det T(X) = 0$. Тогда отображение T стандартно.*

Эти теоремы начали столетие интенсивного и плодотворного изучения линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты. Обычно задачи о характеризации линейных отображений, сохраняющих тот или иной матричный инвариант, свойство или отношение, называются *Linear Preserver Problems* или, сокращённо, LPPs. В течение последнего времени эти вопросы активно изучались. Наиболее полное описание известных результатов можно найти в обзорах [49, 62]. Данная работа посвящена взаимосвязи между вопросами классификации линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты, и другими областями математики. Приводится общая постановка задачи, практические мотивации для их изучения и основные методы исследования. В результате становится ясным, что во всех упомянутых направлениях вопросы классификации линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты, тесно связаны с общей алгеброй и другими направлениями математики.

2. Общая постановка задачи

Общая постановка задачи классификации линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты, может быть сформулирована следующим образом. Пусть $T\colon M_n(R) \to M_n(R)$ является линейным (аддитивным, полулинейным, полулинейным над некоторым подкольцом) отображением матриц некоторого фиксированного порядка n над некоторым кольцом R. Рассмотрим подмножество $S \subseteq M_n(R)$, или функционал $\rho\colon M_n(R) \to Q$, где Q — заданное множество (ρ может быть определителем, следом, рангом, перманентом и т. д.), или свойство матриц $\mathcal{P}$ (нильпотентность, идемпотентность, вырожденность и т. д.), или отношение $\mathcal{R}$, заданное на множестве матриц (подобие, коммутативность, отношение порядка и т. д.). Предполагается, что отображение T сохраняет одно из перечисленных свойств в следующем смысле: в первом случае условие $X \in S$ влечёт условие $T(X) \in S$. Во втором случае $\rho(X) = \rho(T(X))$ для всех матриц $X \in M_n(R)$. В третьем случае, если матрица X удовлетворяет свойству $\mathcal{P}$, то матрица $T(X)$ также удовлетворяет свойству $\mathcal{P}$. В последнем случае условие $T(X)\,\mathcal{R}\,T(Y)$ следует из условия $X\,\mathcal{R}\,Y$. Основная задача о линейных отображениях, сохраняющих матричные инварианты, состоит в характеризации всех линейных отображений, сохраняющих один из S, ρ, $\mathcal{P}$ или $\mathcal{R}$.

Мы будем говорить «линейные отображения, сохраняющие матричные инварианты», подразумевая линейные отображения, сохраняющие множества, функционалы, свойства, отношения и т. д.

Задача о классификации линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты, имеет фундаментальное теоретическое значение в теории матриц. По своей постановке проблема, сформулированная выше, является обратной классической задаче теории инвариантов, т. е. задаче классификации орбит и инвариантов заданного действия. В нашем случае требуется восстановить действие по его инварианту. Интересно, что такого малого количества информации во многих случаях оказывается достаточно для получения полной характеризации соответствующего отображения. Например, рассмотрим линейное отображение $T\colon M_n(\mathbf{C}) \to M_n(\mathbf{C})$, определяемое формулой $T(X) = \alpha PXP^{-1} + \mathrm{tr}(X)B$ или формулой $T(X) = \alpha P({}^tX)P^{-1} + \operatorname{tr}(X)B$ для некоторой невырожденной матрицы $P \in M_n(\mathbf{C})$, произвольной матрицы $B \in M_n(\mathbf{C})$ и ненулевого элемента $\alpha \in \mathbf{C}$. Прямая проверка показывает, что отображение T переводит множество нильпотентных матриц в себя. Оказывается, что отображениями такого вида исчерпываются все биективные линейные преобразования на $M_n(\mathbf{C})$, оставляющие множество нильпотентных матриц неподвижным (для доказательства см. [10]).

3. Мотивации для изучения LPPs

Первые характеризации линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты, были вызваны различными вопросами общей алгебры. Классификация Фробениуса линейных отображений, сохраняющих определитель, потребовалась для нужд теории представлений конечных групп, см. [21]. Теорема Дьёдонне о сохранении вырожденности возникла из теории классических групп и квадратичных форм, см. [16]. Далее приводятся некоторые другие мотивации изучения этих вопросов, показывающие, что такие задачи естественно возникают в самых разнообразных контекстах.

3.1. Геометрия Минковского

Пусть $\mathbf{R}^4$ — четырёхмерное векторное пространство над полем вещественных чисел. Рассмотрим метрику Минковского на $\mathbf{R}^4$, т. е. линейный функционал $\rho\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, определяемый равенством $\rho(t,x,y,z) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Линейное преобразование $L\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ называется *преобразованием Лоренца*, если $\rho(L(\alpha)) = \rho(\alpha)$ для любого вектора $\alpha \in \mathbf{R}^4$. Определим отображение $\varphi\colon \mathbf{R}^4 \to H_2(\mathbf{C})$, где $H_2(\mathbf{C})$ обозначает множество всех комплексных эрмитовых (2×2)-матриц:

$$\varphi(t,x,y,z) = \begin{pmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что φ осуществляет изоморфизм между $\mathbf{R}^4$ и $H_2(\mathbf{C})$, рассматриваемым как векторное пространство над полем $\mathbf{R}$ с базисом $E_{11}+E_{22}$, $E_{11}-E_{22}$, $E_{12}+E_{21}$ и $i(E_{12}-E_{21})$, где через E_{ij} обозначена матрица с 1 на месте (i,j) и с нулями на всех остальных местах. Нетрудно убедиться в том, что $\det\varphi(\alpha) = \rho(\alpha)$ для всех $\alpha \in \mathbf{R}^4$. Следовательно, определяя отображение $T\colon H_2(\mathbf{C}) \to H_2(\mathbf{C})$ через $T = \varphi L \varphi^{-1}$, легко видеть, что $\rho(L(\alpha)) = \rho(\alpha)$ для всех $\alpha \in \mathbf{R}^4$ тогда и только тогда, когда $\det T(H) = \det H$ для всех $H \in H_2(\mathbf{C})$. Таким образом, определить структуру преобразований Лоренца — это то же самое, что определить структуру всех отображений $T\colon H_2(\mathbf{C}) \to H_2(\mathbf{C})$, сохраняющих определитель.

3.2. Методы вычислений

Для данного матричного инварианта структура и количество линейных отображений, его сохраняющих, являются мерой сложности этого инварианта, т. е. они характеризуют и, в некотором смысле, определяют количество арифметических операций, необходимых для вычисления этого инварианта. Действительно, большинство методов вычисления определителя, ранга и других матричных инвариантов основаны на приведении матрицы к некоторому подходящему виду преобразованиями, не меняющими данный инвариант, таким образом, эти методы основаны на линейных отображениях, сохраняющих данный матричный инвариант. Например, известно, что квадратную матрицу с коэффициентами из произвольного поля можно привести к диагональному виду, где на диагонали стоят только нули и единицы, преобразованием, не меняющим ранга. Это позволяет найти простой алгоритм вычисления ранга квадратной матрицы порядка n, требующий $O(n^3)$ операций. Аналогичный факт верен и для определителя. С другой стороны, простейший метод вычисления перманента квадратной $(n \times n)$-матрицы (формула Райзера) требует $(n-1)(2^n-1)$ операций умножения. Такое различие в сложности вычисления обусловлено тем, что очень мало линейных отображений сохраняют перманент, см. работу [53] М. Маркуса и Ф. Мэя: единственными отображениями, сохраняющими перманент, являются транспонирование и домножение на обратимые матрицы P и Q с двух сторон, где обе матрицы P и Q являются произведениями диагональной матрицы и матрицы, полученной из единичной перестановкой строк и столбцов, тогда как в случае линейных отображений, сохраняющих ранг и определитель, P и Q — почти произвольные необратимые матрицы.

3.3. Приложения к линейной алгебре

Хорошо известная теорема Моцкина и Тасской, утверждающая, что матрицы A и B с коэффициентами из поля одновременно диагонализуемы тогда и только тогда, когда каждый элемент матричного пучка $\lambda A + \mu B$ диагонализуем. Эта теорема была первоначально доказана с использованием очень глубоких результатов алгебраической геометрии. Однако недавно М. Омладич и П. Шермл в работе [60] показали, что эта теорема следует из классификации линейных отображений, сохраняющих диагонализуемость матриц.

3.4. Нормированные пространства

Многие задачи математики и её приложений требуют изучения различных норм на векторных пространствах, см., например, [9]. Два нормированных пространства можно идентифицировать, если существует изометрический изоморфизм между ними, т. е. такая линейная биекция соответствующих линейных пространств, что первая норма прообраза равняется второй норме образа. В случае, когда пространства совпадают, такие отображения называются изометриями. Таким образом, линейные отображения, сохраняющие матричные нормы, могут быть рассмотрены как специальные случаи изометрий. Знание группы изометрий помогает найти изометрические изоморфизмы между нормированными пространствами и, следовательно, распознать различные и совпадающие нормы. Более подробно см. в работе Ч.-К. Ли [45].

3.5. Специальная теория относительности

В своей работе [36] Л.-К. Хуа ввёл следующий важный матричный инвариант: матрицы $Z, W \in M_{n,m}(D)$ называются *когерентными*, если ранг их разности не больше одного, т. е. $\operatorname{rank}(Z - W) \leqslant 1$.

Это определение естественно возникает в специальной теории относительности. Действительно, два четырёхмерных события пространства-времени являются когерентными, если расстояние между ними равняется произведению временного интервала, их разделяющего, на скорость света.

Каждое пространственно-временное событие (x, y, z, t) может быть представлено эрмитовой матрицей

$$H = \begin{pmatrix} \mathrm{c}t + x & y + iz \\ y - iz & \mathrm{c}t - x \end{pmatrix},$$

где через c обозначена скорость света. В терминах этого представления можно получить эквивалентность следующих условий:

1) события (x_1, y_1, z_1, t_1) и (x_2, y_2, z_2, t_2) когерентны;

2) матрицы H_1 и H_2 когерентны;

3) $\det(H_1 - H_2) = 0$;

4) пространственно-временной интервал $S_{1,2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2 = 0$.

В работе [36] Хуа охарактеризовал биективные отображения, сохраняющие когерентность, а значит и показал, как когерентные события связаны друг с другом.

3.6. Теория групп

В [42, проблема 1] К. Джонсон поставил следующую проблему о групповых определителях: могут ли две неизоморфные конечные группы иметь одинаковые групповые определители? Ответ на этот вопрос был дан Е. Форманеком и Д. Сибли в [20]. Они показали, что групповой определитель определяет конечную группу с точностью до изоморфизма. Ключевой идеей их доказательства был подъём теоремы Дьёдонне о линейных отображениях, сохраняющих вырожденность, на прямое произведение матричных алгебр.

3.7. Центральные простые алгебры

Напомним, что если A — центральная простая алгебра размерности n^2 над полем K, то *функция нормы* $\mathrm{N}(a)$ (определитель оператора левого умножения $x \to ax$) всегда удовлетворяет формальному тождеству $\mathrm{N}(a) = (\mathrm{RN}(a))^n$ для подходящей функции RN, называемой *редуцированной нормой*, см. [19]. Например, на матричной алгебре порядка n редуцированная норма $\mathrm{RN}(A)$ совпадает с определителем $\det A$. Аналогично разделу 3.6, можно поставить вопрос: определяет ли редуцированная норма центральную простую алгебру с точностью до изоморфизма? Наиболее элегантный способ доказательства того, что редуцированная норма определяет центральную простую алгебру единственным, с точностью до изоморфизма, образом, был предложен в работе [71] У. Уотерхауза. Это доказательство основано на некотором обобщении теоремы Фробениуса о линейных отображениях, сохраняющих определитель. Более детальный обзор теории редуцированных норм можно найти в [38, глава 5.12], см. также [34,39].

Приведённый список не является исчерпывающим. Например, существует много матричных отношений, возникающих в теории динамических систем и математической статистике, для которых имело бы практический интерес получить классификацию линейных отображений, их сохраняющих.

4. Основные методы исследования LPPs

В этой главе мы приводим краткий обзор основных методов решения задач классификации линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты. Наша цель — показать, что различные идеи и методы из разных направлений математики важны для изучения задач об отображениях, сохраняющих матричные инварианты. Для того чтобы это проиллюстрировать, приводится описание различных методов работы с LPPs, включая некоторые недавние подходы. Мы не будем сосредоточиваться на детальном перечне ссылок, касающихся каждого результата. Большинство результатов можно найти в подробных обзорах [49,62].

Заметим, что выбор метода для решения каждой конкретной задачи существенно зависит от следующих условий:

- инвариант;
- ограничения на отображение T (биективность, полулинейность и т. д.);
- предположения на основное поле или кольцо.

Контекст данной конкретной задачи обычно побуждает исследователя выбрать некоторый определённый метод. Однако в каждом конкретном случае это очень деликатная проблема. Ниже приводятся основные методы.

4.1. Теория матриц

Этот метод был введён в работах [52–54] Маркуса, Мэя, Минка, Мойлса и их учеников. Это один из наиболее часто используемых методов, для примера см. [62]. Как и можно было надеяться, значительная доля информации, касающейся линейных отображений матриц над полями, сохраняющих матричные инварианты, может быть извлечена чисто матричными методами. Например, используя исключительно теорию матриц, можно доказать, что линейные отображения, сохраняющие определитель, биективны и сохраняют ранг; линейные отображения, сохраняющие спектр, унитарны; линейные отображения, сохраняющие степени матриц, сохраняют идемпотенты ранга один и т. д. Более того, во многих случаях этот метод позволяет получать характеризацию линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты.

Обычно один из наиболее плодотворных подходов к задачам об отображениях, сохраняющих матричные инварианты, заключается в комбинировании этого метода с одним из перечисленных ниже.

4.2. Теория классических групп

В работе [4] Е. Б. Дынкин получил теорему Фробениуса и серию связанных с ней результатов в качестве следствия своей классификации максимальных подгрупп классических групп. В основе этого метода лежит следующее построение. Пусть $\mathbf{F}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Обозначим $E = M_n(\mathbf{F})$ и рассмотрим группу $\mathrm{GL}_{\mathbf{F}}(E)$ всех биективных линейных преобразований E. Тогда $\mathrm{GL}_{\mathbf{F}}(E)$ является общей линейной группой порядка n^2 над $\mathbf{F}$. Стандартные линейные преобразования образуют подгруппу $\mathrm{St}_n(\mathbf{F})$ в $\mathrm{GL}_{\mathbf{F}}(E)$, которая имеет структуру сплетения $\mathrm{St}_n(\mathbf{F}) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbf{F}) \,\mathrm{Wr}\, \mathbf{Z}_2$, где $\mathbf{Z}_2$ — группа, порождённая транспонированием. Для данного подмножества $S \subseteq E$ обозначим через $\mathrm{Fix}\, S$ множество всех линейных отображений T, оставляющих множество S инвариантным, т. е. $T(S) \subseteq S$. Легко видеть, что множество $\mathrm{Fix}\, S$ имеет структуру моноида по отношению к операции композиции. В общем случае моноид $\mathrm{Fix}\, S$ не является подгруппой в $\mathrm{GL}_{\mathbf{F}}(E)$, так как включение $T(S) \subseteq S$ не обязательно влечёт равенство $T(S) = S$. Однако Д. Диксоном [17] было показано, что в случае алгебраического подмножества $S \subseteq M_n(\mathbf{F})$ отображение T действует на S сюръективно. Следовательно, в этом случае моноид $\mathrm{Fix}\, S$ имеет структуру группы. Таким образом, классификация линейных отображений, сохраняющих множество S, может быть сведена к анализу башни подгрупп $\mathrm{St}_n(\mathbf{F}) \subseteq \mathrm{Fix}\, S \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbf{F})$. Теперь с помощью списка всех таких подгрупп G, что $\mathrm{St}_n(\mathbf{F}) \subseteq G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbf{F})$, т. е. с использованием классификации Дынкина, нетрудно дать ответ на следующие вопросы.

- Пусть S — фиксированное подмножество в E и T — биективное линейное отображение, взаимооднозначное на S. Какая именно группа G из списка совпадает с $\mathrm{Fix}\, S$?

- Какие группы G из списка совпадают с $\operatorname{Fix} S$ хоть для какого-нибудь T-инвариантного множества S?

Этот метод многократно использовался и широко развивался, например, см. [18, 23–25, 45, 63] и [62, глава 8.4].

4.3. Проективная геометрия

Один из первых общих методов решения LPPs над произвольными полями был предложен Дьёдонне [15]. Этот метод основан на применении основной теоремы проективной геометрии (FTPG). Эта теорема утверждает, что каждая биекция σ точек проективного пространства, сохраняющая коллинеарность троек точек, индуцирована полулинейным преобразованием соответствующего линейного пространства, см. [1]. Работая с линейными отображениями, сохраняющими инварианты матриц, действующими на некотором линейном пространстве V, естественно рассматривать проективное пространство, ассоциированное с V, т. е. образованное элементами решётки подпространств V. Рассматриваемое линейное отображение индуцирует некоторое преобразование проективного пространства посредством обычного операторного действия. В некоторых случаях удаётся доказать, что индуцированное отображение — это биекция точек, для которой выполнены предположения FTPG. Тогда, поднимая результаты FTPG обратно на отображение пространства матриц, можно заключить, что рассматриваемое отображение является стандартным. Этот метод использовался для классификаций линейных отображений, сохраняющих ранг один, вырожденность, коммутативность и т. д. (см., например, [16, 37, 61, 72, 77] и [62, глава 4, часть 8.5].

4.4. Алгебраическая геометрия

Методы алгебраической геометрии позволяют работать с матрицами над произвольными коммутативными кольцами R. В [68] У. К. Уотерхауз предложил применять к решению задач о линейных отображениях, сохраняющих матричные инварианты, подход аффинных групповых схем. С помощью этого метода он классифицировал линейные отображения матриц над произвольным коммутативным кольцом, сохраняющие или определитель, или ранг один, или некоторые другие матричные инварианты и свойства, выражаемые полиномиальными соотношениями. Для наших целей аффинную групповую схему можно определить как подгруппу в $\mathrm{GL}_n(R)$, задаваемую полиномиальными уравнениями на матричные коэффициенты. Легко видеть, что биективные линейные отображения, сохраняющие свойство или инвариант, записываемый полиномиальным выражением, образуют аффинную групповую схему. Аналогично, биективные линейные отображения, сохраняющие некоторые условия, утверждающие, что несколько многочленов одновременно обращаются в ноль, образуют аффинную групповую схему. Уотерхауз развил структурную теорию аффинных групповых схем, см. [68, 69], и затем свёл вопрос о структуре группы линейных отображений, сохраняющих данный инвариант, к вопросу классификации аффинных групповых схем, аналогично тому, как это делалось при использовании метода теории классических групп.

Подход, основанный на использовании алгебраической геометрии, хорошо работает также при доказательстве обратимости линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты. Например, легко видеть, что линейные отображения, сохраняющие определитель, биективны, причём обратное отображение тоже сохраняет определитель. Однако многие матричные инварианты сохраняются вырожденными отображениями, например, нетрудно найти вырожденные отображения, сохраняющие след матриц. Как решить проблему обратимости в общем случае? Техника алгебраической геометрии позволяет заключить следующее (см. работу [70]): если отображение T матриц над произвольным полем $\mathbf{F}$ (за исключением случая (2×2)-матриц над полем $\mathbf{F}_2$) сохраняет некоторый матричный функционал $f\colon M_n(\mathbf{F}) \to \mathbf{F}$, принимающий одинаковые значения на подобных матрицах, то отображение T обратимо за исключением случаев, когда f является функцией следа и когда $f(X + \alpha E) = f(X)$ для всех матриц X и всех скалярных матриц αE.

4.5. Дифференциальная геометрия

Обозначим через $\sim$ некоторое отношение эквивалентности на $M_{m,n}(\mathbf{C})$. Через $[A]$ будем обозначать класс эквивалентности фиксированной матрицы A относительно отношения $\sim$. Геометрическая структура данного класса важна при изучении линейных отображений, сохраняющих этот класс, и даже при изучении линейных отображений, сохраняющих отношение $\sim$. Действительно, во многих случаях классы эквивалентности имеют структуру дифференциального многообразия. Поэтому дополнительная информация о поведении размерности и касательных пространств при действии данного отображения может быть использована для классификации линейных отображений, сохраняющих $\sim$. В частности, можно доказать, см. [33, 35, 46], что линейные отображения, сохраняющие класс эквивалентности матрицы $A \in M_{n,m}(\mathbf{C})$, сохраняют также и касательное пространство к $[A]$ в точке A, и если это отображение является биективным, то оно также не уменьшает размерность. Поскольку структура касательного пространства гораздо проще, чем структура многообразия, появляется возможность применения такой техники для получения редукций ряда задач о линейных отображениях, сохраняющих матричные инварианты, к более простым, см. [33], [49, часть 6].

4.6. Дуализации

Основная идея этого метода заключается в рассмотрении дуального отображения T^* вместо отображения T или вместе с отображением T. Такой подход можно применять для изучения линейных отображений, сохраняющих различные матричные инварианты, см. [43, 47, 48]. В частности, этот метод является особенно полезным при работе с изометрическими изоморфизмами нормированных пространств. Заметим, что линейный оператор сохраняет норму на некотором векторном пространстве тогда и только тогда, когда дуальный оператор сохраняет дуальную норму. В то время как рассматриваемая норма может быть достаточно сложной, дуальная норма может иметь значительно более простую структуру. Задачи о линейных отображениях, сохраняющих норму, очевидным образом связаны с задачами о линейных отображениях, оставляющих на месте единичный шар (относительно рассматриваемой нормы). Последние в некотором смысле определяются множеством экстремальных точек этого шара. При этом геометрическая структура множества экстремальных точек может существенно меняться при замене нормы на дуальную. С другой стороны, при работе с линейными отображениями, сохраняющими некоторое компактное множество, иногда оказывается возможным построить норму, рассматривая заданное множество в качестве единичного шара. Тогда вопрос классификации линейных отображений, сохраняющих некоторое множество S, сводится к более хорошо изученному вопросу классификации изометрий норм (см. [47, 48, 51], [49, часть 6] и приведённые там ссылки).

4.7. Тензорное исчисление

Класс векторных пространств является замкнутым по отношению к тензорному умножению. Более того, тензорные произведения снабжены некоторой дополнительной структурой, а именно, оказывается возможным задать функцию ранга на тензорном произведении векторных пространств над полем. Рангом элемента $\alpha \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_p$ называется такое наименьшее натуральное число k, что $\alpha = v_1^1 \otimes \ldots \otimes v_p^1 + \ldots + v_1^k \otimes \ldots \otimes v_p^k$. Заметим, что при $p = 2$ существует изоморфизм $\mathrm{Hom}(V_1, V_2) \cong V_1^* \otimes V_2$. Непосредственно проверяется, что при этом изоморфизме тензоры фиксированного ранга k переходят в матрицы ранга k. Следовательно, оказывается возможным переформулировать различные вопросы, касающиеся линейных отображений, сохраняющих ранг матриц, на тензорном языке. Таким образом, методы тензорного исчисления могут быть применены для решения LPPs. Во многих случаях доказательства результатов LPP были впервые получены при помощи тензорного исчисления и лишь затем передоказаны чисто матричными методами, см. [54, 56].

4.8. Функциональные тождества

Функциональные тождества кольца R можно рассматривать как тождества, справедливые для всех элементов R и включающие в себя отображения, заданные на R. *Решением* функционального тождества (FI) является характеризация всех отображений, ему удовлетворяющих. В общем случае нелегко описать все решения данного функционального тождества. Однако для некоторых классов колец существуют FI, допускающие только некоторые специальные классы отображений в качестве решения. В FI-теории такие отображения называются стандартными решениями. Полный и детальный обзор по FI-теории можно найти в недавней работе [12].

Заметим, что если некоторое свойство матричной алгебры можно описать как FI, то возможно рассматривать задачу о линейных отображениях, сохраняющих это свойство, как специальное функциональное тождество на матричной алгебре или её подалгебрах. В этом контексте решить LPP означает то же самое, что и решить FI для линейных отображений на матричной алгебре. Оказывается, что даже в частном случае матричных алгебр эта общая техника иногда является более успешной, чем остальные методы. Например, можно рассмотреть линейные отображения, сохраняющие коммутативность, и различные её обобщения, см. [5, 11, 44]. Более того, этот подход позволяет получить соответствующие результаты не только для матричной алгебры, но и для более общих классов колец, см. [7, 8, 13].

4.9. Теория моделей

При изучении LPPs многие результаты были впервые получены для матриц над полем комплексных чисел, а затем расширялись на матрицы над произвольными полями или кольцами. В некоторых случаях осуществить подъём было достаточно просто, однако во многих случаях для достижения цели требовались значительные усилия, см., например, [6, 50]. В работе [30] было показано, что использование принципа переноса из теории моделей, [41, 64], предоставляет эффективный метод решения этого вопроса во многих ситуациях. Развитая техника позволяет перенести результат LPP, который можно выразить на языке первого порядка, с поля комплексных чисел на произвольное алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. В случае, когда свойство матриц в данной LPP не является свойством первого порядка, непосредственное применение принципа переноса становится невозможным, однако в некоторых случаях удаётся редуцировать рассматриваемую задачу к задаче, формулируемой языком первого порядка, средствами линейной алгебры, получить классификацию для редуцированной задачи, а затем поднять классификацию обратно.

4.10. Матричные деформации

Различные виды техники редукции естественным образом возникают в разных задачах о линейных отображениях, сохраняющих матричные инварианты. Эти идеи решения LPPs использовались многими исследователями. Основным вопросом является поиск систематического эффективного метода редукций. Указанным требованиям удовлетворяет метод матричных деформаций. Этот метод основан на следующей конструкции: для данного свойства множества или отношения ρ на матричной алгебре вводится специальное подмножество $L(\rho) \subseteq M_n(\mathbf{F})$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) если отображение T сохраняет ρ, то T сохраняет подмножество $L(\rho)$;
2) структура $L(\rho)$ проще, чем структура множества матриц, удовлетворяющих (ρ);
3) линейные отображения, сохраняющие $L(\rho)$, известны или их легко найти.

Для иллюстрации этой идеи приведём определение одной из возможных матричных деформаций в случае, когда ρ — некоторое отношение на матричной алгебре. Для произвольного бинарного отношения $\sim$ рассматривается множество $L_{\mathbf{F}}(\sim)$, состоящее из всех матриц $X \in M_n(\mathbf{F})$, удовлетворяющих следующему условию: существуют такие ненулевые матрицы $A, B \in M_n(\mathbf{F})$ (зависящие от матрицы X), что для любого элемента $\lambda \in \mathbf{F}$ отношение $\sim$ справедливо для пары $(A, \lambda X + B)$. Аналогично, нетрудно определить матричные деформации для подмножеств и свойств $M_n(\mathbf{F})$.

Пусть $T\colon M_n(\mathbf{F}) \to M_n(\mathbf{F})$ — линейное биективное преобразование, отображающее пары матриц, удовлетворяющие $\sim$, в пары матриц, удовлетворяющие $\sim$. Тогда непосредственно проверяется, что T отображает множество $L_{\mathbf{F}}(\sim)$ в себя.

Эти результаты показывают, что введённое множество удовлетворяет первому из перечисленных условий. В некоторых случаях удаётся подобрать деформацию, удовлетворяющую также условиям 2) и 3). Этот метод использовался для характеризации линейных отображений, сохраняющих различные спектральные свойства, см. [30], и серию различных отношений порядка на матричной алгебре, см. [27–29].

4.11. Линейная алгебра над некоммутативными кольцами

Методы алгебраической геометрии позволяют решать различныes LPP только для матриц над коммутативными кольцами. Поэтому представляет интерес развитие техники работы с линейными отображениями, сохраняющими матричные инварианты, над некоммутативными кольцами. Классификация линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты, над некоммутативными кольцами восходит к работам Л.-К. Хуа, см. [37, 67]. Хуа классифицировал биективные отображения, сохраняющие когерентность, и биективные аддитивные отображения, сохраняющие ранг один, для матриц над телом.

Следующий шаг в развитии некоммутативного случая этой проблемы был сделан У. Уонгом. Он классифицировал полулинейные, непрерывные в некоторой естественной топологии отображения конечномерных простых ассоциативных и лиевских алгебр над полями, сохраняющие нулевые произведения [75,76], исследовал полулинейные отображения, сохраняющие матрицы и тензорные произведения ранга 1, над локальными или примарными алгебрами и унитарными кольцами Ли, классифицировал отображения, сохраняющие локальную длину 1 или вырожденность, над полупростыми алгебрами, являющимися алгебрами над коммутативными кольцами, конечномерными как модули над этими кольцами.

Детальный обзор результатов Уонга можно найти в его обзоре [77] и в обзорах [58], [62, § 8.6].

Оказывается, что над некоммутативными кольцами комбинаторная и категорная природы основных матричных инвариантов распадаются в две различные теории. Комбинаторную сторону можно найти в недавних работах [2, 22] И. М. Гельфанда с соавторами, где обычный определитель заменён семейством рациональных функций, не являющихся мультипликативными.

Категорный подход к линейной алгебре развивался в рамках K-теории, см. [59], где функтор K_0 является аналогом функции размерности, K_1 связан с определителем, K_2 задаёт взаимосвязи между матричными единицами.

Однако в случае некоторых классов некоммутативных колец, например тела, локальные кольца и т. д., оказывается возможным совместить комбинаторный и категорный подходы и, следовательно, развить конструктивный подход к линейной алгебре, см. [65,78], а также [3,26,28,31,32], где, в частности, классифицированы полулинейные отображения, сохраняющие определитель Дьёдонне или вырожденность матриц над некоторыми классами некоммутативных локальных колец.

Литература

[1] Артин Э. Геометрическая алгебра. — М.: Наука, 1969.

[2] Гельфанд И. М., Ретах В. С. Детерминанты матриц над некоммутативными кольцами // Функциональный анализ и его приложения. — 1991. — Т. 25. — С. 91—102.

[3] Гутерман А. Э., Крейнес Е. М., Михалев А. В. Результаты фробениусовского типа для матриц над телами // Труды пятых математических чтений МГСУ. — 1997. — С. 119—133.

[4] Дынкин Е. Б. Максимальные подгруппы классических групп // Труды ММО. — 1952. — Т. 1. — С. 39—166.

[5] Banning R., Mathieu M. Commutativity preserving mappings on semiprime rings // Comm. Algebra. — 1997. — Vol. 25. — P. 247—265.

[6] Beasley L. Linear operators on matrices: The invariance of rank-k matrices // Linear Algebra Appl. — 1988. — Vol. 107. — P. 161—167.

[7] Beidar K. I. On functional identities and commuting additive mappings // Comm. Algebra. — 1998. — Vol. 26. — P. 1819—1850.

[8] Beidar K. I., Brešar M., Chebotar M. A. Jordan isomorphisms of triangular matrix algebras over a connected commutative ring. — Submitted.

[9] Belitskii G. R., Lyubich Yu. I. Matrix Norms and their Applications. — Oper. Theory Adv. Appl. Vol. 36. — Boston: Birkhäuser, 1988.

[10] Botta P., Pierce S., Watkins W. Linear transformations that preserve the nilpotent matrices // Pacific J. Math. — 1983. — Vol. 104. — P. 39—46.

[11] Brešar M. Commuting traces on beadditive mappings, commutativity preserving mappings, and Lie mappings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1993. — Vol. 335. — P. 525—546.

[12] Brešar M. Functional identities: A survey // Contemporary Math., to appear.

[13] Choi M. D., Jafarian A. A., Radjavi H. Linear maps preserving commutativity // Linear Algebra Appl. — 1987. — Vol. 87. — P. 227—242.

[14] Dedekind R. Gesammelte Mathematische Werke. Vol. II. — New York: Chelsea, 1969.

[15] Dieudonné J. Les déterminants sur un corps non commutatif // Bull. Soc. Math. Fr. — 1943. — Vol. 71. — P. 27—45.

[16] Dieudonné J. Sur une généralisation du groupe orthogonal à quatre variables // Arch. Math. — 1949. — Vol. 1. — P. 282—287.

[17] Dixon J. D. Rigid embedding of simple groups in the general linear group // Canad. J. Math. — 1977. — Vol. 29. — P. 384—391.

[18] Doković D. Z., Li C. K. Overgroups of some classical linear groups with applications to linear preserver problems // Linear Algebra Appl. — 1994. — Vol. 197—198. — P. 31—62.

[19] Draxl P. K. Skew Fields. — London Mathematical Society Lecture Note Series. Vol. 81. — 1982.

[20] Formanek E., Sibley D. The group determinant determines the group // Proc. Amer. Math. Soc. — 1991. — Vol. 112. — P. 649—656.

[21] Фробениус Г. Теория характеров и представлений групп. — Харьков: Гос. науч. техн. изд. Украины, 1937. — С. 106—127.

[22] Gelfand I. M., Retah V. S. A theory of noncommutative determinants and characteristic functions of graphs // Funct. Anal. Appl. — 1992. — Vol. 26. — P. 1—20; Publ. LACIM, UQAM, Montreal. — Vol. 14. — P. 1—26.

[23] Guralnick R. M. Invertible preservers and algebraic groups // Linear Algebra Appl. — 1994. — Vol. 212—213. — P. 249—257.

[24] Guralnick R. M. Invertible preservers and algebraic groups. II. Preservers of similarity invariants and overgroups of $PSL_n(\mathbf{F})$ // Linear and Multilinear Algebra. — 1997. — Vol. 43. — P. 221—255.

[25] Guralnik R. M., Li C.-K. Invertible preservers and algebraic groups. II: Preservers of unitary similarity (congruence) invariants and overgroups of some unitary subgroups // Linear and Multilinear Algebra. — 1997. — Vol. 43. — P. 257—282.

[26] Guterman A. Frobenius type theorems in the noncommutative case // Linear and Multilinear Algebra. — 2001. — Vol. 48, no. 4. — P. 293—312.

[27] Guterman A. Linear preservers for Drazin star partial order // Comm. Algebra. — 2001. — Vol. 29, no. 9. — P. 3905—3917.

[28] Guterman A. Linear preservers for matrix inequalities and partial orderings // Linear Algebra Appl. — 2001. — Vol. 331, no. 1—3. — P. 75—87.

[29] Guterman A. Singularity preservers over local domains // Journal of Mathematical Sciences. — 2000. — Vol. 102, no. 6. — P. 4591—4597.

[30] Guterman A., Li C.-K., Šemrl P. Some general techniques on linear preserver problems // Linear Algebra Appl. — 2000. — Vol. 315. — P. 61—81.

[31] Guterman A. E., Mikhalev A. V. Frobenius Type Theorems // Proceedings of Workshop on General Algebra and Discrete Mathematics, 1998. — Germany, Potsdam: Shaker-Verlag Aachen, 1999. — P. 102—112.

[32] Guterman A., Mikhalev A. V. On determinant preservers over noncommutative Principal Ideal Domains // Lie Algebras, Rings, and Related Topics. — Hong Kong: Springer-Verlag, 2000. — P. 49—60.

[33] Hiai F. Similarity preserving linear maps on matrices // Linear Algebra Appl. — 1987. — Vol. 97. — P. 127—139.

[34] Hoehnke H.-J. Über Beziehungen zwischen Problemen von H. Brandt aus der Theorie der Algebren und den Automorphismen der Normenform // Math. Nahr. — 1967. — B. 34. — S. 229—255.

[35] Horn R., Li C.-K., Tsing N. K. Linear operators preserving certain equivalence relations on matrices // SIAM J. Matrix Analysis Appl. — 1991. — Vol. 12. — P. 195—204.

[36] Hua L. K. A theorem on matrices over a sfield and its applications // J. Chinese Math. Soc. N. S. — 1951. — Vol. 1. — P. 110—163.

[37] Hua L. K. Selected Papers / Ed.: Halberstam H. — New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[38] Jacobson N. Finite-Dimensional Division Algebras over the Fields. — New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1996.

[39] Jacobson N. Generic norm of an algebra // Osaca J. Math. — 1953. — Vol. 15. — P. 25—53.

[40] James D. G. On the automorphisms of $\det(x_{ij})$ // Math. Chronicle. — 1980. — Vol. 9. — P. 35—40.

[41] Jensen C. U., Lenzing H. Model Theoretic Algebra with particular emphasis on fields, rings, modules. — Gordon and Breach Science Publishers, 1994.

[42] Johnson K. W. Latin square determinants II // Discrete Mathematics. — 1992. — Vol. 105. — P. 111—130.

[43] Kovacs A. Trace preserving linear transformations on matrix algebras // Linear and Multilinear Algebra. — 1976/1977. — Vol. 4. — P. 243—250.

[44] Lee T.-K., Lee T.-C. Commuting additive mappings in semiprime rings // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. — 1996. — Vol. 24. — P. 259—268.

[45] Li C.-K. Norms, isometries and isometry groups // Amer. Math. Monthly. — 2000. — Vol. 107. — P. 334—340.

[46] Li C.-K., Rodman L., Tsing N. K. Linear operators preserving certain equivalence relations originating from system theory // Linear Algebra Appl. — 1992. — Vol. 161—165. — P. 165—225.

[47] Li C.-K., Tsing N. K. Duality between some linear preserver problems: The inveriance of the C-numerical range, the C-numerical radius and certain matrix sets // Linear and Multilinear Algebra. — 1988. — Vol. 23. — P. 353—362.

[48] Li C.-K., Tsing N. K. Duality between some linear preserver problems. II. Isometries with respect to c-spectral norms and matrices with fixed singular values // Linear Algebra Appl. — 1988. — Vol. 110. — P. 181—212.

[49] Li C.-K., Tsing N. K. Linear preserver problems: A brief introduction and some special techniques // Linear Algebra Appl. — 1992. — Vol. 162—164. — P. 217—235.

[50] Loewy R., Radwan N. Spaces of symmetric matrices of bounded rank // Second Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS) (Lisbon, 1992) // Linear Algebra Appl. — 1994. — Vol. 197—198. — P. 189–215.

[51] Man W. Y. The invariance of C-numerical range, C-numerical radius and their dual problems // Linear and Multilinear Algebra. — 1991. — Vol. 30. — P. 117—128.

[52] Marcus M. Linear transformations on matrices // J. Res. Nat. Bur. Stds. — 1971. — Vol. 75B. — P. 107—113.

[53] Marcus M., May F. On a theorem of I. Schur concerning matrix transformations // Arch. Math. — 1960. — Vol. 11. — P. 27—30.

[54] Marcus M., Moyls B. Linear transformations on algebras of matrices // Canad. J. Math. — 1959. — Vol. 11. — P. 61—66.

[55] Marcus M., Moyls B. Transformations on tensor product spaces // Pacific J. Math. — 1959. — Vol. 9. — P. 1215—1221.

[56] Marcus M., Purves R. Linear transformations on algebras of matrices II: The invariance of the elementary symmetric functions // Canad. J. Math. — 1959. — Vol. 11. — P. 383—396.

[57] McDonald B. R-linear endomorphisms of $(R)_n$ preserving invariants // AMS Memoirs. — 1983. — Vol. 287, no. 46.

[58] Mikhalev A. V. Isomorphisms and anti-isomorphisms of endomorphism rings of modules // First International Tainan—Moscow Algebra Workshop. — Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1995. — P. 69—122.

[59] Milnor J. Introduction to Algebraic K-Theory. — Prinston University Press and University of Tokyo Press, 1971.

[60] Omladič M., Šemrl P. Preserving Diagonalisability // Linear Algebra Appl. — 1998. — Vol. 285. — P. 165—179.

[61] Pierce S. Discriminant preserving linear maps // Linear and Multilinear Algebra. — 1979. — Vol. 8. — P. 101—114.

[62] Pierce S. and others. A survey of linear preserver problems // Linear and Multilinear Algebra. — 1992. — Vol. 33. — P. 1—119.

[63] Platonov V. P., Doković D. Z. Linear preserver problems and algebraic groups // Math. Ann. — 1995. — Vol. 303. — P. 165—184.

[64] Robinson A. Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra. — Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1963.

[65] Rosenberg J. Algebraic K-Theory and its Applications. — New York, Berlin: Springer-Verlag, 1994.

[66] Schur I. Einige Bemerkungen zur Determinantentheorie. — Akad. Wiss. Berlin: S.-Ber. Preuß., 1925. — S. 454—463.

[67] Wan Z.-X. Geometry of Matrices. — Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 1996.

[68] Waterhouse W. C. Automorphisms of $\det(x_{ij})$: The group scheme approach // Adv. Math. — 1987. — Vol. 65. — P. 171—203.

[69] Waterhouse W. C. Introduction to Affine Group Schemes. — Graduate Text in Math. Vol. 66. — New York: Springer-Verlag, 1979.

[70] Waterhouse W. C. Invertibility of linear maps preserving matrix invariants // Linear and Multilinear Algebra. — 1983. — Vol. 13. — P. 105—113.

[71] Waterhouse W. C. Linear maps preserving reduced norms // Linear Alg. Appl. — 1982. — Vol. 43. — P. 197—200.

[72] Watkins W. Linear maps that preserve commuting pairs of matrices // Linear Algebra Appl. — 1976. — Vol. 14. — P. 29—35.

[73] Westwick R. Spaces of matrices of fixed rank // Linear and Multilinear Algebra. — 1987. — Vol. 20. — P. 171—174.

[74] Westwick R. Transformations on tensor spaces // Pacific J. of Math. — 1967. — Vol. 23, no. 3. — P. 613—620.

[75] Wong W. J. Maps on simple algebras preserving zero products. I: The associative case // Pacific J. Math. — 1980. — Vol. 89. — P. 229—247.

[76] Wong W. J. Maps on simple algebras preserving zero products. II: Lie algebras of linear type // Pacific J. Math. — 1981. — Vol. 92. — P. 469—487.

[77] Wong W. J. Maps on spaces of linear transformations // Math. Chronicle. — 1987. — Vol. 16. — P. 15—24.

[78] Wong W. J. Rank 1 preserving maps on linear transformations over noncommutative local rings // J. Algebra. — 1988. — Vol. 113. — P. 263—293.