Семейства геометрических паразитических решений систем уравнений на функции Белого рода ноль*

Е. М. КРЕЙНЕС
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: elena@mmascience.ru

УДК 511.6+512.772.7+515.142.2

Ключевые слова: теория детских рисунков Гротендика, функции Белого.

Аннотация

Данная работа посвящена исследованию взаимосвязей между комбинаторными свойствами плоских графов и алгебраическими свойствами систем уравнений, связанных с функциями Белого этих графов. Основной целью работы является описание некоторых семейств плоских графов, обладающих паразитическими решениями, и семейств, у которых каждое решение соответствующей системы не является паразитическим и имеет кратность один.

Abstract

E. M. Kreines, On families of geometric parasitic solutions for Belyi systems of genus zero, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 1, pp. 103—111.

This paper is devoted to interrelations between the combinatorial structure of plane graphs and algebraic properties of systems of equations related to Belyi functions for these graphs. The main purpose is to describe some families of plane graphs possessing parasitic solutions and some families of plane graphs such that each solution of the corresponding systems is not parasitic and has multiplicity one.

1. Введение

Начало теории *детских рисунков*, дающей множество новых и нетривиальных взаимосвязей между различными структурами теории категорий, алгебры, алгебраической геометрии, комплексного анализа, топологии и т. д., было положено А. Гротендиком в работе [6]. Эквивалентность категории *детских рисунков* и категории *пар Белого* является одним из ключевых направлений этой теории. В частности, эта эквивалентность позволяет визуализовать алгебраические кривые над числовыми полями и рассматривать действие общей группы

*Работа частично поддержана грантами РФФИ № 00-15-96128 и № 99-01-00382.

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 1, с. 103—111.

Галуа $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q})$ на множестве их классов изоморфизмов, здесь через $\mathbf{Q}$ обозначено поле алгебраических чисел. Однако эта эквивалентность неконструктивна. Очень просто найти детский рисунок, соответствующий данной паре Белого. Но обратная задача является исключительно сложной. Существует множество частных решений этой проблемы, см. [1,5,7,9,10], но отсутствует хоть какой-нибудь подход к общему решению. Для рисунков рода ноль можно составить систему уравнений, определяющую соответствующую пару Белого, называемую *определяющей системой*. Однако методы современной алгебры не позволяют решить эту систему в общем случае. Для рисунков, род которых больше ноля, зачастую невозможно даже найти эту систему. В работе рассматриваются взаимосвязи между комбинаторной структурой плоских графов и алгебраическими свойствами систем уравнений на функции Белого этих графов. Основная цель данной работы — описать некоторые семейства плоских графов, каждое решение определяющей системы которых соответствует единственной плоской реализации исследуемого графа, и некоторые семейства плоских графов, обладающих паразитическими решениями.

2. Основные определения и обозначения

Определение 2.1. Парой Белого (X, β) называется алгебраическая кривая X и непостоянная рациональная функция β, заданная на X, имеющая не более трёх критических значений. Функцию β обычно называют функцией Белого.

Определение 2.2. Функция Белого называется чистой, если все её ветвления над одним из критических значений имеют второй порядок.

Приведём широко известную теорему Г. Белого:

Теорема 2.3 ([2]). *Для произвольной алгебраической кривой X над $\mathbf{Q}$ и произвольной рациональной функции $f \in \mathbf{Q}(X) \setminus \mathbf{Q}$ найдётся такой многочлен $P \in \mathbf{Q}[z]$, что $P \circ f$ является функцией Белого.*

Следующее простое следствие показывает, что теория пар Белого является нетривиальной.

Следствие 2.4 ([2]). *На произвольной алгебраической кривой над $\mathbf{Q}$ существует непостоянная функция Белого с алгебраическими коэффициентами.*

Обозначим через $\mathbf{C}$ поле комплексных чисел. Пусть X — алгебраическая кривая над $\mathbf{Q}$, функция $\beta\colon X \to \mathbf{C}$ — некоторая функция Белого на X. С точностью до дробно-линейного отображения можно считать, что критические значения функции β лежат в точках 0, 1 и ∞. Легко видеть, что прообраз при действии β любой кривой, соединяющей 1 и ∞, — это некоторый граф на X. В [10] доказано, что этот граф является вложенным. Более того, каждый вложенный граф на кривой X определяет некоторую функцию Белого $\beta\colon X \to \mathbf{C}$ с алгебраическими коэффициентами. Такие графы называют *детскими рисунками*.

В настоящей работе рассматривается случай $X = \overline{\mathbf{C}}$ — вещественная сфера. Тогда соответствующие детские рисунки оказываются плоскими графами. В этом случае мы можем использовать все преимущества комплексных координат и описать функции Белого более точно.

Пусть Γ — плоский граф, $A_1, \ldots, A_k$ — комплексные числа, обозначающие координаты его вершин, $C_1, \ldots, C_m$ — комплексные числа, обозначающие координаты центров его граней. Обозначим через $\langle \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_k \mid \gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_m \rangle$ двудольный набор валентностей графа Γ (α_i обозначает число рёбер, инцидентных вершине A_i; γ_j обозначает число рёбер, инцидентных грани с центром в C_j). Легко видеть, что функция Белого этого графа имеет вид

$$\beta = c\frac{(z - C_1)^{\gamma_1} \ldots (z - C_m)^{\gamma_m}}{(z - A_1)^{\alpha_1} \ldots (z - A_k)^{\alpha_k}}$$

для некоторого комплексного числа $c \in \mathbf{C}$. Более того, если β — чистая функция Белого, то числитель дроби $1 - \beta$ является полным квадратом, т. е. многочлен

$$c(z - C_1)^{\gamma_1} \ldots (z - C_m)^{\gamma_m} - (z - A_1)^{\alpha_1} \ldots (z - A_k)^{\alpha_k} \tag{2.1}$$

является полным квадратом, см. [11].

Таким образом, для заданного набора $\alpha_1, \ldots, \alpha_k; \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ выражение (2.1) приводит к системе уравнений на координаты вершин и центров граней графа Γ.

Определение 2.5. Пусть $\langle \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_k \mid \gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_m \rangle$ — двудольный набор валентностей некоторого графа Γ с n рёбрами. Система уравнений $\mathcal{S}(\Gamma)$, задаваемая формальным равенством многочленов

$$c(z - C_1)^{\gamma_1} \ldots (z - C_m)^{\gamma_m} - (z - A_1)^{\alpha_1} \ldots (z - A_k)^{\alpha_k} = B_0((z - B_1) \ldots (z - B_n))^2 \tag{2.2}$$

с неизвестными $c; A_1, \ldots, A_k; C_1, \ldots, C_m; B_0, \ldots, B_n$, называется определяющей системой для графа Γ.

Можно рассматривать системы уравнений, задаваемых равенством (2.2), для произвольных наборов $k + m$ чисел α_i, γ_j и натурального числа n, безотносительно какого-либо графа Γ. Мы не будем заниматься этим в данной работе, поэтому далее каждая определяющая система является определяющей для некоторого конкретного графа Γ. Значения $B_1, \ldots, B_n$ можно рассматривать как комплексные координаты центров рёбер графа Γ.

Для каждого решения $c; A_1, \ldots, A_k; C_1, \ldots, C_m; B_0, \ldots, B_n$ этой системы определим *псевдофункцию Белого* $\overline{\beta}$.

Определение 2.6. $\overline{\beta} := c\dfrac{(z - C_1)^{\gamma_1} \ldots (z - C_m)^{\gamma_m}}{(z - A_1)^{\alpha_1} \ldots (z - A_k)^{\alpha_k}}$.

Несколько видоизменяя наше определение, данное в [3], введём понятие паразитических решений.

Определение 2.7. Решение $(c; A_1, \ldots, A_k; C_1, \ldots, C_m; B_0, \ldots, B_n)$ системы уравнений, задаваемой равенством (2.2), называется паразитическим, если соответствующая псевдофункция Белого $\overline{\beta}$ является функцией Белого некоторого графа $\overline{\Gamma}$, двудольный набор валентностей которого отличается от двудольного набора валентностей графа Γ, или если $\overline{\beta}$ вообще не является функцией Белого. Будем говорить, что Γ обладает геометрическим и негеометрическим паразитами в первом и втором случаях соответственно.

Решение определяющей системы называется *геометрическим* или *негеометрическим* в зависимости от того, соответствует ему какой-нибудь граф или нет.

Определение 2.8. Геометрические решения определяющей системы называются различными, если соответствующие им плоские графы неизоморфны как плоские графы.

Определение 2.9. Кратностью данного решения S некоторой определяющей системы называется число всех решений этой системы, реализации которых изоморфны реализации S как плоские графы, с учётом их алгебраической кратности.

Введём некоторые численные характеристики графа, которые будут использоваться в дальнейшем.

Определение 2.10. Расстоянием между двумя вершинами называется количество рёбер минимальной цепи, инцидентной обеим этим вершинам.

Определение 2.11. Диаметром графа называется максимум расстояний между всеми парами его вершин.

3. Деревья диаметра четыре

Деревья диаметра четыре были объектом интенсивного изучения в течение последних десяти лет, и их теория особенно активно развивается сейчас, см. [1, 7, 11]. Эта часть нашей работы посвящена исследованию кратностей и паразитических решений для деревьев диаметра четыре.

Заметим, что для деревьев диаметра четыре определено понятие центральной вершины. Назовём вершину *парацентральной*, если расстояние от неё до центральной вершины равняется 1.

Лемма 3.1 ([11]). *Пусть Γ — дерево диаметра четыре центральной валентности (валентность центральной вершины) n. Тогда определяющую систему этого графа можно привести к виду*

$$\begin{cases} \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_n z_n = 0, \\ \alpha_1 z_1^2 + \alpha_2 z_2^2 + \ldots + \alpha_n z_n^2 = 0, \\ \dotfill \\ \alpha_1 z_1^{n-1} + \alpha_2 z_2^{n-1} + \ldots + \alpha_n z_n^{n-1} = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — валентности парацентральных вершин, $z_1, \ldots, z_n$ — величины, обратные к значениям координат парацентральных вершин.

Определение 3.2. Система (3.1) называется системой уравнений в моментах или антивандермондовой системой.

Из определения величин z_i следует, что нас не интересует нулевое решение данной задачи, в частности $z_n \neq 0$. Поэтому рассматривать систему (3.1) в проективном пространстве, всё равно что рассматривать систему

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + \alpha_n = 0, \\ \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1}^2 + \alpha_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 x_1^{n-1} + \alpha_2 x_2^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1}^{n-1} + \alpha_n = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

получаемую из (3.1) умножением i-го уравнения на z_n^{-i}, в аффинном пространстве. Геометрически эта операция соответствует повороту и растяжению плоскости, который переводит парацентральную вершину дерева валентности a_n в точку с комплексной координатой 1.

В дальнейшем мы будем называть эту систему антивандермондовой.

Лемма 3.3. *Антивандермондова система имеет не более чем конечное число решений.*

Доказательство. Доказательство ведётся индукцией по валентности n центральной вершины. При $n = 2$ непосредственные вычисления показывают, что система (3.2) имеет ровно одно решение. Рассмотрим произвольное $n > 2$ и предположим, что результат верен для всех k, $2 \leqslant k < n$. Вычислим матрицу Якоби этой системы:

$$J = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} \\ 2\alpha_1 x_1 & 2\alpha_2 x_2 & \ldots & 2\alpha_{n-1} x_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (n-1)\alpha_1 x_1^{n-2} & (n-1)\alpha_2 x_2^{n-2} & \ldots & (n-1)\alpha_{n-1} x_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Это квадратная матрица порядка $(n-1)$. Её определитель равен

$$\det J = (n-1)!\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \ldots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} = \\ = (n-1)!\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} \prod_{i<j} (x_i - x_j).$$

Допустим, что $x_i = x_j$ для некоторого $i < j$. Не теряя общности рассуждений, можно предположить, что $x_{n-2} = x_{n-1}$. Тогда система (3.2) принимает вид

$$
\begin{cases}
\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}) x_{n-2} + \alpha_n = 0,\\
\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots + (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}) x_{n-2}^2 + \alpha_n = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_1 x_1^{n-2} + \alpha_2 x_2^{n-2} + \ldots + (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}) x_{n-2}^{n-2} + \alpha_n = 0,\\
\alpha_1 x_1^{n-1} + \alpha_2 x_2^{n-1} + \ldots + (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}) x_{n-2}^{n-1} + \alpha_n = 0.
\end{cases} \tag{3.4}
$$

Первые $(n-2)$ уравнения этой системы образуют антивандермондову систему с коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-3}, \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}, \alpha_n$. Следовательно, по предположению индукции эта система имеет не более чем конечное число решений. Следовательно, число решений системы (3.4) не более чем конечно.

Однако, если $x_i \neq x_j$ для всех $i < j$, то $\det J \neq 0$. Следовательно, алгебраические кривые, задаваемые уравнениями системы (3.2), не имеют общего касательного вектора. Тогда их пересечение является дискретным множеством в $\mathbf{C}$. Однако бесконечное дискретное множество не является алгебраическим многообразием. Следовательно, система (3.2) имеет не более чем конечное множество решений. □

Теорема 3.4. *Определяющая система дерева диаметра четыре с попарно различными валентностями парацентральных вершин не имеет паразитических решений, и каждое её решение имеет кратность один.*

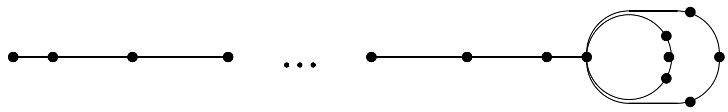
Доказательство. Легко видеть, что если $a_1, \ldots, a_n$ — попарно различные натуральные числа, то существует в точности $(n-1)!$ попарно неизоморфное плоское дерево диаметра четыре с валентностями парацентральных вершин $a_1, \ldots, a_n$.

С другой стороны, по лемме 3.3 число решений антивандермондовой системы не более чем конечно. Следовательно, по теореме Безу, см. [4, с. 268], число решений антивандермондовой системы не превышает $(n-1)!$. Поскольку неизоморфные графы соответствуют различным решениям, получаем, что различных решений существует в точности $(n-1)!$ и каждое решение имеет ровно одну реализацию. □

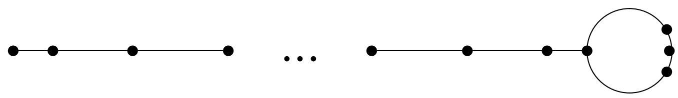
4. Серии графов, обладающих паразитическими решениями

Теорема 4.1. *Существуют бесконечные семейства графов, обладающих геометрическими паразитическими решениями.*

Доказательство. Пусть $\Gamma_{\lambda\mu}$ — плоский граф вида



состоящий из «ручки», на которой расположено λ точек валентности 2, и двух петель, обладающих общей точкой, на каждой из которых расположено по μ точек валентности 2. Двудольный набор валентностей этого графа имеет вид $\Big\langle 5;\underbrace{2;\ldots;2}_{\lambda+2\mu};1 \;\Big|\; 2\lambda+\mu+3;2\mu+2;\mu+1\Big\rangle$. Проверим, что $\Gamma_{\lambda\mu}$ обладает геометрическим паразитом $\overline{\Gamma_{\lambda\mu}}$, который может быть получен из $\Gamma_{\lambda\mu}$ склеиванием петель друг с другом и имеет следующий вид:



Действительно, пусть β — функция Белого для графа $\Gamma_{\lambda\mu}$. Тогда функция β имеет вид

$$\beta = c\frac{(z-C_1)^{2\lambda+\mu+3}(z-C_2)^{2\mu+2}(z-C_3)^{\mu+1}}{(z-A_0)(z-A_1)^2\ldots(z-A_{\lambda+2\mu})^2(z-A)^5},$$

где C_1, C_2, C_3 — центры граней, A_0, A_1,…, $A_{\lambda+2\mu}$, A — вершины графа $\Gamma_{\lambda\mu}$.

Рассмотрим значение оператора Муласе—Пенкава на функции β. Это мероморфный квадратичный дифференциал $\eta = \frac{(\mathrm{d}\log\beta)^2}{1-\beta}$, см. [8, 9]. Вычислим его дивизор. Для этого посчитаем дивизоры функций β, $\beta-1$ и $\mathrm{d}\beta$:

$$\begin{aligned}
(\beta) &= -A_0 - 2(A_1+\ldots+A_{\lambda+2\mu}) - 5A + (\mu+1)C_1 + 2(\mu+1)C_2 + \\
&\quad + (2\lambda+\mu+3)C_3;\\
(\beta-1) &= -A_0 - 2(A_1+\ldots+A_{\lambda+2\mu}) - 5A + 2(B_1+\ldots+B_n);\\
(\mathrm{d}\beta) &= -2A_0 - 3(A_1+\ldots+A_{\lambda+2\mu}) - 6A + (B_1+\ldots+B_n) + \\
&\quad + \mu C_1 + (2\mu+1)C_2 + (2\lambda+\mu+2)C_3.
\end{aligned}$$

Тогда имеем

$$(\eta) = 2(\mathrm{d}\beta) - 2(\beta) - (\beta-1) = -A_0 + 3A - 2C_1 - 2C_2 - 2C_3.$$

Следовательно,

$$\eta = k\frac{(z-A)^3}{(z-A_0)(z-C_1)^2(z-C_2)^2(z-C_3)^2}(\mathrm{d}z)^2.$$

Для произвольных положительных целых чисел λ и μ при $C_2 = A$ получается дифференциал

$$\overline{\eta} = k\frac{z-A}{(z-A_0)(z-C_1)^2(z-C_3)^2}(\mathrm{d}z)^2.$$

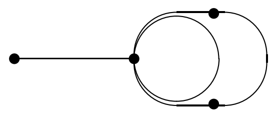
В работе [9] доказано, что существует такое значение $k\in\mathbf{C}$, что дифференциал $\overline{\eta}$ является значением оператора Муласе—Пенкава на функции Белого графа $\overline{\Gamma_{\lambda\mu}}$.

Значение оператора Муласе—Пенкава определяет функцию Белого, поэтому значение $C_2 = A$ даёт паразитическое решение для графа $\Gamma_{\lambda\mu}$. □

5. Негеометрические паразитические решения

Теорема 5.1. *Существуют графы, обладающие бесконечным количеством негеометрических паразитических решений.*

Доказательство. Рассмотрим граф $\Gamma_{0,2,0}$:



Обозначим через A_0 вершину валентности 1, через A_1, A_2 — вершины валентности 2, через A — вершину валентности 5, через C_1, C_2 и C_3 — центры граней валентностей 1, 4 и 5 соответственно. Тогда непосредственные вычисления показывают, что значения $A_0 = -1$, $A = C_2 = 0$, $A_1 = t$, $A_2 = -\frac{1}{8}\frac{8t+5}{2t+1}$, $C_1 = \frac{1}{8}\frac{(1+12t+16t^2)^2}{(4t+3)(4t+1)(2t+1)}$, $C_3 = \infty$, $k = 8^3\frac{(4t+3)(4t+1)}{2t+1}$ позволяют получить однопараметрическую систему паразитических решений, соответствующую псевдофункции Белого

$$\overline{\beta} = 8^3\frac{(4t+3)(4t+1)}{2t+1}\frac{z - \frac{(1+12t+16t^2)^2}{8(4t+3)(4t+1)(2t+1)}}{z(z+1)(z-t)^2(z+\frac{8t+5}{16t+8})^2}.$$

Значениям параметра $t = 0$, $t = -\frac{5}{8}$ соответствуют геометрические паразиты, а всем остальным значениям параметра — негеометрические паразиты. □

Автор выражает свою благодарность всем участникам семинара «Графы на поверхностях и кривые над числовыми полями» за плодотворные обсуждения и внимание. Также я хочу поблагодарить профессора Г. Б. Шабата за эту интересную задачу и многочисленные полезные советы и профессора А. В. Михалёва за руководство и заинтересованность.

Литература

[1] Адрианов Н. М., Кочетков Ю. Ю., Шабат Г. Б., Суворов А. Д. Плоские деревья и группы Матье // Фундам. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, вып. 2. — С. 377—384.

[2] Белый Г. Б. О расширениях Галуа максимальных циклотомических полей // Изв. АН СССР. — 1979. — Т. 43. — С. 269—276.

[3] Крейнес Е. М., Шабат Г. Б. О паразитических решениях систем уравнений на функции Белого // Фундам. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, вып. 3. — С. 289—292.

[4] Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. — М.: Наука, 1972.

[5] Bètrèma J., Pérè D., Zvonkine A. Plane trees and their Shabat polynomials. — Catalog, Rapport Interne de LaBRI No. 75—92. — Bordeaux, 1992.

[6] Grothendieck A. Esquisse d'un programme // London Math. Soc. Lecture Notes Series, vol. 243. — Cambridge Univ. Press, 1997. — P. 3—43.

[7] Kochetkov Yu. Yu. Trees of diameter 4 // Proc. of the 12-th International Conference FPSAC-00 / Eds.: Krob D., Mikhalev A. A., Mikhalev A. V. — Berlin: Springer, 2000. — P. 447—454.

[8] Mulase M., Penkava M. Ribbon graphs, quadratic differentials on riemann surfaces, and algebraic curves defined over field of algebraic numbers. — Math-ph/9811024v2, November 1998.

[9] Shabat G. On a class of families of Belyi functions // Proc. of the 12-th International Conference FPSAC-00 / Eds.: Krob D., Mikhalev A. A., Mikhalev A. V. — Berlin: Springer, 2000. — P. 575—581.

[10] Shabat G. B., Voevodsky V. A. Drowing curves over number fields // The Grothendieck Festschrift. Vol. III. — Birkhauser, 1990. — P. 199—227.

[11] Shabat G., Zvonkine A. Plane trees and algebraic numbers // Contemporary Mathematics. — 1994. — Vol. 178. — P. 233—275.