# Квазиинвариантные и псевдодифференцируемые меры со значениями в неархимедовых полях на неархимедовых банаховых пространствах

**С. В. ЛЮДКОВСКИЙ**
*Институт общей физики РАН*

УДК 512.625.5+517.987

**Ключевые слова:** неархимедовы банаховы пространства, квазиинвариантные меры, неархимедовы поля.

**Аннотация**

В статье определены и исследованы квазиинвариантные и псевдодифференцируемые меры на банаховом пространстве $X$ над неархимедовым локально компактным бесконечном полем с нетривиальным нормированием. Меры рассматриваются со значениями в неархимедовых полях, например в поле $\mathbf{Q}_p$ $p$-адических чисел. Сформулированы и доказаны теоремы и критерии о квазиинвариантности и псевдодифференцируемости мер относительно линейных и нелинейных операторов на $X$. Изучены характеристические функционалы мер. Более того, исследованы неархимедовы аналоги теорем Бохнера—Колмогорова и Минлоса—Сазонова. Рассмотрены бесконечные произведения мер и доказан аналог теоремы Какутани. Исследована также сходимость квазиинвариантных и псевдодифференцируемых мер в соответствующих пространствах мер.

**Abstract**

*S. V. Ludkovsky, Quasi-invariant and pseudo-differentiable measures with values in non-Archimedean fields on a non-Archimedean Banach space*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 1, pp. 149—199.

Quasi-invariant and pseudo-differentiable measures on a Banach space $X$ over a non-Archimedean locally compact infinite field with a non-trivial valuation are defined and constructed. Measures are considered with values in non-Archimedean fields, for example, the field $\mathbf{Q}_p$ of $p$-adic numbers. Theorems and criteria are formulated and proved about quasi-invariance and pseudo-differentiability of measures relative to linear and non-linear operators on $X$. Characteristic functionals of measures are studied. Moreover, the non-Archimedean analogs of the Bochner—Kolmogorov and Minlos—Sazonov theorems are investigated. Infinite products of measures are considered and the analog of the Kakutani theorem is proved. Convergence of quasi-invariant and pseudo-differentiable measures in the corresponding spaces of measures is investigated.

## § 1. Введение

Имеется ряд работ об интегрировании в банаховых пространствах и квазиинвариантных мерах в классическом случае (то есть для банахова пространства

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2003, том 9, № 1, с. 149—199.

над полями $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$) [5–8, 38, 42]. С другой стороны, для неархимедова банахова пространства $X$ (то есть для банахова пространства над неархимедовым полем $\mathbf{K}$) эта теория менее развита. Интегрирование на $X$ является очень важной частью неархимедова анализа. Развитие неархимедовой квантовой механики и различных областей современной физики, связанных, например, с теориями элементарных частиц, приводит к необходимости развития теории интегрирования на неархимедовом банаховом пространстве [1,9,16,17,43]. Это также полезно для развития неархимедова анализа. Неархимедов функциональный анализ быстро развивается в последние годы и имеет много принципиальных отличий от классического функционального анализа [18, 34–37, 43]. Топологические векторные пространства над неархимедовыми полями вполне несвязны, классы гладкости функций и компактные операторы определены для них совершенно иначе, чем в классическом случае, также понятие ортогональности векторов приобрело для них совсем другой смысл. В неархимедовом случае аналоги теорем Радона—Никодима и Лебега о сходимости выполняются при более жёстких и иных условиях. Особенно сильные различия имеются для мер со значениями в неархимедовых полях, потому что классические понятия $\sigma$-аддитивности и квазиинвариантности потеряли для них свой смысл.

С другой стороны, развитие неархимедова функционального анализа и квантовой механики [17, 18, 43] приводит к необходимости решения таких проблем. Например, задачи квантовой механики на многообразиях связаны с группами диффеоморфизмов и группами петель, их представлениями и мерами на них [16, 22, 26]. В статьях [20, 22, 24, 26] были построены квазиинвариантные меры на группах диффеоморфизмов и группах петель на неархимедовых, а также на банаховых многообразиях. Эти меры были использованы для исследования неприводимых представлений топологических групп [22,24,25]. Доказанные в настоящей работе теоремы дают возможность расширить класс квазиинвариантных мер на таких группах и многообразиях, что также расширяет классы представлений. Например, теоремы типа Минлоса—Сазонова характеризуют меры с помощью характеристических функционалов и компактных операторов. В неархимедовом случае компактные операторы более употребимы, чем ядерные операторы в классическом случае. Теоремы типа Бохнера—Колмогорова и Какутани характеризуют произведения мер и их абсолютную непрерывность относительно других мер.

В данной статье меры рассматриваются на банаховых пространствах, хотя результаты данные ниже могут быть развиты для более общих топологических векторных пространств, например, можно следовать идеям работ [29–31], в которых были рассмотрены неархимедовы аналоги теорем Минлоса—Сазонова для действительнозначных мер на топологических векторных пространствах над неархимедовыми полями нулевой характеристики. Однако это невозможно сделать в одной статье. В данной статье, в отличие от статей Мадрецкого, меры рассматриваются со значениями в неархимедовых полях, также рассматриваются банаховы пространства над неархимедовыми полями $\mathbf{K}$ характеристики $\mathrm{char}(\mathbf{K}) > 0$. Хорошо известно, что действительнозначная мера $m$ на локально компактной хаусдорфовой вполне несвязной топологической абелевой группе $G$ называется мерой Хаара, если

$$m(x + A) = m(A)$$

$$\text{для любого } x \in G \text{ и любого борелевского подмножества } A \text{ в } G. \quad \text{(H)}$$

Для $s$-свободной группы $G$ мера $m$ со значениями в $\mathbf{K}_s$ удовлетворяет условию (H) только для алгебры открыто-замкнутых подмножеств $A$, где поле $\mathbf{K}_s$ является конечным алгебраическим расширением поля $\mathbf{Q}_s$. В самом деле, в последнем случае, если мера локально конечна и $\sigma$-аддитивна на борелевской алгебре группы $G$, то она является чисто атомической с атомами равными одноточечным подмножествам, поэтому она не может быть инвариантной на всей борелевской алгебре (см. [34, главы 7—9]). Много определений и теорем, данных ниже, являются неархимедовыми аналогами классических результатов. Часто их формулировки и доказательства сильно отличаются. Если доказательства отличаются незначительно, то указываются лишь основные особенности в неархимедовом случае.

Во втором параграфе даны неархимедовы аналоги слабых распределений, характеристических функций мер, их свойства определены и исследованы. Даны неархимедовы аналоги теорем Бохнера—Колмогорова и Минлоса—Сазонова. В § 3 рассмотрены произведения мер вместе с их функциями плотности. Исследован неархимедов аналог теоремы Какутани. В данной статье определены и построены широкие классы квазиинвариантных мер. Доказаны теоремы о квазиинвариантности мер при определённых линейных и нелинейных преобразованиях $U\colon X \to X$. В четвёртом параграфе введено понятие псевдодифференцируемости мер. Это необходимо, так как для функций $f\colon \mathbf{K} \to \mathbf{R}$ или $f\colon \mathbf{K} \to \mathbf{Q}_s$ с $s \neq p$ нет понятия дифференцируемости (не существует таких линейных нетривиальных $f$), где $\mathbf{K}$ — поле, такое что $\mathbf{K} \supset \mathbf{Q}_p$. Приводятся критерии псевдодифференцируемости мер. В пятом параграфе даются теоремы о сходимости мер с учётом квазиинвариантности и псевдодифференцируемости. Основными результатами работы являются теоремы 2.21, 2.30, 3.5, 3.6, 3.15, 3.19, 3.20, 4.2, 4.3, 4.5, 5.7—5.10.

**Обозначения.** Далее везде $\mathbf{K}$ обозначает неархимедово локально компактное бесконечное поле с нетривиальным нормированием, а банахово пространство $X$ рассматривается над $\mathbf{K}$. В настоящей статье меры на $X$ принимают значения в поле $\mathbf{K}_s$, то есть конечном алгебраическом расширении поля $\mathbf{Q}_s$ $s$-адических чисел, где $s$ — заданное простое число. Далее, $\mathbf{C}_s$ обозначает равномерное пополнение объединения всех $\mathbf{K}_s$ с мультипликативной нормой, продолжающей норму на $\mathbf{Q}_s$. Предположим, что $\mathbf{K}$ является $s$-свободной как аддитивная группа, например, или $\mathbf{K}$ является конечным алгебраическим расширением поля $\mathbf{p}$-адических чисел $\mathbf{Q}_p$, или $\operatorname{char}(\mathbf{K}) = p$ и $\mathbf{K}$ изоморфно полю $\mathbf{F}_p(\theta)$ формальных степенных рядов, состоящих из элементов $x = \sum\limits_j a_j\theta^j$, где $a_j \in \mathbf{F}_p$, $|\theta| = p^{-1}$, $\mathbf{F}_p$ — конечное поле из $\mathbf{p}$ элементов, $\mathbf{p}$ — простое число и $\mathbf{p} \neq \mathbf{s}$. Отсюда следует, что $\mathbf{K}$ имеет нетривиальную меру Хаара со значениями в $\mathbf{K}_s$ [34]. Если $X$ —

хаусдорфово топологическое пространство с малой индуктивной размерностью $\operatorname{ind}(X)=0$, то

$E$ обозначает алгебру подмножеств в $X$, как правило $E\supset \operatorname{Bco}(X)$ для $\mathbf{K}_s$-значных мер, где

$\operatorname{Bco}(X)$ обозначает алгебру открыто-замкнутых подмножеств в $X$,

$\operatorname{Bf}(X)$ — борелевская $\sigma$-алгебра для $X$ из п. 2.1;

$\operatorname{Af}(X,\mu)$ — пополнение $E$ по мере $\mu$ из п. 2.1;

$\mathsf{M}(X)$ — пространство мер с ограниченной нормой на $X$ из п. 2.1;

$\mathsf{M}_t(X)$ — пространство радоновых мер с ограниченными нормами из п. 2.1;

$L(X,\mu,\mathbf{K}_s)$ — пространство $\mu$-интегрируемых $\mathbf{K}_s$-значных функций на $X$ из п. 2.4;

$\chi_\xi$ — характер со значениями в $\mathbf{T}_s$ из п. 2.5;

$\theta(z)=\hat{\mu}$ — характеристический функционал из п. 2.5;

$\mathsf{C}(Y,\Gamma)$, $\tau(Y)$ даны в п. 2.20;

$\nu\ll\mu$, $\nu\sim\mu$, $\nu\perp\mu$ даны в п. 2.31.

# § 2. Слабые распределения и семейства мер

**2.1.** Для хаусдорфова топологического пространства $X$ с малой индуктивной размерностью $\operatorname{ind}(X)=0$ [10] далее меры $\mu$ даются на измеримом пространстве $(X,E)$, где $E$ — алгебра, такая что $E\supset\operatorname{Bco}(X)$, $\operatorname{Bco}(X)$ — алгебра открыто-замкнутых подмножеств в $X$.

Напомним, что отображение $\mu\colon E\to\mathbf{K}_s$ называется мерой, если выполнены следующие условия:

(i) $\mu$ аддитивна и $\mu(\varnothing)=0$,

(ii) для любого $A\in E$ существует норма

$$\|A\|_\mu:=\sup\{|\mu(B)|_{\mathbf{K}_s}\colon\ B\subset A,\ B\in E\}<\infty,$$

(iii) если имеется сжимающееся (shrinking) семейство $F$, то есть для любых $A,B\in F$ существует $F\ni C\subset(A\cap B)$ и $\bigcap\{A\colon\ A\in F\}=\varnothing$, то $\lim\limits_{A\in F}\mu(A)=0$ (см. [34, глава 7] и там же о пополнении $\operatorname{Af}(X,\mu)$ алгебры $\operatorname{Bco}(X)$ по мере $\mu$). Меру со значениями в $\mathbf{K}_s$ назовём вероятностной, если $\|X\|_\mu=1$ и $\mu(X)=1$. Для функций $f\colon X\to\mathbf{K}_s$ и $\phi\colon X\to[0,\infty)$ используется обозначение $\|f\|_\phi:=\sup\limits_{x\in X}(|f(x)|\phi(x))$, $N_\mu(x):=\inf(\|U\|_\mu\colon\ U\in\operatorname{Bco}(X),\ x\in U)$. Плотные меры (tight measures), то есть меры, определённые на $E\supset\operatorname{Bco}(X)$, образуют банахово пространство $\mathsf{M}(X)$ с нормой $\|\mu\|:=\|X\|_\mu$. Везде ниже рассматриваются $\sigma$-аддитивные меры с $\|X\|_\mu<\infty$ для $\mu$ со значениями в $\mathbf{K}_s$, если не оговорено иное.

Мера $\mu$ на $E$ называется радоновой, если для любого $\varepsilon>0$ существует компактное подмножество $C\subset X$, такое что $\|\mu|_{(X\setminus C)}\|<\varepsilon$. Далее $\mathsf{M}(X)$ обозначает пространство ограниченных по норме мер, $\mathsf{M}_t(X)$ — его подпространство радоновых ограниченных по норме мер.

**2.2.** Каждое банахово пространство $X$ над $\mathbf{K}$ в силу теорем 5.13 и 5.16 из [34] изоморфно $c_0(\alpha, K) := \{x\colon\ x = (x_j\colon\ j \in \alpha),\ \mathrm{card}(j\colon\ |x_j|_{\mathbf{K}} > b) < \aleph_0$ для любого $b > 0\}$, где $\alpha$ — множество, рассматриваемое как ординал благодаря лемме Куратовского—Цорна, а $\mathrm{card}(A)$ обозначает мощность множества $A$, $\|x\| := \sup(|x_j|\colon\ j \in \alpha)$. По определению размерностью $X$ над $\mathbf{K}$ называется $\dim_{\mathbf{K}} X := \mathrm{card}(\alpha)$. Для каждого замкнутого $\mathbf{K}$-линейного подпространства $L$ в $X$ имеется оператор проектирования $P_L\colon X \to L$, а ортонормированный (в неархимедовом смысле) базис в $L$ имеет дополнение до ортонормированного базиса в $X$, такое что $P_L$ можно задать относительно выбранного базиса.

Если $A \in \mathrm{Bco}(X)$, то $P_L^{-1}(A)$ называется цилиндрическим подмножеством в $X$ с основанием $A$, $B^L := P_L^{-1}(\mathrm{Bco}(L))$, $B_0 := \bigcup(B^L\colon\ L \subset X,\ L$ — банаховы подпространства), где $\dim_{\mathbf{K}} X \leqslant \aleph_0$. Тогда имеется возрастающая последовательность банаховых подпространств $L_n \subset L_{n+1} \subset \ldots$, такая что $\mathrm{cl}(\bigcup[L_n\colon\ n]) = X$, $\dim_{\mathbf{K}} L_n = \varkappa_n$ для всех $n$, где $\mathrm{cl}(A) = \bar{A}$ обозначает замыкание $A$ в $X$ для $A \subset X$, а проекции меры $\mu$ на $L$ $\mu_L(A) := \mu(P_L^{-1}(A))$ для $A \in \mathrm{Bco}(L)$ образуют согласованное семейство

$$\mu_{L_n}(A) = \mu_{L_m}(P_{L_n}^{-1}(A) \cap L_m) \tag{1}$$

для любых $m \geqslant n$, так как имеются проекции $P_{L_n}^{L_m}\colon L_m \to L_n$, где $\varkappa_n \leqslant \aleph_0$ и можно выбрать $\varkappa_n < \aleph_0$ для любого $n$.

Произвольное семейство мер $\{\mu_{L_n}\colon\ n \in \mathbf{N}\}$, имеющее свойство (1), называется последовательностью слабого распределения (см. также [8, 38]).

Через $B(X, x, r)$ обозначается шар $\{y\colon\ y \in X,\ \|x - y\| \leqslant r\}$, который открыто-замкнут в $X$.

**2.3. Лемма.** *Последовательность слабого распределения $\{\mu_{L_n}\colon\ n\}$ порождена некоторой мерой $\mu$ на $\mathrm{Bco}(X)$ тогда и только тогда, когда для любого $c > 0$ существует $b > 0$, такое что $\|L_n \setminus B(X, 0, r)\|_{\mu_{L_n}} \leqslant c$ и $\sup_n \|L_n\|_{\mu_{L_n}} < \infty$ для $\mu$ со значениями в $\mathbf{K}_s$, где $r \geqslant b$.*

**Доказательство.** Для $\mu$ со значениями в $\mathbf{K}_s$ необходимость очевидна, для доказательства достаточности остаётся проверить свойство 2.1(iii), так как тогда $\|X\|_\mu = \sup_n \|L_n\|_{\mu_{L_n}} < \infty$. Пусть $B(n) \in \mathrm{Bco}(L_n)$, $A(n) = P_{L_n}^{-1}(B(n))$, по теореме 7.6 [34] для любого $c > 0$ существуют компактные подмножества $C(n) \subset B(n)$, такие что $\|B(n) \setminus C(n)\|_{\mu_{L_n}} < c$. Тогда $\|B(n) \setminus D(n)\|_\mu \leqslant$ $\leqslant \max(\|B(m) \setminus C(m)\|_{\mu_{L_m}}\colon\ m = 1, \ldots, n) < c$, где $D(n) := \bigcap_{m=1}^{n} P_{L_m}^{-1}(C(m)) \cap L_n$. Если $A(n) \supset A(n+1) \supset \ldots$ и $\bigcap_n A(n) = \varnothing$, то $A'(n+1) \subset A'(n)$ и $\bigcap_n A'(n) = \varnothing$, где $A'(n) := P_{L_n}^{-1}(D(n))$, следовательно, $\|A(n)\|_\mu \leqslant \|A'(n)\|_\mu + c$. Таким образом, в качестве $B(n)$ можно взять замкнутые подмножества в $X$, по теоремам Алаоглу—Бурбаки (см. [33, Exer. 9.202(a.3)] и Хана—Банаха ([34, теорема 4.8]) множества $A(n)$ и $B(X, 0, r)$ слабо компактны в $X$, следовательно, для любого $r > 0$ существует $n$ с $B(X, 0, r) \cap A(n) = \varnothing$. Поэтому $\|A(n)\|_\mu = \|B(n)\|_{\mu_{L_n}} \leqslant$

$\leqslant \|L_n \setminus B(X,0,r)\|_{\mu_{L_n}} \leqslant c$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A(n)) = 0$, так как $c$ произвольно.

**2.4. Определение.** Функция $\phi\colon X \to \mathbf{K}_s$ вида $\phi(x) = \phi_S(P_S x)$ называется цилиндрической, если $\phi_S$ — некоторая $E(S)$-измеримая функция на конечномерном над $\mathbf{K}$ подпространстве $S$ в $X$. При $\phi_S \in L(S, \mu_S, \mathbf{K}_s) := L(\mu_S)$ для $\mu$ со значениями в $\mathbf{K}_s$ можно определить интеграл по последовательности слабого распределения $\{\mu_{S(n)}\}$:

$$\int\limits_X \phi(x)\mu_*(dx) := \int \phi_{S(n)}(x)\mu_{S(n)}(dx),$$

где $L(\mu)$ — банахово пространство классов $\mu$-интегрируемых функций ($f = g$ $\mu$-почти всюду, то есть $\|A\|_\mu = 0$, $A := (x\colon\ f(x) \neq g(x))$ является $\mu$-пренебрежимым) с нормой $\|f\| := \|g\|_{N_\mu}$ [5, 34, 38].

**2.5. Замечания и определения.** Если $\mathrm{char}(\mathbf{K}) = 0$, то $\mathbf{K}$ как $\mathbf{Q}_p$-линейное пространство изоморфно $\mathbf{Q}_p^n$, где $n \in \mathbf{N} := (1, 2, \ldots)$. Топологически сопряжённое над $\mathbf{Q}_p$ пространство (то есть пространство непрерывных линейных функционалов $f\colon \mathbf{K} \to \mathbf{Q}_p$) изоморфно $\mathbf{Q}_p^n$ [15]. Для $x, z \in \mathbf{Q}_p^n$ через $(z, x)$ обозначим сумму $\sum\limits_{j=1}^n x_j z_j$, где $x = (x_j\colon\ j = 1, \ldots, n)$, $x_j \in \mathbf{Q}_p$. Каждое число $y$ из $\mathbf{Q}_p$ имеет разложение $y = \sum\limits_l a_l p^l$, где $\min(l\colon\ a_l \neq 0) =: \mathrm{ord}_p(y) > -\infty$ ($\mathrm{ord}(0) := \infty$) [33], $a_l \in (0, 1, \ldots, p-1)$, определим символ $\{y\}_p := \sum\limits_{l<0} a_l p^l$ при $|y|_p > 1$ и $\{y\}_p = 0$ при $|y|_p \leqslant 1$.

Для локально компактного поля $\mathbf{K}$ с характеристикой $\mathrm{char}(\mathbf{K}) = p > 0$ пусть $\pi_j(x) := a_j$ для любого $x = \sum\limits_j a_j \theta^j \in \mathbf{K}$ (см. обозначения). Для $\xi \in \mathbf{K}^*$ обозначим $\xi(x)$ также через $(\xi, x)$. Все непрерывные характеры $\chi\colon \mathbf{K} \to \mathbf{C}_s$ имеют вид

$$\chi_\xi(x) = \varepsilon^{z^{-1}\eta((\xi,x))} \tag{1}$$

для любых $\eta((\xi, x)) \neq 0$, $\chi_\xi(x) := 1$ при $\eta((\xi, x)) = 0$, где $\varepsilon = 1^z$ — корень из единицы, $z = p^{\mathrm{ord}(\eta((\xi,x)))}$, $\pi_j\colon \mathbf{K} \to \mathbf{R}$, $\eta(x) := \{x\}_p$ и $\xi \in \mathbf{Q}_p^{n*} = \mathbf{Q}_p^n$ при $\mathrm{char}(\mathbf{K}) = 0$, $\eta(x) := \pi_{-1}(x)/p$ и $\xi \in \mathbf{K}^* = \mathbf{K}$ при $\mathrm{char}(\mathbf{K}) = p > 0$, $x \in \mathbf{K}$, (см. [15, § 25]). Каждый $\chi$ локально постоянен, поэтому $\chi\colon \mathbf{K} \to \mathbf{T}_s$ также непрерывен, здесь $\mathbf{T}$ — дискретная группа всех корней из 1 (по умножению), а $\mathbf{T}_s$ — её подгруппа элементов с порядками, не являющимися степенями $s^m$ числа $s$, $m \in \mathbf{N}$.

Для меры $\mu$ со значениями в $\mathbf{K}_s$ существует характеристический функционал (называемый также преобразованием Фурье—Стилтьеса) $\theta = \theta_\mu\colon C(X, \mathbf{K}) \to \mathbf{C}_s$:

$$\theta(f) := \int\limits_X \chi_e(f(x))\mu(dx), \tag{2}$$

где $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbf{Q}_p^n$ при $\mathrm{char}(\mathbf{K}) = 0$ или $e = 1 \in \mathbf{K}^*$ при $\mathrm{char}(\mathbf{K}) = p > 0$, $x \in X$, $f$ принадлежит пространству $C(X, \mathbf{K})$ непрерывных функций из $X$ в $\mathbf{K}$, в частности при $z = f$ из топологически сопряжённого пространства $X^*$ над $\mathbf{K}$, $z\colon X \to \mathbf{K}$, $z \in X^*$, $\theta(z) =: \hat{\mu}(z)$. Он обладает следующими свойствами:

$$\theta(0) = 1 \text{ при } \mu(X) = 1 \tag{3a}$$

и $\theta(z)$ ограничен на $C(X, \mathbf{K})$;

$$\sup_f |\theta(f)| = 1 \text{ для вероятностных мер;} \tag{3b}$$

$$\theta(z) \text{ слабо непрерывен, то есть } (X^*, \sigma(X^*, X))\text{-непрерывен,} \tag{4}$$

$\sigma(X^*, X)$ обозначает слабую топологию на $X^*$, индуцированную банаховым пространством $X$ над $\mathbf{K}$. Каждому $x \in X$ соответствует непрерывный линейный функционал $x^*\colon X^* \to \mathbf{K}$, $x^*(z) := z(x)$, более того, $\theta(z)$ равномерно непрерывен относительно нормы на

$$C_b(X, \mathbf{K}) := \Big\{ f \in C(X, \mathbf{K})\colon \ \|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|_{\mathbf{K}} < \infty \Big\}.$$

Свойство (4) вытекает из леммы 2.3, непрерывности и ограниченности $\chi_e$ и того, что в силу теоремы Хана—Банаха существует $x_z \in X$ с $z(x_z) = 1$ при $z \neq 0$, так что $z|_{(X \ominus L)} = 0$ и

$$\theta(z) = \int\limits_X \chi_e(P_L(x))\mu(dx) = \int\limits_L \chi_e(y)\mu_L(dy),$$

где $L = \mathbf{K}x_z$, а также в силу теоремы Лебега (из [34, Exer. 7.F] для $\mu$ со значениями в $\mathbf{K}_s$). Действительно, для любого $c > 0$ существует компактное подмножество $S \subset X$, такое что $\|X \setminus S\|_\mu < c$, а каждое ограниченное подмножество $A \subset X^*$ является равномерно равностепенно непрерывным на $S$ (см. [33, (9.5.4), Exer. 9.202]), то есть $(\chi_e(z(x))\colon \ z \in A)$ — равномерно равностепенно непрерывное (по $x \in S$) семейство. С другой стороны, $\chi_e(f(x))$ равномерно равностепенно непрерывно по $x \in S$ на ограниченном подмножестве $A \subset C_b(X, \mathbf{K})$.

Назовём функционал $\theta$ конечномерно концентрированным, если существует $L \subset X$, $\dim_{\mathbf{K}} L < \aleph_0$, такое что $\theta|_{(X \setminus L)} = \mu(X)$. Для любого $c > 0$ и $\delta > 0$ в силу теоремы 7.6 из [34] существует конечномерное над $\mathbf{K}$ подпространство $L$ и компакт $S \subset L^\delta$, такие что $\|X \setminus S\|_\mu < c$. Пусть $\theta^L(z) := \theta(P_L z)$.

Это определение корректно, так как $L \subset X$, а $X$ изометрически вкладывается в $X^*$ как нормированное пространство, причём функционалы $z \in X$ отделяют точки в $X$. Если $z \in L$, то $|\theta(z) - \theta^L(z)| \leqslant c \times b \times q$, где $b = \|X\|_\mu$, $q$ не зависит от $c$ и $b$. Каждый характеристический функционал $\theta^L(z)$ равномерно непрерывен по $z \in L$ относительно нормы $\|*\|$ на $L$, так как $|\theta^L(z) - \theta^L(y)| \leqslant$ $\leqslant \Big| \int\limits_{S' \cap L} [\chi_e(z(x)) - \chi_e(y(x))]\mu_L(dx) \Big| + \Big| \int\limits_{L \setminus S'} [\chi_e(z(x)) - \chi_e(y(x))]\mu_L(dx) \Big|$, где второе слагаемое не превосходит $2C'$ при $\|L \setminus S'\|_{\mu_L} < c'$ для подходящего компактного подмножества $S' \subset X$, а $\chi_e(z(x))$ — равномерно равностепенно непрерывное по $x \in S'$ семейство относительно $z \in B(L, 0, 1)$.

Итак,

$$\theta(z) = \lim_{n\to\infty} \theta_n(z) \tag{5}$$

на каждом конечномерном над $\mathbf{K}$ подпространстве $L$, где $\theta_n(z)$ равностепенно ограничены и конечномерно концентрированы на $L_n \subset X$, $z \in X$, $\mathrm{cl}\Big(\bigcup\limits_n L_n\Big) = X$, $L_n \subset L_{n+1}$ при всех $n$, для любого $c > 0$ существуют $n$ и $q > 0$, такие что $|\theta(z) - \theta_j(z)| \leqslant cbq$ при $z \in L_j$ и $j > n$, $q = \mathrm{const} > 0$ не зависит от $j$, $c$ и $b$. Пусть $\{e_j\colon\ j \in \mathbf{N}\}$ — стандартный ортонормированный базис в $X$, $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ с 1 на $j$-м месте. Используя свойство 2.1(iii) меры $\mu$ и локальное постоянство $\chi_e$, перебирая все $z = be_j$ и $b \in K$, убеждаемся, что $\theta(z)$ на $X$ нетривиально, если $\mu$ — ненулевая мера, так как по лемме 2.3 $\mu$ однозначно характеризуется по $\{\mu_{L_n}\colon\ n\}$. Действительно, для $\mu$ со значениями в $\mathbf{K}_s$ и меры $\mu_V$ на $V$ $\dim_{\mathbf{K}} V < \aleph_0$, это следует из теоремы 9.20 [34], где

$$F(g)(z) := \lim_{r\to\infty} \int\limits_{B(V,0,r)} \chi_e(z(x)) g(x) m(dx),$$

$z \in L$, $g \in L(V, \mu_V, \mathbf{C}_s)$, $m$ — мера Хаара на $V$ со значениями в $\mathbf{K}_s$. Значит, отображение $\mu \to \theta_\mu$ инъективно.

**2.6. Теорема.** *Пусть $\mu_1$ и $\mu_2$ — меры из $\mathsf{M}(X)$ на одной и той же алгебре $E$, где $\mathrm{Bco}(X) \subset E \subset \mathrm{Bf}(X)$, такие что $\hat{\mu}_1(f) = \hat{\mu}_2(f)$ для любых $f \in \Gamma$. Тогда $\mu_1 = \mu_2$, где $X = c_0(\alpha, \mathbf{K})$, $\alpha \leqslant \omega_0$, $\Gamma$ — векторное подпространство в пространстве непрерывных функций $f\colon X \to \mathbf{K}$, отделяющее точки в $X$.*

**Доказательство.** Пусть сначала $\alpha < \omega_0$, тогда в силу п. 2.5 $\mu_1 = \mu_2$, так как семейство $\Gamma$ порождает $E$. Пусть теперь $\alpha = \omega_0$, $A = \{x \in X\colon\ (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in S\}$, $\nu_j$ — образ меры $\mu_j$ при отображении $x \to (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, где $S \in E(\mathbf{K}^n)$, $f_j \in X \hookrightarrow X^*$. Тогда $\hat{\nu}_1(y) = \hat{\mu}_1(y_1 f_1 + \ldots + y_n f_n) = \hat{\mu}_2(y_1 f_1 + \ldots + y_n f_n) = \hat{\nu}_2(y)$ для любого $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{K}^n$, следовательно, $\nu_1 = \nu_2$ на $E$. Далее, композиции $f \in \Gamma$ с непрерывными функциями $g\colon \mathbf{K} \to \mathbf{K}_s$ порождают семейство $\mathbf{K}_s$-значных функций, отделяющих точки в $X$ (см. также [34, глава 9]).

**2.7. Предложение.** *Пусть $\mu_l$ и $\mu$ — меры из $\mathsf{M}(X_l)$ и $\mathsf{M}(X)$ соответственно, где $X_l = c_0(\alpha_l, \mathbf{K})$, $\alpha_l \leqslant \omega_0$, $X = \prod\limits_1^n X_l$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда условие $\hat{\mu}(z_1, \ldots, z_n) = \prod\limits_1^n \hat{\mu}_l(z_l)$ для любых $(z_1, \ldots, z_n) \in X \hookrightarrow X^*$ эквивалентно $\mu = \prod\limits_1^n \mu_l$.*

**Доказательство.** Пусть $\mu = \prod \mu_l$, тогда

$$\hat{\mu}(z_1, \ldots, z_n) = \int\limits_X \chi_e\Big(\sum z_l(x_l)\Big) \prod \mu_l(dx_l) = \prod \int\limits_{X_l} \chi_e(z_l(x_l)) \mu_l(dx_l).$$

Обратное утверждение вытекает из теоремы 2.6.

**2.8. Предложение.** *Пусть* $X$ — *банахово пространство над* $\mathbf{K}$, *а* $\mu$, $\mu_1$ *и* $\mu_2$ — *вероятностные меры на* $E(X)$. *Тогда эквивалентны следующие условия:* $\mu = \mu_1 * \mu_2$ *и* $\hat{\mu}(z) = \hat{\mu}_1(z)\hat{\mu}_2(z)$ *для любых* $z \in X$.

**Доказательство.** Пусть $\mu = \mu_1 * \mu_2$. По определению это означает, что $\mu$ — образ меры $\mu_1 \otimes \mu_2$ при отображении $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$, $x_j \in X$, поэтому

$$\hat{\mu}(z) = \int\limits_{X \times X} \chi_e(z(x_1 + x_2))(\mu_1 \otimes \mu_2)(d(x_1, x_2)) = \\ = \prod_1^2 \int\limits_X \chi_e(z(x_l))\mu_l(dx_l) = \hat{\mu}_1(z)\hat{\mu}_2(z).$$

Обратно, если $\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 = \mu$, то $\hat{\mu} = (\mu_1 * \mu_2)^\wedge$, и в силу теоремы 9.20 из [34] для мер со значениями в $\mathbf{K}_s$ имеем $\mu = \mu_1 * \mu_2$.

**2.9. Следствие.** *Пусть* $\nu$ — *вероятностная мера на* $\mathrm{Bf}(X)$ *и* $\mu * \nu = \mu$ *для любой меры* $\mu$ *со значениями в том же поле, тогда* $\nu = \delta_0$.

**Доказательство.** Если $z_0 \in X \hookrightarrow X^*$ и $\hat{\mu}(z_0) \neq 0$, то из $\hat{\mu}(z_0)\hat{\nu}(z_0) = \hat{\mu}(z_0)$ следует, что $\hat{\nu}_0(z_0) = 1$. Из свойства 2.6(5) получим, что существует $m \in \mathbf{N}$ с $\hat{\mu}(z) \neq 0$ для любого $z$ с $\|z\| = p^{-m}$, так как $\hat{\mu}(0) = 1$. Тогда $\hat{\nu}(z + z_0) = 1$, то есть $\hat{\nu}|_{(B(X, z_0, p^{-m}))} = 1$. В силу произвольности $\mu$ отсюда следует $\hat{\nu}|_X = 1$, то есть $\nu = \delta_0$ в силу п. 2.5.

**2.10. Следствие.** *Пусть* $X$ *и* $Y$ — *банаховы пространства над* $\mathbf{K}$, $\mu$ *и* $\nu$ — *вероятностные меры на* $X$ *и* $Y$ *соответственно, предположим, что* $T\colon X \to Y$ — *непрерывный линейный оператор. Мера* $\nu$ *является образом меры* $\mu$ *при отображении* $T$ *тогда и только тогда, когда* $\hat{\nu} = \hat{\mu} \circ T^*$, *где* $T^*\colon Y^* \to X^*$ — *сопряжённый оператор.*

**Доказательство** вытекает из п. 2.5 и 2.6.

**2.11. Предложение.** *Для вполне регулярного пространства* $X$ с $\mathrm{ind}(X) = 0$ *выполняются следующие утверждения:*

(a) *если* $(\mu_\beta)$ — *направленность действительных вероятностных мер из* $\mathsf{M}(X)$, *слабо сходящаяся к мере* $\mu$ *из* $\mathsf{M}(X)$, *то* $(\hat{\mu}_\beta(f))$ *сходится к* $\hat{\mu}(f)$ *для любой непрерывной функции* $f\colon X \to \mathbf{K}$; *если* $X$ *сепарабельно и метризуемо, то* $(\hat{\mu}_\beta)$ *сходится к* $\hat{\mu}$ *равномерно на поточечно равностепенно непрерывных подмножествах из пространства* $C(X, \mathbf{K})$ *непрерывных функций* $f\colon X \to \mathbf{K}$;

(b) *если* $M$ — *ограниченное плотное семейство в шаре пространства* $\mathsf{M}(X)$ *для мер из* $\mathsf{M}(X)$, *то семейство* $(\hat{\mu}\colon\ \mu \in M)$ *равностепенно непрерывно на локально* $\mathbf{K}$-*выпуклом пространстве* $C(X, \mathbf{K})$ *в топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах* $S \subset X$.

**Доказательство.**

(a). Функции $\chi_e(f(x))$ ограничены и непрерывны на $X$, а $\hat{\mu}(f) = \int\limits_X \chi_e(f(x))\mu(dx)$. Тогда (a) следует из определения слабой сходимости, так как $\mathrm{sp}_{\mathbf{C}_s}\{\chi_e(f(x))\colon\ f \in C(X, \mathbf{K})\}$ плотно в $C(X, \mathbf{C}_s)$.

(b). Для любого $c > 0$ существует компактное подмножество $S \subset X$, такое что $\|\mu|_{X\setminus S}\| < c/4$ для $\mathbf{K}_s$-значных мер. Поэтому для любых $\mu \in \mathsf{M}$ и $f \in C(X,\mathbf{K})$ с $|f(x)|_{\mathbf{K}} < c < 1$ при любых $x \in S$ получим $|\mu(X) - \hat{\mu}(f)| = = \left|\int\limits_X (1 - \chi_e(f(x)))\mu(dx)\right| < c/2$ для $\mathbf{K}_s$-значной $\mu$, так как для $c < 1$ и $x \in S$ имеем $\chi_e(f(x)) - \chi_e(-f(x)) = 0$.

**2.12. Теорема.** *Пусть $X$ — банахово пространство над $\mathbf{K}$, $\gamma\colon \Gamma \to \mathbf{C}_s$ — непрерывная функция, а $(\mu_\beta)$ — слабо относительно компактная направленность в пространстве $\mathsf{M}_t(X)$ радоновых ограниченных по норме мер и существует $\lim\limits_\beta \hat{\mu}_\beta(f) = \gamma(f)$ для всех $f \in \Gamma$, где $\Gamma \subset C(X,\mathbf{K})$ — векторное подпространство, отделяющее точки в $X$. Тогда $(\mu_\beta)$ слабо сходится к $\mu \in \mathsf{M}_t(X)$ с $\hat{\mu}|_\Gamma = \gamma$.*

**Доказательство** аналогично доказательству теоремы IV.3.1 [42] и вытекает из теоремы 2.6, данной выше, если использовать неархимедов аналог теоремы сходимости Лебега (см. [34, глава 7]).

**2.13. Теорема.**

(a) *Ограниченное семейство мер в $\mathsf{M}(\mathbf{K}^n)$ слабо относительно компактно тогда и только тогда, когда семейство $(\hat{\mu}\colon\ \mu \in M)$ равностепенно непрерывно на $\mathbf{K}^n$.*

(b) *Если $(\mu_j\colon\ j \in \mathbf{N})$ — ограниченная последовательность мер из $\mathsf{M}_t(\mathbf{K}^n)$, $\gamma\colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{C}_s$ — непрерывная функция, $\hat{\mu}_j(y) \to \gamma(y)$ для любого $y \in \mathbf{K}^n$ равномерно на компактных подмножествах в $\mathbf{K}^n$, то $(\mu_j)$ слабо сходится к некоторой мере $\mu$ с $\hat{\mu} = \gamma$.*

(c) *Ограниченная последовательность $(\mu_j)$ мер из $\mathsf{M}_t(\mathbf{K}^n)$ слабо сходится к мере $\mu$ в $\mathsf{M}_t(\mathbf{K}^n)$ тогда и только тогда, когда для любого $y \in \mathbf{K}^n$ существует $\lim\limits_{j\to\infty} \hat{\mu}_j(y) = \hat{\mu}(y)$.*

(d) *Если ограниченная направленность $(\mu_\beta)$ из $\mathsf{M}_t(\mathbf{K}^n)$ равномерно сходится на каждом ограниченном подмножестве в $\mathbf{K}^n$, то $(\mu_\beta)$ слабо сходится к мере $\mu$ из $\mathsf{M}_t(\mathbf{K}^n)$, где $n \in \mathbf{N}$.*

**Доказательство.**

(a). Вытекает из предложения 2.11.

(b). В силу неархимедова преобразования Фурье и теоремы сходимости Лебега [34] для $\mathbf{K}_s$-значных мер из условия $\lim\limits_{R\to\infty} \sup\limits_{|y|>R} |\gamma(y)|R^n = 0$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $R_0 > 0$, такое что

$$\lim_m \sup_{j>m} \|\mu_j|_{\{x\in\mathbf{K}^n\colon\ |x|>R\}}\| \leqslant 2 \sup_{|y|>R} |\gamma(y)|R < \varepsilon$$

для любого $R > R_0$. В силу теоремы 2.12 $(\mu_j)$ слабо сходится к $\mu$ с $\hat{\mu} = \gamma$.

(c), (d). Доказываются аналогично теореме IV.3.2 [42].

**2.14. Следствие.** *Если $(\mu_\beta) \to 1$ равномерно на некоторой окрестности нуля в $\mathbf{K}^n$ для ограниченной направленности мер $(\mu_\beta)$ в $\mathsf{M}_t(\mathbf{K}^n)$, то направленность мер $\mu_\beta$ в $\mathsf{M}_t(\mathbf{K}^n)$ слабо сходится к $\delta_0$.*

**2.15. Определение.** Семейство вероятностных мер $M \subset \mathsf{M}_t(X)$ для банахова пространства $X$ над $\mathbf{K}$ называется плоско концентрированным, если для любого $c > 0$ существует $\mathbf{K}$-линейное подпространство $S \subset X$ с $\dim_{\mathbf{K}} S = n < \aleph_0$, такое что $\inf(\|S^c\|_\mu\colon\ \mu \in M) > 1 - c$, где $S^c$ обозначает $c$-окрестность множества $S$ в $X$. Банахово пространство $\mathsf{M}_t(X)$ снабжено нормой $\|\mu\|$.

**2.16. Теорема.** *Пусть $X$ — банахово пространство над $\mathbf{K}$ с семейством $\Gamma \subset X^*$, отделяющим точки в подмножестве $M \subset \mathsf{M}_t(X)$. Тогда $M$ слабо относительно компактно тогда и только тогда, когда семейство $(\mu_z\colon\ \mu \in M)$ слабо относительно компактно для любых $z \in \Gamma$ и $M$ плоско концентрировано, где $\mu_z$ — образ на $\mathbf{K}$ меры $\mu$, индуцированный $z$.*

**Доказательство** вытекает из теоремы Алаоглу—Бурбаки [33] и следующих двух лемм.

**2.16.1. Лемма.** *Подмножество $A \subset X = c_0(\omega_0, \mathbf{K})$ относительно компактно тогда и только тогда, когда $A$ ограничено и для любого $c > 0$ существует конечномерное над $\mathbf{K}$ подпространство $L \subset X$, такое что $\bar{A} \subset L^c := \{y \in X\colon\ d(y, L) := \inf\{\|x - y\|\colon\ x \in L\} \leqslant c\}$.*

**Доказательство.** Если $A$ ограничено и для любого $c > 0$ существует $L^c$ с $\bar{A} \subset L^c$, то существует последовательность $\{k(j)\colon\ j \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{Z}$, такая что $\lim_{j\to\infty} k(j) = \infty$, $\bar{A} \subset \{x \in X\colon\ |x_j| \leqslant p^{-k(j)},\ j = 1, 2, \ldots\} =: S$, но $X$ линделёфово, $S$ секвенциально компактно, следовательно, $\bar{A}$ компактно (см. [10, § 3.10.31]). Если $\bar{A}$ компактно, то для любого $c > 0$ существует конечное число $m$, такое что $\bar{A} \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(X, x_j, c)$, где $x_j \in X$. Поэтому $\bar{A} \subset L^c$ для $L = \mathrm{sp}_{\mathbf{K}}(x_j : j = 1, \ldots, m) := \Bigl(x = \sum_{j=1}^{m} b_j x_j\colon\ b_j \in \mathbf{K}\Bigr)$.

**2.16.2. Лемма.** *Пусть $S$ и $X$ такие же, как в п. 2.15; $z_1, \ldots, z_m \in X^*$ — семейство, отделяющее точки в $S$. Тогда множество $E := S^c \cap (x \in X\colon |z_j(x)| \leqslant r_j;\ j = 1, \ldots, m)$ ограничено для любого $c > 0$ и $r_1, \ldots, r_m \in (0, \infty)$.*

**Доказательство.** Пространство $S$ изоморфно $\mathbf{K}^n$, следовательно, $p(x) = \max(|z_j|\colon\ j = 1, \ldots, m)$ — норма на $S$, эквивалентная исходной норме.

**2.17. Теорема.** *Для $X$ и $\Gamma$, таких же, как в теореме 2.16, последовательность $(\mu_j\colon\ j \in \mathbf{N}) \subset \mathsf{M}_t(X)$ слабо сходится к $\mu \in \mathsf{M}_t(X)$ тогда и только тогда, когда для любого $z \in \Gamma$ существует $\lim_{j\to\infty} \hat{\mu}_j(z) = \hat{\mu}(z)$ и семейство $(\mu_j)$ плоско концентрировано.*

**Доказательство** вытекает из теорем 2.12, 2.13, 2.16.

**2.18. Предложение.** *Пусть $X$ — вполне регулярное пространство с $\mathrm{ind}(X) = 0$, $\Gamma \subset C(X, \mathbf{K})$ — векторное подпространство, разделяющее точки в $X$, $(\mu_n\colon\ n \in \mathbf{N}) \subset \mathsf{M}_t(X)$, $\mu \in \mathsf{M}_t(X)$, $\lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_n(f) = \hat{\mu}(f)$ для любого $f \in \Gamma$. Тогда $(\mu_n)$ слабо сходится к $\mu$ относительно топологии $\sigma(X, \Gamma)$ — слабейшей топологии на $X$, относительно которой непрерывны все $f \in \Gamma$.*

**Доказательство** вытекает из теоремы 2.13.

**2.19.** Пусть $(X, \mathsf{U}) = \prod\limits_{\lambda}(X_\lambda, \mathsf{U}_\lambda)$ является произведением измеримых вполне регулярных радоновых пространств $(X_\lambda, \mathsf{U}_\lambda) = (X_\lambda, \mathsf{U}_\lambda, \mathsf{K}_\lambda)$, где $\mathsf{K}_\lambda$ — компактные классы, аппроксимирующие снизу каждую меру $\mu_\lambda$ на $(X_\lambda, \mathsf{U}_\lambda)$, $\mathsf{U}_\lambda \supset \mathrm{Bco}(X_\lambda)$, то есть для любых $c > 0$ и элементов $A$ алгебры $\mathsf{U}_\lambda$ имеется $S \in \mathsf{K}_\lambda$, $S \subset A$ с $\|A \setminus S\|_{\mu_\lambda} < c$.

**Теорема.** *Каждая ограниченная квазимера $\mu$ со значениями в $\mathbf{K}_s$ на $(X, \mathsf{U})$ продолжается до меры на алгебре $\mathrm{Af}(X, \mu) \supset \mathsf{U}$, где алгебра $\mathsf{U}$ порождена семейством $(\mathsf{U}_\lambda\colon\ \lambda \in \Lambda)$.*

**Доказательство.** Имеем 2.1(i) по условию и $\|X\|_\mu < \infty$, если выполняется 2.1(iii). Остаётся доказать 2.1(iii). Для любой последовательности $(A_n) \subset \mathsf{U}$ с $\bigcap\limits_n A_n = \varnothing$ и любого $c > 0$ при каждом $j \in \mathbf{N}$ выберем $K_j \in \mathsf{K}$, где компактный класс $\mathsf{K}$ порождён семейством $(\mathsf{K}_\lambda)$ (см. для сравнения [8, предложение 1.1.8]), таким что $K_j \subset A_j$ и $\|A_j \setminus K_j\|_\mu < c$. Поскольку $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \subset \bigcap\limits_n A_n = \varnothing$, то существует $l \in \mathbf{N}$ с $\bigcap\limits_{n=1}^{l} K_n = \varnothing$, поэтому $A_l = A_l \setminus \bigcap\limits_{n=1}^{l} K_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{l} (A_n \setminus K_n)$, следовательно, $\|A_l\|_\mu \leqslant \max\limits_{n=1,\ldots,l}(\|A_n \setminus K_n\|_\mu) < c$. Остаётся воспользоваться теоремой 7.8 [34] о единственности продолжения мер.

**2.20. Определение.** Пусть $X$ — банахово пространство над $\mathbf{K}$, тогда отображение $f\colon X \to \mathbf{C}_s$ называется псевдонепрерывным, если ограничения $f|_L$ равномерно непрерывны для любых подпространств $L \subset X$ с $\dim_{\mathbf{K}} L < \aleph_0$. Пусть $\Gamma$ — семейство отображений $f\colon Y \to \mathbf{K}$ множества $Y$ в поле $\mathbf{K}$, обозначим через $\mathsf{C}(Y, \Gamma)$ алгебру (называемую цилиндрической) подмножеств вида $C_{f_1,\ldots,f_n;S} := (x \in X\colon\ (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in S)$, где $S \in \mathrm{Bco}(\mathbf{K}^n)$, $f_j \in \Gamma$. Снабдим $Y$ топологией $\tau(Y)$, порождённой базой $(C_{f_1,\ldots,f_n;S}\colon\ f_j \in \Gamma$, $S$ открыто-замкнуто в $\mathbf{K}^n)$.

**2.21. Теорема (неархимедов аналог теоремы Бохнера—Колмогорова).** *Пусть $X$ — банахово пространство над $\mathbf{K}$, $X^a$ — его алгебраически сопряжённое $\mathbf{K}$-линейное пространство (то есть пространство всех линейных отображений $f\colon X \to \mathbf{K}$, не обязательно непрерывных). Отображение $\theta\colon X^a \to \mathbf{C}_s$ является характеристическим функционалом некоторой вероятностной меры $\mu$ со значениями в $\mathbf{K}_s$, и она определена на $\mathsf{C}(X^a, X)$ тогда и только тогда, когда $\theta$ удовлетворяет условиям 2.5(3), (5) для $(X^a, \tau(X^a))$ и псевдонепрерывно на $X^a$.*

**Доказательство.**

I. При $\dim_{\mathbf{K}} X = \mathrm{card}(\alpha) < \aleph_0$ пространство $X^a$ изоморфно $\mathbf{K}^\alpha$, поэтому утверждение теоремы для мер $\mu$ со значениями в $\mathbf{K}_s$ следует из теоремы 9.20 [34].

II. Рассмотрим теперь случай $\alpha = \omega_0$. Нужно доказать достаточность условий, наложенных на $\theta$, так как необходимость условий легко получается модификацией п. 2.5 (поскольку $X$ алгебраически вкладывается в $X^a$). Пространство $X^a$ можно отождествить с пространством $\mathbf{K}^\Lambda$ всех $\mathbf{K}$-значных функций, определённых на базисе Гамеля $\Lambda$ в $X$. Базис Гамеля существует в силу леммы Куратовского—Цорна (то есть каждая конечная система векторов из $\Lambda$ линейно независима над $\mathbf{K}$, а каждый вектор из $X$ является конечной линейной комбинацией над $\mathbf{K}$ элементов из $\Lambda$). Пусть $J$ — семейство всех конечных непустых подмножеств в $\Lambda$. Для каждого $A \in J$ существует функционал $\theta_A\colon \mathbf{K}^A \to \mathbf{C}_s$, такой что $\theta_A(t) = \theta\Big(\sum\limits_{y \in A} t(y)y\Big)$ для $t \in \mathbf{K}^A$. Из условий на $\theta$ следует, что $\theta_A(0) = 1$, $\theta_A$ равномерно непрерывен и ограничен на $\mathbf{K}^A$, а также в силу 2.5(5) для любого $c > 0$ существуют $n$ и $q > 0$, такие что для любого $j > n$ и $z \in \mathbf{K}^A$ выполняется неравенство

$$|\theta_A(z) - \theta_j(z)| \leqslant cbq, \tag{i}$$

причём $L_j \supset \mathbf{K}^A$, $q$ не зависит от $j$, $c$ и $b$. Из I следует, что на $\mathrm{Bco}(\mathbf{K}^A)$ существует вероятностная мера $\mu_A$, такая что $\hat{\mu}_A = \theta_A$. Система мер $\{\mu_A\colon\ A \in J\}$ согласована и ограничена, так как $\mu_A = \mu_B \circ (P_B^A)^{-1}$, если $A \subset B$, где $P_B^A\colon \mathbf{K}^B \to \mathbf{K}^A$ — естественные проекции. Действительно, это выполняется в силу условий (i), 2.5(5) для $X^a$ и теоремы 9.20 [34].

По теореме 2.19 на цилиндрической алгебре пространства $\mathbf{K}^\Lambda$ существует и единственна мера $\mu$, такая что $\mu_A = \mu \circ (P^A)^{-1}$ для любого $A \in J$, где $P^A\colon \mathbf{K}^\Lambda \to \mathbf{K}^A$ — естественные проекции. Из $X^a = \mathbf{K}^\Lambda$ следует, что $\mu$ задана на $\mathsf{C}(X^a, X)$. Для $\mu$ на $\mathsf{C}(X^a, X)$ существует её продолжение на $\mathrm{Af}(X, \mu)$, такое что $\mathrm{Af}(X, \mu) \supset \mathrm{Bco}(X)$ (см. п. 2.1).

**2.22.** Для $f \in L(X, \mu, \mathbf{K}_s)$ и $\mathbf{K}_s$-значной меры $\mu$ пусть

$$\int\limits_X f(x)\mu_*(dx) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x)\mu_*(dx)$$

для ограниченной по норме последовательности цилиндрических функций $g_n$ из $L(X, \mu, \mathbf{K}_s)$, сходящейся к $f$ равномерно на компактных подмножествах в $X$. Благодаря теореме сходимости Лебега этот предел существует и не зависит от выбора $\{g_n\colon n\}$.

**Лемма.** *Последовательность слабого распределения $(\mu_{L_n})$ вероятностных радоновых мер порождается некоторой вероятностной мерой $\mu$ на $\mathrm{Bco}(X)$ банахова пространства $X$ над $\mathbf{K}$ тогда и только тогда, когда существует*

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \int\limits_X G_\xi(x)\mu_*(dx) = 1, \tag{i}$$

*где* $\int\limits_X G_\xi(x)\mu_*(dx) := S_\xi(\{\mu_{L_n}\colon\ n\})$, $S_\xi(\{\mu_{L_n}\}) := \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{L_n} F_n(\gamma_{\xi,n})(x)\mu_{L_n}(dx)$, $\gamma_{\xi,n}(y) := \prod\limits_{l=1}^{m(n)} \gamma_\xi(y_l)$, *$F_n$ — преобразование Фурье по* $(y_1, \ldots, y_n)$, $y = (y_j\colon\ j \in \mathbf{N})$, $y_j \in \mathbf{K}$, $\gamma_\xi(y) := C(\xi)s^{-2\min(0,\mathrm{ord}_p(y,\xi))}$, $C(\xi) \in \mathbf{K}_s$, $\gamma_\xi\colon \mathbf{K} \to \mathbf{K}_s$, $y, \xi \in \mathbf{K}$,

$\nu_\xi(\mathbf{K}) = 1$, $\nu_\xi(dy) = \gamma_\xi(dy)w(dy)$, $w\colon \mathrm{Bco}(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}_s$ — *мера Хаара; здесь* $m(n) = \dim_{\mathbf{K}} L_n < \aleph_0$, $\mathrm{cl}\Big(\bigcup\limits_n L_n\Big) = X = c_0(\omega_0, K)$.

**Доказательство.** Если последовательность слабого распределения порождена мерой $\mu$, то в силу условий 2.5(3)—(5), лемм 2.3, 2.16.1, предложений 2.7 и 2.11, следствия 2.10, теорем Лебега о сходимости и Фубини и радоновости $\mu$ существует $r > 0$, такое что

$$\int\limits_X G_\xi(x)\mu_*(dx) = \int\limits_X G_\xi(x)\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{L_n} \gamma_{\xi,n}(y)\hat\mu_{L_n}(y)m_{L_n}(dy),$$

так как $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = 0$ для любого $x = (x_j\colon\ j) \in X$. При этом $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} S_\xi(\{\mu_{L_n}\}) = \int \mu(dx) = 1$. Действительно, для любых $c > 0$ и $d > 0$ существует компакт $V_c \subset X$ с $\|(X \setminus V_c)\|_\mu < c$ и существует $n_0$ с $V_c \subset L_n^d$ при любых $n > n_0$, поэтому, выбирая подходящие последовательности $c(n)$, $d(n)$, $V_{c(n)}$ и $L_{j_n}$, получим, что $\Big[\int\limits_{L_n} \gamma_{\xi,n}(y)\hat\mu_{L_n}(y)m_{L_n}(dy)\colon\ n \in \mathbf{N}\Big]$ — последовательность Коши, где $m_{L_n}$ — $\mathbf{K}_s$-значная мера Хаара на $L_n$, при $\mathrm{char}(\mathbf{K}) = 0$ пространство $L_n$ рассматривается как $\mathbf{Q}_p^{m(n)b}$, $b = \dim_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{K}$, $m(B(L_n,0,1) = 1$. Здесь $G_\xi(x)$ служит для формальной записи предела $S_\xi$ в виде интеграла. Тогда $G_\xi(x)\ (\mathrm{mod}\ \mu)$, очевидно, определена как функция для $\mu$ или $\{\mu_{L_n}\colon\ n\}$ с компактными носителями, а также для $\mu$ с носителем в конечномерном подпространстве $L$ над $\mathbf{K}$ в $X$. По определению $\mathrm{supp}(\mu_{L_n}\colon\ n)$ компактен, если существует компакт $V \subset X$ с $\mathrm{supp}(\mu_{L_n}) \subset P_{L_n}V$ для любого $n$. То есть условие (i) необходимо.

Обратно, если выполнено (i), то для любого $c > 0$ существует $r > 0$, такое что $\big|\|G_\xi(x)\| - 1\big| < c/2$ при $|\xi| > r$, следовательно, существует $n_0$, такое что для любого $n > n_0$ выполняются неравенства:

$$\left|1 - \int\limits_X F_n(\gamma_{\xi,n})(x)\mu_*(dx)\right| \leqslant \big|\|(L_n \cap B(X,0,R))\|_{\mu_{L_n}} - 1\big| + \\ + \sup_{|x|>R} |F_n(\gamma_{\xi,n})(x)|\|L_n \setminus B(X,0,R)\|_{\mu_{L_n}}.$$

Тогда из $\lim\limits_{R\to\infty} \sup\limits_{|x|>R} |F_n(\gamma_{\xi,n})(x)| = 0$ и леммы 2.3 следует утверждение леммы 2.22.

**2.23. Замечания и определения.** Пусть $X$ — локально выпуклое пространство над локально компактным полем $\mathbf{K}$ с нетривиальным неархимедовым нормированием и $X^*$ — его топологически сопряжённое пространство. Для $\mathbf{K}_s$-значной меры $\mu$ на $X$ пополнение линейного пространства характеристических функций $\{\mathrm{ch}_U\colon\ U \in \mathrm{Bco}(X)\}$ в $L(X,\mu,\mathbf{K}_s)$ обозначается через $B_\mu(X)$. Тогда $X$ называется $KS$-пространством, если на $X^*$ существует топология $\tau$, такая что непрерывность отображения $f\colon X^* \to \mathbf{C}_s$ с нормой $\|f\|_{C^0} < \infty$ необходима и достаточна для того, чтобы $f$ было характеристическим функционалом тесной меры с конечной нормой. Такая топология называется топологией $K$-Сазонова типа. Класс $KS$-пространств содержит все сепарабельные локально выпуклые пространства над $\mathbf{K}$. Например, $l^\infty(\alpha, \mathbf{K}) = c_0(\alpha, \mathbf{K})^*$. В частности, также пишем $c_0(\mathbf{K}) := c_0(\omega_0, \mathbf{K})$ и $l^\infty(\mathbf{K}) := l^\infty(\omega_0, \mathbf{K})$, где $\omega_0$ — начальный ординал мощности $\aleph_0$.

Пусть $n_{\mathbf{K}}(l^\infty, c_0)$ обозначает слабейшую топологию на $l^\infty$, для которой непрерывны все функционалы $p_x(y) := \sup\limits_n |x_n y_n|$, где $x = \sum\limits_n x_n e_n \in c_0$ и $y = \sum\limits_n y_n e_n^* \in l^\infty$, $e_n$ — стандартный базис в $c_0$. Такая топология $n_{\mathbf{K}}(l^\infty, c_0)$ называется нормальной топологией. Индуцированная топология на $c_0$ обозначается через $n_{\mathbf{K}}(c_0, c_0)$.

**2.24. Теорема.** *Пусть $f\colon l^\infty(\mathbf{K}) \to \mathbf{C}_s$ — функционал, такой что*

(i) $f(0) = 1$ *и* $\|f\|_{C^0} \leqslant 1$,

(ii) $f$ *непрерывна в нормальной топологии* $n_{\mathbf{K}}(l^\infty, c_0)$.

*Тогда $f$ является характеристическим функционалом вероятностной меры на $c_0(\mathbf{K})$.*

**Доказательство.** Если $\nu$ — мера Хаара на $\mathbf{K}^n$, то на $\mathrm{Bco}(\mathbf{K}^n)$ она принимает значения в $\mathbf{Q}$. Поэтому, лемма 4.1 [31] переносится на случай $\mathbf{K}_s$-значных мер, так как $\mathbf{Q} \subset \mathbf{K}_s$. Поэтому аналогично уравнению (4.1) леммы 4.2 [31] получим

$$P\{|V_1|_{\mathbf{K}} < \varepsilon, \ldots, |V_n|_{\mathbf{K}} < \varepsilon\} = \\ = \nu^{-1}(B(\mathbf{K}^n, 0, p^{-m})) \int\limits_{\mathbf{K}^n} f_V(y) \mathrm{ch}_{B(\mathbf{K}^n, 0, p^{-m})}(y) \nu(dy) \quad \text{(i)}$$

для измеримых отображений $V_j\colon (\Omega, \mathsf{B}, P) \to (\mathbf{K}, \mathrm{Bco}(\mathbf{K}))$, где $(\Omega, \mathsf{B}, P)$ — вероятностное пространство для вероятностной меры $P$ со значениями в $\mathbf{K}_s$ на алгебре $\mathsf{B}$ подмножеств множества $\Omega$, $f_W$ — характеристическая функция подмножества $W = (V_1, \ldots, V_n)$. Для продолжения доказательства необходимы следующие утверждения.

**2.25. Лемма.** *Пусть $f\colon c_0(\mathbf{K}) \to \mathbf{C}_s$ — функция, удовлетворяющая следующим двум условиям:*

(i) $|f(x)| \leqslant 1$ *для любых* $x \in c_0(\mathbf{K})$,

(ii) $f$ *непрерывна в нуле в топологии* $n_{\mathbf{K}}(c_0, c_0)$.

*Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\lambda(\varepsilon) \in c_0(\mathbf{K})$, такое что $|1 - f(x)| < p_{\lambda(\varepsilon)}(x) + \varepsilon$ для любых $x \in c_0(\mathbf{K})$.*

**Доказательство.** В силу непрерывности для любого $\varepsilon > 0$ существует $y(\varepsilon) \in c_0$, такое что $|1 - f(x)| < \varepsilon$, если $p_{y(\varepsilon)} < 1$. Положим $\lambda(\varepsilon) = \pi_{\mathbf{K}}^{-1} y(\varepsilon)$, где $\pi_{\mathbf{K}} \in \mathbf{K}$ таково, что $|\pi_{\mathbf{K}}| = p^{-1}$. Если $x \in c_0$ такой, что $p_{\lambda(\varepsilon)}(x) < p^{-1}$, то $|1 - f(x)| < \varepsilon \leqslant \varepsilon + p_{\lambda(\varepsilon)}(x)$. Если $p_{\lambda(\varepsilon)}(x) \geqslant p$, то $|1 - f(x)| \leqslant 2 \leqslant p < p_{\lambda(\varepsilon)}(x) + \varepsilon$.

**2.26. Лемма.** *Пусть $\{V_n\colon n \in \mathbf{N}\}$ — последовательность $\mathbf{K}$-значных случайных величин для меры $P$ со значениями в $\mathbf{K}_s$. Если для любых $\beta > 0$ и $\varepsilon > 0$*

*существует* $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$*, такое что*

$$\Big\|P|_{\{\sup_{n\geqslant N_\varepsilon}|V_n|_{\mathbf{K}}\leqslant\beta\}}\Big\| \geqslant 1-\varepsilon(1+\beta^{-1}), \tag{i}$$

*то* $\lim_n V_n = 0$ $P$*-почти всюду на* $\Omega$.

**Доказательство** аналогично доказательству леммы 4.4 [31] с заменой $P$ на $\|P\|$.

**2.27. Предложение.** *Пусть* $f\colon c_0(\mathbf{K}) \to \mathbf{C}_s$ — *функция, такая что*

(i) $f(0)=1$ *и* $|f(x)|\leqslant 1$ *для любого* $x\in c_0$,

(ii) $f(x)$ *непрерывно в нормальной топологии* $n_{\mathbf{K}}(c_0,c_0)$.

*Тогда существует вероятностная мера* $\mu$ *на* $c_0(\mathbf{K})$*, такая что* $f(x)=\hat\mu(x)$ *для любого* $x\in c_0$.

**Доказательство.** Рассмотрим функции $f_n(x_1,\dots,x_n) := f(x_1e_1+\ldots+x_ne_n)$, где $x=\sum_j x_je_j \in c_0$. Из условия (ii) и предложения 3.1(2) [31] следует, что $f(x)$ непрерывна в топологии нормы. Из [34, главы 7, 9] следует, что существует семейство тесных мер $\mu_n$ на $\mathbf{K}^n$, таких что $\hat\mu_n(x)=f_n(x)$ для любых $x\in\mathbf{K}^n$. В силу теоремы 2.19 существует вероятностное пространство $(\Omega,\mathsf{B},P)$ с $\mathbf{K}_s$-значной мерой $P$ и последовательность случайных величин $\{V_n\}$, такие что $\mu_n(A)=P\{\omega\in\Omega\colon\ (V_1(\omega),\dots,V_n(\omega))\in A\}$ для любого открыто-замкнутого подмножества $A$ в $\mathbf{K}^n$, следовательно, $\lim_n V_n=0$ $P$-почти всюду в $\Omega$. В силу предыдущих лемм имеется следующее неравенство:

$$\big|1-\|P|_{(|V_n|<\beta,\dots,|V_{n+m}|<\beta)}\|\big| \leqslant \|p_{\lambda(\varepsilon)}(y_1e_n+\ldots+y_me_{n+m}\|_{L(B(\mathbf{K}^n,0,\beta^{-1}),\nu,\mathbf{K}_s)}.$$

Поскольку $\lim_k p_{\lambda(\varepsilon)}(e_k)=0$, то существует $N\in\mathbf{N}$, такое что $\sup_{k\geqslant N} p_{\lambda(\varepsilon)}(e_k)\leqslant\varepsilon$, следовательно, $\|P|_{\{|V_N|<\beta,\dots,|V_{N+m}||<\beta\}}\|\geqslant 1-\varepsilon(1+\beta^{-1})$. В силу леммы 2.26 $\|P|_{\{\lim_n V_n=0\}}\|=1$. Определим измеримое отображение $W$ из $\Omega$ в $c_0$ по формуле $W(\omega):=\sum_n V_n(\omega)e_n$ для любого $\omega\in\Omega$ и определим меру $\mu(A):= := P\{W^{-1}(B)\}$ для любого $A\in\mathrm{Bco}(X)$, следовательно, $\mu$ — вероятностная мера на $c_0$. В силу теоремы Лебега о сходимости (см. [34, глава 7]) существует $\hat\mu(x)=\lim_n\hat\mu_n(x_1e_1+\ldots+x_ne_n)=f(x)$ для любого $x\in c_0$.

**Продолжение доказательства теоремы 2.24.** Пусть $f\colon l^\infty(\mathbf{K})\to\mathbf{C}_s$ удовлетворяет предположению теоремы 2.24, тогда согласно предложению 2.27 существует вероятностная мера $\mu$ на $c_0(\mathbf{K})$, такая что $f(x)=\hat\mu(x)$ для любых $x\in c_0(\mathbf{K})$.

**2.28. Теорема.** *Пусть* $\mu$ — *вероятностная мера на* $c_0(\mathbf{K})$*, тогда* $\hat\mu$ *непрерывно в нормальной топологии* $n_{\mathbf{K}}(l^\infty,c_0)$ *на* $l^\infty$.

**Доказательство.** В силу леммы 2.3 для любого $\varepsilon>0$ существует $S(\varepsilon)\in c_0$, такое что $\|L(0,S(\varepsilon))\|_\mu\geqslant 1-\varepsilon$, где $L(y,z):=\{x\in c_0\colon\ |x_n-y_n|\leqslant|z_n|$ для любого $n \in \mathbf{N}\}$. Поэтому

$$|1-\hat{\mu}(x)| \leqslant \varepsilon + p\|2\eta(\xi x)\|_{C^0(L(0,S(\varepsilon)))}\|\mu|_{L(0,S(\varepsilon))}\|,$$

следовательно, существует постоянная $C>0$, такая что $|1-\hat{\mu}| \leqslant \varepsilon + Cp_{S(\varepsilon)}(x)$.

**2.29. Следствие.** *Нормальная топология $n_{\mathbf{K}}(l^\infty, c_0)$ является топологией $K$-Сазонова типа на $l^\infty(\mathbf{K})$.*

**2.30. Теорема (неархимедов аналог теоремы Минлоса—Сазонова).** *Для сепарабельного банахово пространство $X$ над $\mathbf{K}$ следующие два утверждения равносильны:*

(I) *$\theta\colon X \to \mathbf{T}_s$ удовлетворяет условиям* 2.5(3), (5) *и для любого $c>0$ существует компактный оператор $S_c\colon X \to X$, такой что $|\theta(y)-\theta(x)| < c$ при $|\tilde{z}(S_c z)| < 1$;*

(II) *$\theta$ является характеристическим функционалом вероятностной радоновой меры $\mu$ на $\mathrm{Bco}(X)$, где $\tilde{z}$ — это $z \in X \hookrightarrow X^*$, рассматриваемый как элемент из $X^*$, $z = x-y$, $x$ и $y$ — всевозможные элементы из $X$.*

**Доказательство.**

(II) $\to$ (I). Для $\theta$, порождённого $\mathbf{K}_s$-значной мерой, для любого $r>0$ имеем

$$|\theta(0)-\theta(x)| = \left|\int_X (1-\chi_e(x(u)))\mu(du)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \|(1-\chi_e(x(u)))|_{B(X,0,r)}\|_\mu + 2\|\mu|_{(X\setminus B(X,0,r))}\|.$$

В силу радоновости пространства $X$ и леммы 2.16.1 для любого $b>0$ и $\delta>0$ существуют конечномерные над $\mathbf{K}$ подпространство $L$ в $X$ и компактное подмножество $W \subset X$, такое что $W \subset L^\delta$, $\|\mu|_{(X\setminus W)}\| < b$, следовательно, $\|\mu|_{(X\setminus L^\delta)}\| < b$.

Рассмотрим выражения

$$J(j,l) := 2\pi^2 \int_{B(X,0,r)} \eta(e_j(u))\eta(e_l(u))\mu(du),$$

где $(e_j)$ — ортонормированный базис в $X$, содержащий ортонормированный базис из $L=\mathbf{K}^n$, $n=\dim_{\mathbf{K}} L$. Выбирая последовательности $b_j = 1/p^j$ и $0<\delta_j<b_j$, подпространства $L_j$ и $r=r_j$ так, что $b_j r_j < 1$, $W_j \subset B(X,0,r_j)$, $0<r_j<r_{j+1}<\infty$ для любых $j \in \mathbf{N}$, и ортонормированный базис $(e_j)$, соответствующий последовательности $L_j \subset L_{j+1} \subset \ldots \subset X$, получим в силу конечности $n_j := \dim_{\mathbf{K}} L_j$, что $\lim_{j+l\to\infty} J(j,l) = 0$, так как $\|\{x\colon\ \|x\| > r_j\}\|_\mu < b_j$, а $\eta(x(u)) = 0$ при $x \in X \ominus L_j$ с $\|x\| < b_j$, $u \in B(X,0,r_j)$. Тогда можно определить $g_{j,l} := \min\{d\colon\ d \in \Gamma_{\mathbf{K}}$ и $d \geqslant |J(j,l)|\}$, причём, очевидно, $g_{j,l} \leqslant p|J(j,l)|$ и существуют $\xi_{j,l} \in \mathbf{K}$ с $|\xi_{j,l}|_{\mathbf{K}} = g_{j,l}$. Следовательно, семейство $(\xi_{j,l})$ задаёт компактный оператор $S\colon X \to X$ с $\tilde{e}_j(Se_l) = \xi_{j,l}t$ в силу теоремы 1.2 из [36], где $t = \mathrm{const} \in \mathbf{K}$, $t \neq 0$. Поэтому $|\theta(0)-\theta(z)| < c/2 + |\tilde{z}(Sz)| < c$, если $|\tilde{z}(Sz)| < |t|c/2$. При этом выберем $r$ так, чтобы $\|\mu|_{(X\setminus B(X,0,r))}\| < c/2$, а $S$ соответствует $(r_j\colon\ j)$ с $r_1 = r$, $L_1 = L$ и возьмём $t \in \mathbf{K}$ с $|t|c = 2$.

(I) $\to$ (II). Без ограничения общности можно полагать $\theta(0) = 1$ после перенормировки нетривиальной $\theta$. По теореме 2.24, как в п. 2.5, построим по $\theta(z)$ согласованное семейство конечномерных распределений $\{\mu_{L_n}\colon\ n\}$ со значениями в $\mathbf{K}_s$. Пусть $m_{L_n}$ — $\mathbf{K}_s$-значная мера Хаара на $L_n$, рассматриваемом как $\mathbf{Q}_p^a$ с $a = \dim_{\mathbf{K}} L_n \dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{K}$, $m(B(L_n, 0, 1)) = 1$. Если $S_c$ — компактный оператор, такой что $|\theta(y) - \theta(x)| < c$ для $|\tilde{z}(S_c z)| < 1$, $z = x - y$, тогда $|1 - \theta(x)| < \max(C, 2|\tilde{x}(S_c x)|)$ и $\|\gamma_{\xi,n}(z)(1 - \theta(z))\|_{m_{L_n}} \leqslant \max(\|\gamma_{\xi,n}(z)\|_{m_{L_n}} C, 2|(\gamma_{\xi,n}(z))\tilde{z}(S_c z)|_{m_{L_n}}) \leqslant \max(C, b\|S_c\|/|\xi|^2)$, где $b := p \times \sup\limits_{|\xi|>r}(|\xi|^2\|\gamma_{\xi,n}(z)z^2\|_{m_{L_n}}) < \infty$ для $\mathbf{K}_s$-значных мер. В силу формулы замены переменных в интеграле [35, A.7] выполняется равенство

$$|1 - \|G_\xi(x)\|_{\mu_*}| \leqslant \max(C, b\|S_c\|/|\xi|^2)$$

для $\mathbf{K}_s$-значных мер. Тогда, беря предел при $|\xi| \to \infty$ и затем при $c \to +0$, в силу леммы 2.22 получим утверждение (I) $\to$ (II).

**2.31. Определение.** Пусть на вполне регулярном пространстве $X$ с $\operatorname{ind}(X) = 0$ заданы две ненулевые $\mathbf{K}_s$-значные меры $\mu$ и $\nu$. Тогда $\nu$ называется абсолютно непрерывной относительно $\mu$, если существует $f$, такая что $\nu(A) = \int_A f(x)\mu(dx)$ для любых $A \in \operatorname{Bco}(X)$, где $f \in L(X, \mu, \mathbf{K}_s)$, и это обозначается $\nu \ll \mu$. Меры $\nu$ и $\mu$ являются сингулярными по отношению друг к другу, если существует $F \in E$ с $\|X \setminus F\|_\mu = 0$ и $\|F\|_\nu = 0$, и это обозначается $\nu \perp \mu$. Если $\nu \ll \mu$ и $\mu \ll \nu$, то они называются эквивалентными, $\nu \sim \mu$.

**2.32. Определение и замечание.** Для $\mu\colon E(X) \to \mathbf{K}_s$ последовательность $(\phi_n(x)\colon\ n) \subset L(\mu)$ называется мартингалом, если для любой $\psi \in L(\mu|\mathsf{U}_n)$

$$\int_X \phi_{n+1}(x)\psi(x)\mu(dx) = \int_X \phi_n(x)\psi(x)\mu(dx),$$

а $(\phi_n\colon\ n)$ равномерно сходится на $\operatorname{Af}(X,\mu)$-компактных подмножествах в $X$, где $\mathsf{U}_n$ — минимальная алгебра, относительно которой $(\phi_j\colon\ j = 1, \ldots, n) \subset L(\mu|\mathsf{U}_n)$, $\mu|\mathsf{U}_n$ — ограничение $\mu$ на $\mathsf{U}_n \subset E(X)$, $X$ — банахово пространство над $\mathbf{K}$.

Согласно [34, § 7.10, 7.12] для $\|X\|_\mu < \infty$ $\operatorname{Af}(X,\mu)$-топология на компактных подмножествах $X_c := [x \in X\colon\ N_\mu(x) \geqslant c]$ совпадает с исходной, если $\mu$ задана на алгебре $E = E(X)$ так, что $\operatorname{Bco}(X) \subset E \subset \operatorname{Af}(X,\mu)$, где $c > 0$.

**2.33. Теорема.** *Если имеется мартингал $(\phi_n\colon\ n)$ для $\mu$ со значениями в $\mathbf{K}_s$ и $\sup\limits_n \|\phi_n\|_{N_\mu} < \infty$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(x) =: \phi(x) \in L(\mu)$.*

**Доказательство.** В качестве $\psi(x)$ можно брать характеристические функции открыто-замкнутых подмножеств в $X$, а для любой $\phi_n$ существует последовательность $(\phi_n^j\colon\ j \in \mathbf{N})$ простых функций, такая что $\lim\limits_{j\to\infty} \|\phi_n - \phi_n^j\|_{N_\mu} = 0$. Из $\|\phi_n - \phi_n^{j(n)}\|_{N_\mu} < c$ и 2.32(i) следует, что

$$\left| \int_X (\phi_{n+1}^{j(n+1)}(x) - \phi_n^{j(n)})\psi(x)\mu(dx) \right| < c\|\psi\|_{N_\mu}$$

для любой $\psi \in L(\mu)$, поэтому $\|\phi_{n+1}^{j(n+1)} - \phi_n^{j(n)}\|_{N_\mu} < c$ и существует $\lim_{n\to\infty} \phi_n^{j(n)} = \lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi \in L(\mu)$ в силу теоремы Лебега, если $(c = c(n) = s^{-n}\colon\ n \in \mathbf{N})$, а для каждой $\phi_n$ выбрано соответствующее $j(n) \in \mathbf{N}$, так как $(\phi_n^{j(n)}\colon\ n)$ — последовательность Коши в банаховом пространстве $L(\mu)$ в силу ультраметрического неравенства.

# § 3. Квазиинвариантные меры

В данном параграфе после нескольких предварительных утверждений даются определение квазиинвариантной меры и теоремы о квазиинвариантности мер относительно преобразований банахова пространства $X$ над $\mathbf{K}$.

**3.1.** Пусть $X$ — банахово пространство над $\mathbf{K}$, $(L_n\colon\ n)$ — последовательность подпространств, $\mathrm{cl}\Big(\bigcup_n L_n\Big) = X$, $L_n \subset L_{n+1}$ для любого $n$, $\mu^j$ — вероятностные меры, $\mu^2 \ll \mu^1$, $(\mu^j_{L_n})$ — последовательности слабых распределений, пусть также существуют $\rho_n(x) = \mu^2_{L_n}(dx)/\mu^1_{L_n}(dx)$, $\rho(x) := \lim_{n\to\infty} \rho_n(x)$.

**Теорема.** *Если $\mu^j$ со значениями в $\mathbf{K}_s$ и дополнительно $[\rho_n(P_{L_n}x)\colon\ n]$ сходится равномерно на $\mathrm{Af}(X,\mu^1)$-компактных подмножествах в $X$, $\sup_n \|\rho_n\|_{N_{\mu^1}} < \infty$, то это равносильно следующему: существует $\rho(x) = \mu^2(dx)/\mu^1(dx) \in L(\mu^1)$ и $\lim_{n\to\infty} \|\rho(x) - \rho_n(P_{L_n}x)\|_{N_{\mu^1}} = 0$.*

**Доказательство.** Для любого $A \in \mathrm{Bco}(L)$ выполняются равенства

$$\mu^2_L(A) = \int_A \rho_L(x)\mu^1_L(dx) = \int_{P_L^{-1}(A)} \rho_L(P_Lx)\mu^1(dx).$$

Тогда для любой $\psi \in L(\mu^1|P_L^{-1}\mathrm{Bco}(L)))$ имеем

$$\int_X \psi(x)\mu^2(dx) = \int_X \rho_L(P_Lx)\psi(x)\mu^1(dx),$$

следовательно,

$$\int_X \rho_{n+1}(x)\psi(x)\mu^1(dx) = \int_X \psi(x)\mu^2(dx) = \int_X \rho_n(x)\psi(x)\mu^1(dx),$$

где $\rho_{L_n} = \rho_n$, $\psi \in L(\mu^1|P^{-1}_{L_{n+1}}[\mathrm{Bco}(L_{n+1})])$. Из теоремы 2.33 и определения 2.31 вытекает утверждение теоремы.

**3.2. Теорема.**

(A) *Меры $\mu^j\colon E \to \mathbf{K}_s$, $j = 1,2$, для банахова пространства $X$ над $\mathbf{K}$ ортогональны, $\mu^1 \perp \mu^2$, тогда и только тогда, когда $N_{\mu^1}(x)N_{\mu^2}(x) = 0$ для любого $x \in X$.*

(B) *Если для мер* $\mu^j : E \to \mathbf{K}_s$ *на банаховом пространстве* $X$ *над* $\mathbf{K}$ $\rho(x) = 0$ *для всех* $x$ *с* $N_{\mu^1}(x) > 0$, *то* $\mu^1 \perp \mu^2$; *то же верно для вполне регулярного пространства* $X$ *с* $\mathrm{ind}(X) = 0$ *и* $\rho(x) = \mu^2(dx)/\mu^1(dx) = 0$ *при* $N_{\mu^1}(x) > 0$.

**Доказательство.**

(A). Из определения 2.31 следует, что существует $F \in E$ с $\|X \setminus F\|_{\mu^1} = 0$ и $\|F\|_{\mu^2} = 0$. В силу теорем 7.6 и 7.20 из [34] характеристическая функция $\xi_F$ множества $F$ принадлежит $L(\mu^1) \cap L(\mu^2)$, причём $N_{\mu^j}(x)$ полунепрерывны сверху, $\|\xi_F\|_{N_{\mu^2}} = 0$, $\|\xi_{X\setminus F}\|_{N_{\mu^1}} = 0$, следовательно, $N_{\mu^1}(x)N_{\mu^2(x)} = 0$ для всех $x \in X$.

Обратно, если $N_{\mu^1}(x)N_{\mu^2}(x) = 0$ для всех $x$, то для $F := [x \in X :\ N_{\mu^2}(x) = 0]$ в силу теоремы 7.2 из [34] $\|F\|_{\mu^2} = \|\xi_F\|_{N_{\mu^2}} = 0$, причём в силу теоремы 7.6 из [34] $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_{s^{-n}}$, где $U_c := [x \in X :\ N_{\mu^2}(x) < c]$ открыты в $X$, поэтому $\xi_F \in L(\mu^1) \cap L(\mu^2)$ и $N_{\mu^1}|_{(X\setminus F)} = 0$, следовательно, $\|X \setminus F\|_{\mu^1} = 0$.

(B). В силу теоремы 2.19 для любого $A \in P_{L_n}^{-1}[E(L_n)]$ и $m > n$ $\int\limits_A \rho_m(x)\mu^1(dx) = \mu^2(A)$, тогда из $\lim\limits_{n\to\infty} \|\rho(x) - \rho_n(P_{L_n}x)\|_{N_{\mu^1}} = 0$ и условий 2.1(i)—(iii) для $\mu^2$ следует утверждение (B).

**3.3. Замечание.** Из-за того, что теорема Радона—Никодима не выполняется для $\mu^j$ со значениями в $\mathbf{K}_s$, не все теоремы для мер со значениями в $\mathbf{R}$ переносятся на этот случай, поэтому было изменено определение абсолютной непрерывности мер (см. п. 2.31 и [37]).

**3.4. Теорема.** *Пусть заданы меры* $\mu^j$ *и* $\nu^j$ *со значениями в* $\mathbf{K}_s$ *на* $\mathrm{Bco}(X_j)$ *для банаховых пространств* $X_j$ *над* $\mathbf{K}$ *и* $\mu = \mu^1 \otimes \mu^2$, $\nu = \nu^1 \otimes \nu^2$ *на* $X = X_1 \otimes X_2$, *тогда утверждение* $\nu \ll \mu$ *эквивалентно* $\nu^1 \ll \mu^1$ *и* $\nu^2 \ll \mu^2$, *причём* $\nu(dx)/\mu(dx) = (\nu^1(P_1dx)/\mu^1(P_1dx))(\nu^2(P_2dx)/\mu^2(P_2dx))$, *где* $P_j : X \to X_j$ — *проекции.*

**Доказательство** вытекает из теоремы 7.15 из [34] и модификацией доказательства теоремы 5 из [38, § 15].

**3.5. Теорема (неархимедов аналог теоремы Какутани).** *Пусть* $X = \prod\limits_{j=1}^{\infty} X_j$ — *произведение вполне регулярных пространств с* $\mathrm{ind}(X_j) = 0$ *и вероятностными мерами* $\mu_j, \nu_j : E(X_j) \to \mathbf{K}_s$, *а* $\mu_j \ll \nu_j$ *для любого* $j$, $\nu = \bigotimes\limits_{j=1}^{\infty} \nu_j$, $\mu = \bigotimes\limits_{j=1}^{\infty} \mu_j$ — *меры на* $E(X)$, $\rho_j(x) = \mu_j(dx)/\nu_j(dx)$ *непрерывны по* $x \in X_j$, $\prod\limits_{j=1}^{n} \rho_j(x_j) =: t_n(x)$ *сходится равномерно на* $\mathrm{Af}(X, \mu)$*-компактных подмножествах в* $X$, $\beta_j := \|\rho_j(x)\|_{\phi_j}$, $\phi_j(x) := N_{\nu^j}(x)$ *на* $X_j$. *Если* $\prod\limits_{j=1}^{\infty} \beta_j$ *сходится в* $(0, \infty)$ (*или расходится к* 0), *то* $\mu \ll \nu$ *и* $q_n(x) = \prod\limits_{j=1}^{n} \rho_j(x_j)$ *сходится в* $L(\nu)$ *к* $q(x) = \prod\limits_{j=1}^{\infty} \rho_j(x_j) = \mu(dx)/\nu(dx)$ (*или* $\mu \perp \nu$ *соответственно*), где $x_j \in X_j$, $x \in X$.

**Доказательство.** Счётная аддитивность $\nu$ и $\mu$ следует из теоремы 2.19. Далее, $\beta_j = \|\rho_j\|_{\phi_j} \leqslant \|\rho_j\|_{N_{\nu_j}} = \|X\|_{\mu_j} = 1$, так как $N_{\nu_j} \leqslant 1$ для любого $x \in X_j$, поэтому $\prod_1^\infty \beta_j$ не может расходиться к бесконечности. Если произведение расходится к 0, то существует последовательность $\varepsilon_b := \prod_{j=n(b)}^{m(b)} \beta_j$, для которой сходится ряд $\sum_{b=1}^\infty \varepsilon_b$, где $n(b) \leqslant m(b)$. Для $A_b := \Big[x\colon \Big(\prod_{j=n(b)}^{m(b)} \rho_j(x_j)\Big) \geqslant 1\Big]$ имеются оценки $\|A_b\|_\nu \leqslant \sup_{x\in A_b} \Big[\prod_{j=n(b)}^{m(b)} |\rho_j(x_j)|\phi_j(x_j)\Big] \leqslant \varepsilon_b$, следовательно, $\|A\|_\nu = 0$ для $A = \limsup(A_b\colon\ b\to\infty)$, так как $0 < \sum_{b=1}^\infty \varepsilon_b < \infty$.

Для $B_b := X \setminus A_b$ имеем

$$\|B_b\|_\mu \leqslant \Big[\sup_{x\in B_b} \prod_{j=n(b)}^{m(b)} |1/\rho_j(x_j)|\psi(x_j)\Big] = \Big[\prod_{j=n(b)}^{m(b)} \|\rho_j(x_j)\|_{\phi_j}\Big] = \varepsilon_b,$$

где $\psi_j(x) = N_{\mu_j}(x)$, так как $\mu_j(dx_j) = \rho_j(x_j)\nu_j(dx_j)$ и $N_{\mu_j}(x) = |\rho_j(x_j)|N_{\nu_j}(x)$ в силу непрерывности $\rho_j(x_j)$ (при $\rho_j(x_j) = 0$ полагаем $|1/\rho_j(x_j)|\psi_j(x_j) = 0$, поскольку $\psi_j(x_j) = 0$ для таких $x_j$), следовательно, $\|\limsup(B_b\colon\ b\to\infty)\|_\mu = 0$ и $\|A\|_\mu \geqslant \|\liminf(A_b\colon\ b\to\infty)\|_\mu = 1$, что означает $\mu \perp \nu$.

Предположим, что $\prod_1^\infty \beta_j$ сходится к $0 < \beta < \infty$, тогда $\beta \leqslant 1$ (см. выше). Поэтому из теоремы Лебега 7.F [34] следует, что $t_n(x)$ сходится в $L(X,\nu,\mathbf{K}_s)$, так как $|t_n(x)| \leqslant 1$ для любых $x$ и $n$, а $t_n(x)$ сходятся равномерно на компактных подмножествах в топологии, порождённой $\mathrm{Af}(X,\mu)$. Тогда для любой ограниченной непрерывной цилиндрической функции $f\colon X \to \mathbf{K}_s$ имеем

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \int_X f(x_1,\dots,x_n)t_n(x)\bigotimes_{j=1}^n \nu_j(dx_j) =$$
$$= \lim_{j\to\infty} \int_X f(x)t_n(x)\nu(dx) = \int_X \rho(x)f(x)\nu(dx).$$

Аппроксимируя произвольную $h \in L(X,\mu,\mathbf{K}_s)$ такими $f$, получим равенство

$$\int_X h(x)\mu(dx) = \int_X h(x)\rho(x)\nu(dx),$$

следовательно, $\rho(x) = \mu(dx)/\nu(dx)$.

**3.6. Теорема.** *Пусть $\nu$, $\mu$, $\nu_j$, $\mu_j$ — вероятностные меры со значениями в $\mathbf{K}_s$, $X$ и $X_j$ такие же, как в п. 3.5, и $\mu \ll \nu$, тогда $\mu_j \ll \nu_j$ для любого $j$ и $\prod_{j=1}^\infty \beta_j$ сходится к $\infty > \beta > 0$, где $\beta_j := \|\rho_j\|_{\phi_j}$, $\rho_j(x) = \mu_j(dx)/\nu_j(dx)$, $\phi_j(x) = N_{\nu_j}(x)$.*

**Доказательство.** Для $\mathbf{K}_s$-значных мер из $P_j^{-1}(\mathrm{Bco}(X_j)) \subset \mathrm{Bco}(X)$ следует, что $\mu_j \ll \nu_j$ для любых $j$, так как $\prod_1^\infty \rho_j(x_j) = \rho(x) \in L(X,\nu)$ и $\rho_j(x_j) \in L(X_j,\nu_j)$, где $x_j = P_j x$, $P_j\colon X \to X_j$ — проекции. Тогда $\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \prod_1^n \rho_j(P_j x)$ и $\|\rho(x)\|_{N_\nu} = \lim_{n\to\infty} \|\rho_j\|_{N_{\nu_j}}$. Поскольку $N_{\nu_j} \leqslant 1$, то $\phi_j(x) \leqslant N_{\nu_j}(x)$ и то же для $\phi = N_\nu$, следовательно, $\|\rho(x)\|_\phi = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^n \|\rho_j\|_{\phi_j} \leqslant \|\rho\|_{N_\nu} = 1$ (в силу определения тихоновской топологии в $X$ (см. [10, § 2.3]) и определения $\|*\|_\phi$). Если бы $\|\rho\|_\phi = 0$, то $\|\rho\|_{N_\nu} = 0$, и по теореме 3.2(B) это означало бы, что $\nu \perp \mu$ или $\mu = 0$, но $\mu \neq 0$, следовательно, $\beta > 0$.

**3.7. Определение.** Пусть $X$ — банахово пространство над $\mathbf{K}$, $Y$ — вполне регулярное пространство с $\mathrm{ind}(X) = 0$, $\nu\colon \mathrm{Bco}(Y) \to \mathbf{K}_s$, $\mu^y\colon \mathrm{Bco}(X) \to \mathbf{K}_s$ для любого $y \in Y$, причём $\mu^y(A) \in L(Y,\nu)$ для любого $A \in \mathrm{Bco}(X)$, $\|Y\|_\nu < \infty$, $\sup_{y\in Y} \|X\|_{\mu^y} < \infty$, семейство $(\mu^y(A_n)\colon\ n)$ равномерно сходится по $y$ на любом $\mathrm{Af}(Y,\nu)$-компактном подмножестве в $Y$ для любого заданного сжимающегося семейства $(A_n\colon\ n) \subset X$. Тогда определим

$$\mu(A) = \int_Y \mu_y(A)\nu(dy). \tag{i}$$

Мера $\mu$ называется смешанной. Очевидно, что условие 2.1(i) выполнено; (ii): $\|A\|_\mu \leqslant \Big(\sup_{y\in Y} \|A\|_{\mu^y}\Big)\|A\|_\nu < \infty$; (iii) выполняется в силу теоремы Лебега, так как $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \int_Y \big(\lim_n \mu^y(A_n)\big)\nu(dy) = 0$. Зададим меры $\pi^j$ по формуле:

$$\pi^j(A \times C) = \int_C \mu^{j,y}(A)\nu^j(dy),$$

где $j = 1,2$, а $\mu^{y,j}$ и $\nu^j$ определены, как выше $\mu^y$ и $\nu$.

**3.8. Теорема.** *Пусть $\mu^j$ и $\pi^j$, $X$ и $Y$ такие же, как в п. 3.7.*

(A) *Если $\pi^2 \ll \pi^1$, то $\nu^2 \ll \nu^1$ и $\mu^{2,y} \ll \mu^{1,y} \pmod{\nu^2}$.*

(B) *Если $\nu^2 \ll \nu^1$ и $\mu^{2,y} \ll \mu^{1,y} \pmod{\nu^2}$, причём существует $\mathrm{Bco}(X\times Y,\pi^1)$-измеримая функция $\tilde\rho(y,x) = \mu^{2,y}(dx)/\mu^{1,y}(dx) \in L(X\times Y,\pi^1)$, то $\pi^2 \ll \pi^1$ и $\pi^2(d(x,y))/\pi^1(d(x,y)) = (\nu^2(dy)/\nu^1(dy))\tilde\rho(y,x)$.*

**Доказательство.**

(A). Из условий, наложенных на $\mu^{j,y}$ и $\nu^j$, следует, что для любой $\phi \in L(X\times Y,\pi^j)$ в силу теоремы 7.15 из [34] выполняется равенство

$$\int_{X\times Y} \phi(x,y)\pi^j(d(x,y)) = \int_Y \Big[\int_X \phi(x,y)\mu^{j,y}(dx)\Big]\nu^j(dy),$$

а $\rho(y,x) = \pi^2(d(x,y))/\pi^1(d(x,y)) \in L(X \times Y, \pi^1)$, тогда $\nu^2(dy)/\nu^1(dy) = \left[\int_X \rho(y,x)\mu^{1,y}(dx)\right] \in L(Y,\nu^1)$. Продолжаем, модифицируя доказательство теоремы 1 из [38, §15]. Тогда $\tilde\rho(y,x)$ можно задать для $\nu^2$-почти всех $y$ по формуле

$$\tilde\rho(y,x) = \rho(y,x) \Big/ \int_X \rho(y,x)\mu^{1,y}(dx) \in L(X,\mu^{1,y}).$$

(B). Пусть $A \in \mathrm{Bco}(X) \times \mathrm{Bco}(Y)$, $A_y := [y\colon\ (x,y) \in A]$, тогда $\pi^j(A) = \int_Y \mu^{j,y}(A_y)\nu^j(dy)$. Если $\|A\|_{\pi^1} = 0$, то $\|A_y\|_{\mu^{1,y}} N_{\nu^1}(y) = 0$ для любых $y \in Y$, следовательно, $\|A\|_{\pi^2} = 0$, так как $\nu^2(dy)/\nu^1(dy) \in L(\nu^1)$, $\mu^{2,y}(dx)/\mu^{1,y}(dx) \in L(\mu^{1,y})$, $\tilde\rho \in L(X \times Y, \pi^1)$ и выполнены условия (i), (ii) в п. 3.7. Отсюда получим, что $\pi^2(d(x,y))/\pi^1(d(x,y)) \in L(X \times Y, \pi^1)$, так как $\nu^2(dy)/\nu^1(dy) \in L(X \times Y, \pi^1)$ с $\sup_y \|X\|_{\mu^{j,y}} < \infty$.

**3.9. Определение.** Для банахова пространства $X$ над $\mathbf{K}$ элемент $a \in X$ называется допустимым сдвигом меры $\mu$ со значениями в $\mathbf{K}_s$, если $\mu_a \ll \mu$, где $\mu_a(A) = \mu(S_{-a}A)$ для любых $A \in E \supset \mathrm{Bco}(X)$, $S_aA{:=}a{+}A$, $\rho(a,x){:=}\rho_\mu(a,x){:=} \mu_a(dx)/\mu(dx)$, $M_\mu := [a \in X\colon\ \mu_a \ll \mu]$ (см. п. 2.1 и 2.31).

**3.10. Свойства $M_\mu$ и $\rho$ из п. 3.9.**

I. *Множество* $M_\mu$ *является полугруппой по сложению,* $\rho(a+b,x) = \rho(a,x)\rho(b,x-a)$ *для любых* $a, b \in M_\mu$.

**Доказательство.** Для любой непрерывной ограниченной $f\colon X \to \mathbf{K}_s$

$$\int_X f(x)\mu_{a+b}(dx) = \int_X f(x+a+b)\mu(dx) = \\ = \int_X f(x+a)\rho(b,x)\mu(dx) = \int_X f(x)\rho(b,x-a)\rho(a,x)\mu(dx),$$

так как $\|X\|_\mu < \infty$ и $f(x)\rho(b,x-a) \in L(\mu)$, следовательно, $\rho(b,x-a)\rho(a,x) = \rho(a+b,x) \in L(\mu)$ как функция от $x$ и $\mu_{a+b} \ll \mu$.

II. *Если* $a \in M_\mu$, $\rho(a,x) \neq 0 \,(\mathrm{mod}\ \mu)$, *то* $\mu_a \sim \mu$, $-a \in M_\mu$ *и* $\rho(-a,x) = 1/\rho(a,x-a)$.

**Доказательство.** Для любой непрерывной ограниченной $f\colon X \to \mathbf{K}_s$

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \int_X f(x)[\rho(a,x)/\rho(a,x)]\mu(dx) = \int_X [\mu_a(dx)/\mu(dx)]^{-1}\mu_a(dx),$$

так как $\|X\|_\mu < \infty$, поэтому $\mu_a \sim \mu$.

III. *Если* $\nu \ll \mu$ *и* $\nu(dx)/\mu(dx) = g(x)$, *то* $M_\mu \cap M_\nu = M_\mu \cap [a\colon\ \mu([x\colon\ g(x) = 0,\ g(x-a)\rho_\mu(a,x) \neq 0]) = 0]$ *и* $\rho_\nu(a,x) = [g(x-a)/g(x)]\rho_\mu(a,x) \,(\mathrm{mod}\ \nu)$ *при* $a \in M_\mu \cap M_\nu$.

**Доказательство.** Для непрерывной ограниченной $f\colon X \to \mathbf{K}_s$ $a \in M_\mu$ и $\int\limits_X f(x+a)\nu(dx) = \int\limits_X f(x)g(x-a)\rho_\mu(a,x)\mu(dx)$, если при этом $\mu([x\colon\ g(x)=0,\ g(x-a)\rho_\mu(a,x) \neq 0]) = 0$, то $\int\limits_X f(x+a)\nu(dx) = \int\limits_X f(x)[g(x-a)\rho_\mu(a,x)/g(x)]\nu(dx)$, так как $\|X\|_\nu + \|X\|_\mu < \infty$, $N_\nu(x) = \inf\limits_{\mathrm{Bco}(X)\supset U \ni x} \sup\limits_{y\in U}[|g(y)|N_\mu(y)]$, следовательно, $a \in M_\mu \cap M_\nu$. Если $a \in M_\mu \cap M_\nu$, то $\int\limits_X f(x)\rho_\nu(a,x)g(x)\mu(dx) = \int\limits_X f(x)g(x-a)\rho_\mu(a,x)\mu(dx)$, следовательно, $\rho_\nu(a,x)g(x) = g(x-a)\rho_\mu(a,x)$ $(\mathrm{mod}\ \mu)$ и $\mu([x\colon\ g(x)=0,\ g(x-a)\rho_\mu(a,x)\neq 0]) = 0$.

IV. *Если $\nu \sim \mu$, то $M_\nu = M_\mu$.*

V. *Для $\mu$ со значениями в $\mathbf{K}_s$ и $X = \mathbf{K}^m$, $m \in \mathbf{N}$ семейство $M_\mu$ с расстоянием $r(a,b) = \|\rho(a,x)-\rho(b,x)\|_{N_\mu(x)}$ является полным псевдоультраметрическим пространством.*

**Доказательство.** Пусть $(a_n) \subset M_\mu$ — последовательность Коши относительно $r$, тогда $(a_n)$ ограничена в $X$ по $\|{*}\|_X$, так как при $\lim\limits_{j\to\infty}\|a_{n_j}\| = \infty$ и $r(a_{n_j}, a_{n_{j+1}}) < p^{-j}$ для $f \in L(\mu)$ с компактным носителем имеем $\|f(x+a_{n_j}) - f(x+a_{n_1})\|_{N_\mu} < 1/p$. Тогда для $f$ с $\|f(x+a_{n_1})\|_{N_\nu} > 1/2$ и $\|f\|_{N_\nu} = 1$ получим противоречие: $\lim\limits_j \|f(x+a_{n_j})\|_{N_\mu} > 1/2 - 1/p \geqslant 0$, что невозможно из-за компактности $\mathrm{supp}(f)$. Тогда $(a_n)$ ограничена, следовательно, некоторая подпоследовательность $(a_{n_j}) =: (b_j)$ слабо сходится в $X$ к $b \in X$. Поэтому $\theta_j(z) = \int\limits_X \chi_e(z(x+b_j))\mu(dx) = \chi_e(z(b_j))\theta(z) = \int\limits_X \chi_e(z(x))\rho(b_j,x)\mu(dx)$, $\lim\limits_j z(b_j) = z(b)$ и $\lim\limits_j \theta_j(z) = \chi_e(z(b))\theta(z)$ для любого $z \in X^*$. Из теоремы 9.20 из [34] следует, что существует $\rho \in L(\mu)$ с $\lim\limits_j \|\rho(b_j,x)-\rho(x)\|_{N_\mu} = 0$, так как $L(\mu)$ — банахово пространство и $\mu_j$, отвечающие $\theta_j$, сходятся в банаховом пространстве $\mathsf{M}(X)$. Итак, $\int\limits_X \chi_e(z(x))\mu_b(dx) = \int\limits_X \chi_e(z(x))\rho(x)\mu(dx)$ для любых $z \in X^* = \mathbf{K}^m$, следовательно, $\rho(x) = \mu_b(dx)/\mu(dx)$.

**3.11. Определение.** Для банахова пространства $X$ над $\mathbf{K}$ и меры $\mu\colon \mathrm{Bco}(X) \to \mathbf{K}_s$, $a \in X$, $\|a\| = 1$, вектор $a$ называется допустимым направлением, если $a \in M_\mu^{\mathbf{K}} := [z\colon\ \|z\|_X = 1,\ \lambda z \in M_\mu$ и $\rho(\lambda z, x) \neq 0\,(\mathrm{mod}\ \mu)$ (относительно $x$) и для любых $\lambda \in \mathbf{K}] \subset X$. Пусть $a \in M_\mu^{\mathbf{K}}$, обозначим $L_1 := \mathbf{K}a$, $X_1 = X \ominus L_1$, $\mu^1$ и $\tilde\mu^1$ — проекции $\mu$ на $L_1$ и $X_1$ соответственно, а $\tilde\mu = \mu^1 \otimes \tilde\mu^1$ — мера на $\mathrm{Bco}(X)$, задаваемая равенством $\tilde\mu(A\times C) = \mu^1(A)\tilde\mu^1(C)$ на $\mathrm{Bco}(L_1)\times\mathrm{Bco}(X_1)$ и продолженная на $\mathrm{Bco}(X)$, где $A \in \mathrm{Bco}(L_1)$, $C \in \mathrm{Bco}(X_1)$.

**3.12. Определение и замечания.** Мера $\mu\colon \mathrm{Bco}(X) \to \mathbf{K}_s$ для банахова пространства $X$ над $\mathbf{K}$ называется квазиинвариантной мерой, если $M_\mu$ содержит $\mathbf{K}$-линейное многообразие $J_\mu$, плотное в $X$.

Из п. 3.10 и определения 3.11 следует, что $J_\mu \subset M_\mu^{\mathbf{K}}$. Пусть $(e_j\colon\ j \in \mathbf{N})$ — ортонормированный базис в $X$, $H = \mathrm{sp}_{\mathbf{K}}(e_j\colon\ j)$. Обозначим $\Omega(Y) = [\mu \mid \mu$ — мера со значениями в $Y$ конечной вариации на $\mathrm{Bco}(X)$ и $H \subset J_\mu]$, где $Y = \mathbf{K}_s$.

**3.13. Теорема.** *Если* $\mu\colon \mathrm{Bco}(Y) \to \mathbf{F}$ — $\sigma$*-конечная мера на* $\mathrm{Bco}(Y)$, $Y$ — *полное сепарабельное ультраметрическое* $\mathbf{K}$*-линейное пространство, такое что* $\mathrm{co}(S)$ *нигде не плотно в* $Y$ *для любого компактного подмножества* $S \subset Y$, *где* $\mathbf{K}$ *и* $\mathbf{F}$ — *бесконечные недискретные неархимедовы поля с мультипликативными ультранормами* $|{*}|_{\mathbf{K}}$ *и* $|{*}|_{\mathbf{F}}$. *Тогда из* $J_\mu = Y$ *следует, что* $\mu = 0$.

**Доказательство.** Поскольку $\mu$ $\sigma$-конечна, то по определению существует $(Y_j\colon\ j \in H) \subset \mathrm{Bco}(Y)$, такое что $Y = \bigcup\limits_{j\in H} Y_j$ и $0 < \|\mu|\mathrm{Bco}(Y_j)\| \leqslant 1$ для любого $j$, где $H \subset \mathbf{N}$, $Y_j \cap Y_l = \varnothing$ для любых $j \neq l$. Если $\mathrm{card}(H) = \aleph_0$, то зададим функцию $f(x) = s^j/\|Y_j\|_\mu$ для $\mu$ со значениями в $\mathbf{F}$, где $s$ фиксировано с $0 < |s|_{\mathbf{F}} < 1$, $s \in \mathbf{N}$. Тогда определим меру $\nu(A) = \int\limits_A f(x)\mu(dx)$, $A \in \mathrm{Bco}(Y)$. Тогда $\|Y\|_\nu \leqslant 1$ и $J_\nu = Y$, так как $f \in L(Y, \mu, \mathbf{F})$. Таким образом, достаточно рассмотреть $\mu$ с $\|\mu\| \leqslant 1$ и $\mu(Y) = 1$. Для любого $n \in \mathbf{N}$ в силу радоновости $Y$ существует компакт $X_n \subset Y$, такой что $\|Y \setminus X_n\|_\mu < s^{-n}$. В $Y$ имеется счётное всюду плотное подмножество $(x_j\colon\ j \in \mathbf{N})$, тогда $Y = \bigcup\limits_{j\in\mathbf{N}} B(Y, x_j, r_l)$ для любого $r_l > 0$, где $B(Y, x, r_l) = [y \in Y\colon\ d(x, y) \leqslant r_l]$, $d$ — ультраметрика на $Y$, то есть $d(x, z) \leqslant \max(d(x, y), d(y, z))$, $d(x, z) = d(z, x)$, $d(x, x) = 0$, $d(x, y) > 0$ при $x \neq y$ для любых $x, y, z \in Y$. Поэтому для любого $r_l = 1/l$, $l \in \mathbf{N}$ существует $k(l) \in \mathbf{N}$, такое что $\|Y \setminus X_{n,l}\|_\mu < s^{-n-l}$ в силу компактности $Y_c = [y \in Y\colon\ N_\mu(y) \geqslant c]$ для любого $c > 0$, где $X_{n,l} := \bigcup\limits_{j=1}^{k(l)} B(Y, x_j, r_l)$, следовательно, $\|Y \setminus X_n\|_\mu \leqslant s^{-n}$ для $X_n := \bigcap\limits_{l=1}^{\infty} X_{n,l}$. Подмножества $X_n$ компактны, так как $X_n$ замкнуты в $Y$ и метрика $d$ на $X_n$ вполне ограничена, а $Y$ полно [10, теоремы 3.1.2 и 4.3.29]. Тогда $0 < \|X\|_\mu \leqslant 1$ и $\|Y \setminus X\|_\mu = 0$ для $X := \mathrm{sp}_{\mathbf{K}}\Bigl(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n\Bigr)$.

Множества $\tilde{Y}_n = \mathrm{co}(Y_n)$ нигде не плотны в $Y$ для $Y_n = \bigcup\limits_{l=1}^{n} X_l$, следовательно, $\mathrm{sp}_{\mathbf{K}} Y_n$ нигде не плотны в $Y$, а $\Bigl(Y \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n\Bigr) \neq \varnothing$ всюду плотно в $Y$ в силу теоремы Бэра о категории [10, 3.9.3 и 4.3.26]. Тогда $y + X \subset Y \setminus X$ для $y \in Y \setminus X$ и из $J_\mu = Y$ следует, что $\|X\|_\mu = 0$, так как $\|y + X\|_\mu = 0$ (см. п. 2.32 и 3.12 выше). Поэтому получается противоречие, следовательно, $\mu = 0$.

**3.14. Следствие.** *Если* $Y$ — *банахово пространство или полное счётно-ультранормированное бесконечномерное пространство над* $\mathbf{K}$, $\mu\colon \mathrm{Bco}(Y) \to \mathbf{F}$, $\mathbf{K}$ *и* $\mathbf{F}$ *такие же, как в п.* 3.13 *и* $J_\mu = Y$, *тогда* $\mu = 0$.

**Доказательство.** Пространство $Y$, очевидно, полно и ультраметризуемо, а $\mathrm{co}(S)$ нигде не плотно в $Y$ для любого компакта $S$ в $Y$, так как $\mathrm{co}(S) = \mathrm{cl}(S_{bc})$ компактно в $Y$ и не содержит в себе никакого открытого подмножества в силу § 5.7.5 в [33].

**3.15. Теорема.** *Пусть* $X$ — *сепарабельное банахово пространство над локально компактным полем, таким что либо* $\mathbf{K} \supset \mathbf{Q}_p$, *либо* $\mathrm{char}(\mathbf{K}) = p > 0$. *Тогда* *существуют вероятностные меры $\mu$ на $X$ со значениями в $\mathbf{K}_s$ $(s \neq p)$, такие что $\mu$ — квазиинвариантные меры относительно соответствующих плотных линейных подпространств $J_\mu$.*

**Доказательство.** Пусть $S(j,n) := p^j B(\mathbf{K},0,1) \setminus p^{j+1}B(\mathbf{K},0,1)$ для $j \in \mathbf{Z}$ и $j \leqslant n$, $S(n,n) := p^n B(\mathbf{K},0,1)$, $w'$ — мера Хаара на поле $\mathbf{K}$ [15, 34] (рассматриваемом как аддитивная группа) со значениями в $\mathbf{K}_s$ при $s \neq p$. Тогда для любого $c > 0$ и $n \in \mathbf{N}$ имеются меры $m$ на $\mathrm{Bco}(\mathbf{K})$, такие что $m(dx) = f(x)v(dx)$, $|f(x)| > 0$ для любого $x \in \mathbf{K}$ и $|m(p^n B(\mathbf{K},0,1) - 1| < c$, $m(\mathbf{K}) = 1$, $\|A\|_m \leqslant 1$ для любого $A \in \mathrm{Bco}(\mathbf{K})$, где $v = w'$, $v(B(\mathbf{K},0,1)) = 1$. Более того, выберем $f$ так, чтобы плотность $m_a(dx)/m(dx) =: d(m;a,x)$ была непрерывна по $(a,x) \in \mathbf{K}^2$ и для любого $c' > 0$, $x$ и $|a| \leqslant p^{-n}$ $|d(m;a,x) - 1| < c'$. Пусть $f|_{S(j,n)} := a(j,n)$ локально постоянна, например, $a(j,n) = (1-s)(1-1/p)s^{2n-1-j}p^{-n}$ при $j < n$, $a(n,n) = (1-s^{-n})p^{-n}$. Потом можно взять $f(x) + h(x)$ и использовать $h(x)\colon \mathbf{K} \to \mathbf{K}_s$ с $0 < \sup\{|h(x)/f(x)|\colon\ x \in \mathbf{K}\} \leqslant c''$, $0 < c'' \leqslant 1/s^n$, тогда $|y_a(dx)/y(dx)| = |m_a(dx)/m(dx)|$, где $y(dx) := (f(x)+h(x))v(dx)$, $f$ и $h$ из $L(\mathbf{K}, m, \mathbf{K}_s)$.

Пусть $\{m(j;dx)\}$ — семейство мер на $\mathbf{K}$ с соответствующей последовательностью $\{k(j)\}$, такой что $k(j) \leqslant k(j+1)$ для любого $j$ и $\lim_{i\to\infty} k(i) = \infty$, где $m(j;dx)$ отвечает разбиению $[S(i,k(j))]$. Банахово пространство $X$ изоморфно $c_0(\omega_0, \mathbf{K})$ [34], имеет ортонормированный базис $\{e_j\colon\ j = 1,2,\ldots\}$ и проекторы $P_j x = (x(1),\ldots,x(j))$ на $\mathbf{K}^j$, где $x = x(1)e_1 + x(2)e_2 + \ldots$. Тогда существует цилиндрическая мера $\mu$, заданная согласованным семейством мер $y(j,B) = b(j,S)$ для $B = P_j^{-1}S$ и $S \in \mathrm{Bf}(\mathbf{K}^j)$ [5, 8], где $b(j,dz) = \bigotimes[m(j;dz(i))\colon\ i = 1,\ldots,j]$, $z = (z(1),\ldots,z(j))$. Пусть $L := L(t,t(1),\ldots,t(l);l) := \{x\colon\ x \in X$ и $|x(i)| \leqslant p^a$, $a = -t - t(i)$ для $i = 1,\ldots,l$ и $a = -k(j)$ для $j > l\}$, тогда $L$ компактно в $X$, так как $X$ линделёфово и $L$ секвенциально компактно [10]. Поэтому для любого $c > 0$ существует $L$, такое что $\|X \setminus L\|_\mu < c$ в силу выбора $a(j,n)$.

В силу аналога теоремы Прохорова для мер со значениями в $\mathbf{K}_s$ [34, 7.6(ii)] и в силу леммы 2.3 $\mu$ имеет продолжение на $\mathrm{Bf}(X)$ и, следовательно, на полную алгебру $\mathrm{Af}(X,\mu)$ и $\mu$ радонова.

Пусть $z' \in \mathrm{sp}_{\mathbf{K}}\{e_j\colon\ j = 1,2,\ldots\}$ и $z'' = \{z(j)\colon\ z(j) = 0$ для $j \leqslant l$ и $z(j) \in S(n,n)$, $j = 1,2,\ldots$, $n = k(j)\}$, $l \in \mathbf{N}$, $z = z' + z''$. Тогда можно взять ограничение меры $\mu$ на $\mathrm{Bco}(X)$. В силу теорем 2.19, 3.5 выше и также I.1.4, II.4.1 [34] существуют $m(j;dz(j)$, такие что $\rho_\mu(z,x) = \prod\{d(j;z(j),x(j))\colon\ j = 1,2,\ldots\} = \mu_z(dx)/\mu(dx) \in L((X,\mu,\mathrm{Bco}(X)),\mathbf{K}_s)$ для любых $z, x \in X$, где $d(j;*,*) = d(m(j;*),*,*)$ и $\mu_z(X) = \mu(X) = 1$.

**3.16. Замечание.** Для данной $m = w'$ (см. выше) могут быть построены новые подходящие меры, если использовать образы мер $m^g(E) = m(g^{-1}(E))$, такие что для диффеоморфизма $g \in \mathrm{Diff}^1(\mathbf{K})$ (см. п. A.3) имеем $m^{g^{-1}}(dx)/m(dx) = |g'(g^{-1}(x))|_{\mathbf{K}}$, где $|*|_{\mathbf{K}} = \mathrm{mod}_{\mathbf{K}}(*)$ — модулярная функция поля $\mathbf{K}$, ассоциированная с мерой Хаара на $\mathbf{K}$, в то же время $|*|_{\mathbf{K}}$ — мультипликативная норма на $\mathbf{K}$, совместимая с её равномерностью [44]. В самом деле, для $\mathbf{K}$

и $X = \mathbf{K}^j$ с $j \in \mathbf{N}$ и меры Хаара $v = w'$ на $X$, $v_X := v$, со значениями в $\mathbf{K}_s$ при $s \neq p$ и для функции $f \in L(X, v, \mathbf{K}_s)$ выполняется равенство $\int\limits_{g(A)} f(x)v(dx) = \int\limits_{\mathrm{Af}} (g(y))|g'(y)|_{\mathbf{K}} v(dy)$, где $\mathrm{mod}^j_{\mathbf{K}}(\lambda)v(dx) := v(\lambda dx)$, $\lambda \in \mathbf{K}$, так как $v(B(X, 0, p^n)) \in \mathbf{Q}$, $N_v(x) = 1$ для любых $x \in X$, следовательно, из $f_k \to f$ в $L(g(A), v, \mathbf{K}_s)$ при $k \to \infty$ следует, что $f_k(g(x)) \to f(g(x))$ в $L(A, v, \mathbf{K}_s)$, где $f_k$ локально постоянны, $A$ — компактное открытое подмножество в $X$.

Далее рассматриваются квазиинвариантные меры $\mu$ на $\mathrm{Bco}(c_0(\omega_0, \mathbf{K}))$, построенные с помощью проективных пределов или слабых распределений вероятностных мер $(\mu_{H(n)}\colon\ n)$, например как в теореме 3.15, таких что

$$\begin{gathered}\mu_{H(n)}(dx) = f_{H(n)}(x) v_{H(n)}(dx),\ \dim_{\mathbf{K}} H(n) = m(n) < \aleph_0 \text{ для любых } n \in \mathbf{N},\\ \text{где } f_{H(n)} \in L(H(n), v_{H(n)}, \mathbf{K}_s),\ H(n) \subset H(n+1) \subset \ldots,\\ \mathrm{cl}\Bigl(\bigcup_n H(n)\Bigr) = c_0(\omega_0, \mathbf{K}), \text{ если не оговорено противное.}\end{gathered} \tag{i}$$

Для вероятностной квазиинвариантной меры со значениями в $\mathbf{K}_s$, если сдвиги $x \mapsto x + y$ на $y \in H(n)$ непрерывны по $y$ из $H(n)$ в $\mathsf{M}(H(n))$ (см. п. 2.1), то есть $y \mapsto \mu^y_{H(n)}$, где $\mu_{H(n)}(y + A) =: \mu^y_{H(n)}(A)$ для любых $A \in \mathrm{Bco}(H(n))$, то в силу теоремы 8.9 из [34] $\mu_{H(n)}$ удовлетворяет (i).

Как будет видно из дальнейшего, такие меры $\mu$ являются квазиинвариантными относительно семейств мощности $\mathsf{c} = \mathrm{card}(\mathbf{R})$ линейных и нелинейных преобразований $U\colon X \to X$, причём для любого $V$, открытого в $X$, $\|V\|_\mu > 0$, если $f_{H(n)}(x) \neq 0$ для любых $n \in \mathbf{N}$ и $x \in H(n)$.

Пусть $\mu$ — вероятностная квазиинвариантная мера, удовлетворяющая (i), а $(e_j\colon j)$ — ортонормированный базис в $M_\mu$, $H(n) = \mathrm{sp}_{\mathbf{K}}(e_1, \ldots, e_n)$, обозначим $\hat\rho_\mu(a, x) = \hat\rho(a, x) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho^n(P_n a, P_n x)$, $\rho^n(P_n a, P_n x) := f_{H(n)}(P_n(x - a))/f_{H(n)}(P_n x)$ для всех $a$ и $x$, для которых этот предел существует, и $\hat\rho(a, x) = 0$ в противном случае, где $P_n\colon X \to H(n)$ — проекторы. Положим $\rho(a, x) = \hat\rho(a, x)$, если $\mu_a(X) = \mu(X)$, $\hat\rho(a, x) \in L(X, \mu, \mathbf{K}_s)$ как функция от $x$ и $\|X\|_{N_\nu} = 1$, где $\nu(dx) := \hat\rho(a, x)\mu(dx)$, $\rho(a, x)$ не задаётся, если $\mu_a(X) \neq \mu(X)$ или $\|X\|_{N_\nu} \neq 1$, это условие равенства 1 выполняется, например, для непрерывных $f_{H(n)}$ с непрерывными $\hat\rho(a, x) \in L(\mu)$ по $x$ при данном $a$, если $\lim\limits_n \rho^n(a, x)$ сходится равномерно по $x$. Если для любого другого базиса $(\tilde e_j\colon\ j)$ и $\tilde\rho$ выполняется условие

$$\|X \setminus S\|_\mu = 0, \tag{ii}$$

то $\rho(a, x)$ называется регулярно зависящей от базиса, где $S := \bigcap\limits_{a \in M_\mu} [x\colon\ \rho(a, x) = \tilde\rho(a, x)]$.

**3.17. Лемма.** *Пусть $\mu$ — вероятностная квазиинвариантная мера, $\mu\colon \mathrm{Bco}(X) \to \mathbf{K}_s$, $X$ — банахово пространство над $\mathbf{K}$, для любого базиса $(\tilde e_j\colon\ j)$ в $M_\mu$ плотность $\tilde\rho$ удовлетворяет следующим условиям:*

*(1) если $\tilde\rho(a_j, x)$, $j = 1, \ldots, N$, определены для заданного $x \in X$ и для любых $\lambda_j \in \mathbf{K}$ функция $\tilde\rho\Bigl(\sum\limits_{j=1}^n \lambda_j a_j, x\Bigr)$ непрерывна по $\lambda_j$, $j = 1, \ldots, N$;*

(2) *существует возрастающая последовательность подпространств* $H(n) \subset \subset M_\mu$, $\mathrm{cl}\Big(\bigcup_n H(n)\Big) = X$, *с проекторами* $P_n\colon X \to H(n)$, $B \in \mathrm{Bco}(X)$, $\|B\|_\mu = 0$, *такими что* $\lim_{n\to\infty} \tilde\rho(P_n a, x) = \tilde\rho(a, x)$ *для всех* $a \in M_\mu$ *и* $x \notin B$, *для которых определено* $\rho(a, x)$. *Тогда* $\rho(a, x)$ *регулярно зависит от базиса.*

**Доказательство.** Существует подмножество $S$ плотное в каждом $H(n)$, тогда $\|B'\|_\mu = 0$ для $B' = \bigcup_{a\in S} [x\colon\ \rho(a, x) \neq \tilde\rho(a, x)]$. Из (1) следует, что $\tilde\rho(a, x) = \rho(a, x)$ на каждом $H(n)$ для $x \notin B'$. Из $\mathrm{sp}_{\mathbf{K}} S \supset H(n)$ и (2) следует, что $\rho(a, x) = \tilde\rho(a, x)$ для любых $a \in M_\mu$ и $x \in X \setminus (B' \cup B)$, поэтому выполняется условие 3.16(ii), так как из $\rho(a, x) \in L(\mu)$ вытекает, что $\tilde\rho(a, x) \in L(\mu)$ как функция от $x$.

**3.18. Лемма.** *Если вероятностная квазиинвариантная мера* $\mu\colon \mathrm{Bco}(X) \to \mathbf{K}_s$ *удовлетворяет условию* 3.16(i), *то существует компактный оператор* $T\colon X \to X$, *такой что* $M_\mu \subset (TX)^\sim$, *где* $X$ — *банахово пространство над* $\mathbf{K}$.

**Доказательство.** Произведения плотных мер являются плотными мерами в силу теоремы 7.28 из [34], поэтому для $\mu_{H(n)}(dx) = \bigotimes_{j=1}^{m(n)} \mu_{\mathbf{K}e(j)}(dx_j)$ выполняется $N_{\mu_{H(n)}}(x) = \prod_{j=1}^{m(n)} N_{\mu_{\mathbf{K}e(j)}}(x_j)$, где $x = (x_1, \dots, x_{m(n)})$, $x_j \in \mathbf{K}$. Из теоремы 7.6 из [34] и леммы 2.16.1 следует, что для любого $1 > c > 0$ существуют $R_j = R_j(c)$ с $[x_j\colon\ N_{\mu_{\mathbf{K}e(j)}}(x_j) \geqslant c] \subset B(\mathbf{K}, 0, R_j)$ и $\lim_{j\to\infty} R_j = 0$. Выбирая $c = c(n) = s^{-n}$, $n \in \mathbf{N}$, и используя $\prod_{j=1}^{\infty} = \varepsilon_j = 0$ для $0 < \varepsilon_j < < c < 1$, убеждаемся, что существует последовательность $[r_j\colon\ j]$, для которой $\mathrm{card}[j\colon\ |a_j| > r_j] < \aleph_0$ для любого $a \in M_\mu$, так как $[x \in X\colon |x_j| \leqslant r_j$ для всех $j]$ — компактная аддитивная подгруппа в $X$, где $a = (a_j\colon\ j)$, $a_j \in \mathbf{K}$, $r_j > 0$, $\lim_j r_j = 0$. Поэтому $M_\mu \subset (TX)^\sim$ для $T = \mathrm{diag}(T_j\colon\ j)$ и $|T_j| \geqslant r_j$ для любых $j \in \mathbf{N}$.

**3.19.** Пусть $X$ — банахово пространство над $\mathbf{K}$, $|{*}|_{\mathbf{K}} = \mathrm{mod}_{\mathbf{K}}(*)$, $U\colon X \to X$ — обратимый линейный оператор, $\mu\colon \mathrm{Bco}(X) \to \mathbf{K}_s$ — вероятностная квазиинвариантная мера.

Равномерная сходимость направленности функций на $\mathrm{Af}(V, \nu)$-компактных подмножествах топологического пространства $V$ называется условием Егорова, где $\nu$ — мера на $V$.

**Теорема.** *Пусть пары* $(x - Ux, x)$ *и* $(x - U^{-1}, x)$ *принадлежат* $\mathrm{dom}(\tilde\rho(a, x)$, *здесь* $\mathrm{dom}(f)$ *обозначает область определения функции* $f$, $\tilde\rho(x - Ux, x) \neq 0$, $\tilde\rho(x - U^{-1}x, x) \neq 0 \pmod{\mu}$ *и* $\mu$ *удовлетворяет условию* 3.16(i), *также* $\tilde\rho(\tilde P_n(x - Ux), x) =: \tilde\rho_n(x) \in L(\mu)$ *и* $\tilde\rho(\tilde P_n(x - U^{-1}x, x) =: \bar\rho(x) \in L(\mu)$ *сходятся равномерно на* $\mathrm{Af}(X, \mu)$*-компактных подмножествах в* $X$, *причём существует* $g \in L(\mu)$ *с* $|\tilde\rho_n(x)| \leqslant |g(x)|$ *и* $|\bar\rho_n(x)| \leqslant |g(x)|$ *для любых* $x \in X$ *и любых проек-*

*торов* $\tilde{P}_n X \to \tilde{H}(n)$ *с* $\mathrm{cl}\Big(\bigcup_n \tilde{H}(n)\Big) = X$, $\tilde{H}(n) \subset \tilde{H}(n+1) \subset \ldots$, *то есть* $\tilde{\rho}_n$ *и* $\bar{\rho}_n$ *удовлетворяют условию Егорова. Тогда* $\nu \sim \mu$ *и*

$$\nu(dx)/\mu(dx) = |\det(U)|_{\mathbf{K}}\tilde{\rho}(x - U^{-1}x, x), \tag{i}$$

*если* $\rho$ *регулярно зависит от базиса, то* $\tilde{\rho}$ *можно заменить на* $\rho$ *в формуле* (i), *где* $\nu(A) := \mu(U^{-1}A)$ *для любых* $A \in \mathrm{Bco}(X)$.

**Доказательство.** В силу леммы 3.18 существует компактный оператор $T\colon X \to X$, такой что $M_\mu \subset (TX)^\sim$, поэтому $(U - I)$ — компактный оператор, где $I$ — единичный оператор. Из обратимости $U$ следует, что $(U^{-1} - I)$ тоже компактен, причём существует $\det(U) \in \mathbf{K}$. Пусть $g$ — непрерывная ограниченная функция, $g\colon \tilde{H}(n) \to \mathbf{K}_s$, тогда

$$\int\limits_X \phi(x)\nu(dx) = \int\limits_{\tilde{H}(n)} g(x)[f_{H(n)}(U^{-1}x)/f_{\tilde{H}(n)}(x)]|\det(U_n)|_{\mathbf{K}}\mu_{\tilde{H}(n)}(dx)$$

для $\phi(x) = g(\tilde{P}_n x)$, где существуют подпространства $\tilde{H}(n) \subset X$, $(U^{-1} - I)\tilde{H}(n) \subset \subset \tilde{H}(n)$, $\mathrm{cl}\Big(\bigcup_n \tilde{H}(n)\Big) = X$, $U_n := \hat{r}_n(U)$, $r_n = \tilde{P}_n\colon\ X \to \tilde{H}(n)$ (см. п. 3.8 и 3.16), $\tilde{H}(n) \subset \tilde{H}(n+1) \subset \ldots$ в силу компактности $(U - I)$. Тогда в силу теоремы Лебега благодаря выполнению условий Егорова для $\tilde{\rho}_n$ и $\bar{\rho}_n$, см. [32, § 7.6] или [34, 7.F], $J_m = J_{m,\rho}$, так как $\tilde{\rho}(x - U^{-1}x, x) \in L(\mu)$, где $J_m := \int\limits_X g(\tilde{P}_m x)\nu(dx)$, а $J_{m,\rho} := \int\limits_X g(\tilde{P}_m x)\tilde{\rho}(x - U^{-1}x, x)|\det(U)|_{\mathbf{K}}\mu(dx)$. Действительно, существует $n_0$, такое что $|u(i,j) - \delta_{i,j}| \leqslant 1/p$ для любых $i, j > n_0$, следовательно, $|\det(U_n)|_{\mathbf{K}} = |\det(U)|_{\mathbf{K}}$ для любых $n > n_0$. Тогда в силу условия 3.16(i) и условий Егорова (см. также п. 3.3) существует $\lim\limits_{n\to\infty}[\mu_{\tilde{H}(n)}(d\tilde{P}_n x)/\nu_{\tilde{H}(n)}(d\tilde{P}_n x)] = \mu(dx)/\nu(dx) \pmod{\nu}$. Далее аналогично доказательствам теорем 1 и 2 из [38, § 25].

**3.20.** Пусть $X$ — банахово пространство над $\mathbf{K}$, $|*|_{\mathbf{K}} = \mathrm{mod}_{\mathbf{K}}(*)$ с вероятностной квазиинвариантной мерой $\mu\colon \mathrm{Bco}(X) \to \mathbf{K}_s$ и выполняется условие 3.16(i), а оператор $U$ удовлетворяет следующим условиям:

(i) $U(x), U^{-1}(x) \in C^1(X, X)$ (см. п. A.3);

(ii) $(U'(x) - I)$ компактен для любых $x \in X$;

(iii) $(x - U^{-1}(x))$ и $(x - U(x)) \in J_\mu$ для $\mu$-почти всех $x \in X$;

(iv) для $\mu$-почти всех $x$ пары $(x - U(x); x)$ и $(x - U^{-1}(x); x)$ содержатся в области определения $\rho(z, x)$, причём $\rho(x - U^{-1}(x), x) \neq 0$, $\rho(x - U(x), x) \neq 0$ $(\mathrm{mod}\ \mu)$;

(v) $\|X \setminus S'\|_\mu = 0$, здесь $S' := ([x\colon\ \rho(z,x)$ определена для $z \in L$ и непрерывна по $z \in L])$ для любого конечномерного над $\mathbf{K}$ подпространства $L \subset J_\mu$;

(vi) существует $S$ с $\|S\|_\mu = 0$ и для любого $x \in X \setminus S$ и любого $z$, для которого существует $\rho(z, x)$, выполнено условие $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(P_n z, x) = \rho(z, x)$ и сходимость равномерна для любого конечномерного $L \subset J_\mu$ по $z$ в $L \cap [x \in J_\mu\colon\ |x| \leqslant c]$, где $c > 0$, $P_n\colon X \to H(n)$ — проекторы на конечномерные подпространства $H(n)$ над $\mathbf{K}$, такие что $H(n) \subset H(n+1)$ для любого $n \in \mathbf{N}$ и $\mathrm{cl} \cup \{H(n)\colon\ n\} = X$;

(vii) существует $n$, для которого при всех $j > n$ и $x \in X$ отображения $V(j,x) := x + P_j(U^{-1}(x) - x)$ и $U(j,x) := x + P_j(U(x) - x)$ обратимы и $\lim_j |\det U'(j,x)| = |\det U'(x)|$, $\lim_j |\det V'(j,x)| = 1/|\det U'(x)|$ со сходимостью по Егорову в (vi) по $z$ для $\rho(P_n z, x)$, а в (vii) по $x$ для $|\det U'(j,x)|$ и $|\det V'(j,x)|$ для $\mu$ со значениями в $\mathbf{K}_s$.

**Теорема.** *Мера* $\nu(A) := \mu(U^{-1}(A))$ *эквивалентна* $\mu$ *и*

$$\nu(dx)/\mu(dx) = |\det U'(U^{-1}(x))|_{\mathbf{K}}\rho(x - U^{-1}(x), x). \tag{i}$$

**Доказательство.**

I. Пусть сначала $U$ линеен. В общем случае для линейного оператора $U$ с компактным $B = U - I$ имеется разложение $U = SCDE$, где $C^t$ и $E$ — верхние треугольные бесконечные матрицы, $D = \mathrm{diag}\{d(j)\colon\ j \in \mathbf{N}\}$, а $C - I$, $D - I$ и $E - I$ — компактные операторы в некотором ортонормированном базисе $\{e_j\colon\ j\}$ в $X$ (см. п. A.2). При этом существуют $\det(C) = \det(E) = 1$, $\det(U) = \det(D) \neq 0$.

II. Пусть $V_n$ — диагональный (или нижний, или верхний треугольный) оператор на $X$, такой что $(V_n - I)(X) = P_n L$, где $\dim_{\mathbf{K}} L = k < \aleph_0$, $\lim_{n\to\infty} \|V_n - U_1\| = 0$, $U_1$ — диагональный (или нижний, или верхний треугольный) оператор, существует $n_0$, такое что $\|e_j - P_n e_j\| \leqslant 1/p$ для ортонормированного базиса $(e_j)$ в $L$, следовательно, $\Bigl\|\sum_j \lambda_j P_n e_j\Bigr\| = \max_j |\lambda_j|$ при $\lambda_j \in \mathbf{K}$ и $\dim_{\mathbf{K}} P_n L = k$ при $n > n_0$, при этом $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in L,\ \|x\|\leqslant 1} \|x - P_n x\| = 0$. Тогда $\lim_n \tilde{P}_n^{-1}(x - V_n^{-1}x) = x - U_1^{-1}x$, где $\tilde{P}_n x = P_n x \in P_n L$ для любого $x \in L$. По (vi), (vii) получим $\lim_n \rho(x - V_n^{-1}x, x) = \rho(x - U_1^{-1}x, x)$ в $L(\mu)$ в силу условий Егорова. Тогда $J_1 = J_{1,\rho}$ в силу теоремы сходимости Лебега, где $J_1 = \int_X f(U_1 x)\mu(dx)$, $J_{1,\rho} := \int_X f(x)\rho(x - U_1^{-1}x, x)|\det U_1|_{\mathbf{K}}\mu(dx)$ для непрерывной ограниченной $f\colon X \to \mathbf{K}_s$. Аналогично для $U_1^{-1}$ вместо $U_1$. Используя также вместо $f$ функцию $\bar{\Phi}(U_1^{-1}x) := f(x)\rho_\mu(x - U_1^{-1}x, x)$ и свойства 3.10, получим, что $\rho_\mu(U_1 x - x, U_1 x)\rho_\mu(x - U_1 x, x) = 1 \pmod{\mu}$. Поэтому для $U = SU_2U_1U_3$, здесь $U_1$ — диагональный, а $U_2$ — нижний и $U_3$ — верхний треугольный операторы с конечномерными над $\mathbf{K}$ пространствами $(U_j - I)X$, $j = 1,2,3$, выполняется равенство $\int_X f(Ux)\mu(dx) = \int_X f(x)\rho_\mu(x - U^{-1}x, x)|\det U|_{\mathbf{K}}\mu(dx)$. Если $(U - I)X = L$ (или $(U^{-1} - I)X = L$), то для разложения, приведённого в (I), $U = SU_2U_1U_3$, $(U_j - I)X = L$ (или $(U_j^{-1} - I)X = L$ соответственно), $j = 1,2,3$, в силу формул из п. A.1, так как соответствующие неглавные миноры равны нулю.

III. Если $U$ — произвольный линейный оператор, удовлетворяющий условиям теоремы, то из (iv)—(vi) и I, II для любой непрерывной ограниченной $f\colon X \to \mathbf{K}_s$ выполняется $J = J_\rho$, где $J := \int_X f(U(x))\mu(dx)$ и

$J_\rho := \int\limits_X f(x)\rho_\mu(x - U^{-1}(x),x)|\det U|_{\mathbf{K}}\mu(dx)$, аналогично для $U^{-1}$, причём $\rho(x-U^{-1}(x),x)|\det U|_{\mathbf{K}} =: h(x) \in L(\mu)$, $h(x) \neq 0 \pmod{\mu}$, так как существует $\det U$.

IV. Пусть теперь $U$ нелинеен, а $(U-I)(X) = L$, $\dim_{\mathbf{K}} L = k < \aleph_0$, $L \subset J_\mu$. Пусть отображение $U$ полигонально, то есть существует разбиение $X = \bigcup\{Y(i)\colon\ i = 1,\ldots,l\}$, $U(x) = a(i) + V(i)x$ для $x \in Y(i)$, где $Y(i)$ — замкнутые подмножества, $\mathrm{Int}Y(i) \cap \mathrm{Int}Y(j) = \varnothing$ для любых $i \neq j$, $a(i) \in X$ и $V(i)$ — линейные операторы. Тогда $U^{-1}$ тоже полигонален, $U'(x) = V(j)$ для $x \in Y(j)$ и $\int\limits_X f(a(i)+V(i)x)\mu(dx) = \int f(a(i)+x)\rho_\mu(x - V^{-1}(i)x,x) \times |\det(V(i))|_{\mathbf{K}}\mu(dx)$ для любой непрерывной ограниченной $f\colon X \to \mathbf{K}_s$ и каждого $i$. Из $a(j) \in M_\mu$ и п. 3.10 получим $\int\limits_X f(a(j)+V(j)x)\mu(dx) = \int\limits_X f(x)\rho(x - V(j)^{-1}(x-a(j)),x)|\det V(j)|_{\mathbf{K}}\mu(dx)$. Пусть $H_{k,j} := [x \in X\colon\ V(k)^{-1}x = V(j)^{-1}x]$, можно полагать $V(k) \neq V(j)$ или $a(k) \neq a(j)$ при $k \neq j$, так как $Y(k) \neq Y(j)$ (иначе можно было бы их объединить). Поэтому $H_{k,j} \neq X$. Если бы $\|H_{k,j}\|_\mu > 0$, то из $X \ominus H_{k,j} \supset \mathbf{K}$ следует $M_\mu \subset H_{k,j}$, но $\mathrm{cl}(H_{k,j}) = H_{k,j}$, а $\mathrm{cl}(M_\mu) = X$, это противоречие означает, что $\|A\|_\mu = 0$, где $A = [x\colon\ V(k)^{-1}(x-a(k)) = V(j)^{-1}(x-a(j))]$. Тогда $\int\limits_X f(U(x))\mu(dx) = \int\limits_X f(x)\rho(x - U^{-1}(x),x)|\det U'(x)|^{-1}_{\mathbf{K}}\mu(dx)$.

По теореме Хана—Банаха для $\mathbf{K}$ [33, 34] имеются линейные непрерывные функционалы $\tilde{e}_j$, такие что для некоторого ортонормированного базиса $(e_j\colon\ j)$ в $X$ $\tilde{e}_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Пусть $s(i,j;x) := \tilde{e}_i(U(j,x) - x)$ и $s(i;x) = \tilde{e}_i(U(x)-x) = \lim\limits_j s(i,j;x)$ (предел берётся в $C^1(X \to \mathbf{K})$), следовательно, $\det U'(j,x) = \det(ds(i,j;x)e(k)\colon\ i,k = 1,\ldots,j)$. Тогда для построения последовательности $\{U(j,*)\}$ достаточно построить последовательность полигональных функций $\{a(i,j;x)\}$, то есть $a(i,j;x) = l_k(i,j)(x) + a_k$ при $x \in Y(k)$, где $l_k(i,j)$ — линейные функционалы, а $a_k \in \mathbf{K}$, $Y(k)$ замкнуты в $X$, $\mathrm{Int}(Y(j)) \cap \mathrm{Int}(Y(k)) = \varnothing$ при $k \neq j$, $\bigcup\limits_{k=1}^m Y(k) = X$, $m < \aleph_0$. Для любого $c > 0$ существует компакт $V_c \subset X$ с $\|X \setminus V_c\| < c$, функции $s(i,j;x)$ и $(\Phi^1 s(ij;*))(x,e(k),t)$ равномерно по $x \in V_c$ и равностепенно по $i,j,k \in \mathbf{N}$ непрерывны на $V_c$. Выбирая $c = c(n) = s^{-n}$ и используя $\delta$-сети на $V_c$, получим последовательность полигональных отображений $(W_n\colon\ n)$, сходящуюся своими матричными элементами по Егорову в $L(X,\mu,\mathbf{K}_s)$, из условия (i) следует, что она может быть выбрана равностепенной для матричных элементов $s(i,j;x)$, $ds(i,j;x)$ и $s(i,P_jx)$ по $i$, $j$ (тоже для $U^{-1}$).

Действительно, для $V_c$ существует $\delta > 0$, такое что $|s(i,j;x') - s(i,j;x)| < c$ и $|(\bar{\Phi}^1 s(i,j;*))(x,e(k),t) - (\bar{\Phi}^1 s(i,j;*))(x',e(k),t')| < c$ для любых $x,x' \in V_c$ с $|x-x'| < \delta$, $|t-t'| \leqslant 1$ и $i,j,k \in \mathbf{N}$. Тогда можно выбрать в $V_c$ конечную $\delta$-сеть $x_1,\ldots,x_r$, задать $l_q(i,j;x) = s(i,j;x_q) + (ds(i,j;x_q))(x-x_q)$ и применить неархимедову теорему Тейлора (см. п. A.5).

Тогда, вычисляя интегралы, как и выше для $W_n$, с функциями $f$, используя теорему сходимости Лебега, получим равенства, аналогичные выписанным в III для $J$ и $J_\rho$, общего вида. Из $\nu(dx)/\mu(dx) \neq 0 \,(\mathrm{mod}\, \mu)$ и п. 2.19 получим утверждение теоремы, так как $\int_X f(A(j,x))\mu(dx) = \int_X f(x)\rho_\mu(P_j(x-A(x)),x)|\det(A(j,x)')|_{\mathbf{K}}^{-1}\mu(dx)$, где $A = U$, $A(j,x) = U(j,x)$ или $A = U^{-1}$, $A(j,x) = V(j,x)$.

**3.21. Примеры.** Пусть $X$ — банахово пространство над $\mathbf{K}$ с группой нормирований $\Gamma_{\mathbf{K}} = \Gamma_{\mathbf{Q}_p}$. Рассмотрим диагональный компактный оператор $T = \mathrm{diag}(\xi_j\colon\ j \in \mathbf{N})$ в некотором ортонормированном базисе $(e_j\colon\ j)$ в $X$, такой что $\ker T := T^{-1}0 = 0$. Положим

$$\nu_j'(dx_j) = C'(\xi_j)s^{-q\min(0,\mathrm{ord}_p((x_j-x_j^0)/\xi_j))}v(dx_j)$$

для меры Хаара $v\colon \mathrm{Bco}(\mathbf{K}) \to \mathbf{Q}_s$, тогда $\nu_j'(\mathrm{Bco}(\mathbf{K})) \subset \mathbf{C}_s$. Выберем постоянную $C'(\xi_j)$ так, чтобы $\nu_j'$ была вероятностной мерой, где $x^0 = (x_j^0\colon\ j) \in X$, $x = (x_j\colon\ j) \in X$, $x_j \in \mathbf{K}$.

С помощью произведений $\bigotimes_j \nu_j'(dx_j)$, как и в п. 3.15, можно построить вероятностную квазиинвариантную меру $\mu^T$ на $X$ со значениями в $\mathbf{C}_s$, так как $\mathrm{cl}(TX)$ компактно в $X$ и $\mathrm{sp}_{\mathbf{K}}(e_j\colon\ j) =: H \subset J_\mu$. Из $\bigcap_{\lambda\in B(\mathbf{K},0,1)\setminus 0} \mathrm{cl}(\lambda TX) = \{0\}$ можно легко получить, что для любого $c > 0$ существует компакт $V_c(\lambda) \subset X$, такой что $\|X \setminus V_c(\lambda)\|_\mu < c$, причём $\bigcap_{\lambda\neq 0} V_c(\lambda) = \{0\}$, следовательно, $\lim_{|\lambda|\to 0}\int_X f(x)\mu^{\lambda T}(dx) = f(0) = \delta_0(f)$, то есть $\mu^{\lambda T}$ слабо сходится к $\delta_0$ при $|\lambda| \to 0$ в пространстве непрерывных ограниченных функций $f\colon X \to \mathbf{C}_s$.

По теореме 3.6 заключаем, что из $\sum_{j=1}^{\infty} |y_j/\xi_j|_p^q < \infty$ следует $y \in J_{\mu^T}$. Тогда для линейного преобразования $U\colon X \to X$ из $\sum_j |\tilde{e}_j(x-U(x))/\xi_j|_p^q < \infty$ следует, что $x - U(x) \in J_\mu$ и пара $(x-U(x),x) \in \mathrm{dom}(\rho(a,z))$. Более того, для $\rho$, соответствующего $\mu^T$, условия (v) и (vi) в п. 3.20 выполнены. Поэтому для таких $y$ и $S \in \mathrm{Af}(X,\mu)$ величина $|\mu(ty+S)-\mu(S)|$ имеет порядок малости $|t|^q$ при $t \to 0$, следовательно, они псевдодифференцируемы порядка $b$ для $0 < \mathrm{Re}(b) < q$ (см. также § 4 ниже).

Интересно также обсудить путь решения одной проблемы, сформулированной в [19], о том, что не существует $\sigma$-аддитивной $\mathbf{Q}_p$-значной меры на банаховом пространстве $X$ над $\mathbf{Q}_p$, такой чтобы она была бы аналогом классической гауссовой меры. В классическом случае это, в частности, означает квазиинвариантность меры относительно сдвигов на векторы из плотного подпространства. Покажем, что на банаховом пространстве $X$ над $\mathbf{K} \supset \mathbf{Q}_p$ ни для какого простого числа $p$ не существует $\sigma$-аддитивной $\mu \neq 0$ со значениями в $\mathbf{K}_p$, такой чтобы она была квазиинвариантна относительно сдвигов из плотного подпространства. Детали можно легко извлечь из результатов, данных выше. Пусть на $(X, \mathrm{Bco}(X))$

существует такая $\mu$. С помощью подходящих компактных операторов цилиндрическая мера на алгебре цилиндрических подмножеств $X$ порождает квазиинвариантные меры, поэтому можно выбрать $\mu$ квазиинвариантной. Тогда она порождает последовательность конечномерного распределения $\{\mu_{L_n}\colon\ n \in \mathbf{N}\}$ аналогично § 2 и § 3, где $L_n$ — подпространства $X$ с размерностью над $\mathbf{K}$, равной $n$. Каждая мера $\mu_{L_n}$ является $\sigma$-аддитивной. Из квазиинвариантности $\mu$ следует, что $L_n$ может быть выбрано так, чтобы $\mu_{L_n}$ были квазиинвариантны относительно всего $L_n$. Но по [34, главы 7—9] и [35] для мер со значениями в $\mathbf{K}_p$ (см. также предложение 11 из § VII.1.9 в [5]) это означает, что $\mu_{L_n}$ эквивалентна мере Хаара на $L_n$ со значениями в $\mathbf{K}_p$. Пространство $L_n$ как аддитивную группу можно рассматривать над $\mathbf{Q}_p$, более того, для любого непрерывного линейного функционала $\phi$: $\mathbf{K}_p \to \mathbf{Q}_p$ на $\mathbf{K}_p$, рассматриваемом как конечномерное банахово пространство над $\mathbf{Q}_p$, мера $\phi \circ \mu_{L_n}(*)$ нетривиальна для некоторого $\phi$. Следовательно, на $L_n$ существовала бы мера Хаара со значениями в $\mathbf{Q}_p$, но это невозможно [34, глава 9], так как $L_n$ не является $p$-свободной группой. Мы получаем противоречие, то есть такой ненулевой меры $\mu$ не существует.

# § 4. Псевдодифференцируемые меры

**4.1. Определение.** Функция $f\colon \mathbf{K} \to \mathbf{\Lambda}_s$ называется псевдодифференцируемой порядка $b$, если существует интеграл $\mathrm{PD}(b, f(x)) := \int_{\mathbf{K}} [(f(x) - f(y)) \times g(x,y,b)]dv(y)$. Введём обозначение $\mathrm{PD}_c(b, f(x))$ для такого интеграла по $B(\mathbf{K}, 0, 1)$ вместо всего $\mathbf{K}$. Здесь $g(x,y,b) := s^{(-1-b)\times \mathrm{ord}_p(x-y)}$ с соответствующей мерой Хаара $v$ со значениями в $\mathbf{K}_s$, где $b \in \mathbf{C}_s$ и $|x|_{\mathbf{K}} = p^{-\mathrm{ord}_p(x)}$, $\mathbf{C}_p$ обозначает поле комплексных чисел с неархимедовым нормированием, продолжающим неархимедово нормирование поля $\mathbf{Q}_p$, $\mathbf{\Lambda}_p$ — сферически полное поле с группой нормирований $\{|x|\colon\ 0 \ne x \in \mathbf{\Lambda}_p\} = (0, \infty) \subset \mathbf{R}$, такой что $\mathbf{C}_p \subset \mathbf{\Lambda}_p$ [34, 35, 44].

Квазиинвариантная мера $\mu$ на $X$ называется псевдодифференцируемой для $b \in \mathbf{C}$, если существует $\mathrm{PD}(b, g(x))$ для $g(x) := \mu(-xz+S)$ при любом $S \in \mathrm{Bco}(X)$ с $\|S\|_\mu < \infty$ и любом $z \in J^b_\mu$, где $J^b_\mu$ — это $\mathbf{K}$-линейное подпространство, плотное в $X$, а для фиксированного $z \in X$ называется псевдодифференцируемой вдоль $z$.

Для однопараметрического семейства операторов $B(\mathbf{K}, 0, 1) \ni t \mapsto U_t\colon X \to X$ квазиинвариантная мера $\mu$ называется псевдодифференцируемой для $b \in \mathbf{C}_s$, если для любого $S$, такого же, как и выше, для функции $g(t) := \mu(U_t^{-1}(S)$ существует $\mathrm{PD}_c(b, g(t))$, где $X$ также может быть топологической группой с мерой квазиинвариантной относительно плотной подгруппы $G'$ (см. [22, 23, 26]).

**4.2.** Пусть $\mu$, $X$ и $\rho$ такие же, как в теореме 3.15, а $F$ обозначает неархимедово преобразование Фурье, определённое в [34].

**Теорема.**

(1) $g(t) := \rho(z+tw, x)j(t) \in L(\mathbf{K}, v, \mathbf{K}_s) =: V$ *для* $\mu$ *и меры Хаара* $v$ *со значениями в* $K_s$, *где* $z, w \in J_\mu$, $t \in \mathbf{K}$, $j(t)$ — *характеристическая функция компактного подмножества* $W \subset \mathbf{K}$. *В общем случае могут быть* $k(t) := \rho(z + tw, x) \notin V$.

(2) *Пусть* $g(t) = \rho(z + tw, x)j(t)$ *с открыто-замкнутым подмножеством* $W$ *в* $\mathbf{K}$. *Тогда имеются* $\mu$, *для которых существует* $\mathrm{PD}(b, g(t))$ *для любого* $b \in \mathbf{C}_s$. *Если* $g(t) = \rho(z + tw, x)$, *тогда имеются вероятностные меры* $\mu$, *для которых существует* $\mathrm{PD}(b, g(t))$ *для любого* $b \in \mathbf{C}_s$ *с* $0 < \mathrm{Re}(b)$ *или* $b = 0$.

(3) *Пусть* $S \in \mathrm{Af}(X, y)$, $\|S\|_\mu < \infty$, *тогда существует псевдодифференцируемая квазиинвариантная мера* $\mu$ *любого порядка* $b$ *из следующего множества* $b \in U := \{b\colon \mathrm{Re}\, b > 0$ *или* $b = 0\}$.

**Доказательство.** Рассмотрим следующую аддитивную компактную подгруппу $G_T := \{x \in X \mid \|x(j)\| \leqslant p^{k(j)}$ для любого $j \in \mathbf{N}\}$ в $X$, где $T = \mathrm{diag}\{d(j) \in \mathbf{K}\colon\ |d(j)| = p^{-k(j)}$ для любого $j \in \mathbf{N}\}$ — компактный диагональный оператор. Тогда $\mu$ из теоремы 3.15 квазиинвариантна относительно аддитивной подгруппы $S_T := G_T + H$, где $H := \mathrm{sp}_{\mathbf{K}}\{e(j)\colon\ j \in \mathbf{N}\}$, причём для любых $z, w \in G_T$ и $R > 0$ существует $c > 0$, такое что $\rho(z+uw, x) = \rho(z+sw, x)$ при $|u - s| < c$ и $x \in B(X, 0, R)$, если все функции $f_j$ в доказательстве теоремы 3.15 локально постоянны (то есть $f$ определены на $\mathbf{K}e_j \subset X$). В общем случае для данного $b \in \mathbf{C}_s$ можно выбрать последовательность $h_j(x)$ с $\sum_{j=0}^{\infty} \sup_{x\in\mathbf{K}} (|h_j(x)/(h_j(x) + f_j(x))|r_j(x)) < c'$ для некоторого фиксированного $c' > 0$ и функций $r_j\colon \mathbf{K} \to [0, \infty)$ с $\lim_{|x|\to 0} r_j(x) = \infty$. Выполняя вычисления с учётом того, что $\mu$ — вероятностная квазиинвариантная мера, получим псевдодифференцируемость $\mu$.

**4.3.** Пусть $X$ — банахово пространство над $\mathbf{K}$, $b_0 \in \mathbf{R}$ или $b_0 = +\infty$ и выполнены следующие условия:

(1) $T\colon X \to X$ — компактный оператор с $\ker(T) = \{0\}$;

(2) задано отображение $F\colon B(\mathbf{K}, 0, 1) \to C_T(X) := \{U\colon\ U \in C^1(X, X)$, $(U'(x) - I)$ — компактный оператор для любого $x \in X$, существует $U^{-1}$, удовлетворяющий тем же условиям, что и $U\}$;

(3) $\tilde{F}(t) = U_t(x)$ и $\Phi^1 U_t(x+h, x)$ непрерывны по $t$, то есть $\tilde{F} \in C^1(B(\mathbf{K}, 0, 1), C_T(X))$;

(4) существует $c > 0$, такое что $\|U_t(x) - U_s(x)\| \leqslant \|Tx\|$ для любых $x \in X$ и $|t - s| < c$;

(5) для любого $R > 0$ существуют конечномерное над $\mathbf{K}$ подпространство $H \subset X$ и $c' > 0$, такое что $\|U_t(x) - U_s(x)\| \leqslant \|Tx\|/R$ для любых $x \in X \ominus H$ и $|t - s| < c'$ с выполнением (3)—(5) также для $U_t^{-1}$.

**Теорема.** *На* $X$ *существуют вероятностные квазиинвариантные, псевдодифференцируемые для любого* $b \in \mathbf{C}_s$ *с* $\mathbf{R} \ni \mathrm{Re}(b) \leqslant b_0$ *относительно семейства* $U_t$ *меры* $\mu$ *со значениями в* $\mathbf{K}_s$.

**Доказательство.** Из условий (2), (3) следует, что существует $c > 0$, такое что $|\det(U_t'(x))| = |\det(U_s'(x))|$ при $\mu$-почти всех $x \in X$ и всех $|t - s| < c$, где квазиинвариантные и псевдодифференцируемые на $X$ относительно $S_T$ меры $\mu$ могут быть заданы, как в доказательствах теорем 3.15 и 4.2. Из (1)—(5) следует, что выполнены условия теоремы 3.20 для всех $U_t$. Из (3), (5) следует, что для любого $R > 0$ и $b > 0$ существует $c' > 0$, такое что $|\rho_\mu(x - U_t^{-1}(x), x) - \rho_\mu(x - U_t^{-1}(x), x)| \leqslant b$ для любых $|t - s| < c'$ и $x \in B(X, 0, R)$. Если при построении $\mu$ использовать лишь локально постоянные $f_j(x_j)$ с $h_j = 0$, то можно взять $\infty \geqslant b_0 \geqslant 0$. Действительно, пусть $T = CDE$ — разложение из приложения и $\mu^A(S) = \mu(CS)$ с $A = E^{-1}$ (или $C$), тогда $\rho_{\mu^A}(x - U_t^{-1}(x), x) = \rho_\mu(Ex - U_t^{-1}(Ex), Ex)$ и $c(x) := \|U_t^{-1}(Ex) - U_s^{-1}(Ex)\| \leqslant \|TEx\|$ при $x \in X$ и $c(x) \leqslant \|TEx\|/R$ при $x \in X \ominus H$ (для любого $R > 0$ существует $H \subset X$ с $\dim_{\mathbf{K}} H < \infty$), в силу компактности $E - I$ и $C - I$ можно выбрать $H$ так, чтобы $A^{-1}H = H$, $AH = H$. Используем при этом образы квазиинвариантной меры, построенные с помощью компактного диагонального оператора $(D' - I)$, где $|D_j - 1| < |D'_j - 1|p^{k(j)}$, $\lim\limits_j k(j) = -\infty$. Тогда $\sup\{\|U_t(x) - U_t(0)\| : x \in B(X, 0, R)\} \leqslant \|\bar{\Phi}^1 U_t\|_{B(X,0,R)} \times \|x\|$. Из конечномерности $H$ и существования ортогонального проектора $\pi_H : X \to H$ (то есть соответствующего разложению в прямую сумму) следует, что $\|U_t^a(e_j) - U_s^a(e_j)\| \leqslant b_j$ при любом $j \in \mathbf{N}$ и любых $|t - s| < c'$, где $\lim\limits_{j\to\infty} b_j = 0$, $a = 1$ или $a = -1$. Это гарантирует псевдодифференцируемость $\mu$.

**4.4.** Пусть $X$ — банахово пространство над $\mathbf{K}$, $\mu$ — вероятностная квазиинвариантная мера $\mu\colon \mathrm{Bco}(X) \to \mathbf{K}_s$, псевдодифференцируемая для данного $b$ с $\mathrm{Re}(b) > 0$, $C_b(X)$ — пространство непрерывных ограниченных функций $f\colon X \to \mathbf{K}_s$ с $\|f\| := \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$.

**Теорема.** *Для любых $a \in J_\mu$ и $f \in C_b(X)$ определён интеграл*

$$l(f) = \int\limits_{\mathbf{K}} \int\limits_X f(x)[\mu(-\lambda a + dx) - \mu(dx)] g(\lambda, 0, b) v(d\lambda) \tag{i}$$

*и существует мера $\nu\colon \mathrm{Bco}(X) \to \mathbf{C}_s$ с ограниченной вариацией (для $b \in \mathbf{R}$ эта $\nu$ является мерой из $\mathrm{Bco}(X)$ в $\mathbf{K}_s$), такая что*

$$l(f) = \int\limits_X f(x)\nu(dx), \tag{ii}$$

*где $v$ — мера Хаара на $\mathbf{K}$ со значениями в $\mathbf{Q}_s$, более того, $\nu$ не зависит от $f$ и может зависеть от $a \in J_\mu$. Она обозначается $\nu =: \tilde{D}_a^b \mu$.*

**Доказательство.** Из определения 4.1 в силу теоремы Лебега следует, что существует

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbf{K}\setminus B(\mathbf{K},0,p^{-j})} \left[\int\limits_X (f(x + \lambda a) - f(x)) g(\lambda, 0, b)\mu(dx)\right] v(d\lambda) = l(f),$$

то есть существует (i). Пусть

$$l_j(V, f) := \int\limits_{\mathbf{K}\setminus B(\mathbf{K},0,p^{-j})} \left[\int\limits_V f(x)(\mu(-\lambda a + dx) - \mu(dx)) g(\lambda, 0, b)\right] v(d\lambda), \tag{iii}$$

где $V \in \mathrm{Bco}(X)$. Тогда благодаря построениям п. 3.15 для любого $c > 0$ существует компакт $V_c \subset X$ с $\|X \setminus V_c\|_{\nu_\lambda} < c$ при любых $|\lambda| > 0$, где

$$\nu_\lambda(A) := \int\limits_{\mathbf{K}\setminus B(\mathbf{K},0,|\lambda|)} [\mu(-\lambda' a + A) - \mu(A)] g(\lambda', 0, b) v(d\lambda')$$

для $A \in \mathrm{Bco}(X)$. Также существует $\delta > 0$ и $V_c$, такие что $-\lambda' a + V_c \subset V_c$ и $\|[X \setminus V_c) \triangle (-\lambda' a + (X \setminus V_c)]\|_\mu = 0$ при любых $|\lambda'| < \delta$ (см. также [34, теорема 7.22]), где $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Каждый непрерывный линейный функционал на $C_b(V)$ для компактного $V$ имеет вид (ii) (см. [5], [35, A.5]), то есть для $l_j(V, f)$ существует мера $\nu_\lambda(c, *)$. В силу теоремы Алаоглу—Бурбаки каждое ограниченное множество $W$ в $[C_b(V_c)]'$ предкомпактно (то есть $\mathrm{cl}(W)$ компактно) в слабой топологии, а $C_b(V_c)$ сепарабельно. Для любого $c > 0$ имеем $l(f) = \int\limits_{V_c} f(x)\nu(c, dx) + O\big(c \times \sup\limits_{x \notin V_c} |f(x)|\big)$, причём $\nu(c, *)$ — меры на $\mathrm{Bco}(V_c)$. Выбирая $V_c \subset V_{c'}$ при $c > c'$, полагая $\nu(A) := \lim\limits_{c \to +0} \nu(c, A \cap V_c)$ для всех $A \in \mathrm{Bco}(X)$, в силу теоремы Радона—Никодима о сходимости мер (см. [7] и § 5) получим (i).

**4.5. Теорема.** *Пусть $X$ — банахово пространство над $\mathbf{K}$, $|*|_{\mathbf{K}} = \mathrm{mod}_{\mathbf{K}}(*)$ с вероятностной квазиинвариантной мерой $\mu\colon \mathrm{Bco}(X) \to \mathbf{K}_s$ и выполнено условие* 3.16(i)*, предположим, что $\mu$ псевдодифференцируема и*

(viii) *$J_b\mu \subset T'' J_\mu$, $(U_t\colon\ t \in B(\mathbf{K}, 0, 1))$ — однопараметрическое семейство операторов, такое что выполнены условия* 3.20(i)—(vii) *с заменой $J_\mu$ на $J^b_\mu$ равностепенно по $t \in B(\mathbf{K}, 0, 1)$, $J_\mu \supset T'X$, здесь $T', T''\colon X \to X$ — компактные операторы, $\ker(T') = \ker(T'') = 0$. Более того, предположим, что существуют последовательности*

(ix) *$[k(i,j)]$ и $[k'(i,j)]$ с $i, j \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{i+j\to\infty} k(i,j) = \lim\limits_{i+j\to\infty} k'(i,j) = -\infty$ и $n \in \mathbf{N}$, такие что $|T''_{i,j} - \delta_{i,j}| < |T'_{i,j} - \delta_{i,j}| p^{k(i,j)}$, $|U_{i,j} - \delta_{i,j}| < |T''_{i,j} - \delta_{i,j}| p^{k'(i,j)}$ и $|(U^{-1})_{i,j} - \delta_{i,j}| < |T''_{i,j} - \delta_{i,j}| p^{k'(i,j)}$ для любых $i + j > n$, где $U_{i,j} = \tilde{e}_i U(e_j)$, $(e_j\colon\ j)$ — ортонормированный базис в $X$. Тогда для любых $f \in C_b(X)$ определён*

$$l(f) = \int\limits_{B(\mathbf{K},0,1)} \int\limits_X f(x)[\mu(U_t^{-1}(dx)) - \mu(dx)] g(t, 0, b) v(dt)$$

*и существует мера $\nu\colon \mathrm{Bco}(X) \to \mathbf{C}_s$ с ограниченной вариацией (а для $b \in \mathbf{R}$ $\nu\colon \mathrm{Bco}(X) \to \mathbf{K}_s$), такая что*

$$l(f) = \int\limits_X f(x)\nu(dx),$$

*где $\nu$ не зависит от $f$ и может зависеть от $(U_t\colon\ t)$, $\nu =: \tilde{D}^b_{U_*}\mu$.*

**Доказательство.** Из доказательства теоремы 3.20 следует, что существует последовательность $U_t^{(q)}$ полигональных операторов, сходящаяся равномерно по

$t \in B(\mathbf{K}, 0, 1)$ к $U_t$ и равностепенно по индексам матричных элементов в пространстве $L(\mu)$. Тогда существует

$$\lim_{q\to\infty}\lim_{j\to\infty}\int\limits_{B(\mathbf{K},0,1)\setminus B(\mathbf{K},0,p^{-j})}\left[\int\limits_X [f(U_t^{-1}(x)) - f(x)]g(t,0,b)\mu(dx)\right]v(dt)$$

для любых $f \in C_b(X)$. Из условий (viii), (ix), теорем Фубини и Лебега следует, что для

$$\nu_\lambda := \int\limits_{B(\mathbf{K},0,1)\setminus B(\mathbf{K},0,|\lambda|)} [\mu(U_t^{-1}(A)) - \mu(A)]g(t,0,b)v(dt)$$

при $A \in \mathrm{Bco}(X)$ для любого $c > 0$ существуют компакт $V_c \subset X$ и $\delta > 0$, такие что $\|X \setminus V_c\| < c$. В самом деле, $V_c$ и $\delta > 0$ можно выбрать в силу псевдодифференцируемости $\mu$, п. 2.30, 3.18, формулы (i), 3.16(i), а также в силу непрерывности и ограниченности (на $B(\mathbf{K}, 0, 1) \ni t$) $|\det U_t'(U_t^{-1})(x))|_{\mathbf{K}}$ удовлетворяющими условиям $U_t^{-1}(V_c) \subset V_c$ и $\|(X\setminus V_c)\triangle(U_t^{-1}(X\setminus V_c))\|_\mu = 0$ при любых $|t| < \delta$, так как $V_c = Y(j) \cap V_c$ компактны для любых $j$. Замкнутые $Y(j) \subset X$ для $U_t^{(q)}$ можно выбрать не зависящими от $t$, причём $TX \supset J_\mu \supset T'X$, где $T$ — компактный оператор. Очевидно, что условия типа (ix) выполнены для $V(j, x)$ и $U(j, x)$ равностепенно по $j$. Повторяя доказательства 3.20 и 4.4 с использованием леммы 2.16.1 для семейства $(U_t\colon\ t)$, получим формулы (i), (ii).

# § 5. Сходимость квазиинвариантных и псевдодифференцируемых мер

**5.1. Определения, замечания и обозначения.** Пусть $S$ — нормальная топологическая группа с малой индуктивной размерностью $\mathrm{ind}(S) = 0$, $S'$ — плотная подгруппа с топологиями $\tau$ и $\tau'$ соответственно, $\tau' \supset \tau|_{S'}$. Пусть $G$ — аддитивный хаусдорфов левый $R$-модуль, где $R$ — топологическое кольцо, а $\mathsf{R}$ — алгебра, $\mathsf{R} \supset \mathrm{Bco}(S)$, $\mathsf{M}(\mathsf{R}, G)$ — семейство мер со значениями в $G$, $\mathsf{L}(\mathsf{R}, G, R)$ — семейство квазиинвариантных мер $\mu\colon \mathsf{R} \to G$ с $\rho_\mu(g, x) \times \mu(dx) := := \mu^{g^{-1}}(dx) =: \mu(gdx)$, $R \times G \to G$ — непрерывное левое действие $R$ на $G$, такое что $\rho_\mu(gh, x) = \rho_\mu(g, hx)\rho_\mu(h, x)$ для любых $g, h \in S'$ и $x \in S$. В частности, $1 = \rho_\mu(g, g^{-1}x)\rho_\mu(g^{-1}, x)$, то есть $\rho_\mu(g, x) \in R_o$, где $R_o$ — мультипликативная подгруппа в $R$. При этом $zy \in \mathsf{L}$ для $z \in R_0$ с $\rho_{z\mu}(g, x) = z\rho_\mu(g, x)z^{-1}$ при $z \neq 0$. Предположим также, что топологические характеры и веса $S$ и $S'$ счётны, а каждое открытое $W$ в $S'$ предкомпактно в $S$. Пусть $\mathbf{P}''$ — семейство псевдометрик на $G$, дающих исходную полную равномерность, причём для любых $c > 0$, и $d \in \mathbf{P}''$, и $\{U_n \in \mathsf{R}\colon\ n \in \mathbf{N}\}$ с $\bigcap\{U_n\colon\ n \in \mathbf{N}\} = \{x\}$ существует $m \in \mathbf{N}$, такое что $d(\mu^g(U_n), \rho_\mu(g, x)\mu(U_n)) < cd(\mu(U_n), 0)$ для любых $n > m$ и предел $\rho$ не зависит $\mu$-п.в. от выбора $\{U_n\colon\ n\}$ для всех $x \in S$ и $g \in S'$. Рассмотрим подкольцо $R' \subset \mathsf{R}$, $R' \supset \mathrm{Bco}(S)$, такое что $\bigcup\{A_n\colon\ n = 1, \ldots, N\} \in R'$ для $A_n \in R'$

с $N \in \mathbf{N}$, а $S'R' = R'$, тогда $\mathsf{L}(\mathsf{R}, G, R; R') := \{(\mu, \rho_\mu(*, *)) \in \mathsf{L}(\mathsf{R}, G, R) \colon \mu$ $R'$-регулярна и для любого $s \in S$ существуют $A_n \in R'$, $n \in \mathbf{N}$ с $s = \bigcap(A_n \colon\ n)$, $\{s\} \in R'\}$.

Для псевдодифференцируемых мер $\mu$ пусть $S'' \subset S'$, $S''$ — плотная подгруппа в $S$, $\tau'|S''$ не сильнее топологии $\tau''$ на $S''$ и существует окрестность $\tau'' \ni W'' \ni e$, в которой плотны элементы, лежащие на однопараметрических подгруппах $(U_t \colon\ t \in B(\mathbf{K}, 0, 1))$. При этом предполагается, что $\mu$ индуцирована с банахова пространства $X$ над $\mathbf{K}$ благодаря локальному гомеоморфизму окрестностей $e$ в $S$ и $0$ в $X$ подобно случаю групп диффеоморфизмов [20], причём выполнена теорема 4.5 для любых $U_* \subset S''$, индуцирующих соответствующие преобразования на $X$. В случае $S = X$ рассмотрим $S' = J_\mu$ и $S'' = J_\mu^b$ с $\mathrm{Re}(b) > 0$ такие, что $M_\mu \supset J_\mu \subset (T_\mu X)^\sim$, $J_\mu^b \subset (T_\mu^{(b)} X)^\sim$ с компактными операторами $T_\mu$ и $T_\mu^{(b)}$, $\ker(T_\mu) = \ker(T_\mu^{(b)}) = 0$ и нормами, индуцированными функционалами Минковского $P_E$ для $E = T_\mu B(X, 0, 1)$ и $E = T_\mu^{(b)} B(X, 0, 1)$ соответственно. Предположим также, что для псевдодифференцируемых мер $G$ равна $\mathbf{C}_s \vee \mathbf{K}_s$. Обозначим $P(\mathsf{R}, G, R, U_*; R') := [(\mu, \rho_\mu, \eta_\mu) \colon\ (\mu, \rho_\mu) \in \mathsf{L}(\mathsf{R}, G, R; R')$, $\mu$ псевдодифференцируема и $\eta_\mu(t, U_*, A) \in L(\mathbf{K}, v, \mathbf{C}_s)]$, где $\eta_\mu(t, U_*, A) = j(t) g(t, 0, b)[\mu^h(U_t^{-1}(A) - \mu^h(A)]$, $j(t) = 1$ для любого $t \in \mathbf{K}$ для $S = X$; $j(t) = 1$ при $t \in B(\mathbf{K}, 0, 1)$, $j(t) = 0$ при $|t|_{\mathbf{K}} > 1$ для топологической группы $S$, не являющейся банаховым пространством $X$ над $\mathbf{K}$, $v$ — мера Хаара на $\mathbf{K}$ со значениями в $\mathbf{Q}_s$, $(U_t \colon\ t \in B(\mathbf{K}, 0, 1))$ — произвольная однопараметрическая подгруппа. На эти пространства $\mathsf{L}$ (или $P$) накладываются дополнительные ограничения:

(a) для любой окрестности (имеется в виду открытой) $U \ni 0 \in G$ существует окрестность $S \supset V \ni e$ и компактное подмножество $V_U$, $e \in V_U \subset V$ с $\mu(B) \in U$ (или дополнительно $\tilde{D}^b_{U_*} \mu(B) \in U$) для любого $\mathsf{R} \ni B \in \mathrm{Bco}(S \setminus V_U)$;

(b) для данных $U$ и окрестности $R \supset D \ni 0$ существует окрестность $S' \supset W \ni e$, (псевдо)метрика $d \in P''$ и $c > 0$, такие что $\rho_\mu(g, x) - \rho_\mu(h, x') \in D$ (или $\tilde{D}^b_{U_*}(\mu^g - \mu^h)(A) \in U$ при $A \in \mathrm{Bco}(V_U)$ дополнительно для $P$) при $g, h \in W$, $x, x' \in V_U$, $d(x, x') < c$, где (a), (b) выполняется для всех $(\mu, \rho_\mu) \in \mathsf{L}$ (или $(\mu, \rho_\mu, \eta_\mu) \in P$) равностепенно в (a) на $U$, в (b) на $W$ и на каждом $V_U$ для $\rho_\mu(g, x) - \rho_\mu(h, x')$ и $\tilde{D}^b_{U_*}(\mu^g - \mu^h)(A)$.

Эти условия удовлетворяются, так как благодаря теоремам 3.15, 3.19, 4.3 и 4.5 существует подпространство $Z''$, плотное в $Z'$, такое что для любого $\varepsilon > 0$ и $\infty > R > 0$ существуют $r > 0$ и $\delta > 0$ с $|\rho_\nu(g, x) - \rho_\nu(h, y)| < \varepsilon$ для любых $\|g - h\|_{Z''} + \|x - y\|_Z < \delta$, $g, h \in B(Z'', 0, r)$, $x, y \in B(Z, 0, R)$, где $Z''$ — банахово пространство над $\mathbf{K}$. Для группы диффеоморфизмов неархимедова банахова многообразия имеется аналогичная непрерывность $\rho_\mu$ для подгруппы $G''$ всей группы $G$ (см. [20, 22, 26, 28]). Через $\mathsf{M}_o$ обозначено подпространство в $\mathsf{M}$, удовлетворяющее (a). В дальнейшем предполагается, что $R'$ содержит все замкнутые подмножества из $S$, принадлежащие $\mathsf{R}$, $G$ и $\mathsf{R}$ полны.

Для $\mu \colon \mathrm{Bco}(S) \to G$ через $L(S, \mu, G)$ обозначим пополнение пространства непрерывных $f \colon S \to G$, таких что $\|f\|_d := \sup\limits_{h \in C_b(S, G)} d\Big(\int\limits_S f(x) h(x) \mu(dx), 0\Big) < \infty$

для любых $d \in P''$, где $C_b(S,G)$ — пространство непрерывных ограниченных функций $h\colon S \to G$. Предположим, что для каждой $(f_n\colon\ n) \subset L(S,\mu,G)$, для которой существует $g \in L(S,\mu,G)$ с $d(f_n(x),0) \leqslant d(g(x),0)$ для любых $d \in P''$, $x$ и $n$, $f_n$ сходится равномерно на каждом компактном подмножестве $V \subset S$ с $\|V\|_\mu > 0$, выполняется следующее: $f \in L(S,\mu,G)$, $\lim\limits_n \|f_n - f\|_d = 0$ для любых $d \in P''$ и $\int\limits_S f(x)\mu(dx) = \lim\limits_n \int\limits_S f_n(x)\mu(dx)$. В случае $G = \mathbf{K}_s$ оно совпадает с $L(S,\mu,\mathbf{K}_s)$, следовательно, это предположение является теоремой Лебега. Через $Y(v)$ обозначим $L(\mathbf{K},v,\mathbf{C}_s)$.

Теперь можно определить топологии и равномерности с помощью соответствующих баз (см. ниже) на $\mathsf{L} \subset G^{\mathsf{R}} \times R_o^{S'\times S} =: Y$ (или $P \subset G^{\mathsf{R}} \times R_o^{S'\times S} \times G^{S'\times \mathbf{K}_s \times \mathsf{R}} =: Y$), $R_o \subset R \setminus \{0\}$. Имеются естественные проекции $\pi\colon \mathsf{L}(\vee P) \to M_o$, $\pi(\mu,\rho_\mu(*,*)(\vee,\eta_\mu)) = \mu$, $\xi\colon \mathsf{L}(\vee P) \to R^{S'\times S}$, $\xi(\mu,\rho_\mu,(\vee\eta_\mu)) = \rho_\mu$, $\zeta\colon P \to G^{S'\times\mathbf{K}_s\times\mathsf{R}}$, $\zeta(\mu,\rho_\mu,\eta_\mu) = \eta_\mu$. Пусть $\mathsf{H}$ — фильтр на $\mathsf{L}$ или $P$, $U = U' \times U''$ или $U = U' \times U'' \times U'''$, $U'$, $U''$ и $U'''$ — элементы равномерностей на $G$, $R$ и $Y(v)$ соответственно, $\tau' \ni W \ni e$, $\tau \ni V \subset V_{U'} \ni e$, $V_{U'}$ компактно. Через $[\mu]$ обозначим $(\mu,\rho_\mu)$ для $\mathsf{L}$ или $(\mu,\rho_\mu,\eta_\mu)$ для $P$, $\Omega{:=}\mathsf{L}\vee P$, $[\mu](A,W,V){:=}$ $:= [\mu^g(A),\rho_\mu(g,x),\vee\eta_{\mu^g}(t,U_*,A) \mid g \in W,\ x \in V, \vee t \in \mathbf{K}_s]$. Рассмотрим $\mathsf{A} \subset R$, тогда

(1) $\mathsf{W}(\mathsf{A},W,V_{U'};U) := \{([\mu],[\nu]) \in \Omega^2 \mid ([\mu],[\nu])(A,W,V_{U'}) \subset U\}$;

(2) $\mathsf{W}(\mathsf{S};U) := \{([\mu],[\nu]) \in \Omega^2 \mid \{(B,g,x)\colon\ ([\mu],[\nu])(B,g,x)) \in U\} \in \mathsf{S}\}$, где $\mathsf{S}$ — фильтр на $\mathsf{R} \times S' \times S^c$, $S^c$ — семейство компактных подмножеств $V' \ni e$.

(3) $\mathsf{W}(\mathsf{F},W,V;U) := \{([\mu],[\nu]) \in \Omega^2 \mid \{B\colon\ ([\mu],[\nu])(B,g,x) \in U,\ g \in W,\ x \in V\} \in \mathsf{F}\}$, где $\mathsf{F}$ — фильтр на $\mathsf{R}$ (ср. [7, § 2.1, 4.1]);

(4) $\mathsf{W}(\mathsf{A},\mathsf{G};U) := \{([\mu],[\nu]) \in \Omega^2 \mid \{(g,x)\colon\ ([\mu],[\nu])(B,g,x) \in U,\ B \in \mathsf{A}\} \in \mathsf{G}\}$, где $\mathsf{G}$ — фильтр на $S' \times S^c$;

пусть $\mathsf{U} \subset \mathsf{R}\times\tau'_e\times S^c$, $\Phi$ — множество фильтров на $\mathsf{R}\times S'\times S^c$ или $\mathsf{R}\times S'\times S^c\times Y(v)$ (порождённых произведениями фильтров $\Phi_{\mathsf{R}}\times\Phi_{S'}\times\Phi_S^c$ на соответствующих пространствах), $\mathsf{U}'$ — равномерность на $(G,R)$ или $(G,R,Y(v))$, $\mathsf{F} \subset Y$. Семейство конечных пересечений множеств $\mathsf{W}(A,U) \cap (\mathsf{F}\times\mathsf{F})$ (см. (1)), где $(A,U) \in \mathsf{U}\times\mathsf{U}'$ (или $\mathsf{W}(F,U) \cap (\mathsf{F}\times\mathsf{F})$ (см. (2)), где $(F,U) \in (\Phi\times\mathsf{U}')$, образуют по определению базу равномерности $\mathsf{U}$-сходимости ($\Phi$-сходимости соответственно) на $\mathsf{F}$ и порождают соответствующие топологии. Для этих равномерностей используются обозначения

(i) $\mathsf{F}_{\mathsf{U}}$ и $\mathsf{F}_\Phi$; $\mathsf{F}_{\mathsf{R}\times W\times V}$ для $\mathsf{F}$ с равномерностью равномерной сходимости на $\mathsf{R}\times W\times V$, где $W \in \tau'_e$, $V \in S^c$, аналогично для всего пространства $Y$;

(ii) $\mathsf{F}_A$ обозначает равномерность (или топологию) поточечной сходимости для $A \subset \mathsf{R}\times\tau'_e\times S^c =: Z$, при $A = Z$ индекс опускается (см. формулу (1)). Далее употребляется $\mathsf{H}'$ вместо $\mathcal{H}$ в 4.1.24 [7], то есть $\mathsf{H}'(A,\tilde{\mathsf{R}})$ — фильтр на $\mathsf{R}$, порождённый базой $[(L \in \mathsf{R}\colon\ L \subset A \setminus K')\colon\ K' \in \tilde{\mathsf{R}},\ K' \subset A]$, где $\tilde{\mathsf{R}} \subset \mathsf{R}$, а $\tilde{\mathsf{R}}$ замкнуто относительно конечных объединений.

Например, пусть $S$ — локально $\mathbf{K}$-выпуклое пространство, $S'$ — плотное подпространство, $G$ — локально $\mathbf{L}$-выпуклое пространство, где $\mathbf{K}$, $\mathbf{L}$ — поля, $R = B(G)$ — пространство ограниченных линейных операторов на $G$, $R_o = \mathrm{GL}(G)$ — мультипликативная группа обратимых линейных операторов. Другие возможные случаи: $S = X$ — банахово пространство над $\mathbf{K}$, $S' = J_\mu$, $S'' = J^b_\mu$, как выше; $S = G(t)$, $S' \supset S''$ — плотные подгруппы, $G = R$ — поле $\mathbf{K}_s$ ($s \neq p$), $M$ — аналитическое банахово многообразие над $\mathbf{K} \supset \mathbf{Q}_p$ (см. [20]). Остальные необходимые стандартные определения напоминаются далее по ходу дела.

**5.2. Лемма.** *Пусть* $\mathsf{R}$ — *квази-*$\delta$*-кольцо со слабейшей равномерностью, в которой каждая* $\mu \in \mathsf{M}$ *равномерно непрерывна и* $\Phi \subset \hat{\Phi}_C(\mathsf{R}, S' \times S^c)$. *Тогда* $\mathsf{L}(\mathsf{R}, G, R, R')_\Phi$ *(или* $P(\mathsf{R}, G, R, U_*; R')_\Phi$*) — топологическое пространство, на котором справа непрерывно действует* $R_o$.

**Доказательство.** Напомним, что $\hat{\Phi} := \hat{\Phi}(X)$ обозначает семейство фильтров $F$ на множестве $X$, обладающих свойством: для любого отображения $f\colon \Phi \to \mathsf{B}(X)$ с $f(\Sigma) \subset \Sigma$ для любого $\Sigma \in \Phi$ существует конечное подмножество $\Psi \subset \Phi$, такое что $\bigcup\limits_{\Sigma\in\Psi} f(\Sigma) \in F$, где $\mathsf{B}(X)$ обозначает семейство всех подмножеств в $X$, $\Phi_C(X) =: \Phi_C$ — семейство фильтров Коши на $X$. В силу предложения 4.2.2 из [7] пространство мер $\mathsf{M}(\mathsf{R}, G; R')_\Phi$ является топологическим левым $R$-модулем. С другой стороны, $\rho_{\lambda\mu}(a, x) = \lambda\rho_\mu(a, x)\lambda^{-1}$ для $\lambda \in R_o$, из непрерывности операций инверсии $\lambda \to \lambda^{-1}$ в $R_o$ и умножения в $R$ для любого окружения диагонали $U''$ в $R$ существует окружение диагонали $U''_1$ в $R$ и открытая окрестность $U_4 \ni \lambda$ в $R_o$, такие что $\beta U''_1\beta^{-1} \subset U''$ для любых $\beta \in U_4$. Выбирая $\Psi \subset \Phi$ для данного $F$, найдём $U''_1(\Sigma)$ и $U_4(\Sigma)$ для каждого $\Sigma \in \Psi$, тогда $\bigcap\limits_{\Sigma\in\Psi} U''_1(\Sigma) =: \tilde{U}''$ и $\tilde{U}_4 = \bigcap\limits_{\Sigma\in\Psi} U_4(\Sigma)$ являются окружениями диагонали и окрестностью $\lambda$, что показывает непрерывность по $\lambda$ для $L$ и $P$, так как для $P$ выполняется $\mathrm{PD}(b, \lambda f(x)) = \lambda\mathrm{PD}(b, f(x))$ в силу определения 4.1 для псевдодифференцируемой $f$.

**5.3. Предложение.**

(1) *Пусть* $\mathsf{T}$ — $\hat{\Phi}_4$*-фильтр на* $\mathsf{M}_o(\mathsf{R}, G; R')$, $\{A_n\colon\ n\}$ — *дизъюнктная* $\Theta(\mathsf{R})$*-последовательность,* $\Sigma$ — *элементарный фильтр на* $\mathsf{R}$, *порождённый* $\{A_n\colon\ n \in \mathbf{N}\}$, *и* $\phi\colon \mathsf{M}_o \times \mathsf{R} \to G$ *с* $\phi(\mu, A) = \mu(A)$. *Тогда* $\phi(\mathsf{T} \times \Sigma)$ *сходится к* 0.

(2) *Более того, пусть* $\mathsf{U}$ — *база окрестностей* $e \in S'$, $\phi\colon \mathsf{L} \to G \times R$, $\phi(\mu, A, g) := (\mu^g(A), \rho_\mu(g, x))$, *где* $x \in A$. *Тогда* $(0, 1) \in \lim \phi(\mathsf{T} \times \Sigma \times \mathsf{U})$.

(3) *Если* $T$ — *это* $\Phi_4$*-фильтр на* $P(\mathsf{R}, G, R, U_*; R')$, $\psi(\mu, B, g, t, U_*) = [\mu(B); \rho_\mu(g, x); \eta_{\mu^g}(t, U_*, B)]$, *то* $(0, 1, 0) \in \lim \psi(\mathsf{T} \times \Sigma \times \mathsf{U})$ *для любой данной* $U_* \in S''$, *где* $\Sigma$ *и* $\mathsf{U}$ *такие же, как в* (1), (2).

**Доказательство.** Напомним, что для множества $X$ $\Theta$-сетью в $X$ называется сеть $(I, f)$ в $X$, такая что для любой возрастающей последовательности $(i_n\colon\ n \in \mathbf{N}) \subset I$ выполняется $(f(i_n)\colon\ n) \in \Theta$. Последовательность $(x_n\colon\ n \in \mathbf{N}) \subset X$ называется $\Theta$-последовательностью, если $f\colon \mathbf{N} \to X$,

$f(n) = x_n$, $(\mathsf{N}, f)$ является $\Theta$-сетью. Через $\Phi(\Theta, X) =: \Phi(\Theta)$ обозначается семейство фильтров на $X$ вида $f(F)$, где $(I, f)$ — это $\Theta$-сеть в $X$, а $F$ — фильтр сечений $[(\lambda \in I\colon\ \lambda \geqslant i)\colon\ i \in I]$ для направленного множества $I$, $\hat{\Phi}(\Theta) := \Phi(\Theta)^{\wedge}$. Для топологического пространства $X$ через $\Theta_j(X)$ обозначается семейство последовательностей, имеющих сходящиеся подпоследовательности при $j = 1$ или имеющих предельные точки при $j = 2$. Для равномерного пространства $X$ через $\Theta_3(X)$ обозначается семейство последовательностей, имеющих подпоследовательности Коши, $\Theta_4 := \Theta_2 \cup \Theta_3$, $\Phi_j(X) := \Phi(\Theta_j(X))$.

Тогда (1) вытекает из 4.2.6 в [7].

(2). Из ограничений (a), (b) в 5.1 следует, что $\mu^g(A) = \int\limits_A \rho_\mu(g, x)\mu(dx)$, и если $\lim \mu(\mathsf{F}(A; R')) = \mu(A)$, то $\lim \mu(\mathsf{F}(X \setminus A, R')) = \mu(X \setminus A)$, так как по определению 4.1.24 из [7] для любой $\tau_G \ni D \ni 0$ для $A \in \mathsf{R}$ существует $\tau_S \ni V \supset A$ с $\mu(V) - \mu(A) \in D$, где $\mathsf{F}(A, R')$ — фильтр, порождённый $A$ и $R'$. В силу радоновости $\mu$ и $\mu^g$ получим $\lim\limits_{\mathsf{T}\times\Sigma} \mu^g(A) = 0$. В случаях $G = \mathsf{R}$ или $G = \mathbf{K}_s$ используем теорему Лебега о сходимости.

(3). Дополнительно к (1) ,(2) остаётся проверить сходимость $\eta_\mu$. В силу теоремы 4.4 или 4.5 (или п. 5.1) псевдодифференциал порядка $b$ $\tilde{D}^b_{U_*}\mu = \nu$ является мерой для псевдодифференцируемой $\mu$. В силу (1) и условия $\hat{\Phi}_4$ получим $(0, 1, 0) \in \lim \psi(\mathsf{T} \times \Sigma \times \mathsf{U})$ при заданной $U_*$, так как в п. 4.1 и 5.1 интегрирование выполняется по $t \in \mathbf{K}$ для банахова пространства $X$ над $\mathbf{K}$ или по $B(\mathbf{K}, 0, 1)$ для $S$, не являющегося банаховым пространством.

**5.4. Предложение.** *Пусть* $\mathsf{H}$ — $\hat{\Phi}_4$*-фильтр на* $\mathsf{L}$ (*или* $P$) *с топологией* $\mathsf{F}$ (*см.* 5.1(ii)), $A \in \mathsf{R}$, $\tau_G \ni U \ni 0$, $\mathsf{H}'(A, R') \in \Psi_f(\mathsf{R})$. *Тогда существуют* $L \in \mathsf{H}$, $\tilde{K} \in R'$ *и элемент равномерности* $\mathsf{U}$ *для* $\mathsf{L}_{R'}$ *или* $P_{R'}$, *такие что* $\tilde{K} \subset A$, $L = [(\mu, \rho_\mu(g, x))\colon\ M := \pi_{\mathsf{M}_o}(L) \ni \mu,\ \pi_{\tau'_e}(L) =: W \ni g$ (*или* $(\mu, \rho_\mu, \eta_\mu(*, *, U_*))$ *и дополнительно* $\tilde{D}^b_{U_*}\mu = \mathrm{PD}(b, \eta_\mu))]$, $e \in W \in \tau'$, $\mu^g(B) - \nu^h(C) \in U$ (*или дополнительно* $(\tilde{D}^b_{U_*}\mu^g(B)) - (\tilde{D}^b_{U_*}(C)) \in U$) *для* $\tilde{K} \subset B \subset A$, $\tilde{K} \subset C \subset A$ *для любых* $([\mu], [\nu]) \in \bar{\bar{L}}^2 \cap \mathsf{U}$, *где* $\bar{\bar{L}} := \mathrm{cl}_{\mathsf{L}_{R'}} L$ *или* $\mathrm{cl}_{P_{R'}} L$, $\pi_{\mathsf{M}_o}$ — *проектор из* $L$ *в* $\mathsf{M}_o$.

**Доказательство.** Напомним, что $\Psi(\mathsf{R}) := \hat{\Phi}(\Theta(\mathsf{R}))$, где $\Theta(\mathsf{R})$ — семейство последовательностей $(A_n\colon\ n \in \mathbf{N}) \subset \mathsf{R}$, для которых существует $\Omega \in \Sigma(\mathsf{R})$, $(n \in \mathbf{N}\colon\ A_n \in \Omega)$ бесконечно, $\Sigma(\mathsf{R}) := \Big[\Big(\bigcup\limits_{n\in J} A_n\colon\ J \in \mathsf{B}(\mathbf{N})\Big)\colon\ (A_n\colon\ n \in \mathbf{N}) \in \in \Gamma(\mathsf{R})\Big]$, $\Gamma(\mathsf{R})$ — семейство дизъюнктных последовательностей $(A_n\colon\ n \in \mathbf{N}) \subset \subset \mathsf{R}$, для которых $\Big[\bigcup\limits_{n\in J} A_n\colon\ J \subset \mathbf{N}\Big] \subset \mathsf{R}$. Кольцо множеств $Z$ называется квази-$\delta$-кольцом, если любая дизъюнктная последовательность $(A_n\colon\ n \in \mathbf{N})$ из $\mathsf{R}$, объединение которой $\bigcup\limits_n A_n = A$ содержится в некотором множестве $B \in \mathsf{R}$, $A \subset B$, обладает подпоследовательностью $(A_{n_j}\colon\ j \in \mathbf{N}) \in \Gamma(\mathsf{R})$.

Из предложения 4.2.7 в [7] и радоновости мер имеем $\mu(B) - \nu(C) \in U'$ для любых $(\mu, \nu) \in (\bar{\bar{\mathsf{M}}} \times \bar{\bar{\mathsf{M}}}) \cap \pi_{\mathsf{M}_0}(\mathsf{U})$. Тогда для любого элемента $D'$ равномерности на $R$ существуют $d \in P''$, $c > 0$ и $L$, такие что $\rho_\mu(g, x) - \rho_\nu(h, x') \in D'$ при

$g, g' \in W$, $\mu, \nu \in M$, $d(x, x') < c$, так как $\mathsf{H} \in \hat{\Phi}_4$, где $\bar{\bar{\mathsf{M}}} := \mathrm{cl}_{E(\mathsf{R},G;R')_{R'}} \mathsf{M}$ — замыкание $\mathsf{M} \subset E(\mathsf{R}, G; R')$ в $E(\mathsf{R}, G; R')_{R'}$, $E(\mathsf{R}, G; R') := [\mu \in E(\mathsf{R}, G)\colon\ \mu$ является $R'$-регулярной], то есть $\mu(F(A, R'))$ сходится к $\mu(A)$ для любых $A \in R$ (просто регулярной, если $R'$ состоит из замкнутых подмножеств и выполнены условия в определении 11.34 из [15]); $F(A, R')$ — фильтр на $R$, порождённый базой $[(B \in \mathsf{R}\colon\ \tilde{K} \subset B \subset A)\colon\ \tilde{K} \subset A,\ \tilde{K} \in R']$, $E(\mathsf{R}, G)$ — множество исчерпывающихся (exhaustible) мер $\mu$, то есть $\mu(A_n)$ сходится к 0 для любых $(A_n\colon\ n \in \mathbf{N}) \in \Gamma(\mathsf{R})$.

Тогда $\mu^g(B) - \mu(B) \in U'$, $\nu^h(C) - \nu(C) \in U'$ и для $3U' \subset U$ получим утверждение 5.4 для $\mathsf{L}$. Из теорем 4.4 и 4.5, п. 5.1, условий Егорова и теоремы Лебега получим 5.4 для $P$, так как $\mu$ — вероятностные меры, а $\mathsf{L}_{R'}$ (или $P_{R'}$) соответствуют равномерности из п. 5.1(ii) с $A = R' \times \tau'_e \times S^c$. В самом деле, $\mu^g(A) - \nu^h(A) = (\mu^g(A) - \mu^g(V_{U'})) + (\mu^g(V_{U'}) - \nu^h(V_{U'})) + (\nu^h(V_{U'}) - \nu^h(A))$, $\mu^g(A) = \int\limits_A \rho_\mu(g, x)\mu(dx)$ для любых $A \in \mathrm{Bco}(S)$, а для любого $\tau_G \ni U' \ni 0$ существует компактное подмножество $V'_U \subset A$ с $\mu^g(B) \in U'$ для любого $B \in \mathrm{Bf}(A \setminus V_{U'}) \cap \mathrm{Bco}(S)$ и то же для $\nu^h$ (в силу условия в п. 5.1, что кольцо подмножеств $R'$ содержит $\mathrm{Bco}(S)$). Можно сначала рассмотреть $A \in \mathrm{Bco}(S)$, а потом использовать $R'$-регулярность мер и $\sigma R' \supset \mathrm{Bco}(S)$. Из сепарабельности $S$, $S'$, того, что их топологические веса равны $\aleph_0$, ограничений 5.1(a), (b) следует, что существует последовательность разбиений $Z_n = [(x_m, A_m)\colon\ m,\ x_m \in A_m]$ для каждого $A \in \mathrm{Bco}(S)$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ для любых $i \ne j$, $\bigcup\limits_m A_m = A$, $A_m \in \mathrm{Bco}(S)$, так что $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\mu^g(A) - \sum\limits_j \rho_\mu(g, x_j)\mu(A_j)\Big) = 0$ и то же для $\nu$, причём для $V_{U'}$ каждое $Z_n$ можно брать конечным. Тогда существует $W \in \tau'_e$ с $W \times (S \setminus V^2) \subset (S \setminus V)$, $\tau_e \ni V \subset V^2$, $\nu^g(B), \mu^g(B) \in U'$ для любых $B \in \mathrm{Bf}(S \setminus V^2) \cap \mathrm{Bco}(S)$ при $G = \mathbf{K}_s$ и $g \in W$ (см. п. 5.1(a)). Тогда из $A = [A \cap (S \setminus V^2)] \cup [A \cap V^2]$ и существования компакта $V'_{U'} \subset V$ с $\mu(E) \in U'$ для любого $E \in \mathrm{Bf}(V \setminus V'_{U'}) \cap \mathrm{Bco}(S)$ и то же для $\nu$, причём $(V'_{U'})^2$ тоже компактно, следует $\mu^g(B) - \nu^h(C) \in U$ при $9U' \subset U$, так как $R' \supset \mathrm{Bco}(S)$, где $W$ дополнительно удовлетворяет условию $\mu^g(V'_{U'}) - \nu^h(V'_{U'}) \in U'$ при $V'_{U'} \subset V^2$ благодаря п. 5.1(b), $\mu(B) - \nu(C) \in U'$, $WV'_{U'} \subset (V'_{U'})^2$ благодаря предкомпактности $W$ в $S$. Поскольку псевдодифференцируемые меры также квазиинвариантны, то для них тоже выполняется 5.4.

Пусть теперь $[\mu] \in \lim H$, $A \in \mathrm{Bco}(S)$, тогда $\eta_\mu \in \lim \zeta(H)$ в $Y(v)$ и существует последовательность $\eta_{\mu_n}$, такая что

$$\int\limits_{\mathbf{K}} \eta_{\mu_n}(\lambda, U_*, A)v(d\lambda) = \tilde{D}^b_{U_*}\mu_n(A)$$

в силу п. 4.4 или 5.1 и

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{D}^b_{U_*}\mu_n(A) = \int\limits_{\mathbf{K}} \eta_\mu(\lambda, U_*, A)v(d\lambda) =: \varkappa(A)$$

в силу теоремы Лебега. Из $\eta_\mu(\lambda, U_*, A\cup B) = \eta(\lambda, U_*, A) + \eta(\lambda, U_*, B)$ при $A\cap B=\varnothing$, $B\in \mathrm{Bco}(S)$ следует, что $\nu(A)$ является мерой на $\mathrm{Bco}(S)$, причём $\varkappa(A) = \tilde{D}^b_{U_*}\mu(A)$. Поскольку $\mu^g(A) = \int\limits_A \rho_\mu(g,x)\mu(dx)$ для $A\in \mathrm{Bco}(S)$ и $g\in S'$, то

$$\eta_{\mu^g}(\lambda, U_*, A) = j(\lambda)g(\lambda,0,b)[\mu^g(A) - \mu^g(U_\lambda^{-1}A)] = \\ = j(\lambda)g(\lambda,0,b)\int\limits_A \rho_\mu(g,x)[\mu(dx) - \mu^{U_\lambda}(dx)],$$

и в силу теоремы Фубини существует

$$\tilde{D}^b_{U_*}\mu^g(A) = \int\limits_A\int\limits_{\mathbf{K}} \rho_\mu(g,x)j(\lambda)g(\lambda,0,b)[\mu(dx) - \mu^{U_\lambda}(dx)]v(d\lambda),$$

где $j(t)=1$ для $S=X$ и $j(t)$ — характеристическая функция $B(\mathbf{K},0,1)$ для $S$, не являющегося банаховым пространством $X$. Тогда $\tilde{D}^b_{U_*}\mu^g(dx)/\tilde{D}^b_{U_*}\mu(dx)$ $\mu$-п.в. совпадает с $\rho_\mu(g,x)$ в силу 5.1(a), (b), следовательно, $(\tilde{D}^b_{U_*}\mu^g, \rho_{\mu^g})$ образуют $\Phi_4$-фильтр в $L$, порождённый $\hat{\Phi}_4$-фильтром в $P$. После этого оценим $\tilde{D}^b_{U_*}(\mu^g-\nu^h)(A)$, как и выше $\mu^g(A)-\nu^h(A)$. Найдём для $\Phi_4$-фильтра соответствующее $L$, так как существует $\delta>0$, такое что $U_\lambda\in W$ при любых $|\lambda|<\delta$. Для $\Phi_4$-фильтра используются конечные пересечения $W_1\cap\ldots\cap W_n = W$, где $W_j$ соответствуют $\Phi_4$-фильтрам $H_j$.

**5.5. Следствие.** *Если $\{\mathsf{H}'(A,R')\colon\ A\in\mathsf{R}\}\subset\Psi_f(\mathsf{R})$, $\mathsf{T}$ — $\hat{\Phi}_4$-фильтр на $\mathsf{L}$, $\mathsf{U}$ — элемент равномерности на $\mathsf{L}$ (или $P$), тогда существуют $L\in\mathsf{T}$ и $\mathsf{V}$ — элемент равномерности на $\mathsf{L}_{R'}$ (или $P_{R'}$), такие что $\bar{\bar{L}}^2\cap\mathsf{V}\subset\bar{\bar{L}}^2\cap\mathsf{U}$.*

**Доказательство.** В силу следствия 4.2.8 из [7] и теоремы 5.4 для $\mathsf{U}_\mathsf{M} = \pi_\mathsf{M}\times\pi_\mathsf{M}\mathsf{U}$ существует $V_\mathsf{M}$ — окружение диагонали в $E(\mathsf{R},G;R')_{R'}$, такое что $\bar{\bar{M}}^2\cap V_\mathsf{M}\subset\bar{\bar{M}}^2\cap\mathsf{U}_\mathsf{M}$, где $\pi_\mathsf{M}\colon\mathsf{L}\to\mathsf{M}$ (или $P\to\mathsf{M}$) — проектор, $\mathsf{M}(\mathsf{R},G)$ — множество мер на $\mathsf{R}$ со значениями в $G$, $\mathsf{M}(\mathsf{R},G;R') := [\mu\in\mathsf{M}(\mathsf{R},G)\colon\ \mu$ является $R'$-регулярной]. Поскольку $\mathsf{M}(\mathsf{R},G;R')_{R'}\subset E(\mathsf{R},G;R')_{R'}$, то существует окружение диагонали $V$ в $\mathsf{L}_{R'}$ (или $P_{R'}$), такое что $\pi_\mathsf{M}\times\pi_\mathsf{M}V\subset V_\mathsf{M}\cap\bar{\bar{M}}^2$.

**5.6. Лемма.** *Пусть $\mathsf{R}$ — квази-$\sigma$-кольцо, упорядоченное по включению, $\mathsf{U}$ — направленное сверху (upper directed) подмножество в $\mathsf{R}$, $\mathsf{H}$ — $\hat{\Phi}_4$-фильтр на $\mathsf{L}$ (или $P$), $0\in U\ni\tau_G$. Тогда существуют $M\in\mathsf{H}$, $A\in\mathsf{U}$, элемент равномерности $U'$ на $\mathsf{L}_{R'}$ (или $P_{R'}$), такие что $\mu^g(B)-\nu^h(C)\in U$ (или дополнительно $\tilde{D}^b_{U_*}\mu^g(B)-\tilde{D}^b_{U_*}\nu^h(C)\in U$) для любых $([\mu],[\nu])\in\bar{\bar{L}}^2\cap U'$, $g,h\in W$, $W$ определяется проекцией $U'$ на $S'$, $B,C\in\mathsf{U}$ с $A\leqslant B$, $A\leqslant C$.*

**Доказательство.** Для любых $C,E\in\mathsf{U}$ по определению существует $F\in\mathsf{U}$ с $C\leqslant F$ и $E\leqslant F$. Существуют $P$ и $V$ — открытые подмножества в $S$ и $W\in\tau'_e$ с $WP\subset P^2\subset V$, такие что $(\mu-\nu)(B)\in U$ при $B\subset S\setminus P$ и $(\mu,\nu)\in\bar{\bar{M}}^2\cap\pi_{\mathsf{M}_o}(U')$. Действительно, $\pi_{\mathsf{M}_o}\mathsf{H}$ является базой некоторого фильтра $\mathsf{T}$ на $\mathsf{M}_o$. Тогда $g(B\cap S\setminus P^2)\subset S\setminus P$ для $g\in W$, следовательно, $[\mu^g-\nu^g](B\cap S\setminus P^2)\in U$.

В силу условий 5.1(a), (b) для $D$, $V$ существуют $W$, $c>0$, $d\in P''$, такие что $\rho_\mu(g,x)-\rho_\nu(h,x')\in D$ при $g,h\in W$ и $d(x,x')<c$, $x,x'\in V_c$, следовательно, $\mu^g(B)-\nu^h(C)=[\mu^g(B\cap P^2)-\nu^h(C\cap P^2)]+[\mu^g(B\setminus P^2)-\nu^h(C\setminus P^2)]\in 3(DU+U)$. Модифицируя доказательство 4.2.9 из [7], получим утверждение леммы для $\mathsf{L}$. В случае $P$ оценка $\tilde{D}^b_{U_*}\mu^g(B)-\tilde{D}^b_{U_*}\nu^h(C)$ может быть выполнена аналогично доказательству предложения 5.4.

**5.7. Теорема.** *Пусть* $\mathsf{H}$ — $\hat{\Phi}_4$*-фильтр на* $\mathsf{L}$ *(или* $P$*),* $\{A_n\colon\ n\in\mathbf{N}\}\in\Gamma(\mathsf{R})$, $\tau_G\ni U\ni 0$. *Тогда существуют* $L\in\mathsf{H}$, $M\in\mathsf{B}(\mathbf{N})$ *и* $\mathsf{U}$ — *элемент равномерности на* $\mathsf{L}$, *такие что* $\mu^g\bigl(\bigcup(A_n\colon\ n\in M')\bigr)-\nu^h\bigl(\bigcup(A_n\colon\ n\in M'')\bigr)\in U$ *(или дополнительно* $\Bigl(\tilde{D}^b_{U_*}\mu^g\Bigl(\bigcup_{n\in M'}A_n\Bigr)-\tilde{D}^b_{U_*}\nu^h\Bigl(\bigcup_{n\in M''}A_n\Bigr)\Bigr)\in U$*) для любых* $([\mu],[\nu])\in\bar{L}^2\cap\mathsf{U}$ *и* $M',M''\in\mathsf{B}(\mathbf{N})$ *с* $M\cap M'=M\cap M''$. *Если* $\{\mathsf{H}'(A,R')\}\subset\subset\Psi_f(\mathsf{R})$, *то* $\mathsf{U}$ *может быть выбрано как элемент равномерности на* $\mathsf{L}_{R'}$ *(или* $P_{R'}$*), где* $\bar{L}:=\mathrm{cl}_{\mathsf{L}}L$ *(или* $\bar{L}:=\mathrm{cl}_P L$*).*

**Доказательство.** Напомним, что $\mathsf{B}_f(\mathbf{N})$ обозначает семейство конечных подмножеств в $\mathbf{N}$, $\Psi_f(\mathsf{R}):=\hat{\Phi}(\Theta_f(\mathsf{R}))$, $\Theta_f(\mathsf{R})$ — семейство последовательностей $(A_n\colon\ n\in\mathbf{N})\subset\mathsf{R}$, для которых существует $\Omega\in\Sigma_f(\mathsf{R})$ с $\mathrm{card}[n\in\mathbf{N}\colon A_n\in\Omega]=\aleph_0$, $\Sigma_f(\mathsf{R}):=\Bigl[\Bigl(\bigcup_{n\in M}A_n\colon\ M\in\mathsf{B}_f(\mathbf{N})\Bigr)\colon\ (A_n\colon\ n\in\mathbf{N})\in\Gamma(\mathsf{R})\Bigr]$. Пусть $\phi(M):=\bigcup\{A_n\colon\ n\in M\}$, $M\subset\mathsf{B}_f(\mathbf{N})$, $\Sigma$ — фильтр окрестностей $\varnothing$ в $\mathsf{B}_f(\mathbf{N})$, тогда $\phi(\Sigma)\in\Psi_f(\mathsf{R})$. В силу [7, §4.1.14] имеем $\mu(\phi(\Sigma))\to 0$ для любой $\mu\in\mathsf{M}(\mathsf{R},G,R')$. Возьмём симметричную окрестность $V'={V'}^{-1}\ni 0$ в $G$ с $3V'\subset U$. Тогда существуют $L\in\mathsf{H}$ и $M\in\mathsf{B}_f(\mathbf{N})$, такие что $\mu^g(\phi(M'))-{}-\nu^h(\phi(M''))\in V'$ (или дополнительно $\tilde{D}^b_{U_*}\mu^g(\phi(M'))-\tilde{D}^b_{U_*}\nu^h(\phi(M''))\in V'$) для любых $([\mu],[\nu])\in\bar{L}^2\cap\mathsf{U}$ и $M',M''\in\mathsf{B}(\mathbf{N}\setminus M)$ (см. лемму 5.6). Выберем $\mathsf{U}$ так, что $\mu^g(\phi(M_o))-\nu^h(\phi(M_o))\in V'$ (или дополнительно $\tilde{D}^b_{U_*}\mu^g(\phi(M_o))-{}-\tilde{D}^b_{U_*}\nu^h(\phi(M_o))\in V'$) для всех $([\mu],[\nu])\in\mathsf{U}$ и $M_o\subset M$, следовательно, $\mu^g(\phi(M'))-\nu^h(\phi(M''))\in 3V'\subset U$ (или дополнительно $\tilde{D}^b_{U_*}\mu^g(\phi(M'))-{}-\tilde{D}^b_{U_*}\nu^h(\phi(M''))\in 3V'$) при $M\cap M'=M\cap M''$, последнее утверждение вытекает из следствия 5.5.

**5.8. Следствие.** *Пусть* $(A_n\colon\ n\in\mathbf{N})\in\Gamma(\mathsf{R})$, $\mathsf{H}$ — $\hat{\Phi}_4$*-фильтр на* $\mathsf{L}$ *(или* $P$*),* $\tau_G\ni U\ni 0$, *тогда существуют* $(L,M)\in\mathsf{H}\times\mathsf{B}_f(\mathbf{N})$, *такие что* $\mu^g\bigl(\bigcup(A_n\colon\ n\in M')\bigr)\in U$ *(или дополнительно* $\tilde{D}^b_{U_*}\mu^g\Bigl(\bigcup_{n\in M'}A_n\Bigr)\in U$*) для любых* $[\mu]\in\bar{L}$ *и* $M'\in\mathsf{B}(\mathbf{N}\setminus M)$.

**Доказательство.** Возьмём фиксированные $\nu$ и $W$ из п. 5.7 с $\nu\Bigl(\bigcup_{n\in M'}A_n\Bigr)\in{}\in\tilde{U}$ (или дополнительно $\tilde{D}^b_{U_*}\nu\Bigl(\bigcup_{n\in M'}A_n\Bigr)\in\tilde{U}$) и $(\mu^g-\nu)\Bigl(\bigcup_{n\in M'}A_n\Bigr)\in\tilde{U}$), где $2\tilde{U}\subset U$, $0\in\tilde{U}\in\tau_G$, $g\in W$.

**5.9. Теорема.** *Пусть* $\mathsf{U}\subset\mathsf{R}\times\tau'_e\times S^c=:Z$, $\mathrm{id}\colon\mathsf{L}_{\mathsf{U}}\to\mathsf{L}$ *(или* $\mathrm{id}\colon P_{\mathsf{U}}\to P$*) равномерно* $\Phi_4$*-непрерывно,* $\{\mathsf{H}'(A,R')\colon\ A\in\mathsf{R}\}\subset\Psi_f(\mathsf{R})$. *Тогда*

(a) $\mathsf{L}$ (*или* $P$) $\Phi_4$*-замкнуто в* $G^{\mathsf{R}} \times R_o^{S'\times S}$ (*или* $G^{\mathsf{R}} \times R_o^{S'\times S} \times G^{S'\times \mathbf{K}_s \times \mathsf{R}}$), $\mathsf{M}_o$ $\Phi_4$*-замкнуто в* $G^{\mathsf{R}}$;

(b) *если* $G$ *и* $R$ $\Phi_i$*-компактны, то* $\mathsf{L}_U$ (*или* $P_{\mathsf{U}}$) $\Phi_i$*-компактно, где* $i \in (1,2,3,4)$;

(c) *если* $G \times R_o$ *секвенциально полно, то* $\mathsf{L}_U$ (*или* $P_{\mathsf{U}}$) *тоже;*

(d) *если* $(0,0)$ — $G_\delta$*-подмножество в* $G \times R$, *то* $\mathsf{L}_U$ (*или* $P_{\mathsf{U}}$) $\Phi_2$*-компактно, если дополнительно* $G \times R$ *секвенциально полно, то* $\mathsf{L}_U$ (*или* $P_{\mathsf{U}}$) $\Phi_4$*-компактно;*

(e) $\mathsf{L}_U$ (*или* $P_{\mathsf{U}}$) *хаусдорфово.*

**Доказательство.** Напомним, что подмножество $A \subset E$ топологического или равномерного пространства $E$ называется $\Phi_i$-замкнутым (или компактным), если для любого $\Phi_i(A)$-фильтра $F$ выполняется $\lim F \subset A$ (или $\lim F \neq \varnothing$ соответственно, то есть это определение компактности отличается от обычного). В силу теоремы 4.2.14 из [7] и предложения 5.4 выполняется 5.9(a).

Из [7, §2.1.14, 1.8.11] и теоремы 5.7, $\Phi_i$-компактности $\mathsf{M}$ и $\mathsf{M}_o$, а также полноты $R_o$, $L(\mathbf{K}, v, \mathbf{C}_s)$ следует (b). Далее, (c) следует из (a) и [7, §1.8.7]; (d) следует из (c) и [7, §1.6.4], так как $G \times R$ является $\Phi_2$-компактным. Из хаусдорфовости $\mathsf{M}(\mathsf{R}, G; R')_{\mathsf{U}}$ (см. [7, §4.2.14]), $R_o^{S'\times S}$ и $L(\mathbf{K}, v, \mathbf{C}_s)$ следует (d).

**5.10. Теорема.** *Пусть* $\Phi$ — *множество* $\hat{\Phi}_4$*-фильтров на* $\mathsf{L}$ (*или* $P$), *а* $\phi\colon \mathsf{L}\times\mathsf{R}\times S'\times S(\vee\mathbf{K}) \to G\times R_o(\vee\times Y(v))$, *такое что* $\phi(\mu, \rho_\mu(*,*)(\vee\eta_\mu), A, g, x) := (\mu(A), \rho_\mu(g,x)(\vee\eta_{\mu^g}(t, U_*, A))$. *Если* $\{\mathsf{H}'(A, R') \mid A \in \mathsf{R}\} \subset \Psi_f(\mathsf{R})$, *то отображение* $\phi\colon \mathsf{R} \times S' \times S(\vee \times \mathbf{K}) \to G_{\Phi'}^{\mathsf{M}_o(\mathsf{R}), G; R'} \times R_o^{S'\times S}(\vee Y(v))$ *даёт* $R'$*-регулярную квазиинвариантную меру* (*или дополнительно псевдодифференцируемую меру*) $(A, g, x) \mapsto \phi(*, A, g, x)$ (*или* $(A, g, x, t) \mapsto \phi(*, A, g, x, t)$), *удовлетворяющую условиям* 5.1(a), (b), *где* $\Phi' := \pi_{\mathsf{M}_o}(\Phi)$, *а на* $R_o^{S'\times S}$ *топология соответствует топологии на* $\mathsf{L}$.

**Доказательство** вытекает из п. 5.4 и 5.8.

**5.11. Замечание.** Пусть имеется последовательность $\{[\mu_n]\colon\ n \in \mathbf{N}\}$ квазиинвариантных (или псевдодифференцируемых) мер, равномерно сходящаяся в равномерности 5.1(ii) с учётом условий 5.1(a), (b). Тогда согласно следствию 5.8 $\{(\mu_n)^g\colon\ n \in \mathbf{N}\}$ (или также $[\tilde{D}^b_{U_*}\mu^g_n\colon\ n]$) равномерно $\sigma$-аддитивна при любом фиксированном $g \in S'$. Более того, она равномерно $\sigma$-аддитивна по $g \in W$ для $B \in \mathsf{R}$, такого что $gB \subset V$ для подходящих открытых $W$ в $S'$ и $V$ в $S$. Для $\mathsf{L}$ это означает, что для любых $0 \in D \in \tau_R$ и $e \in U \in \tau_G$ существуют $W \ni e$, $d \in P''$, $c > 0$, $n$ и $V \ni e$, компактное подмножество $V_U$, $e \in V_U \subset V$ с $\mu_m(C) \in U$ (или $\tilde{D}^b_{U_*}\mu_m(C) \in U$) при $C \in \mathsf{R}$ и $C \subset S \setminus V_U$, с $\rho_{\mu_m}(g,x) - \rho_{\mu_j}(h,x') \in D$ (или также $\tilde{D}^b_{U_*}(\mu^g_m - \mu^h_j)(A) \in U$ при $A \in \mathrm{Bco}(V_U)$ для $P$) при $g, h \in W$ для любых $x, x' \in V_U$ с $d(x,x') < c$ и $m, j > n$. В силу теоремы 5.9 существует $\lim\limits_{n\to\infty}(\mu_n, \rho_{\mu_n}(g,x)) = (y, d(y; g, x)) \in \mathsf{L}$ — квазиинвариантная мера (или для псевдодифференцируемой меры $\lim\limits_n [\mu]_n = [\mu] \in P$). Таким образом, это аналоги теоремы Никодима для квазиинвариантных и псевдодифференцируемых мер.

# § 6. Приложение

Пусть $X = c_0(\omega_0, \mathbf{K})$ — банахово пространство над локально компактным неархимедовым бесконечным полем $\mathbf{K}$ с нетривиальным нормированием и $I$ — единичный оператор на $X$. Если $A$ — линейный оператор на $X$, то в некотором базисе в $X$ имеется матрица $(A_{i,j})_{i,j\in\mathbf{N}}$, то есть можно рассматривать его транспонированную матрицу $A^t$. Если в некотором базисе выполняется равенство $A^t = A$, то $A$ называется симметричным.

**A.1. Лемма.** *Пусть $A\colon X \to X$ — линейный обратимый оператор с компактным оператором $(A - I)$. Тогда существуют ортонормированный базис $(e_j\colon\ j \in \mathbf{N})$ в $X$, обратимые линейные операторы $C, E, D, S\colon X \to X$ с компактными $(C - I)$, $(E - I)$, $(D - I)$, такие что $A = SCDE$, $D$ диагонален, $C$ — нижняя треугольная, а $E$ — верхняя треугольная бесконечные матрицы с $C_{j,j} = 1$, $E_{j,j} = 1$ для любых $j$, $S$ — оператор, переставляющий конечное число векторов из ортонормированного базиса в $X$. Более того, существует $n \in \mathbf{N}$ и обратимые линейные операторы $A', A''\colon X \to X$ с компактными $(A' - I)$, $(A'' - I)$, $A'_{i,j} - \delta_{i,j} = 0$ при $i$ или $j > n$, $A''$ — изометрический оператор, а также существуют $\det(A')\det(A'') = \det(A)$, $|\det(A'')|_{\mathbf{K}} = 1$, $\det(D) = \det(A)$. Если дополнительно $A$ симметричен, то можно выбрать $C^t = E$ и $S = I$.*

**Доказательство.** В силу леммы 2.2 из [36] для любого $c > 0$ существует разложение $X = Y \oplus Z$ на линейные подпространства, такие что $\|(A-I)|_Z\| < c$, где $\dim_{\mathbf{K}} Y = m < \aleph_0$. В ортонормированном базисе $(e_j\colon\ j)$, таком что $\mathrm{sp}_{\mathbf{K}}(e_1, \dots, e_m) = Y$ при $c \leqslant 1/p$, получим $A = A'A''$ с $(A - I)|_Z = 0$, $|A''_{i,j} - \delta_{i,j}| \leqslant c$ для любых $i$, $j$, а $(A'_{i,j} - \delta_{i,j}) = 0$ при $i$ или $j > n$, где $n \geqslant m$ выбрано так, чтобы $|A_{i,j} - \delta_{i,j}| \leqslant c^2$ при $i > n$ и $j = 1, \dots, m$, $A_{i,j} := \tilde{e}_i(Ae_j)$, $\tilde{e}_i$ — это векторы $e_i$, рассматриваемые как линейные непрерывные функционалы $\tilde{e}_i \in X^*$. Действительно, $(A_{i,j}\colon\ i \in \mathbf{N}) = Ae_j \in X$ и $\lim\limits_{i\to\infty} A_{i,j} = 0$ для любого $j$. Из вида $A''$ следует, что $\|A''e_j - e_j\| \leqslant 1/p$ для любого $j$, следовательно, $\|A''x\| = \|x\|$ для любых $x \in X$. Поскольку $A'' = (A')^{-1}A$, $(A - I)$ и $(A' - I)$ компактны, то $(A'' - I)$ компактен вместе с $(A^{-1} - I)$, $((A')^{-1} - I)$ и $((A'')^{-1} - I)$, причём существуют $\lim\limits_{k\to\infty} \det(A)_k = \det(A) = \lim\limits_k \det((A')_k(A'')_k) = \lim\limits_k \det(A')_k \det(A'')_k = \det(A')\det(A'')$, где $(A)_k := (A_{i,j}\colon\ i, j \leqslant k)$. Это вытекает из разложений $X = Y \oplus Z$ при $c = c(k) \to 0$ для $k \to \infty$. Это означает, что для любого $c(k) = p^{-k}$ существует $n(k)$, такое что $|A_{i,j} - \delta_{i,j}| < c(k)$, $|A'_{i,j} - \delta_{i,j}| < c(k)$ и $|A''_{i,j} - \delta_{i,j}| < c(k)$ для любых $i$ или $j > n(k)$, следовательно, $|A\binom{1\dots n(k) i_1 \dots i_q}{1 \dots n(k) j_1 \dots j_q} - A\binom{1\dots n(k)}{1\dots n(k)}\delta_{i_1,j_1} \dots \delta_{i_q,j_q}| < c(k)$, где $A\binom{i_1 \dots i_r}{j_1 \dots j_r}$ — минор, отвечающий строкам $i_1, \dots, i_r$ и столбцам $j_1, \dots, j_r$, $r, q \in \mathbf{N}$. Из ультраметрического неравенства следует, что $|\det(A'') - 1| \leqslant 1/p$, поэтому $|\det(A'')|_{\mathbf{K}} = 1$, $\det(A'')_k \neq 0$ при любых $k$, $\det(A')_k = \det(A')_n$ при любых $k \geqslant n$. Используя разложение $\det(A')_n$ по последней строке (по столбцу), найдём $A'_{n,j} \neq 0$ и минор $A'\binom{1\dots n-1}{1\dots j-1, j+1, n} \neq 0$. Перестановкой столбцов (или строк)

$j$ и $n$ получим матрицу $(\bar{A}')_n$ с $\bar{A}'\binom{1\dots n-1}{1\dots n-1} \neq 0$. Таким образом, перенумерацией базисных векторов получим $A'\binom{1\dots k}{1\dots k} \neq 0$ при любых $k = 1, \dots, n$, так как $|\det(\bar{A}')_n| = |\det(A')_n|$.

Тогда существует ортонормированный базис $(e_j\colon\ j)$, такой что $A\binom{1\dots j}{1\dots j} \neq 0$ для любых $j$ и $\lim\limits_j A\binom{1\dots j}{1\dots j} = \det(A) \neq 0$. Применяя к $(A)_j$ разложение Гаусса и используя компактность $A - I$ в силу формулы (44) в [12, § II.4], которая, очевидно, также выполняется в случае поля $\mathbf{K}$, получим $D = \operatorname{diag}(D_j\colon\ j \in \mathbf{N})$, $D_j = A\binom{1\dots j}{1\dots j}/A\binom{1\dots j-1}{1\dots j-1}$; $C_{g,k} = A\binom{1,\dots,k-1,g}{1,\dots,k-1,k}/A\binom{1\dots k}{1\dots k}$; $E_{k,g} = A\binom{1,\dots,k-1,k}{1,\dots,k-1,g}/A\binom{1\dots k}{1\dots k}$ при $g = k+1, k+2, \dots$, $k \in \mathbf{N}$. Поэтому $(C - I)$, $(D - I)$, $(E - I)$ — компактные операторы, $C_{i,j}, D_j, E_{i,j} \in \mathbf{K}$ для любых $i$, $j$. В частности, при $A^t = A$ получим $E_{k,g} = C_{g,k}$.

**А.2. Замечания.**

1. Изометричный оператор $S$ не влияет на результаты по мерам, так как $A|Z$ и $S^{-1}A$ на $X$ имеют разложения типа $CDE$, где $X \ominus Z$ является конечномерным над полем $\mathbf{K}$ подпространством в $X$, то есть $X \ominus Z$ локально компактно для локально компактного поля $\mathbf{K}$. Тогда на $X \ominus Z$ существует мера Хаара со значениями в $\mathbf{R}$ или $\mathbf{Q}_s$ с $s \neq p$, $\mathbf{K} \supset Q_p$.

2. Для компактного $A - I$ можно также задать разложение $A = BDB^tC$, где $BB^t = I$, $CC^t = I$, $D$ диагонален, $B$, $D$ и $E$ — операторы на $c_0(\omega_0, \mathbf{C}_p)$ с $\lim\limits_{i+j\to\infty}(B_{i,j} - \delta_{i,j}) = \lim\limits_j(D_j - 1) = \lim\limits_{i+j\to\infty}(C_{i,j} - \delta_{i,j}) = 0$. Но в общем случае матричные элементы матриц $B$, $C$ и $D$ принадлежат $\mathbf{C}_p$ и могут быть в $\mathbf{C}_p \setminus \mathbf{K}$, так как из векового уравнения $\det(A - \lambda I)$ даже симметричной матрицы над $\mathbf{K}$ в общем случае могут появиться $p^{1/n}$ для $n \in \mathbf{N}$, но $\mathbf{R}$ не содержится в $\mathbf{K}$, а $\mathbf{C}_p$ не локально компактно. Это разложение не используется здесь для построения квазиинвариантных мер на банаховом пространстве $X$ над $\mathbf{K}$, так как на $\mathbf{C}_p$ не существует нетривиальной инвариантной меры и могут быть $B_{i,j}, D_j, C_{i,j} \in \mathbf{C}_p \setminus \mathbf{K}$. Вместо него применяется разложение, данное в лемме А.1.

**А.3. Замечания.** Пусть $\mathbf{K}$ — неархимедово бесконечное поле с нетривиальным нормированием. Рассмотрим два нормированных пространства $X$ и $Y$ над $\mathbf{K}$ и функцию $F\colon U \to Y$, где $U \subset X$ — открытое подмножество. Функция $F$ называется дифференцируемой, если для любого $t \in \mathbf{K}$, $x \in U$ и $h \in X$, таких что $x + th \in U$, существует $DF(x,h) := \{dF(x + th)/dt \mid t = 0\} = \lim\limits_{t\to 0,\ t\neq 0}\{F(x + th) - F(x)\}/t$ и $DF(x,h)$ линеен по $h$, то есть $DF(x,h) =: F'(x)h$, где $F'(x)$ — ограниченный линейный оператор (производная). Пусть $\Phi^1F(x;h;t) := \{F(x + th) - F(x)\}/t$ для любого $t \neq 0$, $x \in U$, $x + th \in U$, $h \in X$. Если эта функция $\Phi^1F(x;h;t)$ имеет непрерывное продолжение $\bar{\Phi}^1F$ на $U \times V \times S$, где $U$ и $V$ — открытые окрестности $x$ и $0$ в $X$, $S = B(\mathbf{K}, 0, 1)$ и $\|\bar{\Phi}^1F(x;h;t)\| := \sup\{\|\bar{\Phi}^1F(x;h;t)\|/\|h\|\colon\ x \in U,\ 0 \neq h \in V,\ t \in S\} < \infty$ и $\bar{\Phi}^1F(x;h;0) = F'(x)h$, тогда $F$ называется непрерывно дифференцируемой на $U$, пространство $F$ называется $C^1(U,Y)$, где $B(X,y,r) := \{z \in X\colon \ \|z-y\|_X \leqslant r\}$. По индукции определим $\Phi^{n+1}F(x;h(1),\ldots,h(n+1);t(1),\ldots,t(n+1)) := \{\Phi^nF(x+t(n+1)h(n+1);h(1),\ldots,h(n);t(1),\ldots,t(n))-\Phi^nF(x;h(1),\ldots,h(n);t(1),\ldots,t(n))\}/t(n+1)$ и пространство $C^n(U,Y)$ [22, 24].

Семейство всех биективных сюръективных отображений $U$ на само себя класса $C^n$ называется группой диффеоморфизмов и обозначается $\mathrm{Diff}^n(U) := C^n(U,U)\cap \mathrm{Hom}(U)$.

**A.4. Теорема.** *Пусть $\mathbf{K}$ — сферически полное бесконечное неархимедово поле с нетривиальным нормированием, $F \in C^n(U,Y)$ с $n \in \mathbf{N} := \{1,2,\ldots\}$, $F\colon X \to Y$, $X$ и $Y$ — банаховы пространства, $U$ — окрестность $y \in X$, $F(X) = Y$ и $[F'(y)]^{-1}$ непрерывны, где $n \in \mathbf{Z}$, $0 \leqslant n < p$ при $\mathrm{char}(\mathbf{K}) =: p > 0$, $n \geqslant 0$ при $\mathrm{char}(\mathbf{K}) = 0$. Тогда существует $r > 0$ и локально обратный оператор $G = F^{-1}$: $V := B(Y,F(y),\|F'(y)\|r) \to B(X,y,r)$, более того, $G \in C^n(V,X)$ и $G'(F(y)) = [F'(y)]^{-1}$.*

**Доказательство.** Рассмотрим открытое подмножество $U \subset X$, $[y,x] := [z\colon \ z = y + t(x-y), \ |t| \leqslant 1, \ t \in \mathbf{K}] \subset U$ и $g\colon Y \to \mathbf{K}$ — непрерывный $\mathbf{K}$-линейный функционал, $f(t) := g(F(y+t(x-y)))$. Такое семейство нетривиальных $g$, отделяющих точки в $X$, существует в силу теоремы Хана—Банаха [33, 34], так как $\mathbf{K}$ сферически полно. Тогда существует $f'(t) = g(F'(y+t(x-y))(x-y))$, $f \in C^n(B(\mathbf{K},0,1),\mathbf{K})$, следовательно, для $F'(z) \neq 0$, $z \in [x,y]$ существует $b > 0$, такое что для $g(F'(z)) \neq 0$ имеется равенство $|g(F(x+t(x-y)))-g(F(x))| = |g(F'(z)(x-y))| \times |t|$ для любых $|t| < b$. Из $|g(u(z))-g(u(x))| = |g(z)-g(x)|$ и теоремы Хана—Банаха следует, что $u$ является локальной изометрией, где $u(z):=[F'(y)]^{-1}(F(z))$, $z, x \in B(X,y,r)$, $r$ выбрано так, что $\|(\bar{\Phi}^1u(x,h,t))-h\| < \|h\|/2$ для любых $x \in B(X,y,r)$, $h \in B(X,0,r)$, $t \in B(\mathbf{K},0,1)$. Поэтому $F(B(X,y,r)) \subset B(Y,F(y),\|F'(y)\|r) =: S$. Применяя к функции $H(z):=z-[F'(y)]^{-1}(F(z)-q)$ для $q \in S$ теорему о неподвижной точке, получим $z'$, такое что $F'(z') = q$, так как $\|H(x)-H(z)\| < b \times \|x-z\|$. Из равномерной по $(g,h)$ непрерывной дифференцируемости функции $f_{g,h}(t):=g(F(y+th)$ по $t$ следует непрерывная дифференцируемость функции $G$.

**A.5. Теорема.** *Пусть $f \in C^n(U,Y)$, где $n \in \mathbf{N}$, $Y$ — банахово пространство, $n \in \mathbf{Z}$, $0 \leqslant n < p$ при $p := \mathrm{char}(\mathbf{K}) > 0$, $n \geqslant 0$ при $\mathrm{char}(\mathbf{K}) = 0$. Тогда для любых $x, y \in U$ выполняется следующая формула:*

$$f(x) = f(y) + \sum_{j=1}^{n-1} f^{(j)}(y)(x-y)^j/j! + R_n(x,y)(x-y)^{n-1},$$

*где $f^{(j)}(y)(x-y)^j = (\bar{\Phi}^jf)(y;x-y,\ldots,x-y;0,\ldots,0) \times j!$, $f^{(j)}(y)h^j := f^{(j)}(y)(h,\ldots,h)$, $f^{(j)}(y)\colon U \to L_j(X^{\otimes j},Y)$, $R_n(x,y)\colon U^2 \to L_{n-1}(X^{\otimes(n-1)},Y)$ с $R_n(x,y) = o(\|x-y\|)$, где $L_j(X^{\bigotimes j},Y)$ — банахово пространство непрерывных полилинейных операторов из $X^{\bigotimes j}$ в $Y$, $U$ открыто в $X$.*

**Доказательство.** Для $n = 1$ эта формула следует из определения $\bar{\Phi}^1f$. Для $n = 2$ возьмём $R_2(x,y) = \bar{\Phi}^2f(x;y,y)$. Очевидно, $C^{n-1}(U,Y) \supset C^n(U,Y)$. Пусть утверждение выполняется для $n-1$, где $n \geqslant 3$. Тогда из

$$\begin{aligned}&\bar{\Phi}^{n-1} f(y+t_n(x-y); x-y, \ldots, x-y; t_1, \ldots, t_{n-1}) = \\ &\quad = \bar{\Phi}^{n-1} f(y; x-y, \ldots, x-y; t_1, \ldots, t_{n-1}) + \\ &\quad + (\bar{\Phi}^1(\bar{\Phi}^{n-1} f(y; x-y, \ldots, x-y; t_1, \ldots, t_{n-1}))(y; x-y; t_n)) \times t_n\end{aligned}$$

и непрерывности $\bar{\Phi}^n$ следует, что

$$\begin{aligned}&R_n(x,y)(x-y)^{n-1} = \\ &\quad = \bar{\Phi}^n f(y; x-y, \ldots, x-y; 0, \ldots, 0, 1) - f^{(n)}(y)(x-y)^n/n! = \\ &\quad = \alpha(x-y)(x-y)^{n-1},\end{aligned}$$

где $\lim\limits_{x\to y,\ x\neq y} \alpha(x-y)/\|x-y\| = 0$, то есть $\alpha(x-y) = o(\|x-y\|)$.

## Литература


[1] Aref'eva I. Ya., Dragovich B., Volovich I. V. On the $p$-adic summability of the anharmonic oscillator // Phys. Lett. — 1988. — Vol. B 200. — P. 512—514.

[2] Бикулов А. Х., Волович И. В. $p$-адическое броуновское движение // Изв. РАН. Сер. матем. — 1997. — Т. 61, № 3. — С. 75—90.

[3] Bosch S., Guntzer U., Remmert R. Non-Archimedean Analysis. — Berlin: Springer, 1984.

[4] Богачев В. И., Смолянов О. Г. Аналитические свойства бесконечномерных распределений // Успехи мат. наук. — 1990. — Т. 45, № 3. — С. 3—83.

[5] Бурбаки Н. Интегрирование. Книга VI. Выпуски XIII, XXI, XXIX, XXXV. Главы 1—9. — М.: Наука, 1970, 1977.

[6] Christensen J. P. R. Topology and Borel Structure. — Amsterdam: Elsevier, 1974. — North-Holland Math. Studies, No. 10.

[7] Constantinescu C. Spaces of Measures. — Berlin: Springer, 1984.

[8] Dalecky Yu. L., Fomin S. V. Measures and Differential Equations in Infinite-Dimensional Spaces. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991.

[9] Дйордйевич Г. С., Драгович Б. $p$-адический и адельный гармонический осциллятор с зависящей от времени частотой // Теор. и матем. физ. — 2000. — Т. 124, № 2. — С. 1059—1067.

[10] Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.

[11] Federer H. Geometric measure theory. — Berlin: Springer, 1969.

[12] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988.

[13] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Некоторые применения гармонического анализа. Обобщенные функции. Т. 4. — М.: Физматгиз, 1961.

[14] Хеннекен П. Л., Тортра А. Теория вероятностей и некоторые её приложения. — М.: Наука, 1974.

[15] Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. — М.: Наука, 1979.

[16] Isham C. J., Milnor J. // Relativity, Groups and Topology. II / Editors B. S. De Witt, R. Stora. — Amsterdam: Elsevier, 1984. — P. 1007—1290.

[17] Jang Y. Non-Archimedean quantum mechanics. — Tohoku Math. Publ. No. 10. — 1998.

[18] Хренников А. Ю. Математические методы неархимедовой физики // Успехи матем. наук. — 1990. — Т. 45, № 4. — С. 79—110.

[19] Хренников А. Ю., Эндо М. Неограниченность $p$-адических гауссовых распределений // Изв. РАН. Сер. матем. — 1992. — Т. 56. — С. 1104—1115.

[20] Людковский С. В. Меры на группах диффеоморфизмов неархимедовых банаховых многообразий // Успехи матем. наук. — 1996. — Т. 51, № 2. — С. 169—170.

[21] Людковский С. В. Неархимедовы полиэдральные разложения ультраравномерных пространств // Фундам. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, № 2. — С. 455—475.

[22] Людковский С. В. Меры на группах диффеоморфизмов неархимедовых многообразий, представления групп и их приложения // Теор. и матем. физ. — 1999. — Т. 119, № 3. — С. 381—396.

[23] Людковский С. В. Квазиинвариантные меры на неархимедовых полугруппах петель // Успехи матем. наук. — 1998. — Т. 53, № 3. — С. 203—204.

[24] Ludkovsky S. V. Irreducible unitary representations of non-Archimedean groups of diffeomorphisms // Southeast Asian Bulletin of Mathematics. — 1998. — Vol. 22. — P. 419—436.

[25] Ludkovsky S. V. Properties of quasi-invariant measures on topological groups and associated algebras // Annales Mathem. B. Pascal. — 1999. — Vol. 6, No. 1. — P. 33—45.

[26] Ludkovsky S. V. Quasi-invariant measures on non-Archimedean groups and semigroups of loops and paths, their representations // Annales Mathem. B. Pascal. — 2000. — Vol. 7, No. 2. — P. 19—53, 55—80.

[27] Людковский С. В. Неархимедовы свободные банаховы пространства // Фундам. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, № 3. — С. 979—987.

[28] Ludkovsky S. V. Quasi-invariant measures on a group of diffeomorphisms of an infinite-dimensional real manifold and induced irreducible unitary representations // Rendiconti dell'Istituto di Matem. dell'Università di Trieste. Nuova Serie. — 1999. — Vol. 31. — P. 101—134.

[29] Mądrecki A. Minlos' theorem in non-Archimedean locally convex spaces // Comment. Math. (Warsaw). — 1991. — Vol. 30. — P. 101—111.

[30] Mądrecki A. Some negative results on existence of Sazonov topology in $l$-adic Frechet spaces // Arch. Math. — 1991. — Vol. 56. — P. 601—610.

[31] Mądrecki A. On Sazonov type topology in $p$-adic Banach space // Math. Z. — 1985. — Vol. 188. — P. 225—236.

[32] Monna A. P., Springer T. A. Integration non-archimedienne // Indag. Math. — 1963. — Vol. 25. — P. 634—653.

[33] Narici L., Beckenstein E. Topological Vector Spaces. — New York: Marcel Dekker Inc., 1985.

[34] Rooij A. C. M., van. Non-Archimedean Functional Analysis. — New York: Marcel Dekker Inc., 1978.

[35] Schikhof W. H. Ultrametric Calculus. — Cambridge: Camb. Univ. Press, 1984.

[36] Schikhov W. H. On $p$-adic compact operators. — Report 8911. Dept. Math. Cath. Univ., Nijmegen, the Netherlands. — 1989.

[37] Schikhof W. H. A Radon—Nikodym theorem for non-Archimedean integrals and absolutely continuous measures on groups // Indag. Math. Ser. A. — 1971. — Vol. 33, no. 1. — P. 78—85.

[38] Скороход А. В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1974.

[39] Смолянов О. Г., Фомин С. В. Меры на линейных топологических пространствах // Успехи матем. наук. — 1976. — Т. 31, № 4. — С. 3—56.

[40] Topsoe F. Compactness and tightness in a space of measures with the topology of weak convergence // Math. Scand. — 1974. — Vol. 34. — P. 187—210.

[41] Topsoe F. Some special results on convergent sequences of Radon measures // Manuscripta Math. — 1976. — Vol. 19. — P. 1—14.

[42] Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1985.

[43] Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И. $p$-адический анализ и математическая физика. — М.: Наука, 1994.

[44] Weil A. Basic Number Theory. — Berlin: Springer, 1973.