Нечёткие модальные логики

А. М. МИРОНОВ
Институт программных систем РАН,
г. Переславль-Залесский

УДК 510.643+510.644+519.68

Ключевые слова: логика, нечёткость, модальность, модели Крипке.

Аннотация

В статье введён и изучен класс логических исчислений, называемых нечёткими модальными логиками. Описана семантика данных исчислений в классе нечётких моделей Крипке и доказана теорема полноты минимальной нечёткой модальной логики FK в классе нечётких моделей Крипке.

Abstract

A. M. Mironov, Fuzzy modal logics, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 1, pp. 201—230.

In the paper we introduce formal calculi which are a generalization of propositional modal logics. These calculi are called *fuzzy modal logics*. We introduce the concept of a fuzzy Kripke model and consider a semantics of these calculi in the class of fuzzy Kripke models. The main result of the paper is the completeness theorem of a minimal fuzzy modal logic in the class of fuzzy Kripke models.

1. Введение

Математические методы анализа систем заключаются в построении математических моделей исследуемых систем и формальном анализе этих моделей.

Поскольку модели систем не тождественны самим системам и являются лишь их аппроксимациями, то, следовательно, свойства исследуемых систем и свойства их моделей могут различаться. Данная ситуация приводит к существенным трудностям при предсказании свойств реальных систем на основе информации о свойствах их моделей.

Один способ нахождения точных свойств анализируемых систем заключается в построении как можно более точных и детальных их математических моделей. Во многих ситуациях данный путь приводит к большим трудностям по причине того, что большая сложность детальных моделей может вызывать существенные вычислительные проблемы при их формальном анализе.

Другой путь исследования свойств реальных систем заключается в построении таких их приближённых математических моделей, которые, хотя и являют-

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 1, с. 201—230.

ся грубыми подобиями исследуемых систем, имеют приемлемую вычислительную сложность. Основная возникающая здесь проблема заключается в оценке меры расхождения между свойствами реальной системы и свойствами её приближённой модели.

Для точного оценивания данного расхождения необходим точный учёт в математической модели анализируемой системы всех предположений о нечёткости, недостоверности и неопределённости при построении данной модели, меры точности измерения параметров анализируемой системы и т. п.

Все нечёткие компоненты математической модели анализируемой системы можно условно сгруппировать в две следующие категории.

1. Нечёткие компоненты, возникающие по причине *эффекта случайности*. Данный эффект имеет место, например, тогда, когда нечёткость в процессе измерения значения некоторого параметра анализируемой системы носит вероятностный характер и измеряемые значения данного параметра подчиняются некоторым статистическим закономерностям.

   Данный вид нечёткости исследуется методами теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов.

2. Нечёткие компоненты, возникающие по причине *концептуальной нечёткости*. Данные компоненты могут быть связаны с неполным и недостоверным знанием об изучаемой системе.

Настоящая статья посвящена построению нового математического аппарата для исследования нечётких компонентов, относящихся ко второй категории.

Математические подходы к представлению и анализу нечётких знаний были рассмотрены во многих работах, в частности в статьях [3–14]. Однако во всех них не рассматривались математические методы для анализа концептуальной нечёткости в поведении динамических систем. Настоящая работа в некоторой степени восполняет данный пробел.

Наше представление нечёткости в поведении динамических систем основывается на понятии булевозначной меры близости между состояниями динамических систем. Мы представляем поведение динамических систем нечёткими моделями Крипке, которые являются обобщением известных в модальной логике моделей Крипке, широко используемых в компьютерной науке для моделирования поведения дискретных динамических систем (см., например, [2]). Основная задача статьи заключается в построении формальных логических систем, предназначенных для разработки на их основе языков спецификации поведения нечётких динамических систем. Данные формальные системы называются в статье *нечёткими модальными логиками*. В работе описана семантика нечётких модальных логик в классе нечётких моделей Крипке и доказана теорема полноты минимальной нечёткой модальной логики в классе нечётких моделей Крипке.

2. Нечёткие модальные логики

2.1. Шкала оценок

Напомним, что *полной решёткой* называется частично упорядоченное множество $(\mathcal{B}, \leqslant)$, такое что для каждого подмножества $Q \subseteq \mathcal{B}$ существуют его точная нижняя грань и точная верхняя грань, т. е. такие элементы $\inf(Q)$ и $\sup(Q)$ множества $\mathcal{B}$, что для каждого $b \in \mathcal{B}$ имеют место соотношения

$$(\forall q \in Q \quad b \leqslant q) \iff b \leqslant \inf(Q),$$
$$(\forall q \in Q \quad q \leqslant b) \iff \sup(Q) \leqslant b.$$

Ниже элементы $\inf(\mathcal{B})$ и $\sup(\mathcal{B})$ обозначаются символами 0 и 1 соответственно.

Для произвольного конечного подмножества

$$Q = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathcal{B}$$

элементы $\inf(Q)$ и $\sup(Q)$ будут обозначаться знакосочетаниями

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_n \quad \text{и} \quad a_1 \vee \dots \vee a_n$$

соответственно. Для данных элементов также будут использоваться обозначения

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{Bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

соответственно.

Шкалой оценок называется полная решётка $\mathcal{B}$, на которой задана бинарная операция

$$\to : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B},$$

такая что для всех $a, b, c \in \mathcal{B}$ верны следующие соотношения:

$$a \leqslant b \iff a \to b = 1, \tag{1}$$
$$a \to (b \to c) = (a \wedge b) \to c, \tag{2}$$
$$(a \to 0) \to 0 = a. \tag{3}$$

Для каждой пары $a, b \in \mathcal{B}$ элемент

$$a \to b$$

можно интерпретировать как меру истинности высказывания

$$«a \leqslant b».$$

Отметим, что из данного определения вытекает, что $\mathcal{B}$ является булевой алгеброй относительно бинарных операций $\wedge$, $\vee$ и унарной операции $\neg$, где для произвольных $a, b \in \mathcal{B}$

$$a \wedge b \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{a, b\}, \quad a \vee b \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{a, b\}, \quad \neg a \stackrel{\text{def}}{=} a \to 0.$$

В нижеследующем тексте символ $\mathcal{B}$ обозначает некоторую фиксированную шкалу оценок.

Для каждой пары $a, b \in \mathcal{B}$ символом $a \leftrightarrow b$ будет ниже обозначаться элемент $(a \to b) \wedge (b \to a)$.

2.2. Нечёткие модальные формулы

Пусть задано некоторое счётное множество PV, элементы которого называются *пропозициональными переменными*.

Множество Fm *нечётких модальных формул* (называемых ниже просто *формулами*) определяется индуктивно следующим образом.

- Каждый элемент множества PV является формулой.
- Каждый элемент шкалы $\mathcal{B}$ является формулой.
- Если A и B — формулы, то знакосочетания $A \wedge B$, $A \vee B$ и $A \to B$ являются формулами.
- Если A — формула и $a \in \mathcal{B}$, то знакосочетание $\Box_a A$ является формулой.

Модальные связки вида $\Box_a$ называются *нечёткими модальными операторами*.

При некоторых интерпретациях формул и оценок формулу вида $\Box_a A$ можно интерпретировать как высказывание

мера убедительности факта, выражаемого формулой A, равна a.

Для произвольного списка $A_1, \ldots, A_n$ формул из Fm знакосочетания

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \quad \text{и} \quad A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$$

являются сокращённой записью формул

$$A_1 \wedge (A_2 \wedge (\ldots \wedge A_n) \ldots) \quad \text{и} \quad A_1 \vee (A_2 \vee (\ldots \vee A_n) \ldots)$$

соответственно. Данные формулы также будут обозначаться знакосочетаниями

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ \ldots \\ A_n \end{Bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} A_1 \\ \ldots \\ A_n \end{bmatrix}$$

соответственно.

Для каждой пары $A, B \in \mathrm{Fm}$ знакосочетание $A \leftrightarrow B$ является сокращённым обозначением формулы

$$(A \to B) \wedge (B \to A).$$

2.3. Операторы подстановки

Оператором подстановки на множестве Fm называется пара

$$\theta = ((p_1, \ldots, p_n), (A_1, \ldots, A_n)), \tag{4}$$

где $n \geqslant 1$ и

- $(p_1, \ldots, p_n)$ — список различных пропозициональных переменных,
- $(A_1, \ldots, A_n)$ — список формул.

Оператор θ индуцирует отображение множества Fm в себя, обозначаемое тем же символом θ и определяемое индуктивно следующим образом: для каждой формулы $A \in \mathrm{Fm}$

- если $A = p_i \in \{p_1, \ldots, p_n\}$, то
$$\theta(A) \stackrel{\mathrm{def}}{=} A_i,$$
- если $A \in \mathrm{PV} \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ или $A = a \in \mathcal{B}$, то
$$\theta(A) \stackrel{\mathrm{def}}{=} A,$$
- если A имеет вид
$$B \wedge C,\ B \vee C,\ B \to C \text{ или } \Box_a B,$$
то $\theta(A)$ имеет вид
$$\theta(B) \wedge \theta(C),\ \theta(B) \vee \theta(C),\ \theta(B) \to \theta(C),\ \Box_a \theta(B)$$
соответственно.

2.4. Тавтологии

Пусть A и B — некоторые формулы из Fm. Мы будем говорить, что *B получена из A эквивалентным преобразованием*, если

- A содержит подформулу вида
$$a \wedge b,\ a \vee b \text{ или } a \to b,$$
где $a, b \in \mathcal{B}$, и
- B получается из A путём замены данной подформулы на элемент шкалы $\mathcal{B}$, являющийся результатом применения соответствующей операции к паре a, b.

Две формулы из Fm называются *эквивалентными*, если одну из них можно получить из другой путём нескольких эквивалентных преобразований.

Пусть A — формула, не содержащая модальных операторов и список всех пропозициональных переменных, входящих в A, имеет вид
$$(p_1, \ldots, p_n).$$
Формула A называется *тавтологией*, если для каждого оператора подстановки θ вида (4), такого что
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad A_i = a_i \in \mathcal{B},$$
формула $\theta(A)$ эквивалентна элементу $1 \in \mathcal{B}$.

2.5. Нечёткие модальные логики

Нечёткой модальной логикой называется произвольное подмножество L множества Fm, обладающее следующими свойствами:

- каждая тавтология принадлежит L,
- для всех $A, B \in \mathrm{Fm}$ и каждого $a \in \mathcal{B}$

$$\Box_a \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} \Box_a A \\ \Box_a B \end{Bmatrix} \in L, \tag{5}$$

- для каждого $a \in \mathcal{B}$

$$a \to \Box_a 1 \in L, \tag{6}$$

- для каждой формулы $A \in \mathrm{Fm}$ и каждого $a \in \mathcal{B}$

$$\Box_a A \to a \in L, \tag{7}$$

- для всех $A, B \in \mathrm{Fm}$

$$\begin{array}{ll} \textbf{если} & A \in L \ \ \textbf{и} \ \ A \to B \in L, \\ \textbf{то} & B \in L, \end{array} \tag{8}$$

- для каждой формулы $A \in \mathrm{Fm}$ и каждого оператора подстановки θ

$$\begin{array}{ll} \textbf{если} & A \in L, \\ \textbf{то} & \theta(A) \in L, \end{array} \tag{9}$$

- для всех $A, B \in \mathrm{Fm}$ и всех $a, b \in \mathcal{B}$

$$\begin{array}{ll} \textbf{если} & a \to (A \to B) \in L, \\ \textbf{то} & a \to (\Box_b A \to \Box_b B) \in L, \end{array} \tag{10}$$

- для каждой формулы $A \in \mathrm{Fm}$ и каждого подмножества $\{a_i \mid i \in \Im\} \subseteq \mathcal{B}$

$$\begin{array}{ll} \textbf{если} & \forall i \in \Im \ \ a_i \to A \in L, \\ \textbf{то} & \big(\sup\limits_{i \in \Im} a_i\big) \to A \in L. \end{array} \tag{11}$$

Из данного определения вытекает, что существует минимальная (относительно включения) нечёткая модальная логика, которую мы будем обозначать знакосочетанием FK (которое является аббревиатурой словосочетания *Fuzzy Kripke*).

Нетрудно доказать, что для каждой нечёткой модальной логики L имеет место следующее правило вывода:

$$\begin{array}{ll} \textbf{если} & a_1 \to A_1 \in L, \ldots, a_n \to A_n \in L \\ & (\text{где } a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{B} \text{ и } A_1, \ldots, A_n \in \mathrm{Fm}), \\ \textbf{то} & \begin{Bmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} A_1 \\ \ldots \\ A_n \end{Bmatrix} \in L. \end{array} \tag{12}$$

Ниже вместо термина «нечёткая модальная логика» будет использоваться эквивалентный ему в данной статье термин «логика».

Для каждой формулы A и каждой логики L символ

$$[\![A]\!]_L$$

обозначает точную верхнюю грань множества

$$\{a \in \mathcal{B} \mid a \to A \in L\}. \tag{13}$$

Из данного определения и из свойства (11) следует соотношение

$$\forall a \in \mathcal{B} \quad a \to A \in L \iff a \leqslant [\![A]\!]_L.$$

3. Нечёткие модели Крипке

3.1. Булевозначные множества

Напомним [1], что *булевозначным множеством* называется пара

$$W = (X, \mu), \tag{14}$$

где X — множество (называемое *носителем* W), а μ — отображение вида

$$\mu\colon X \times X \to \mathcal{B},$$

обладающее следующими свойствами:

$$\forall x, y \in X \qquad \mu(x, y) = \mu(y, x), \tag{15}$$

$$\forall x, y, z \in X \quad \begin{Bmatrix} \mu(x, y) \\ \mu(y, z) \end{Bmatrix} \leqslant \mu(x, z). \tag{16}$$

Для каждой пары $x, y \in X$ элемент $\mu(x, y)$ называется *мерой близости x и y*. Для каждого $x \in X$ элемент $\mu(x, x)$ называется *мерой принадлежности* элемента x булевозначному множеству (14).

Бинарным отношением на (14) называется произвольное отображение R вида

$$R\colon X \times X \to \mathcal{B},$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$$\forall x, y, x', y' \in X \quad \begin{Bmatrix} R(x, y) \\ \mu(x, x') \\ \mu(y, y') \end{Bmatrix} \leqslant R(x', y'), \tag{17}$$

$$\forall x, y \in X \qquad R(x, y) \leqslant \begin{Bmatrix} \mu(x, x) \\ \mu(y, y) \end{Bmatrix}. \tag{18}$$

Для каждой пары $(x, y) \in X \times X$ элемент $R(x, y)$ можно интерпретировать как *меру принадлежности* данной пары бинарному отношению R.

Подмножеством булевозначного множества (14) называется произвольное отображение s вида

$$s\colon X \to \mathcal{B},$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$$\forall x, x' \in X \quad \left\{ \begin{matrix} s(x) \\ \mu(x, x') \end{matrix} \right\} \leqslant s(x'), \tag{19}$$

$$\forall x \in X \qquad s(x) \leqslant \mu(x, x). \tag{20}$$

Для каждого $x \in X$ элемент $s(x)$ можно интерпретировать как *меру принадлежности* элемента x подмножеству s.

Совокупность всех подмножеств булевозначного множества (14) обозначается символом $\mathrm{Sub}(W)$.

Ниже для каждого булевозначного множества W его носитель будет обозначаться тем же самым символом W и для каждой пары x, y элементов носителя мера близости x и y будет обозначаться символом $W(x, y)$. Кроме того, для каждого $x \in W$ символ $W(x)$ по определению обозначает меру принадлежности элемента x булевозначному множеству W.

3.2. Определение нечёткой модели Крипке

Нечёткой моделью Крипке называется произвольная тройка M вида

$$M = (W, \{R^a \mid a \in \mathcal{B}\}, \xi), \tag{21}$$

компоненты которой определяются следующим образом:

- W — это некоторое булевозначное множество, элементы которого называются *точками*,
- $\{R^a \mid a \in \mathcal{B}\}$ — это $\mathcal{B}$-индексированная совокупность бинарных отношений на W, называемых *отношениями достижимости*,
- ξ — это отображение вида
$$\xi\colon \mathrm{PV} \to \mathrm{Sub}(W), \tag{22}$$
называемое *оценкой пропозициональных переменных*.

Ниже вместо термина «нечёткая модель Крипке» будет использоваться эквивалентный ему в данной статье термин «модель».

3.3. Оценка формул в моделях

Для каждой формулы $A \in \mathrm{Fm}$ и каждой модели (21) *оценкой A в M* называется отображение

$$[\![A]\!]_M\colon W \to \mathcal{B},$$

которое сопоставляет каждому $x \in W$ оценку $[\![A]\!]_x \in \mathcal{B}$, определяемую следующим образом:

- если $A = p \in \mathrm{PV}$, то
$$[\![A]\!]_x \stackrel{\text{def}}{=} \xi(p)(x), \tag{23}$$
- если $A = a \in \mathcal{B}$, то
$$[\![A]\!]_x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} a \\ W(x) \end{Bmatrix}, \tag{24}$$
- если $A = B \wedge C$, то
$$[\![A]\!]_x \stackrel{\text{def}}{=} [\![B]\!]_x \wedge [\![C]\!]_x, \tag{25}$$
- если $A = B \vee C$, то
$$[\![A]\!]_x \stackrel{\text{def}}{=} [\![B]\!]_x \vee [\![C]\!]_x, \tag{26}$$
- если $A = B \to C$, то
$$[\![A]\!]_x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} [\![B]\!]_x \to [\![C]\!]_x \\ W(x) \end{Bmatrix}, \tag{27}$$
- если $A = \Box_a B$, то
$$[\![A]\!]_x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} a \\ \inf\limits_{y \in W} (R^a(x,y) \to [\![B]\!]_y) \\ W(x) \end{Bmatrix}. \tag{28}$$

Нетрудно доказать, что отображение $[\![A]\!]_M$ является подмножеством булевозначного множества W.

3.4. Истинность формул в моделях

Формула $A \in \mathrm{Fm}$ называется *истинной в точке* x модели (21), если имеет место соотношение
$$[\![A]\!]_x = W(x). \tag{29}$$

Формула $A \in \mathrm{Fm}$ называется *истинной в модели* (21), если она истинна в каждой точке этой модели.

Нетрудно доказать, что каждая формула логики FK истинна в каждой модели. Это следует из того, что

- каждая тавтология истинна в любой модели,
- формулы из соотношений (5), (6) и (7) истинны в произвольной модели,
- правила вывода (8), (9), (10) и (11) сохраняют свойство истинности в произвольной модели.

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству обратного утверждения: если формула истинна в каждой модели, то она принадлежит логике FK.

4. L-совместимые множества

4.1. Непротиворечивые логики

Логика $L \subseteq \mathrm{Fm}$ называется *непротиворечивой*, если

$$\forall a \in \mathcal{B} \quad a \in L \implies a = 1. \tag{30}$$

Докажем, что логика FK непротиворечива.

Как было отмечено в разделе 3.4, для каждого $a \in \mathcal{B}$ из соотношения $a \in \mathrm{FK}$ следует, что формула a истинна в каждой модели, в частности в модели вида (21), где W состоит из одного элемента x и

$$W(x) = 1. \tag{31}$$

Соотношение (30) следует из (24), (29) и (31). ■

Ниже под логикой понимается непротиворечивая логика.

4.2. Определение L-совместимого множества

Пусть L — некоторая непротиворечивая логика и u — некоторое подмножество Fm.

Множество u называется *L-совместимым*, если для каждого конечного подмножества множества u, имеющего вид

$$\{a_1 \to A_1, \dots, a_n \to A_n\} \quad (\text{где } a_1, \dots, a_n \in \mathcal{B},\ A_1, \dots, A_n \in \mathrm{Fm}), \tag{32}$$

и каждого $b \in \mathcal{B}$ из соотношения

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_n \end{Bmatrix} \to b \in L \tag{33}$$

следует соотношение

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{Bmatrix} \leqslant b. \tag{34}$$

4.3. Свойства L-совместимых множеств

Для каждой пары u_1, u_2 подмножеств Fm неравенство

$$u_1 \leqslant u_2$$

означает, что

для каждой формулы вида $a \to A \in u_1 \quad a = 0$ или $\exists b \geqslant a\colon b \to A \in u_2$.

Теорема 1. *Для каждой пары u_1, u_2 подмножеств* Fm *из неравенства $u_1 \leqslant u_2$ следует, что если u_2 L-совместимо, то u_1 тоже L-совместимо.* ■

Теорема 2. *Каждая непротиворечивая логика L является L-совместимым множеством.*

Доказательство.

Применяя правило вывода (12) к подмножеству (32) множества L, получаем соотношение

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_n \end{Bmatrix} \in L. \tag{35}$$

Из (33), (35) и (8) следует соотношение

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{Bmatrix} \to b \in L. \tag{36}$$

Из (36) и (30) следует (34). ■

Ниже символ L обозначает произвольную непротиворечивую логику.

Теорема 3. *Пусть u — некоторое L-совместимое множество, A — некоторая формула и Q — множество всех элементов $a \in \mathcal{B}$, таких что*

$$u \cup \{a \to A\} \ L\text{-совместимо}. \tag{37}$$

Тогда для каждого $a \in \mathcal{B}$ имеет место неравенство

$$a \leqslant \sup(Q) \iff a \in Q.$$

Доказательство.

Заметим, что $Q \neq \varnothing$, так как $0 \in Q$.

Импликация

$$a \in Q \implies a \leqslant \sup(Q)$$

очевидна.

Импликация

$$a \leqslant \sup(Q) \implies a \in Q$$

эквивалентна следующей паре утверждений.

1. Множество

$$u \cup \{\sup(Q) \to A\} \tag{38}$$

является L-совместимым.

2. Если множество

$$u \cup \{a \to A\}$$

L-совместимо, то для каждого $a' \leqslant a$ множество

$$u \cup \{a' \to A\}$$

тоже L-совместимо.

Утверждение 2 следует из теоремы 1.

Докажем утверждение 1: для каждого подмножества (32) множества (38) и каждого $b \in \mathcal{B}$ из (33) следует (34).

Так как u по предположению L-совместимо, то для доказательства импликации (33) $\Longrightarrow$ (34) достаточно рассмотреть лишь случай, когда множество (32) имеет следующий вид:

- $(a_1 \to A_1) = (\sup(Q) \to A)$,
- $\forall i = 2, \ldots, n \quad (a_i \to A_i) \in u$.

В этом случае (34) имеет следующий вид:

$$\left.\begin{cases} \sup(Q) \\ a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \end{cases}\right\} \leqslant b. \tag{39}$$

(39) эквивалентно соотношению

$$\forall a \in Q \quad \left.\begin{cases} a \\ a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \end{cases}\right\} \leqslant b. \tag{40}$$

(40) следует из (37). ■

Элемент $\sup(Q)$, который однозначно определяется по A и u, обозначается ниже символом

$$[\![A]\!]_u. \tag{41}$$

Из определения элемента $[\![A]\!]_u$ вытекает, что для каждого $u \subseteq \mathrm{Fm}$ имеет место импликация

$$u \ L\text{-совместимо} \implies \forall A \in \mathrm{Fm} \quad u \cup \{[\![A]\!]_u \to A\} \ L\text{-совместимо}. \tag{42}$$

Теорема 4. *Пусть u_1 и u_2 — L-совместимые множества, такие что $u_1 \leqslant u_2$. Тогда для каждой формулы A*

$$[\![A]\!]_{u_2} \leqslant [\![A]\!]_{u_1}. \tag{43}$$

Доказательство.

Так как множество

$$u_2 \cup \{[\![A]\!]_{u_2} \to A\}$$

L-совместимо и $u_1 \cup \{[\![A]\!]_{u_2} \to A\} \leqslant u_2 \cup \{[\![A]\!]_{u_2} \to A\}$, то из теоремы 1 следует, что множество

$$u_1 \cup \{[\![A]\!]_{u_2} \to A\} \tag{44}$$

L-совместимо.

Из L-совместимости (44) и из определения элемента $[\![A]\!]_{u_1}$ следует неравенство (43). ■

Теорема 5. *Пусть $u \subseteq \mathrm{Fm}$ — некоторое L-совместимое множество и A, B — пара формул, таких что*

$$A \to B \in L. \tag{45}$$

Тогда имеет место неравенство

$$[\![A]\!]_u \leqslant [\![B]\!]_u. \tag{46}$$

Доказательство.
(46) эквивалентно L-совместимости множества

$$u \cup \{[\![A]\!]_u \to B\}, \tag{47}$$

т. е. утверждению о том, что для каждого подмножества (32) множества (47) и каждого $b \in \mathcal{B}$ из (33) следует (34).

Так как u по предположению L-совместимо, то для доказательства импликации (33) $\Longrightarrow$ (34) достаточно рассмотреть лишь тот случай, когда (32) имеет следующий вид:

- $(a_1 \to A_1) = ([\![A]\!]_u \to B)$,
- для каждого $i = 2, \ldots, n$

$$a_i \to A_i \in u. \tag{48}$$

В этом случае (33) эквивалентно соотношению

$$B \to \left(\left\{ \begin{matrix} A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{matrix} \right\} \to b \right) \in L. \tag{49}$$

Из (45) и (49) следует соотношение

$$A \to \left(\left\{ \begin{matrix} A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{matrix} \right\} \to b \right) \in L, \tag{50}$$

которое эквивалентно соотношению

$$\left\{ \begin{matrix} A \\ A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{matrix} \right\} \to b \in L. \tag{51}$$

Так как множество

$$u \cup \{[\![A]\!]_u \to A\}$$

является L-совместимым, то из (48) и (51) следует неравенство

$$\left\{ \begin{matrix} [\![A]\!]_u \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{matrix} \right\} \leqslant b, \tag{52}$$

которое эквивалентно (34) для данного случая. ■

Теорема 6. *Для каждого L-совместимого множества u и каждой формулы $A \in \mathrm{Fm}$ имеет место неравенство*

$$[\![A]\!]_L \leqslant [\![A]\!]_u. \tag{53}$$

Доказательство.
(53) эквивалентно L-совместимости множества

$$u \cup \{[\![A]\!]_L \to A\}, \tag{54}$$

т. е. утверждению о том, что для каждого подмножества (32) множества (54) и каждого $b \in \mathcal{B}$ из (33) следует (34).

Так как u по предположению L-совместимо, то для доказательства импликации (33) $\Longrightarrow$ (34) достаточно рассмотреть лишь тот случай, когда (32) имеет следующий вид:

- $(a_1 \to A_1) = ([\![A]\!]_L \to A)$,
- для каждого $i = 2, \ldots, n$

$$a_i \to A_i \in u. \tag{55}$$

В этом случае (33) эквивалентно соотношению

$$A \to \left(\begin{Bmatrix} A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{Bmatrix} \to b\right) \in L. \tag{56}$$

Из соотношений

$$[\![A]\!]_L \to A \in L$$

и (56) следует соотношение

$$[\![A]\!]_L \to \left(\begin{Bmatrix} A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{Bmatrix} \to b\right) \in L. \tag{57}$$

Из (57) следует соотношение

$$\begin{Bmatrix} A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{Bmatrix} \to ([\![A]\!]_L \to b) \in L. \tag{58}$$

Так как u по предположению L-совместимо, то из (55) и (58) следует неравенство

$$\begin{Bmatrix} a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{Bmatrix} \leqslant [\![A]\!]_L \to b. \tag{59}$$

Из (59) следует (34). ■

5. L-полные множества

5.1. Определение L-полного множества

Пусть x — некоторое подмножество множества Fm.
Множество x называется *L-полным*, если

- x является L-совместимым,
- для каждой формулы $A \in \mathrm{Fm}$

$$[\![A]\!]_x \to A \in x. \tag{60}$$

5.2. Пополнение L-совместимых множеств

Пусть u — некоторое L-совместимое множество и x — некоторое L-полное множество.

x называется *пополнением* u, если

$$u \leqslant x. \tag{61}$$

Теорема 7. *Для каждого L-совместимого множества u существует пополнение x.*

Доказательство. Пусть последовательность

$$B_1, B_2, \ldots \tag{62}$$

есть некоторое перечисление всех формул из Fm.

Определим последовательность

$$u_1, u_2, \ldots$$

подмножеств множества Fm следующим образом:

- $u_1 \overset{\mathrm{def}}{=} u$,
- для каждого $k \geqslant 1$

$$u_{k+1} \overset{\mathrm{def}}{=} u_k \cup \{[\![B_k]\!]_{u_k} \to B_k\}.$$

Из данного определения и из утверждения (42) следует, что для каждого $k \geqslant 1$ верно утверждение

$$\text{если } u_k\ L\text{-совместимо, то } u_{k+1} \text{ тоже } L\text{-совместимо.} \tag{63}$$

Так как u_1 по предположению L-совместимо, то из (63) следует, что

$$\forall k \geqslant 1 \quad u_k\ L\text{-совместимо.}$$

Определим искомое множество x следующим образом:

$$x \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{k \geqslant 1} u_k.$$

Множество x является L-совместимым, поскольку для каждого его конечного подмножества вида (32) существует номер $k \geqslant 1$, такой что данное подмножество содержится в множестве u_k (которое, как было отмечено выше, является L-совместимым).

Докажем, что для каждой формулы $A \in \mathrm{Fm}$ верно свойство (60).

По определению последовательности (62) существует номер k, такой что $A = B_k$.

Поскольку
$$[\![B_k]\!]_{u_k} \to B_k \in x,$$
то
$$[\![B_k]\!]_{u_k} \leqslant [\![B_k]\!]_x. \tag{64}$$

Поскольку $u_k \subseteq x$, то из теоремы 4 следует, что
$$[\![B_k]\!]_x \leqslant [\![B_k]\!]_{u_k}. \tag{65}$$
Объединяя (64) и (65), получаем равенство
$$[\![B_k]\!]_x = [\![B_k]\!]_{u_k}. \tag{66}$$
Следовательно,
$$[\![B_k]\!]_x \to B_k = [\![B_k]\!]_{u_k} \to B_k \in u_{k+1} \subseteq x. \tag{67}$$

Из (67) вытекает (60) (при $A = B_k$).

Таким образом, множество x является L-полным.

Докажем, что x является пополнением множества u, т. е.
$$\forall (a \to A) \in u \quad a \leqslant [\![A]\!]_x.$$

По определению x
$$\exists k \geqslant 1\colon A = B_k.$$

Так как
$$(a \to B_k) \in u \subseteq u_k,$$
то
$$u_k \cup \{a \to B_k\} \ L\text{-совместимо}. \tag{68}$$
Из (68) и (66) получаем
$$a \leqslant [\![B_k]\!]_{u_k} = [\![B_k]\!]_x = A_x. \quad \blacksquare$$

6. Свойства L-полных множеств

Теорема 8. *Пусть x — L-полное множество и $a \in \mathcal{B}$. Тогда*
$$[\![a]\!]_x = a. \tag{69}$$

Доказательство.

Поскольку x является L-совместимым, то его одноэлементное подмножество $\{[\![a]\!]_x \to a\}$ обладает следующим свойством: для каждого $b \in \mathcal{B}$ из соотношения

$$a \to b \in L \tag{70}$$

следует неравенство

$$[\![a]\!]_x \leqslant b. \tag{71}$$

Поскольку (70) верно для $b = a$, то (71) тоже должно быть верно для $b = a$, т. е.

$$[\![a]\!]_x \leqslant a. \tag{72}$$

Для доказательства обратного неравенства докажем L-совместимость множества

$$x \cup \{a \to a\}. \tag{73}$$

Для этого необходимо доказать, что для каждого подмножества (32) множества (73) и каждого $b \in \mathcal{B}$ из (33) следует (34).

Так как x по предположению L-совместимо, то для доказательства импликации (33) $\Longrightarrow$ (34) достаточно рассмотреть лишь тот случай, когда (32) удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{gathered}(a_1 \to A_1) = (a \to a),\\ \forall i = 2, \dots, n \;\; a_i \to A_i \in x.\end{gathered} \tag{74}$$

В этом случае (33) эквивалентно соотношению

$$\left\{\begin{matrix} a \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{matrix}\right\} \to b \in L, \tag{75}$$

а (34) эквивалентно неравенству

$$\left\{\begin{matrix} a \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{matrix}\right\} \leqslant b. \tag{76}$$

(75) эквивалентно соотношению

$$\left\{\begin{matrix} A_2 \\ \dots \\ A_n \end{matrix}\right\} \to (a \to b) \in L. \tag{77}$$

Из (77) и из L-совместимости x следует неравенство

$$\left\{\begin{matrix} a_2 \\ \dots \\ a_n \end{matrix}\right\} \leqslant a \to b. \tag{78}$$

(76) следует из (78). ■

Теорема 9. *Пусть x — некоторое L-полное множество и A, B — пара формул. Тогда имеет место равенство*

$$[\![A \to B]\!]_x = [\![A]\!]_x \to [\![B]\!]_x. \tag{79}$$

Доказательство.

Для доказательства равенства (79) достаточно доказать неравенства

$$[\![A \to B]\!]_x \leqslant [\![A]\!]_x \to [\![B]\!]_x \tag{80}$$

и

$$[\![A]\!]_x \to [\![B]\!]_x \leqslant [\![A \to B]\!]_x. \tag{81}$$

Докажем неравенство (80). Данное неравенство эквивалентно неравенству

$$\left\{\begin{matrix}[\![A \to B]\!]_x \\ [\![A]\!]_x\end{matrix}\right\} \leqslant [\![B]\!]_x. \tag{82}$$

Неравенство (82) эквивалентно L-совместимости множества

$$x \cup \left\{\left\{\begin{matrix}[\![A \to B]\!]_x \\ [\![A]\!]_x\end{matrix}\right\} \to B\right\}, \tag{83}$$

т. е. утверждению о том, что для каждого подмножества (32) множества (83) и каждого $b \in \mathcal{B}$ из (33) следует (34).

Так как x по предположению L-совместимо, то для доказательства импликации (33) $\Longrightarrow$ (34) достаточно рассмотреть лишь тот случай, когда (32) имеет следующий вид:

- $a_1 \to A_1 = \left\{\begin{matrix}[\![A \to B]\!]_x \\ [\![A]\!]_x\end{matrix}\right\} \to B,$
- для каждого $i = 2, \ldots, n$

$$a_i \to A_i \in x. \tag{84}$$

В этом случае (33) эквивалентно соотношению

$$B \to \left(\left\{\begin{matrix}A_2 \\ \ldots \\ A_n\end{matrix}\right\} \to b\right) \in L, \tag{85}$$

а (34) эквивалентно неравенству

$$\left\{\begin{matrix}\left\{\begin{matrix}[\![A \to B]\!]_x \\ [\![A]\!]_x\end{matrix}\right\} \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n\end{matrix}\right\} \leqslant b. \tag{86}$$

Поскольку формула

$$\left\{\begin{matrix}A \\ A \to B\end{matrix}\right\} \to B$$

является тавтологией, то

$$\left.\begin{cases} A \\ A \to B \end{cases}\right\} \to B \in L. \tag{87}$$

Из (85) и (87) следует, что

$$\left.\begin{cases} A \\ A \to B \end{cases}\right\} \to \left(\left.\begin{cases} A_2 \\ \dots \\ A_n \end{cases}\right\} \to b\right) \in L. \tag{88}$$

Соотношение (88) эквивалентно соотношению

$$\left.\begin{cases} A \\ A \to B \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{cases}\right\} \to b \in L. \tag{89}$$

Поскольку множество x по предположению является L-полным, то

$$[\![A]\!]_x \to A \in x \tag{90}$$

и

$$[\![A \to B]\!]_x \to (A \to B) \in x. \tag{91}$$

Из (89), (90), (91), (84) и свойства L-совместимости множества x вытекает требуемое неравенство (86).

Теперь докажем неравенство (81). Данное неравенство эквивалентно L-совместимости множества

$$x \cup \{([\![A]\!]_x \to [\![B]\!]_x) \to (A \to B)\}, \tag{92}$$

т. е. утверждению о том, что для каждого подмножества (32) множества (92) и каждого $b \in \mathcal{B}$ из (33) следует (34).

Так как x по предположению L-совместимо, то для доказательства импликации (33) $\Longrightarrow$ (34) достаточно рассмотреть лишь тот случай, когда (32) имеет следующий вид:

- $a_1 \to A_1 = ([\![A]\!]_x \to [\![B]\!]_x) \to (A \to B)$,
- для каждого $i = 2, \dots, n$

$$a_i \to A_i \in x. \tag{93}$$

В этом случае (33) эквивалентно соотношению

$$(A \to B) \to \left(\left.\begin{cases} A_2 \\ \dots \\ A_n \end{cases}\right\} \to b\right) \in L, \tag{94}$$

а (34) эквивалентно неравенству

$$\left.\begin{cases} [\![A]\!]_x \to [\![B]\!]_x \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{cases}\right\} \leqslant b. \tag{95}$$

Для доказательства неравенства (95) достаточно доказать эквивалентное ему неравенство

$$\left\{\begin{array}{l} b\to 0\\ a_2\\ \dots\\ a_n \end{array}\right\} \leqslant \left\{\begin{array}{l} [\![A]\!]_x\\ [\![B]\!]_x\to 0 \end{array}\right\}. \tag{96}$$

Для того чтобы доказать неравенство (96), достаточно доказать пару неравенств:

$$\left\{\begin{array}{l} b\to 0\\ a_2\\ \dots\\ a_n \end{array}\right\} \leqslant [\![A]\!]_x \tag{97}$$

и

$$\left\{\begin{array}{l} b\to 0\\ a_2\\ \dots\\ a_n \end{array}\right\} \leqslant [\![B]\!]_x\to 0. \tag{98}$$

Докажем неравенство (97). Данное неравенство эквивалентно L-совместимости множества

$$x\cup\left\{\left\{\begin{array}{l} b\to 0\\ a_2\\ \dots\\ a_n \end{array}\right\}\to A\right\}, \tag{99}$$

т. е. утверждению о том, что для каждого конечного подмножества множества (99) вида

$$\{c_1\to C_1,\dots,c_m\to C_m\},$$

такого что

$$c_1\to C_1=\left\{\begin{array}{l} b\to 0\\ a_2\\ \dots\\ a_n \end{array}\right\}\to A,$$
$$\forall i=2,\dots,m\quad c_i\to C_i\in x, \tag{100}$$

и каждого $d\in\mathcal{B}$ из соотношения

$$\left\{\begin{array}{l} A\\ C_2\\ \dots\\ C_m \end{array}\right\}\to d\in L \tag{101}$$

следует неравенство

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}b\to 0\\ a_2\\ \dots\\ a_n\end{array}\right\}\\ c_2\\ \dots\\ c_m\end{array}\right\}\leqslant d. \tag{102}$$

Для доказательства неравенства (102) достаточно доказать эквивалентное ему неравенство

$$\left\{\begin{array}{l}a_2\wedge\ldots\wedge a_n\\ c_2\wedge\ldots\wedge c_m\end{array}\right\}\leqslant (b\to 0)\to d. \tag{103}$$

Из соотношения (101) вытекает соотношение

$$A\to\left(\left\{\begin{array}{l}C_2\\ \dots\\ C_m\end{array}\right\}\to d\right)\in L,$$

из которого следует соотношение

$$\left(\left(\left\{\begin{array}{l}C_2\\ \dots\\ C_m\end{array}\right\}\to d\right)\to B\right)\to(A\to B)\in L. \tag{104}$$

Из (104) и (94) следует соотношение

$$\left(\left(\left\{\begin{array}{l}C_2\\ \dots\\ C_m\end{array}\right\}\to d\right)\to B\right)\to\left(\left\{\begin{array}{l}A_2\\ \dots\\ A_n\end{array}\right\}\to b\right)\in L. \tag{105}$$

Поскольку формула

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}C_2\\ \dots\\ C_m\end{array}\right\}\\ d\to B\end{array}\right\}\to\left(\left(\left\{\begin{array}{l}C_2\\ \dots\\ C_m\end{array}\right\}\to d\right)\to B\right)$$

является тавтологией, то она принадлежит L. Отсюда и из (105) следует соотношение

$$\left\{\begin{array}{l}d\to B\\ A_2\wedge\ldots\wedge A_n\\ C_2\wedge\ldots\wedge C_m\end{array}\right\}\to b\in L. \tag{106}$$

Из (106), (93), (100) и из L-совместимости множества x вытекает неравенство

$$\left\{\begin{array}{l}[\![d\to B]\!]_x\\ a_2\wedge\ldots\wedge a_n\\ c_2\wedge\ldots\wedge c_m\end{array}\right\}\leqslant b,$$

которое эквивалентно неравенству

$$\left\{\begin{matrix} a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \\ c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \end{matrix}\right\} \leqslant [\![d \to B]\!]_x \to b. \tag{107}$$

Докажем, что имеет место неравенство

$$[\![d \to B]\!]_x \to b \leqslant (b \to 0) \to d. \tag{108}$$

(108) эквивалентно неравенству

$$\left\{\begin{matrix} [\![d \to B]\!]_x \to b \\ b \to 0 \end{matrix}\right\} \leqslant d. \tag{109}$$

Так как имеет место неравенство

$$\left\{\begin{matrix} [\![d \to B]\!]_x \to b \\ b \to 0 \end{matrix}\right\} \leqslant [\![d \to B]\!]_x \to 0,$$

то для доказательства (109) достаточно доказать неравенство

$$[\![d \to B]\!]_x \to 0 \leqslant d. \tag{110}$$

(110) эквивалентно неравенству

$$d \to 0 \leqslant [\![d \to B]\!]_x. \tag{111}$$

Докажем неравенство (111). Поскольку формула

$$(d \to 0) \to (d \to B)$$

является тавтологией, то, следовательно,

$$(d \to 0) \to (d \to B) \in L. \tag{112}$$

Из (112) и из теоремы 5 следует неравенство

$$[\![d \to 0]\!]_x \leqslant [\![d \to B]\!]_x. \tag{113}$$

Из (113) и из теоремы 8 следует неравенство (111).

Из истинности неравенства (111) следует истинность неравенства (108), а из истинности неравенств (107) и (108) следует истинность неравенства (103).

Таким образом, L-совместимость множества (99) установлена, и следовательно, неравенство (97) доказано.

Теперь докажем неравенство (98). Данное неравенство эквивалентно неравенству

$$\left\{\begin{matrix} [\![B]\!]_x \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{matrix}\right\} \leqslant b. \tag{114}$$

(114) имеет место потому, что

- из (94) и из соотношения

$$B \to (A \to B) \in L$$

следует соотношение

$$B \to \left(\begin{Bmatrix} A_2 \\ \dots \\ A_n \end{Bmatrix} \to b \right) \in L,$$

которое эквивалентно соотношению

$$\begin{Bmatrix} B \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{Bmatrix} \to b \in L,$$

- $\{(\llbracket B \rrbracket_x \to B), (a_2 \to A_2), \dots, (a_n \to A_n)\} \subseteq x$,
- x является L-совместимым. ■

Теорема 10. *Пусть x — некоторое L-полное множество и A, B — пара формул. Тогда имеет место равенство*

$$\llbracket A \wedge B \rrbracket_x = \llbracket A \rrbracket_x \wedge \llbracket B \rrbracket_x. \tag{115}$$

Доказательство.

Для доказательства равенства (115) достаточно доказать неравенства

$$\llbracket A \wedge B \rrbracket_x \leqslant \llbracket A \rrbracket_x, \quad \llbracket A \wedge B \rrbracket_x \leqslant \llbracket B \rrbracket_x \tag{116}$$

и

$$\llbracket A \rrbracket_x \wedge \llbracket B \rrbracket_x \leqslant \llbracket A \wedge B \rrbracket_x. \tag{117}$$

Неравенства (116) следуют из соотношений

$$(A \wedge B) \to A \in L, \quad (A \wedge B) \to B \in L$$

и из теоремы 5.

Неравенство (117) следует из L-совместимости множества

$$x \cup \{(\llbracket A \rrbracket_x \wedge \llbracket B \rrbracket_x) \to (A \wedge B)\}. \quad ■$$

Теорема 11. *Пусть x — некоторое L-полное множество и A, B — пара формул. Тогда имеет место равенство*

$$\llbracket A \vee B \rrbracket_x = \llbracket A \rrbracket_x \vee \llbracket B \rrbracket_x. \tag{118}$$

Доказательство.

Равенство (118) эквивалентно равенству

$$(\llbracket A \rrbracket_x \vee \llbracket B \rrbracket_x) \to 0 = \llbracket A \vee B \rrbracket_x \to 0. \tag{119}$$

(119) вытекает из следующих соотношений:

$$(\llbracket A\rrbracket_x \vee \llbracket B\rrbracket_x) \to 0 = \left\{\begin{matrix}\llbracket A\rrbracket_x \to 0\\ \llbracket B\rrbracket_x \to 0\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\llbracket A\rrbracket_x \to \llbracket 0\rrbracket_x\\ \llbracket B\rrbracket_x \to \llbracket 0\rrbracket_x\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\llbracket A \to 0\rrbracket_x\\ \llbracket B \to 0\rrbracket_x\end{matrix}\right\} =$$

$$= \left\llbracket \left\{\begin{matrix}A \to 0\\ B \to 0\end{matrix}\right\} \right\rrbracket_x = \llbracket (A \vee B) \to 0\rrbracket_x = \llbracket A \vee B\rrbracket_x \to \llbracket 0\rrbracket_x = \llbracket A \vee B\rrbracket_x \to 0. \quad \blacksquare$$

Теорема 12. *Пусть x — некоторое L-полное множество. Для каждой формулы $A \in \mathrm{Fm}$ и каждого элемента $a \in \mathcal{B}$ имеет место неравенство*

$$\llbracket \Box_a A\rrbracket_x \leqslant a. \tag{120}$$

Доказательство.
Из (7) следует соотношение

$$(a \to 0) \to (\Box_a A \to 0) \in L, \tag{121}$$

из которого, согласно теоремам 5 и 8, следует неравенство

$$a \to 0 \leqslant \llbracket \Box_a A \to 0\rrbracket_x. \tag{122}$$

Поскольку, согласно теоремам 9 и 8,

$$\llbracket \Box_a A \to 0\rrbracket_x = \llbracket \Box_a A\rrbracket_x \to \llbracket 0\rrbracket_x = \llbracket \Box_a A\rrbracket_x \to 0, \tag{123}$$

то из (122) и (123) следует неравенство

$$a \to 0 \leqslant \llbracket \Box_a A\rrbracket_x \to 0, \tag{124}$$

которое эквивалентно (120). ■

7. Канонические модели

7.1. Определение канонической модели

Канонической моделью логики L называется модель

$$M_L \stackrel{\text{def}}{=} (W_L, \{R_L^a \mid a \in \mathcal{B}\}, \xi_L),$$

компоненты которой определяются следующим образом.

- W_L состоит из всех L-полных множеств.

  Для каждой пары $x, y \in W_L$

$$W_L(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{A \in \mathrm{Fm}} (\llbracket A\rrbracket_x \leftrightarrow \llbracket A\rrbracket_y). \tag{125}$$

  Заметим, что из данного определения вытекает соотношение

$$\forall x \in W_L \quad W_L(x) = 1. \tag{126}$$

  Нетрудно доказать, что определение W_L удовлетворяет условиям (15) и (16).

- Для каждого $a \in \mathcal{B}$ символ R^a_L обозначает нечёткое бинарное отношение на W_L
$$R^a_L\colon W_L \times W_L \to \mathcal{B},$$
определяемое следующим образом:
$$\forall x, y \in W_L \quad R^a_L(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{A \in \mathrm{Fm}} ([\![\Box_a A]\!]_x \to [\![A]\!]_y). \tag{127}$$
Нетрудно доказать, что определение R^a_L удовлетворяет условиям (17) и (18).
- ξ_L — это отображение вида
$$\xi_L\colon \mathrm{PV} \to \mathrm{Sub}(W_L),$$
где для каждого $p \in \mathrm{PV}$ нечёткое подмножество
$$\xi_L(p)\colon W_L \to \mathcal{B}$$
определяется следующим образом:
$$\forall x \in W_L \quad \xi_L(p)(x) \stackrel{\text{def}}{=} [\![p]\!]_x. \tag{128}$$
Нетрудно доказать, что для каждого $p \in \mathrm{PV}$ отображение $\xi_L(p)$ удовлетворяет условиям (19) и (20).

7.2. Основное свойство канонических моделей

Теорема 13. *Для каждой формулы $A \in \mathrm{Fm}$ и каждого $x \in W_L$*
$$[\![A]\!](x) = [\![A]\!]_x. \tag{129}$$

Доказательство.
Докажем данную теорему индукцией по структуре формулы A.

$A = p \in \mathrm{PV}$. В этом случае равенство (129) следует из (128).

$A = a \in \mathcal{B}$. Из (24), (126) и (69) следуют соотношения
$$[\![a]\!](x) = \begin{Bmatrix} a \\ W_L(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a \\ 1 \end{Bmatrix} = a = [\![a]\!]_x.$$

$A = B \wedge C$, $A = B \vee C$, $A = B \to C$ По индуктивному предположению
$$\forall x \in W_L \quad [\![B]\!](x) = [\![B]\!]_x, \quad [\![C]\!](x) = [\![C]\!]_x.$$
Согласно теореме 10 из L-полноты множества x следует соотношение
$$[\![B]\!]_x \wedge [\![C]\!]_x = [\![B \wedge C]\!]_x.$$
Следовательно,
$$[\![A]\!](x) = [\![B \wedge C]\!](x) \stackrel{\text{def}}{=} [\![B]\!](x) \wedge [\![C]\!](x) = [\![B]\!]_x \wedge [\![C]\!]_x = [\![B \wedge C]\!]_x = [\![A]\!]_x.$$

Случаи $A = B \vee C$ и $A = B \to C$ разбираются аналогично.

$A = \Box_a B$. По индуктивному предположению

$$\forall y \in W_L \quad [\![B]\!](y) = [\![B]\!]_y. \tag{130}$$

Докажем, что элемент

$$[\![\Box_a B]\!](x) \tag{131}$$

совпадает с элементом

$$[\![\Box_a B]\!]_x. \tag{132}$$

Из (130), (126) и (28) следует, что элемент (131) совпадает с элементом

$$\left\{\begin{matrix} a \\ \inf\limits_{y \in W_L} (R_L^a(x,y) \to [\![B]\!]_y) \end{matrix}\right\}. \tag{133}$$

Для доказательства равенства (132) = (133) мы докажем, что (132) $\leqslant$ (133) и (132) $\geqslant$ (133).

Неравенство (132) $\leqslant$ (133) следует из (120) и из неравенства

$$[\![\Box_a B]\!]_x \leqslant \inf_{y \in W_L} (R_L^a(x,y) \to [\![B]\!]_y). \tag{134}$$

Для доказательства неравенства (134) достаточно доказать, что для каждого $y \in W_L$

$$\left\{\begin{matrix} R_L^a(x,y) \\ [\![\Box_a B]\!]_x \end{matrix}\right\} \leqslant [\![B]\!]_y. \tag{135}$$

Неравенство (135) следует из соотношения (127).

Теперь докажем неравенство (132) $\geqslant$ (133). Для доказательства данного неравенства будет достаточно построить элемент $y \in W_L$, такой что

$$\left\{\begin{matrix} a \\ R_L^a(x,y) \to [\![B]\!]_y \end{matrix}\right\} \leqslant [\![\Box_a B]\!]_x. \tag{136}$$

Обозначим символом u множество, состоящее из всех формул вида

$$\left\{\begin{matrix} [\![\Box_a A]\!]_x \\ [\![\Box_a B]\!]_x \to 0 \end{matrix}\right\} \to A, \tag{137}$$

а также из формулы

$$([\![\Box_a B]\!]_x \to 0) \to (B \to 0). \tag{138}$$

Лемма. *Множество u является L-совместимым.*

Доказательство.

Докажем, что для каждого конечного подмножества (32) множества u и каждого $b \in \mathcal{B}$ из (33) следует (34).

Сначала рассмотрим случай, когда (138) $\in$ (32).

Пусть (32) имеет следующий вид:

- $a_1 \to A_1 =$ (138),

- для каждого $i = 2, \ldots, n$

$$a_i = \left\{ \begin{matrix} [\![\Box_a A_i]\!]_x \\ [\![\Box_a B]\!]_x \to 0 \end{matrix} \right\}. \tag{139}$$

В этом случае (33) имеет вид

$$\left\{ \begin{matrix} B \to 0 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{matrix} \right\} \to b \in L. \tag{140}$$

Из (140) вытекают соотношения

$$(b \to 0) \to \left(\left\{ \begin{matrix} B \to 0 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{matrix} \right\} \to 0 \right) \in L \implies (b \to 0) \to \left(\left\{ \begin{matrix} A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{matrix} \right\} \to B \right) \in L \implies$$

$$\implies (b \to 0) \to \left(\left\{ \begin{matrix} \Box_a A_2 \\ \ldots \\ \Box_a A_n \end{matrix} \right\} \to \Box_a B \right) \in L \implies b \to 0 \leqslant \left\{ \begin{matrix} [\![\Box_a A_2]\!]_x \\ \ldots \\ [\![\Box_a A_n]\!]_x \end{matrix} \right\} \to [\![\Box_a B]\!]_x.$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\left\{ \begin{matrix} b \to 0 \\ [\![\Box_a A_2]\!]_x \\ \ldots \\ [\![\Box_a A_n]\!]_x \end{matrix} \right\} \leqslant [\![\Box_a B]\!]_x. \tag{141}$$

Из (141) следует неравенство

$$\left\{ \begin{matrix} [\![\Box_a B]\!]_x \to 0 \\ [\![\Box_a A_2]\!]_x \\ \ldots \\ [\![\Box_a A_n]\!]_x \end{matrix} \right\} \leqslant b. \tag{142}$$

Неравенство (142) эквивалентно искомому неравенству (34) для данного случая.

Теперь рассмотрим случай, когда (138) $\notin$ (32).

Так как формула

$$\left\{ \begin{matrix} B \to 0 \\ A_1 \\ \ldots \\ A_n \end{matrix} \right\} \to \left\{ \begin{matrix} A_1 \\ \ldots \\ A_n \end{matrix} \right\}$$

является тавтологией, то из (33) следует соотношение

$$\left\{ \begin{matrix} B \to 0 \\ A_1 \\ \ldots \\ A_n \end{matrix} \right\} \to b \in L. \tag{143}$$

Как уже было показано выше в данном доказательстве, из последнего соотношения вытекает неравенство

$$\left\{\begin{matrix}[\![\Box_a B]\!]_x \to 0\\ [\![\Box_a A_1]\!]_x\\ \dots\\ [\![\Box_a A_n]\!]_x\end{matrix}\right\} \leqslant b. \tag{144}$$

Неравенство (144) эквивалентно искомому неравенству (34) для данного случая. ■

Пусть символ y обозначает L-пополнение множества u.

Из определения множеств u и y следует, что

$$[\![\Box_a B]\!]_x \to 0 \leqslant [\![B \to 0]\!]_y = [\![B]\!]_y \to 0 \tag{145}$$

и для каждой формулы $A \in \mathrm{Fm}$

$$\left\{\begin{matrix}[\![\Box_a A]\!]_x\\ [\![\Box_a B]\!]_x \to 0\end{matrix}\right\} \leqslant [\![A]\!]_y. \tag{146}$$

Из (145) следует неравенство

$$[\![B]\!]_y \leqslant [\![\Box_a B]\!]_x. \tag{147}$$

Из (146) следует, что $\forall A \in \mathrm{Fm}$

$$[\![\Box_a B]\!]_x \to 0 \leqslant [\![\Box_a A]\!]_x \to [\![A]\!]_y. \tag{148}$$

Из (148) и (127) следует неравенство

$$\left\{\begin{matrix}a\\ [\![\Box_a B]\!]_x \to 0\end{matrix}\right\} \leqslant R_L^a(x, y). \tag{149}$$

Искомое неравенство (136) следует из (147), (149) и из неравенства

$$\left\{\begin{matrix}a\\ \left\{\begin{matrix}a\\ c \to 0\end{matrix}\right\} \to c\end{matrix}\right\} \leqslant c, \tag{150}$$

где $c \overset{\text{def}}{=} [\![\Box_a B]\!]_x$.

Докажем неравенство (150). Данное неравенство эквивалентно неравенству

$$c \to 0 \leqslant \left\{\begin{matrix}a\\ \left\{\begin{matrix}a\\ c \to 0\end{matrix}\right\} \to c\end{matrix}\right\} \to 0, \tag{151}$$

т. е.

$$\left\{\begin{matrix}c \to 0\\ a\\ \left\{\begin{matrix}a\\ c \to 0\end{matrix}\right\} \to c\end{matrix}\right\} \leqslant 0, \tag{152}$$

которое, очевидно, истинно. ■

8. Полнота логики FK

Теорема 14. *Для каждой формулы* $A \in \mathrm{Fm}$ *следующие условия эквивалентны:*

$$A \in \mathrm{FK}, \tag{153}$$

$$A \text{ истинна в каждой модели.} \tag{154}$$

Доказательство.

Импликация (153) $\Longrightarrow$ (154) была обоснована в разделе 3.4.

Докажем, что если $A \notin \mathrm{FK}$, то A не является истинной в некоторой точке канонической модели логики FK.

Лемма. *Множество*

$$\{(\llbracket A \rrbracket_{\mathrm{FK}} \to 0) \to (A \to 0)\} \tag{155}$$

является FK*-совместимым.*

Доказательство.

Докажем, что для каждого $b \in \mathcal{B}$ из соотношения

$$(A \to 0) \to b \in \mathrm{FK} \tag{156}$$

следует неравенство

$$\llbracket A \rrbracket_{\mathrm{FK}} \to 0 \leqslant b. \tag{157}$$

Из (156) следуют соотношения

$$(b \to 0) \to A \in \mathrm{FK} \implies b \to 0 \leqslant \llbracket A \rrbracket_{\mathrm{FK}} \implies \llbracket A \rrbracket_{\mathrm{FK}} \to 0 \leqslant b.$$

Таким образом, множество (155) FK-совместимо. ■

Согласно теореме 7 из FK-совместимости множества (155) следует, что

$$\exists x \in W_{\mathrm{FK}}: \ \llbracket A \rrbracket_{\mathrm{FK}} \to 0 \leqslant \llbracket A \to 0 \rrbracket_x. \tag{158}$$

Так как множество x является FK-полным, то согласно теореме 9 из (158) следует, что

$$\llbracket A \to 0 \rrbracket_x = \llbracket A \rrbracket_x \to \llbracket 0 \rrbracket_x = \llbracket A \rrbracket_x \to 0. \tag{159}$$

Из (129), (158) и (159) вытекает соотношение

$$\llbracket A \rrbracket_{\mathrm{FK}} \to 0 \leqslant \llbracket A \rrbracket(x) \to 0, \tag{160}$$

которое эквивалентно соотношению

$$\llbracket A \rrbracket(x) \leqslant \llbracket A \rrbracket_{\mathrm{FK}}. \tag{161}$$

Докажем, что формула A не является истинной в точке x.

Если A истинна в x, то из (29) и (126) следует, что

$$\llbracket A \rrbracket(x) = 1. \tag{162}$$

Из (161) и (162) следует равенство $\llbracket A \rrbracket_{\mathrm{FK}} = 1$, из которого вытекает соотношение $A \in \mathrm{FK}$, которое противоречит предположению о том, что $A \notin \mathrm{FK}$. ■

Литература

[1] Goldblatt R. Topoi. The categorial analysis of logic. — Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company, 1979. — Studies in Logic and the Foundation of Mathematics, volume 98.

[2] Clarke E. M., Grumberg O., Peled D. Model Checking. — MIT Press, 1999.

[3] Bendová K., Hájek P. Possibilistic logic as a tense logic // Proceedings of QUARDET'93. — Barcelona, 1993.

[4] Boutilier C. Modal logics for qualitative possibility and beliefs // Uncertainty in Artificial Intelligence VIII / Eds. D. Dubois et al. — Morgan Kaufmann, 1992. — P. 17—24.

[5] Dubois D., Lang J., Prade H. Possibilistic logic // Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming. Vol. 3: Nonmonotonic Reasoning and Uncertain Reasoning / Eds. D. M. Gabbay, C. J. Hogger, J. A. Robinson. — Oxford Univ. Press, 1994. — P. 439–513.

[6] Farinas del Cerro L., Herzig A. A modal analysis of possibility theory // Symbolic and Qualitative Approaches to Uncertainty / Eds. R. Kruse and P. Siegel. — Lecture Notes in Comput. Sci., volume 548. — Springer-Verlag, 1991. — P. 58—62.

[7] Fitting M. Many-valued modal logics // Fund. Inform. — 1992. — Vol. 15. — P. 235—254.

[8] Fitting M. Many-valued modal logics II // Fund. Inform. — 1992. — Vol. 17. — P. 55—73.

[9] Godo L., Lopez de Mantaras R. Fuzzy logic // Encyclopaedia of Computer Science, 1993.

[10] Hájek P. On logics of approximate reasoning // Neural Network Word. — 1993. — Vol. 6. — P. 733—744.

[11] Hájek P., Harmancová D. A comparative fuzzy modal logic // Fuzzy Logic in Artificial Intelligence / Eds. E. P. Klement and W. Slany. — Springer-Verlag, 1993. — P. 27—34.

[12] Hájek P., Harmancová D., Esteva F., Garcia P., Godo L. On modal logics for qualitative possibility in a fuzzy setting // Uncertainty in Artificial Intelligence: Proceedings of the Tenth Conference / Eds. R. Lopez de Mantaras and D. Poole. — Seattle, WA, 1994.

[13] Hájek P., Harmancová D., Verbrugge R. A qualitative fuzzy possibilistic logic // International Journal of Approximate Reasoning. — 1995. — Vol. 12. — P. 1—19.

[14] Ostermann P. Many-valued modal propositional calculi // Z. Math. Logik Grundlag. Math. — 1988. — Vol. 34. — P. 343—354.