Об изоморфизме кольца кольцу эндоморфизмов абелевой группы

В. М. МИСЯКОВ
Томский государственный университет

УДК 512.541+512.541.52+512.552.13+512.552.16

Ключевые слова: ассоциативное кольцо, кольцо эндоморфизмов, абелева группа.

Аннотация

В статье показываются необходимые и достаточные условия, при которых из изоморфизма колец эндоморфизмов аддитивных групп произвольных ассоциативных колец с единицей следует изоморфизм этих колец. Даётся критерий для абелевых групп из некоторого класса, показывающий, когда из изоморфизма колец эндоморфизмов групп следует изоморфизм самих групп этого класса. Приводятся необходимые и достаточные условия, при которых произвольное кольцо является кольцом эндоморфизмов некоторой абелевой группы, что является решением проблемы 84 из монографии Л. Фукса «Бесконечные абелевы группы».

Abstract

V. M. Misyakov, Isomorphism of a ring to the endomorphism ring of an Abelian group, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 1, pp. 231—234.

This paper presents necessary and sufficient conditions under which isomorphism of endomorphism rings of additive groups of arbitrary associative rings with 1 implies isomorphism of these rings. For a certain class of Abelian groups, we present a criterion which shows when isomorphism of their endomorphism rings implies isomorphism of these groups. We demonstrate necessary and sufficient conditions under which an arbitrary ring is the endomorphism ring of an Abelian group. This solves Problem 84 in L. Fuchs' "Infinite Abelian Groups."

В данной работе предполагается, что кольца являются ассоциативными и имеют единицу. Если R — кольцо (абелева группа), то через $E(R)$ будем обозначать кольцо эндоморфизмов (абелевой группы) его аддитивной группы, через R^+ — аддитивную группу кольца R, а через R^l — подкольцо левых умножений кольца $E(R)$.

В своей монографии [4] Л. Фукс отмечает, что если абелевы группы изоморфны, то будут изоморфны и их кольца эндоморфизмов, обратное не всегда верно. Отсюда, в частности, вытекает, что из изоморфизма колец следует изоморфизм колец эндоморфизмов их аддитивных групп. Возникает задача нахождения необходимых и достаточных условий, при которых из изоморфизма колец эндоморфизмов аддитивных групп колец следует изоморфизм самих колец. Данная задача решается в теореме 1. Заметим также, что если R — кольцо с единицей, то кольцо R изоморфно кольцу левых умножений R^l [1, лемма 3.7.3].

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 1, с. 231—234.

Лемма 1. *Пусть в диаграмме*

$$\begin{array}{ccccc} R & \xrightarrow{\alpha} & R^l & \xrightarrow{i} & E(R) \\ {\scriptstyle\beta}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\delta} & & \big\downarrow{\scriptstyle\beta^*} \\ S & \xrightarrow{\gamma} & S^l & \xrightarrow{i'} & E(S) \end{array} \qquad (*)$$

α, γ — кольцевые изоморфизмы, i, i' — тождественные вложения колец. Тогда справедливы следующие условия:

1) *если β — изоморфизм колец R и S, то существуют изоморфизмы δ и β^*, делающие диаграмму $(*)$ коммутативной;*

2) *если δ — изоморфизм колец R^l и S^l, то существуют изоморфизмы β и β^*, делающие диаграмму $(*)$ коммутативной.*

Доказательство.

1) Пусть $\beta\colon R \to S$ — изоморфизм колец, тогда изоморфизмы α, β, γ индуцируют изоморфизм $\delta\colon R^l \to S^l$, такой что $\delta = \gamma\beta\alpha^{-1}$. Тогда для любого $r \in R$ имеем $\delta(\alpha(r)) = \delta(r^l) = \gamma(\beta(\alpha^{-1}(r^l))) = \gamma(\beta(r)) = \gamma(s) = s^l$ и, с другой стороны, $\gamma(\beta(r)) = \gamma(s) = s^l$, то есть $\delta\alpha = \gamma\beta$. Из изоморфизма колец R и S следует изоморфизм их аддитивных групп, который в свою очередь влечёт изоморфизм $\beta^*\colon E(R) \to E(S)$, такой что $\beta^*(\psi) = \beta\psi\beta^{-1}$ для любого $\psi \in E(R)$ [4]. Пусть $r^l \in R^l$ и $\delta(r^l) = s^l$, тогда $\gamma(\beta(\alpha^{-1}(r^l))) = s^l$, $\beta(\alpha^{-1}(r^l)) = \gamma^{-1}(s^l)$, следовательно, $\beta(r) = s$. Покажем, что $\beta^*|_{R^l} = \delta$, то есть $\beta^*(r^l) = s^l$. Пусть $x \in S$, тогда $(\beta^*(r^l))(x) = \beta(r^l(\beta^{-1}(x))) = \beta(r^l(y)) = \beta(ry) = \beta(r)\beta(y) = sx = s^l(x)$, то есть $\beta^*(r^l) = s^l$. Поскольку равенство $\beta^*|_{R^l} = \delta$ показывает, что правый квадрат диаграммы $(*)$ коммутативен, то, следовательно, вся диаграмма $(*)$ коммутативна.

2) Пусть $\delta\colon R^l \to S^l$ — изоморфизм колец, тогда изоморфизмы α, δ, γ индуцируют изоморфизм $\beta\colon R \to S$, такой что $\beta = \gamma^{-1}\delta\alpha$, делающий левый квадрат диаграммы $(*)$ коммутативным. Действительно, для любого $r \in R$ имеем $\delta(\alpha(r)) = \delta(r^l) = s^l$ и, с другой стороны, $\gamma(\beta(r)) = \gamma(\gamma^{-1}(\delta(\alpha(r)))) = \delta(\alpha(r)) = s^l$, то есть $\delta\alpha = \gamma\beta$. Тогда существует изоморфизм $\beta^*\colon E(R) \to E(S)$, такой что $\beta^*(\psi) = \beta\psi\beta^{-1}$ для любого $\psi \in E(R)$. Пусть $r^l \in R^l$ и $\delta(r^l) = s^l$, тогда $\beta(r) = \gamma^{-1}(\delta(\alpha(r))) = \gamma^{-1}(\delta(r^l)) = \gamma^{-1}(s^l) = s$, то есть $\beta(r) = s$. Покажем, что $\beta^*|_{R^l} = \delta$, то есть $\beta^*(r^l) = s^l$. Пусть $x \in S$, тогда $(\beta^*(r^l))(x) = (\beta r^l\beta^{-1})(x) = ((\gamma^{-1}\delta\alpha)r^l(\gamma^{-1}\delta\alpha)^{-1})(x) = (\gamma^{-1}\delta\alpha r^l\alpha^{-1}\delta^{-1}\gamma)(x) = (\gamma^{-1}\delta\alpha r^l\alpha^{-1}\delta^{-1})(x^l) = (\gamma^{-1}\delta\alpha r^l\alpha^{-1})(y^l) = (\gamma^{-1}\delta\alpha r^l)(y) = (\gamma^{-1}\delta\alpha)(ry) = (\gamma^{-1}\delta\alpha)(r)(\gamma^{-1}\delta\alpha)(y) = (\gamma^{-1}\delta)(r^l)(\gamma^{-1}\delta)(y^l) = (\gamma^{-1})(s^l)(\gamma^{-1})(x^l) = sx = s^l(x)$. Таким образом, правый квадрат в диаграмме $(*)$ коммутативен, что делает коммутативной всю диаграмму.

Теорема 2. *Для колец R и S следующие условия эквивалентны:*

1) $R \cong S$;

2) $R^l \cong S^l$;

3) $E(R) \overset{\beta}{\cong} E(S)$, $E(R)/R^l \overset{\gamma}{\cong} E(S)/S^l$, *причём* $\gamma\pi = \pi'\beta$, *где* $\pi\colon E(R) \to E(R)/R^l$, $\pi'\colon E(S) \to E(S)/S^l$ — *канонические эпиморфизмы и* γ — *групповой изоморфизм.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2) следует из леммы 1. Покажем, что из 2) следует 3). Пусть $\alpha\colon R^l \to S^l$ — изоморфизм колец, тогда по лемме 1 существует изоморфизм $\beta\colon E(R) \to E(S)$, такой что диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & R^l & \xrightarrow{i} & E(R) & \xrightarrow{\pi} & E(R)/R^l & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\beta} & & \big\downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & S^l & \xrightarrow{i'} & E(S) & \xrightarrow{\pi'} & E(S)/S^l & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (**)$$

коммутативна, где γ не задано, i, i' — тождественные вложения колец, π, π' — канонические эпиморфизмы групп. Тогда по [3, предложение 3] существует групповой изоморфизм γ, такой что правый квадрат диаграммы $(**)$ коммутативен, то есть $\gamma\pi = \pi'\beta$.

3) $\Rightarrow$ 2). Рассмотрим коммутативную диаграмму $(**)$ с точными строками, где α не задано, i, i' — тождественные вложения колец, π, π' — канонические эпиморфизмы групп. Тогда по [3, предложение 2] существует групповой мономорфизм $\alpha\colon R^l \to S^l$, такой что $i'\alpha = \beta i$, то есть диаграмма $(**)$ является коммутативной. Поскольку $\operatorname{im}\beta i \subseteq \operatorname{im} i'$, то $\alpha = (i')^{-1}\beta i$. Так как $(i')^{-1}$, β, i — кольцевые гомоморфизмы, то α — кольцевой гомоморфизм. Покажем, что α — эпиморфизм. Поскольку β — эпиморфизм, то для произвольного $s \in S^l$ существует $b \in E(R)$, такой что $i'(s) = \beta(b)$. Тогда $0 = \pi'(i'(s)) = \pi'(\beta(b)) = \gamma(\pi(b))$ и $\pi(b) \in \operatorname{Ker}\gamma$. Так как γ — мономорфизм, то $\pi(b) = 0$ и $b \in \operatorname{Ker}\pi = \operatorname{im} i$. Следовательно, существует $r \in R^l$, такой что $i(r) = b$. Тогда $\beta(i(r)) = \beta(b) = i'(s)$, и поэтому $(i')^{-1}(\beta(i(r))) = s$, то есть $\alpha(r) = s$. Таким образом, показано что α — кольцевой изоморфизм.

Рассматриваемый далее результат относится к так называемой теореме изоморфизма для колец эндоморфизмов, под которой понимается обычно теорема, утверждающая, что две группы, быть может из данного класса, изоморфны, если их кольца эндоморфизмов изоморфны [2]. Обозначим через K класс абелевых групп, на которых можно задать структуру кольца с единицей. Тогда для групп из этого класса справедливо следующее утверждение.

Следствие 3. *Для любых* $A, B \in K$ *следующие условия равносильны:*

1) $A \cong B$;

2) $(A^l)^+ \cong (B^l)^+$;

3) $E(A) \overset{\beta}{\cong} E(B)$, $E(A)/(A^l)^+ \overset{\gamma}{\cong} E(B)/(B^l)^+$, *причём* $\gamma\pi = \pi'\beta$, *где* $\pi\colon E(A) \to E(A)/(A^l)^+$, $\pi'\colon E(B) \to E(B)/(B^l)^+$ — *канонические эпиморфизмы.*

В [4] Л. Фукс сформулировал проблему 84: найти критерии для различных типов колец, при которых эти кольца служат кольцами эндоморфизмов абелевых групп. В приведённом ниже утверждении решается данная проблема для произвольных ассоциативных колец с единицей.

Следствие 4. *Для кольца R и абелевой группы A следующие условия равносильны:*

1) $R \cong E(A)$;

2) $R^l \cong (E(A))^l$;

3) $E(R) \overset{\beta}{\cong} E(E(A))$, $E(R)/R^l \overset{\gamma}{\cong} E(E(A))/(E(A))^l$, *причём* $\gamma\pi = \pi'\beta$, *где* $\pi\colon E(R) \to E(R)/R^l$, $\pi'\colon E(E(A)) \to E(E(A))/(E(A))^l$ — *канонические эпиморфизмы.*

Если в следствии 4 вместо абелевой группы рассматривать ассоциативное кольцо A с единицей, то получим критерий, при котором кольцо R является кольцом эндоморфизмов аддитивной группы кольца A.

Литература

[1] Каш Ф. Модули и кольца. — М.: Мир, 1981.

[2] Крылов П. А., Михалев А. В., Туганбаев А. А. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. — Томск: Томский государственный университет, 2002.

[3] Скорняков Л. А. Лекции по гомологической алгебре // Мат. вестник. — 1968. — Т. 5, № 1. — С. 71—113.

[4] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. II. — М.: Мир, 1977.