Дистрибутивные и полунаследственные кольца*

А. А. ТУГАНБАЕВ
Московский энергетический институт (технический университет)
e-mail: askar@tuganbaev.mccme.ru

УДК 512.55

Ключевые слова: дистрибутивное кольцо, полунаследственное кольцо.

Аннотация

Пусть A — дистрибутивное справа и слева кольцо. Для натурального числа n получен критерий проективности всех n-порождённых правых идеалов кольца A и критерий правой полунаследственности кольца A.

Abstract

A. A. Tuganbaev, Distributive and semihereditary rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 1, pp. 253—258.

Let A be a right and left distributive ring. For a positive integer n, we obtain a criterion of projectivity of all n-generated right ideals of the ring A and a criterion of the right semi-heredity of the ring A.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Кольцо называется называется *дистрибутивным справа* (*слева*), если решётка всех его правых (левых) идеалов дистрибутивна. Слова типа «дистрибутивное кольцо» означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Кольцо называется *полунаследственным справа*, если все его конечно порождённые правые идеалы проективны. Кольцо называется *риккартовым справа*, если все его главные правые идеалы проективны (т. е. если правый аннулятор каждого его элемента порождается идемпотентом).

Пусть A — кольцо и M — правый A-модуль. Модуль M называется *делимым*, если для любого элемента $m \in M$ и каждого неделителя нуля $a \in A$ существует такой элемент $x \in M$, что $m = xa$. Если n — натуральное число и для любого n-порождённого правого идеала B кольца A каждый гомоморфизм $B \to M$ продолжается до гомоморфизма $A_A \to M$, то M называется *n-инъективным* модулем. (1-инъективные модули также называются *p-инъективными* модулями.) Модуль M называется *конечно инъективным*, если M n-инъективен для каждого натурального числа n. Модуль M называется *FP-инъективным*, если для любого конечно порождённого подмодуля N модуля $A^{\aleph_0}$ каждый гомоморфизм $N \to M$ продолжается до гомоморфизма $A^{\aleph_0} \to M$ (через $A^{\aleph_0}$ обозначается прямая сумма бесконечного счётного множества экземпляров модуля A_A).

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований.

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 1, с. 253—258.
© 2003 *Центр новых информационных технологий МГУ, Издательский дом «Открытые системы»*

Основными результатами данной работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть A — дистрибутивное кольцо и n — натуральное число. Тогда равносильны следующие условия:*

(1) *все n-порождённые правые идеалы кольца A проективны;*

(2) *все n-порождённые левые идеалы кольца A проективны;*

(3) *все 1-инъективные правые A-модули n-инъективны;*

(4) *все 1-инъективные левые A-модули n-инъективны;*

(5) *все делимые правые A-модули n-инъективны;*

(6) *все делимые левые A-модули n-инъективны.*

Теорема 2. *Пусть A — риккартово справа или слева, дистрибутивное кольцо. Тогда равносильны следующие условия:*

(1) *A — полунаследственное справа кольцо;*

(2) *A — полунаследственное слева кольцо;*

(3) *все 1-инъективные правые A-модули конечно инъективны;*

(4) *все 1-инъективные левые A-модули конечно инъективны;*

(5) *все делимые правые A-модули FP-инъективны;*

(6) *все делимые правые A-модули FP-инъективны.*

Доказательство теорем 1 и 2 разбито на ряд лемм. Приведём необходимые определения. Кольцо называется *нормальным*, если все его идемпотенты центральны. Собственный идеал P кольца A называется *вполне первичным*, если A/P — область. Если M и N — два модуля и для любого эпиморфизма $h\colon N \to \overline{N}$ и каждого гомоморфизма $\overline{f}\colon M \to \overline{N}$ существует такой гомоморфизм $f\colon M \to N$, что $\overline{f} = hf$, то модуль M называется *N-проективным*. Кольцо A называется *когерентным справа*, если каждый его конечно порождённый правый идеал является конечно представимым A-модулем.

Пусть A — кольцо и $T(A)$ — множество всех неделителей нуля кольца A. Кольцо A называется *кольцом Оре*, если для любых двух элементов $a \in A$ и $t \in T(A)$ существуют такие элементы $u, v \in T(A)$ и $b, c \in A$, что $au = tb$ и $va = ct$. Если A — кольцо Оре, то существует такое кольцо Q, что A — унитарное подкольцо кольца Q, каждый неделитель нуля кольца A обратим в кольце Q и $Q = \{at^{-1} \mid a \in A,\ t \in T\} = \{t^{-1}a \mid a \in A,\ t \in T\}$ (см., например, [1, 5.3]). В этом случае кольцо Q называется *классическим кольцом частных* кольца A. Подмодуль B правого A-модуля Q называется *обратимым справа* в кольце Q, если существуют такие элементы $b_1, \ldots, b_n \in B$ и $q_1, \ldots, q_n \in Q$, что $1 = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i q_i$ и $q_i B \subseteq A$ для всех i.

Лемма 1. *Пусть A — кольцо и n — натуральное число. Тогда равносильны следующие условия:*

(1) *все гомоморфные образы каждого n-инъективного правого A-модуля n-инъективны;*

(2) *все n-порождённые правые идеалы кольца A проективны относительно всех n-инъективных правых A-модулей;*

(3) *все n-порождённые правые идеалы кольца A проективны.*

Доказательство.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Пусть B — n-порождённый правый идеал кольца A, M — n-инъективный правый A-модуль, $h\colon M \to \overline{M}$ — эпиморфизм, $\overline{f}$ — гомоморфизм из B_A в $\overline{M}$. По условию $\overline{M}$ — n-инъективный модуль. Поэтому гомоморфизм $\overline{f}$ продолжается до гомоморфизма $\overline{g}\colon A_A \to \overline{M}$. Так как модуль A_A проективен, то существует такой гомоморфизм $g\colon A_A \to M$, что $\overline{g} = hg$. Положим $f \equiv g|_B$. Тогда $\overline{f} = hf$ и модуль B_A проективен относительно M.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Доказательство вытекает из следующего утверждения (см. [1, 2.19 (2)]): если модуль M_A проективен относительно всех инъективных правых A-модулей, то M — проективный модуль.

(3) $\Longrightarrow$ (2) Утверждение очевидно.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Пусть B — n-порождённый правый идеал кольца A, M — n-инъективный правый A-модуль, $h\colon M \to \overline{M}$ — эпиморфизм, $\overline{f}$ — гомоморфизм из B_A в $\overline{M}$. По условию модуль B_A проективен относительно n-инъективного модуля M. Поэтому существует такой гомоморфизм $f\colon B_A \to M$, что $\overline{f} = hf$. По условию модуль M n-инъективен. Поэтому гомоморфизм f продолжается до гомоморфизма $g\colon A_A \to M$. Положим $\overline{g} \equiv hg\colon A_A \to \overline{M}$. Тогда $\overline{g}$ — продолжение гомоморфизма $\overline{f}$. $\square$

Лемма 2. *Пусть A — кольцо и M — правый A-модуль.*

(1) *M — 1-инъективный модуль $\Longleftrightarrow$ для любых двух таких элементов $m \in M$ и $a \in A$, что правый аннулятор $r(a)$ элемента a содержится в $r(m)$, существует такой элемент $x \in M$, что $m = xa$.*

(2) *Если M — 1-инъективный модуль, то M — делимый модуль.*

(3) *Если A — риккартово справа кольцо, n — натуральное число и все 1-инъективные правые A-модули n-инъективны, то все n-порождённые правые идеалы кольца A проективны.*

Доказательство. (1) доказано в [1, 2.16 (3)].

(2) следует из (1).

(3) Пусть M — n-инъективный правый A-модуль и $h\colon M \to \overline{M}$ — эпиморфизм. Так как A — риккартово справа кольцо и n-инъективный модуль M 1-инъективен, то по лемме 1 модуль $\overline{M}$ 1-инъективен. По условию 1-инъективный модуль M n-инъективен. По лемме 1 все n-порождённые правые идеалы кольца A проективны. $\square$

Лемма 3. *Для кольца A верны следующие утверждения.*

(1) *Если A — полунаследственное справа кольцо, то A — когерентное справа кольцо.*

(2) *Если A — когерентное справа кольцо и M — правый A-модуль, то M — FP-инъективный модуль $\Longleftrightarrow$ M — конечно инъективный модуль.*

(3) *Если n — натуральное число, то все n-порождённые правые идеалы кольца A плоские $\Longleftrightarrow$ все n-порождённые левые идеалы кольца A плоские.*

(4) *Каждый конечно представимый плоский модуль является проективным.*

(5) *Если* n — *натуральное число и* A — *когерентное кольцо, то все* n-*порождённые правые идеалы кольца* A *проективны* $\Longleftrightarrow$ *все* n-*порождённые левые идеалы кольца* A *проективны.*

Доказательство. (1) и (2) доказаны в [2, 26.7, 26.2 (4)]. (3) доказано в [3]. (4) доказано в [1, 6.8 (1)]. (5) следует из (3) и (4). □

Лемма 4 ([4, глава 2, 4.3, 4.4]). *Пусть* A — *кольцо, обладающее классическим кольцом частных* Q, D — *правый идеал кольца* A.

(1) D *обратим справа в кольце* Q *тогда и только тогда, когда* D — *конечно порождённый проективный правый идеал, содержащий неделитель нуля кольца* A.

(2) *Если* D — *обратимый справа правый идеал кольца* A *и* M — *делимый правый* A-*модуль, то для любого гомоморфизма* $g\colon D_A \to M$ *существует такой элемент* $m \in M$, *что* $g(d) = md$ *для любого элемента* $d \in D$.

Лемма 5. *Пусть* A — *кольцо, обладающее классическим кольцом частных* Q.

(1) *Если* n — *натуральное число и каждый* n-*порождённый правый идеал кольца* A *является прямым слагаемым проективного* n-*порождённого правого идеала, содержащего неделитель нуля кольца* A, *то каждый делимый правый* A-*модуль является* n-*инъективным.*

(2) *Если для любого натурального числа* n *каждый* n-*порождённый правый идеал кольца* A *является прямым слагаемым проективного* n-*порождённого правого идеала, содержащего неделитель нуля кольца* A, *то каждый делимый правый* A-*модуль является FP-инъективным.*

Доказательство.

(1) Пусть M — делимый правый A-модуль, B — n-порождённый правый идеал кольца A и $f\colon B_A \to M$ — гомоморфизм. По условию существует такое прямое разложение $D = B \oplus C$, что D — проективный n-порождённый правый идеал кольца A, содержащий неделитель нуля кольца A. Правилом $g(b + c) = f(b)$ корректно определён гомоморфизм $g\colon D_A \to M$. По лемме 4 (1) правый идеал D обратим справа в кольце Q. По лемме 4 (2) существует такой элемент $m \in M$, что $g(d) = md$ для любого элемента $d \in D$. Правилом $h(a) = ma$ корректно определён гомоморфизм $h\colon A_A \to M$. Так как h совпадает с f на B, то модуль M n-инъективен.

(2) Из условия следует, что A — полунаследственное справа кольцо. По (1) каждый делимый правый A-модуль конечно инъективен. Поэтому из леммы 3 (1) и леммы 3 (2) следует, что каждый делимый правый A-модуль FP-инъективен. □

Лемма 6 ([1, 3.28 (5), 7.20]). *Пусть* A — *дистрибутивное справа кольцо.*

(1) A — *нормальное кольцо.*

(2) *Если* A — *риккартово справа или слева кольцо, то* A — *когерентное справа риккартово кольцо, обладающее классическим правым кольцом частных.*

Лемма 7. *Пусть A — риккартово справа или слева нормальное кольцо.*

(1) *A — риккартово кольцо, причём каждый элемент кольца A является произведением центрального идемпотента и неделителя нуля.*

(2) *Если M — правый A-модуль, то M — делимый модуль $\Longleftrightarrow$ M — 1-инъективный модуль.*

(3) *Если n — натуральное число и B — n-порождённый правый идеал кольца A, то существует такой n-порождённый правый идеал D кольца A, что D содержит неделитель нуля кольца A и $D_A = eA \oplus B_A$ для некоторого центрального идемпотента $e \in D$.*

Доказательство. (1) доказано в [1, 5.28].

(2) Импликация $\Longleftarrow$ следует из леммы 2 (2).

$\Longrightarrow$ Пусть $m \in M$, $a \in A$ и $r(a) \subseteq r(m)$. По (1) $a = ed = de$, где e — центральный идемпотент кольца A и d — неделитель нуля. Так как M — делимый модуль, то существует такой элемент $x \in M$, что $m = xd$. Так как $1 - e$ — центральный идемпотент кольца A и $1 - e \in r(a) \subseteq r(m)$, то $m = me = xde = ma$ и модуль M 1-инъективен.

(3) По (1) существуют такие центральные идемпотенты $e_1, \ldots, e_n$ кольца A и неделители нуля $b_1, \ldots, b_n$ кольца A, что $B = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i b_i A$. Обозначим через e центральный идемпотент $(1-e_1)\cdot(1-e_n) \in A$. Тогда $Be = eB = 0$ и $B \cap eA = 0$. Положим $D \equiv eA \oplus B$. Так как $eA \oplus e_1b_1A = (e_1b_1 + e)A$, то D — n-порождённый правый идеал. Обозначим через d элемент $e + e_1b_1 + (1 - e_1)e_2b_2 + (1-e_1)(1-e_2)e_3b_3 + (1-e_1)\cdots(1-e_{n-1})e_nb_n$. Так как все b_i — неделители нуля и все e_i — центральные идемпотенты, то e_1b_1 — неделитель нуля в кольце e_1A, $(1-e_1)e_2b_2$ — неделитель нуля в кольце $(1-e_1)e_2A$, $(1-e_1)(1-e_2)e_3b_3$ — неделитель нуля в кольце $(1-e_1)(1-e_2)e_3A, \ldots$ $(1-e_1)\cdots(1-e_{n-1})e_nb_n$ — неделитель нуля в кольце $(1-e_1)\cdots(1-e_{n-1})e_nA$. Кроме того, единица кольца A является суммой центральных ортогональных идемпотентов e, e_1, $(1-e_1)e_2$, $(1-e_1)(1-e_2)e_3, \ldots$ $(1-e_1)\cdots(1-e_{n-1})e_n$. Поэтому d — неделитель нуля в кольце A. □

Лемма 8. *Пусть n — натуральное число и A — риккартово справа или слева нормальное кольцо, обладающее классическим кольцом частных. Тогда равносильны следующие условия:*

(1) *все n-порождённые правые идеалы кольца A проективны;*

(2) *все 1-инъективные правые A-модули n-инъективны;*

(3) *все делимые правые A-модули n-инъективны.*

Доказательство.

(1) $\Longrightarrow$ (2) По лемме 7 (3) каждый n-порождённый правый идеал кольца A является прямым слагаемым n-порождённого правого идеала, содержащего неделитель нуля кольца A. По лемме 5 (1) каждый делимый правый A-модуль является n-инъективным.

Импликация (2) $\Longrightarrow$ (1) следует из леммы 2 (3).

Эквивалентность условий (2) и (3) следует из леммы 7 (2). □

Лемма 9. *Пусть A — риккартово справа или слева нормальное кольцо, обладающее классическим кольцом частных. Тогда равносильны следующие условия:*

(1) *A — полунаследственное справа кольцо;*

(2) *все 1-инъективные правые A-модули конечно инъективны;*

(3) *все делимые правые A-модули FP-инъективны.*

Доказательство. Эквивалентность условий (1) и (2) следует из леммы 8.

(2) $\Longrightarrow$ (3) По лемме 8 A — полунаследственное справа кольцо и все делимые правые A-модули конечно инъективны. По лемме 3 (1) и лемме 3 (2) все делимые правые A-модули FP-инъективны.

(3) $\Longrightarrow$ (2) По лемме 2 (2) каждый 1-инъективный модуль является делимым. Кроме того, каждый FP-инъективный модуль конечно инъективен. $\square$

Окончание доказательства теоремы 1. Можно считать, что A — риккартово справа или слева дистрибутивное кольцо. По лемме 6 (1) и лемме 6 (2) A — нормальное когерентное риккартово кольцо, обладающее классическим правым кольцом частных Q и классическим левым кольцом частных Q'. Поэтому Q — (двустороннее) классическое кольцо частных кольца A. По лемме 3 (5) все n-порождённые правые идеалы кольца A проективны тогда и только тогда, когда все n-порождённые левые идеалы кольца A проективны. Поэтому утверждение следует из леммы 8. $\square$

Окончание доказательства теоремы 2. По лемме 6 (1) и лемме 6 (2) A — нормальное риккартово кольцо, обладающее классическим правым кольцом частных Q. Так как A — дистрибутивное слева риккартово кольцо, то из леммы 6 (2) следует, что Q — (двустороннее) классическое кольцо частных кольца A. Поэтому утверждение следует из леммы 9. $\square$

Литература

[1] Tuganbaev A. A. Semidistributive Modules and Rings. — Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[2] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. — Philadelphia: Gordon and Breach Science Publishers, 1991.

[3] Jondrup S. PP-rings and finitely generated flat ideals // Proc. Amer. Math. Soc. — 1971. — Vol. 28, no. 2. — P. 431—435.

[4] Stenström B. Rings of Quotients: An Introduction to Methods of Ring Theory. — Springer, 1975.