О группах сигнатуры $(0; n; 0)$

П. ТУМАРКИН
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*

УДК 512.817

Ключевые слова: идеальный многоугольник, фундаментальная область группы.

Аннотация

Рассмотрим идеальный $(2n-2)$-угольник M на плоскости. Зададим отображения S_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, спаривающие симметричные (относительно некоторой фиксированной диагонали) стороны многоугольника, и обозначим через Γ группу, порождённую этими отображениями. Каждое отображение S_i зависит от одного параметра. Мы получаем необходимое и достаточное условие того, что эти параметры можно выбрать так, чтобы наш многоугольник M был фундаментальной областью группы Γ.

Abstract

P. Tumarkin, Groups of signature $(0; n; 0)$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 1, pp. 259—262.

Let M be an ideal polygon with $2n-2$ vertices. Consider a pairing of the symmetrical (with respect to some fixed diagonal) sides of M by mappings S_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, and denote by Γ the group generated by these mappings. Each S_i depends on one parameter. We prove a necessary and sufficient condition for the possibility of choosing these parameters so that our polygon M would be a fundamental domain for the action of Γ.

Введение

Рассмотрим идеальный $(2n-2)$-угольник M на плоскости. Обозначим его вершины

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_n (= \beta_n), \beta_{n-1}, \ldots, \beta_2, \beta_1 (= \alpha_1)$$

(мы обходим многоугольник против часовой стрелки). Зададим отображения, спаривающие стороны многоугольника: $S_i \colon \beta_i\beta_{i+1} \to \alpha_i\alpha_{i+1}$. Пусть Γ — группа, порождённая всеми S_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Мы хотим задать S_i так, чтобы наш многоугольник M был фундаментальной областью группы Γ.

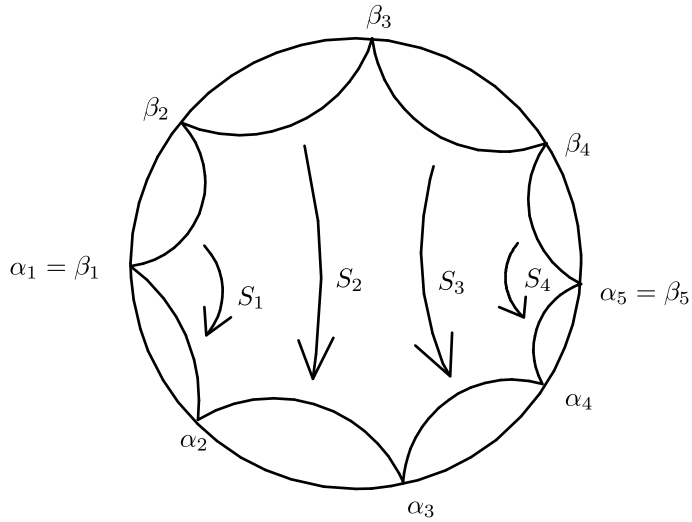
Вопрос. При каких условиях на вершины многоугольника это можно сделать?

Ответ. Вершины многоугольника v_i, $i = 1, \ldots, 2n-2$, где $v_i = \alpha_i$ при $i \leqslant n$ и $v_i = \beta_{2n-i}$ при $n+1 \leqslant i \leqslant 2n-2$, должны удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned}(v_1 - v_2)(v_3 - v_4) \ldots (v_{2n-5} - v_{2n-4})(v_{2n-3} - v_{2n-2}) = \\ = -(v_2 - v_3)(v_4 - v_5) \ldots (v_{2n-4} - v_{2n-3})(v_{2n-2} - v_1).\end{aligned}$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 1, с. 259—262.

Это условие было известно Пуанкаре (см., например, [1]). К сожалению, Пуанкаре не приводит доказательство этого факта.



Уточнение

Для того чтобы применить к M теорему Пуанкаре о фундаментальном многоугольнике дискретной группы, необходимо и достаточно, чтобы стабилизатор любой его бесконечно удалённой точки порождался параболическим элементом. Посмотрим на композицию $T_i = S_{i-1}^{-1} S_i$, $2 \leqslant i \leqslant n-1$. Очевидно, она сохраняет β_i. Стабилизатор точки α_i сопряжён стабилизатору β_i. При $i = 1$ само преобразование $T_1 = S_1$ сохраняет β_1, а при $i = n$ точку β_n сохраняет преобразование $T_n = S_{n-1}^{-1}$. Таким образом, нам надо выяснить, при каких условиях на вершины M можно выбрать S_i так, чтобы преобразования T_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, были параболическими. Заметим, что в этом случае Γ порождается параболическими элементами T_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, причём

$$T_1 T_2 \ldots T_{n-1} T_n = I.$$

Вычисления

Поскольку S_i переводит $\beta_i \beta_{i+1}$ в $\alpha_i \alpha_{i+1}$, мы можем представить S_i в виде

$$S_i = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{i+1}}{x_i(\alpha_{i+1}-\alpha_i)} - \frac{x_i \alpha_i}{\beta_{i+1}-\beta_i} & \frac{x_i \alpha_i \beta_{i+1}}{\beta_{i+1}-\beta_i} - \frac{\alpha_{i+1}\beta_i}{x_i(\alpha_{i+1}-\alpha_i)} \\ \frac{1}{x_i(\alpha_{i+1}-\alpha_i)} - \frac{x_i}{\beta_{i+1}-\beta_i} & \frac{x_i \beta_{i+1}}{\beta_{i+1}-\beta_i} - \frac{\beta_i}{x_i(\alpha_{i+1}-\alpha_i)} \end{pmatrix},$$

где x_i — произвольное вещественное число, не равное нулю. (Ясно, что S_i зависит от одного параметра. Тот факт, что это преобразование действительно переводит $\beta_i\beta_{i+1}$ в $\alpha_i\alpha_{i+1}$, проверяется непосредственным вычислением.) Условие параболичности $T_{i+1} = S_i^{-1}S_{i+1}$ можно записать в виде

$$\operatorname{tr}(S_i^{-1}S_{i+1}) = \frac{x_i x_{i+1}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)}{\beta_{i+1}-\beta_i} + \frac{\beta_{i+1}-\beta_i}{x_i x_{i+1}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)} = \pm 2.$$

Следовательно,

$$\frac{x_i x_{i+1}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)}{\beta_{i+1}-\beta_i} = \pm 1,$$

т. е. $x_{i+1} = \frac{\beta_{i+1}-\beta_i}{\alpha_{i+1}-\alpha_i}\frac{1}{x_i}$. Из параболичности S_1 получаем

$$\operatorname{tr}(S_1) = \frac{\alpha_2}{x_1(\alpha_2-\alpha_1)} - \frac{x_1\alpha_1}{\beta_2-\beta_1} - \frac{\beta_1}{x_1(\alpha_2-\alpha_1)} + \frac{x_1\beta_2}{\beta_2-\beta_1} = \\ = \frac{x_1(\beta_2-\alpha_1)}{\beta_2-\beta_1} + \frac{\alpha_2-\beta_1}{x_1(\alpha_2-\alpha_1)} = x_1 + \frac{1}{x_1} = \pm 2,$$

поскольку $\beta_1 = \alpha_1$. Таким образом, $x_1 = \pm 1$. Аналогично, $x_{n-1} = \pm 1$. Отсюда получаем

$$\pm 1 = x_{n-1} = \frac{\beta_{n-1}-\beta_{n-2}}{\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}}\frac{1}{x_{n-2}} = \frac{\beta_{n-1}-\beta_{n-2}}{\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}}\frac{\alpha_{n-2}-\alpha_{n-3}}{\beta_{n-2}-\beta_{n-3}}x_{n-3} = \ldots = \\ = \frac{(\beta_{n-1}-\beta_{n-2})(\alpha_{n-2}-\alpha_{n-3})(\beta_{n-3}-\beta_{n-4})(\alpha_{n-4}-\alpha_{n-5})\ldots(\beta_2-\beta_1)}{(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2})(\beta_{n-2}-\beta_{n-3})(\alpha_{n-3}-\alpha_{n-4})(\beta_{n-4}-\beta_{n-5})\ldots(\alpha_2-\alpha_1)}.$$

В последнем вычислении мы предположили, что n чётно. Если n нечётно, последние сомножители в числителе и знаменателе поменяются местами (поскольку изменится чётность числа сомножителей). Если задать «сквозную» нумерацию вершин v_i, где $v_i = \alpha_i$ при $i \leqslant n$ и $v_i = \beta_{2n-i}$ при $n+1 \leqslant i \leqslant 2n-2$, и поменять местами некоторые сомножители, (т. е. «собрать» влево все α), то полученное равенство примет вид

$$(v_1-v_2)(v_3-v_4)\ldots(v_{2n-5}-v_{2n-4})(v_{2n-3}-v_{2n-2}) = \\ = \pm(v_2-v_3)(v_4-v_5)\ldots(v_{2n-4}-v_{2n-3})(v_{2n-2}-v_1).$$

Осталось разобраться со знаком. Поскольку вершины занумерованы против часовой стрелки, каждый сомножитель в равенстве отрицателен, если только между этими двумя точками не попала бесконечность. Бесконечность может попасть (и обязательно попадёт!) ровно в один интервал. Таким образом, ровно один сомножитель будет положительным. Поскольку число сомножителей в обеих частях равенства одинаково, вместо $\pm$ надо поставить знак $-$.

Итак, мы получили, что

$$(v_1-v_2)(v_3-v_4)\ldots(v_{2n-5}-v_{2n-4})(v_{2n-3}-v_{2n-2}) = \\ = -(v_2-v_3)(v_4-v_5)\ldots(v_{2n-4}-v_{2n-3})(v_{2n-2}-v_1).$$

Литература

[1] Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 3. — М.: Наука, 1971.
[2] Бердон А. Геометрия дискретных групп. — М.: Наука, 1986.