Кокстеровские разбиения гиперболических тетраэдров*

А. А. ФЕЛИКСОН

УДК 512.817+514.132

Ключевые слова: многогранник Кокстера, гиперболический тетраэдр, кокстеровское разбиение.

Аннотация

В данной работе найдены все кокстеровские разбиения гиперболических тетраэдров. Эта классификация даёт возможность легко находить все кокстеровские подгруппы групп, порождённых отражениями в гранях тетраэдров, а также определять их индекс.

Abstract

A. A. Felikson, Coxeter decompositions of hyperbolic tetrahedra, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 1, pp. 263—275.

In this paper we classify all Coxeter decompositions of hyperbolic tetrahedra. Using this classification one can find all Coxeter subgroups of the group generated by reflections with respect to the faces of the tetrahedra. The indices of such subgroups easily follow from the classification also.

Введение

Рассмотрим многогранник P в пространстве Лобачевского H^3.

Определение 1. Многогранник называется *многогранником Кокстера*, если все его двугранные углы являются целыми частями π.

Определение 2. *Кокстеровским разбиением* многогранника P называется такое разбиение P на конечное число $1 < N < \infty$ кокстеровских многогранников F_i, что любые два многогранника F_i и F_j, имеющие общую грань, симметричны друг другу относительно общей грани.

В данной работе найдены все кокстеровские разбиения гиперболических тетраэдров. Эта классификация даёт возможность легко находить все кокстеровские подгруппы групп, порождённых отражениями в гранях тетраэдров, а также определять их индекс.

Работа была частично написана в Университете Билефельда. Автор благодарит его за гостеприимность. Автор пользуется случаем поблагодарить О. В. Шварцмана и Е. Б. Винберга за внимание к работе.

*Частично поддержано грантом РФФИ № 96-15-96050.

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 1, с. 263—275.

Определения

Любые два многогранника F_i и F_j определения 2, очевидно, конгруэнтны друг другу. Многогранники F_i называются *фундаментальными* и обозначаются F. Плоскость α, содержащая грань фундаментального многогранника, называется *зеркалом*, если α не содержит грани многогранника P.

Определение 3. Зафиксируем кокстеровское разбиение многогранника P. Для данного разбиения будем говорить, что *вершина* A многогранника P *фундаментальна*, если она не принадлежит ни одному зеркалу. *Двугранный угол* многогранника P, образованный пересекающимися гранями α и β, называется *фундаментальным*, если $\alpha \cap \beta$ не принадлежит ни одному зеркалу.

Обозначения

$N > 1$ — число фундаментальных многогранников F, содержащихся внутри P. $\mathrm{Vol}(T)$ — объём тетраэдра T. k-ребро — ребро AB фундаментального многогранника, такое что двугранный угол $\angle AB$ равен $\frac{\pi}{k}$. k-l-m-вершина — вершина фундаментального многогранника, такая что рёбра, сходящиеся в данной вершине, имеют двугранные углы $\frac{\pi}{k}$, $\frac{\pi}{l}$ и $\frac{\pi}{m}$. Двугранный угол многогранника (или угол многоугольника), разбитый на k частей величины $\frac{\pi}{q}$ каждая, обозначается так: $\frac{k\pi}{q}$.

Кокстеровские тетраэдры представлены своими схемами Кокстера. Обозначения для кокстеровских тетраэдров введены в таблице 1.

1. Фундаментальный многогранник

Лемма 1 (очевидная).

1. *Пусть многогранник P допускает кокстеровское разбиение. Тогда любой многогранник, содержащийся внутри P, допускает кокстеровское разбиение.*
2. *Если многогранник P допускает кокстеровское разбиение, в котором все двугранные углы фундаментальны, то P — многогранник Кокстера.*

Обозначения. Обозначим $\alpha \cap \beta$ пересечение множеств α и β *внутри* пространства $\mathbf{H}^3$. Плоскость, содержащую грань α многогранника, обозначим $\overline{\alpha}$.

Лемма 2. *Пусть F — многогранник Кокстера. Тогда либо F — тетраэдр, либо F имеет две грани α и β, такие что $\overline{\alpha} \cap \overline{\beta} = \varnothing$.*

Доказательство. Предположим, что F не тетраэдр. Для любого многогранника, не имеющего тупых углов, известно, что

$$\alpha \cap \beta = \varnothing \implies \overline{\alpha} \cap \overline{\beta} = \varnothing.$$

Кокстеровские многогранники не имеют тупых углов. Поэтому достаточно доказать, что F имеет грани α и β, такие что $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

Пусть $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$ для любых граней α и β многогранника F. Пусть A — произвольная вершина, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — все грани многогранника F, которые содержат вершину A. Пусть грань β не содержит A. По предположению $\alpha_i \cap \beta \neq \varnothing \ \forall i = 1, \ldots, k$. Поэтому F не имеет других граней, кроме α_i и β, т. е. F — пирамида.

Пусть вершина A не является идеальной. Тогда A принадлежит ровно трём граням (поскольку пирамида F кокстеровская). Но тогда F — тетраэдр.

Пусть вершина A идеальна. Рассмотрим две грани (например, α_1 и α_3), не имеющие общих рёбер. Поскольку A не лежит внутри $\mathbf{H}^3$, $\alpha_1 \cap \alpha_3 = \varnothing$. □

Лемма 3. *Фундаментальным многогранником для любого кокстеровского разбиения тетраэдра является тетраэдр.*

Доказательство. Предположим, что F не тетраэдр. По лемме 2 многогранник F содержит грани α и β, такие что $\overline{\alpha} \cap \overline{\beta} = \varnothing$. Рассмотрим произвольный фундаментальный многогранник F_0 в P. Пусть α_0 и β_0 — его непересекающиеся грани. Рассмотрим последовательность фундаментальных многогранников $F_i \in P$, $i \in \mathbb{Z}$, таких что $\alpha_i = \alpha_{i+1}$, при нечётном i, $\beta_i = \beta_{i+1}$, при чётном i (см. рис. 1).

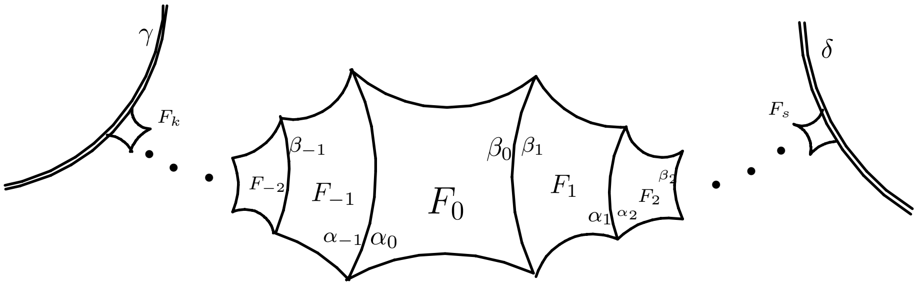


Рис. 1. Последовательность фундаментальных многогранников

Последовательность конечна, поскольку P содержит только конечное число фундаментальных многогранников. Пусть F_k и F_s — крайние многогранники в этой последовательности. Тогда α_k или β_k принадлежит некоторой грани γ тетраэдра P. Аналогично, α_s или β_s принадлежит некоторой грани δ тетраэдра P. Ясно, что $\overline{\alpha}_i \cap \overline{\beta}_j = \varnothing \ \forall i, j$. Но γ пересекает δ, поскольку P — тетраэдр. Противоречие. □

Лемма 4. *Гиперболической кокстеровский тетраэдр F может быть фундаментальным многогранником только для конечного числа кокстеровских разбиений тетраэдров P.*

Доказательство. Гиперболический тетраэдр полностью определяется величинами своих двугранных углов. Величины двугранных углов многогранника, допускающего кокстеровское разбиение, кратны величинам двугранных углов фундаментального многогранника. Поэтому для любого фундаментального тетраэдра F существует лишь конечное число возможных наборов двугранных углов тетраэдра P. □

Лемма 5 (свойство объёмов). *Объём многогранника P, допускающего кокстеровское разбиение, кратен объёму фундаментального многогранника F, т. е.* $\frac{\mathrm{Vol}(P)}{\mathrm{Vol}(F)} \in \mathbf{Z}$.

Объёмы гиперболических кокстеровских тетраэдров вычислены в работе [1], мы приводим их в таблице 1.

Три типа кокстеровских разбиений тетраэдров

Определение 4. Кокстеровское разбиение тетраэдра P назовём разбиением *первого типа*, если как P, так и любой нефундаментальный тетраэдр, лежащий внутри P, имеет разрезанный двугранный угол; *второго типа*, если все двугранные углы тетраэдра P фундаментальны; *третьего типа*, если P имеет разрезанный двугранный угол, но внутри P существует тетраэдр T, все двугранные углы которого фундаментальны.

Разбиения первого и второго типа будем исследовать отдельно. Разбиения третьего типа получатся как композиция разбиений первого и второго типов.

2. Классификация разбиений тетраэдров

2.1. Разбиения первого типа

Пусть тетраэдр P допускает разбиение первого типа. Тогда P имеет разрезанный двугранный угол. Зеркало, разрезающее этот угол, делит P на два меньших тетраэдра P_1 и P_2. Зная разбиения этих тетраэдров, можно построить разбиение тетраэдра P. По определению разбиений первого типа, каждый из тетраэдров P_1 и P_2 либо является фундаментальным, либо имеет разрезанный угол. В последнем случае маленькие тетраэдры подразделяются на ещё меньшие. Процесс деления тетраэдров на всё меньшие и меньшие остановится только тогда, когда все тетраэдры разбиения станут фундаментальными.

Обращая этот процесс, получаем следующую индуктивную процедуру сборки разбиения большого тетраэдра из разбиений меньших тетраэдров.

Индуктивная процедура

Шаг 0. Возьмём фундаментальный тетраэдр F, положим $P_0 = F$.

Шаг 1. Составим из двух экземпляров тетраэдра P_0 все возможные (т. е. допускающие кокстеровское разбиение с $N = 2$) тетраэдры $P_1, \ldots, P_l$.

Шаг 2. Найдём все возможные (правильно разбитые) тетраэдры $P_{l+1}, \ldots, P_k$, состоящие из P_1 и P_0 (по одному экземпляру) или из двух экземпляров P_1.

. . . .

Шаг m. Пусть к концу $(m-1)$-го шага мы получили цепочку тетраэдров $P_0, P_1, \ldots, P_m, \ldots, P_n$, такую что для любых двух тетраэдров P_i и P_j

($i, j < m-1$) все тетраэдры, которые можно получить, склеив P_i с P_j по какой-то грани, содержатся среди тетраэдров $P_0, \ldots, P_n$ (после шагов 0, 1 и 2 это условие действительно выполнено). Тогда на шаге m составляем все тетраэдры из P_{m-1} и P_i для каждого $i \leqslant m-1$ (если при этом получается разбиение, уже записанное в списке $P_0, \ldots, P_n$, записывать его второй раз не нужно).

Процедура закончится за конечное число шагов (т. е. после конечного числа шагов окажется, что $m = n$), поскольку F может быть фундаментальным лишь для конечного числа кокстеровских разбиений тетраэдров. Любое кокстеровское разбиение первого типа с фундаментальным многогранником F можно получить с помощью такой процедуры.

Существует лишь конечное число гиперболических тетраэдров. Для этих тетраэдров индуктивную процедуру можно провести последовательно, используя компьютер.

Результат индуктивной процедуры, полученный на компьютере, приведён в таблице 2.

2.2. Разбиения второго типа

Пусть тетраэдр P допускает такое кокстеровское разбиение, что все двугранные углы P фундаментальны. Очевидно, в этом случае P является тетраэдром Кокстера.

Кокстеровские разбиения тетраэдров, у которых все двугранные углы фундаментальны, могут быть одного из двух видов: либо все вершины тетраэдра фундаментальны, либо тетраэдр имеет разрезанную вершину.

Лемма 6. *В кокстеровском разбиении тетраэдра P, все вершины которого фундаментальны, выполнено условие $N \geqslant 8$.*

Доказательство. Пусть P — тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$. Рассмотрим произвольную вершину A_i тетраэдра P. Она принадлежит равно одному фундаментальному тетраэдру $A_iK_iL_iM_i$. Пусть $K_iL_iM_iO_i$ — фундаментальный тетраэдр, симметричный к $A_iK_iL_iM_i$ относительно плоскости $K_iL_iM_i$. Ясно, что тетраэдры $A_iK_iL_iM_i$ и $K_iL_iM_iO_i$ не могут совпадать с $A_jK_jL_jM_j$ и $K_jL_jM_jO_j$ при $i \neq j$ (в самом деле, для того, чтобы определить, что тетраэдры относятся к вершине A_i, достаточно посмотреть на плоскость $K_iL_iM_i$). Поэтому $N \geqslant 2 \cdot 4 = 8$. □

Существует конечное число ограниченных гиперболических тетраэдров Кокстера и конечное число неограниченных тетраэдров Кокстера. Очевидно, что фундаментальный тетраэдр разбиения ограниченного тетраэдра ограничен, а неограниченного тетраэдра — неограничен.

Лемма 7. *Не существует разбиений второго типа с ограниченным фундаментальным гиперболическим тетраэдром.*

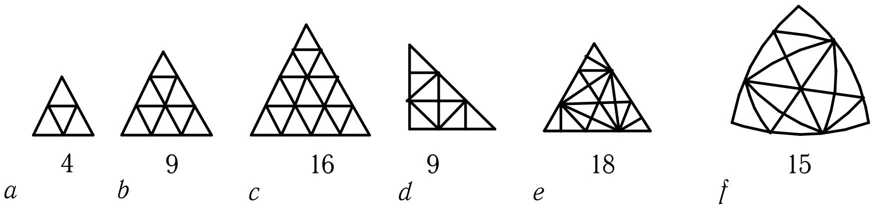
Доказательство. Если такое разбиение существует, то по свойству объёмов $(F, P) = (H_1^{3'}, H_3^{3'})$, $N = 2$. В кокстеровском разбиении тетраэдра на два фундаментальных тетраэдра всегда есть разрезанный двугранный угол, и такое разбиение не является разбиением второго типа. $\square$

Рассмотрим теперь неограниченные тетраэдры.

Лемма 8. *В любом кокстеровском разбиении неограниченного гиперболического тетраэдра существует разрезанная вершина.*

Доказательство. Допустим, что существует неограниченный тетраэдр P, допускающий кокстеровское разбиение с неразрезанными вершинами. Тогда любая вершина тетраэдра P принадлежит единственному фундаментальному тетраэдру. Так как каждый фундаментальный тетраэдр имеет идеальную вершину, P содержит не более четырёх фундаментальных тетраэдров. Но по лемме 6 в любом разбиении с неразрезанными вершинами $N \geqslant 8$. $\square$

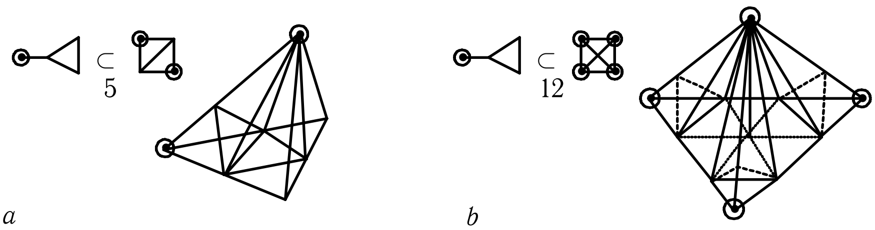
Для доказательства следующей леммы нам потребуется список кокстеровских разбиений евклидовых и сферических треугольников с неразрезанными углами и $N < 24$. Несложно проверить, что рис. 2 содержит все такие треугольники.



Разбиения *a*—*e* евклидовы, разбиение *f* сферическое.
Под каждым разбиением указано количество фундаментальных треугольников в нём).

Рис. 2. Разбиения евклидовых и сферических треугольников
с фундаментальными вершинами (при $N < 24$)

Лемма 9. *Любое кокстеровское разбиение гиперболического тетраэдра с неразрезанными двугранными углами является одним из двух разбиений, представленных на рис.* 3.



Идеальные вершины отмечены маленькими кружочками

Рис. 3. Гиперболические тетраэдры второго типа

Доказательство. Пусть P — гиперболический тетраэдр, допускающий кокстеровское разбиение с неразрезанными двугранными углами. По леммам 7 и 8 P является неограниченным тетраэдром, в котором не все вершины фундаментальны. Пусть A — разрезанная вершина тетраэдра P.

Пусть A не является идеальной вершиной. Рассмотрим малую сферу с центром в A. Разбиение тетраэдра P высекает на этой сфере кокстеровское разбиение сферического треугольника p с неразрезанными углами. Единственное разбиение сферического треугольника с неразрезанными углами представлено на рис. $2f$. Поскольку число фундаментальных треугольников в нём равно 15, разбиение тетраэдра P содержит не менее 15 фундаментальных тетраэдров. Так как фундаментальный треугольник разбиения треугольника p имеет угол $\frac{\pi}{5}$, то и фундаментальный тетраэдр разбиения тетраэдра P имеет двугранный угол $\frac{\pi}{5}$. Но не существует такой пары неограниченных гиперболических тетраэдров (F, P), что $\frac{\mathrm{Vol}(P)}{\mathrm{Vol}(F)} \geqslant 15$ и F имеет двугранный угол $\frac{\pi}{5}$. Таким образом, любая разрезанная вершина должна быть идеальной.

Пусть A — идеальная разрезанная вершина тетраэдра P. Рассмотрим маленькую орисферу с центром в A. Разбиение тетраэдра P высекает на этой орисфере кокстеровское разбиение евклидова треугольника p с неразрезанными углами. Поскольку отношение объёмов двух неограниченных гиперболических тетраэдров не превосходит 24, разбиение треугольника p является одним из разбиений, представленных на рис. $2a$—$2e$. Разберём эти случаи разбиения треугольника p по отдельности.

1) Пусть разбиение треугольника p является одним из представленных на рис. $2a$—$2c$. Поскольку все углы треугольников f и p равны $\frac{\pi}{3}$, каждый из тетраэдров F и P имеет три грани, любые две из которых пересекаются под углом $\frac{\pi}{3}$. Схемы Кокстера всех кокстеровских тетраэдров, удовлетворяющих этому условию, представлены на рис. 4. То есть как F, так и P имеют схему Кокстера, изображённую на этом рисунке.

$k = 3, 4, 5, 6$

H_{12}, H_{17}, H_{22}, H_{26} — a; H_{24} — b; H_{32} — c

Рис. 4. Схемы тетраэдров, имеющие подсхему, соответствующую треугольнику $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$

Тетраэдры, представленные на рис. $4b$ и $4c$, не могут быть фундаментальными для разбиения второго типа, поскольку не существует кокстеровского тетраэдра P, объём которого превосходит объём какого-либо из этих тетраэдров более чем в два раза. Максимальное отношение объёмов тетраэдров, показанных на рис. $4a$—$4c$, равно 12. Поэтому разбиение треугольника p не является разбиением, изображённым на рис. $2c$. Таким образом, F — один из тетраэдров, представленных на рис. $4a$, а P — один из тетраэдров, представленных на рис. $4a$—$4c$. При этом p разбит, как показано на рис. $2a$ или $2b$.

Докажем сначала, что тетраэдры H_{17}, H_{22} и H_{26} не могут быть фундаментальными для разбиения второго типа. Действительно, предположим, что $k \geqslant 4$. Тогда P не имеет двугранного угла, равного $\frac{\pi}{k}$ (поскольку $P \neq F$ и схема Кокстера тетраэдра P — одна из схем рисунка 4). Рассмотрим множество фундаментальных тетраэдров, имеющих вершину A (окрестность которой разбита аналогично треугольникам, показанным на рис. $2a$—$2c$). Каждый из этих фундаментальных тетраэдров имеет своё собственное k-ребро (где k-ребро — ребро с двугранным углом $\frac{\pi}{k}$). Поскольку P не имеет k-рёбер, каждое из k рёбер принадлежит k различным фундаментальным тетраэдрам. Поэтому $N \geqslant n \cdot k$, где n — число фундаментальных треугольников f в разбиении треугольника p, т. е. n равно 4 или 9. Если $n = 9$, то $n \cdot k \geqslant 9 \cdot 4 > 24$, что невозможно. Если $n = 4$, то $n \cdot k \geqslant 4 \cdot 4 = 16$; но никакой неограниченный тетраэдр Кокстера не имеет объёма, достаточно большого для $N \geqslant 16$. Поэтому $k = 3$.

Тетраэдр, изображённый на рис. $4a$, где $k = 3$, может замостить только тетраэдры, изображённые на рис. $4b$ и $4c$ (поскольку он не имеет l-рёбер при $l = 4, 5, 6$). Эти два разбиения действительно существуют, они изображены на рис. 3.

2) Пусть p разбит, как показано на рис. $2d$. Тогда $N \geqslant 9$, и схема каждого из тетраэдров F и P имеет подсхему, соответствующую треугольнику с углами $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. Единственная пара тетраэдров (F, P), удовлетворяющая этим условиям, есть (H_{11}, H_{31}). Докажем, что такого разбиения нет. Рассмотрим фундаментальные тетраэдры F_i $(i = 1, \ldots, 9)$, имеющие идеальную вершину A. Пусть f_i — грань тетраэдра F_i, лежащая напротив вершины A. Поскольку грань f_i ортогональна не всем остальным граням тетраэдра F_i, грани f_i $(i = 1, \ldots, 9)$ не лежат все в одной плоскости, а принадлежат трём различным плоскостям (см. рис. 5). Каждая из этих плоскостей содержит не более четырёх граней f_i. Поэтому разбиение тетраэдра P содержит, кроме $F_1, \ldots, F_9$, ещё не менее пяти тетраэдров. Но $9 + 5 = 14 \geqslant 12$, что невозможно, поскольку $\frac{\mathrm{Vol}(P)}{\mathrm{Vol}(F)} = 12$.

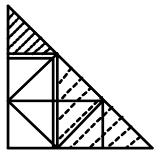


Рис. 5. Треугольники с разной штриховкой лежат в разных плоскостях (соседние плоскости пересекаются под углом $\frac{2\pi}{3}$)

3) Пусть p разбит, как показано на рис. $2e$. Тогда $N \geqslant 18$, схема тетраэдра P имеет подсхему, соответствующую треугольнику с углами $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$, а схема тетраэдра F имеет подсхему, соответствующую треугольнику с углами $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$. Единственная пара (F, P) неограниченных тетраэдров, удовлетворяющих этим условиям, есть пара (H_{10}, H_{32}). Поскольку все двугранные углы тетраэдра равны $\frac{\pi}{3}$, все вершины тетраэдра P должны быть разрезаны, как треугольник на рис. $2e$. Но тогда $N \geqslant 18 \cdot 4 > 24$ (поскольку F имеет ровно одну идеальную вершину). Так как $\frac{\mathrm{Vol}(P)}{\mathrm{Vol}(F)} = 24$, такое разбиение невозможно.

Поскольку все случаи разбиения треугольника p разобраны, доказательство окончено. □

2.3. Гиперболические разбиения третьего типа

Лемма 10. *Гиперболических кокстеровских разбиений третьего типа не существует.*

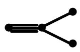
Лемму несложно доказать с помощью индуктивной процедуры, использованной в случае разбиений первого типа. Единственная поправка в процедуру состоит в том, что теперь на нулевом шаге нужно взять ещё тетраэдры $P_1 = T_1, \ldots, P_k = T_k$ (где $T_1, \ldots, T_k$ — полный список тетраэдров второго типа).

3. Таблицы

Таблица 1

Объёмы гиперболических тетраэдров

ограниченные тетраэдры

n	схема Кокстера	объём
H_1		0,0358850633
H_2		0,0390502856
H_3		0,0717701267
H_4		0,0857701820
H_5		0,0933255395
H_6		0,2052887885
H_7		0,2222287320
H_8		0,3586534401
H_9		0,5021308905

Обозначения

Тетраэдры, имеющие двугранные углы $\frac{k_i\pi}{q_i}$ $i = 1, \ldots, 6$, представляются следующими схемами, аналогичными схемам Кокстера: двугранному углу величины $\frac{k_i\pi}{q_i}$ соответствует на схеме ребро кратности $q_i - 2$, разделённое на k_i частей.

Список разбиений первого типа получен с помощью индуктивной процедуры. В случае отсутствия нетривиальных разбиений с данным фундаментальным тетраэдром Кокстера кокстеровский тетраэдр не приводится. Нетривиальные разбиения выписаны вслед за схемой Кокстера фундаментального для них тетраэдра в том порядке, в котором получены в индуктивной процедуре. Числа $(k, l; m, n, p, q)$, стоящие под схемами, указывают, как получено данное разбиение:

- k — число фундаментальных тетраэдров в разбиении,
- l — число склеек, необходимое для получения разбиения (если разбиение получено путём склеивания двух тетраэдров с числами склеек l_1 и l_2, то $l = 1 + \max\{l_1, l_2\}$),
- m и n — номера тех тетраэдров, допускающих кокстеровское разбиение с данным фундаментальным тетраэдром, склеиванием которых получено данное разбиение,
- p и q — номера склеиваемых граней тетраэдров m и n соответственно (вершины схем пронумерованы числами 0, 1, 2, 3 слева направо).

Продолжение таблицы 1

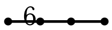
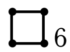
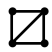
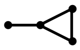
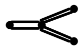
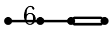
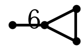
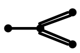
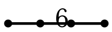
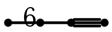
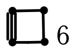
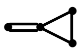
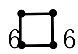
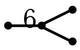
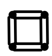
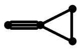
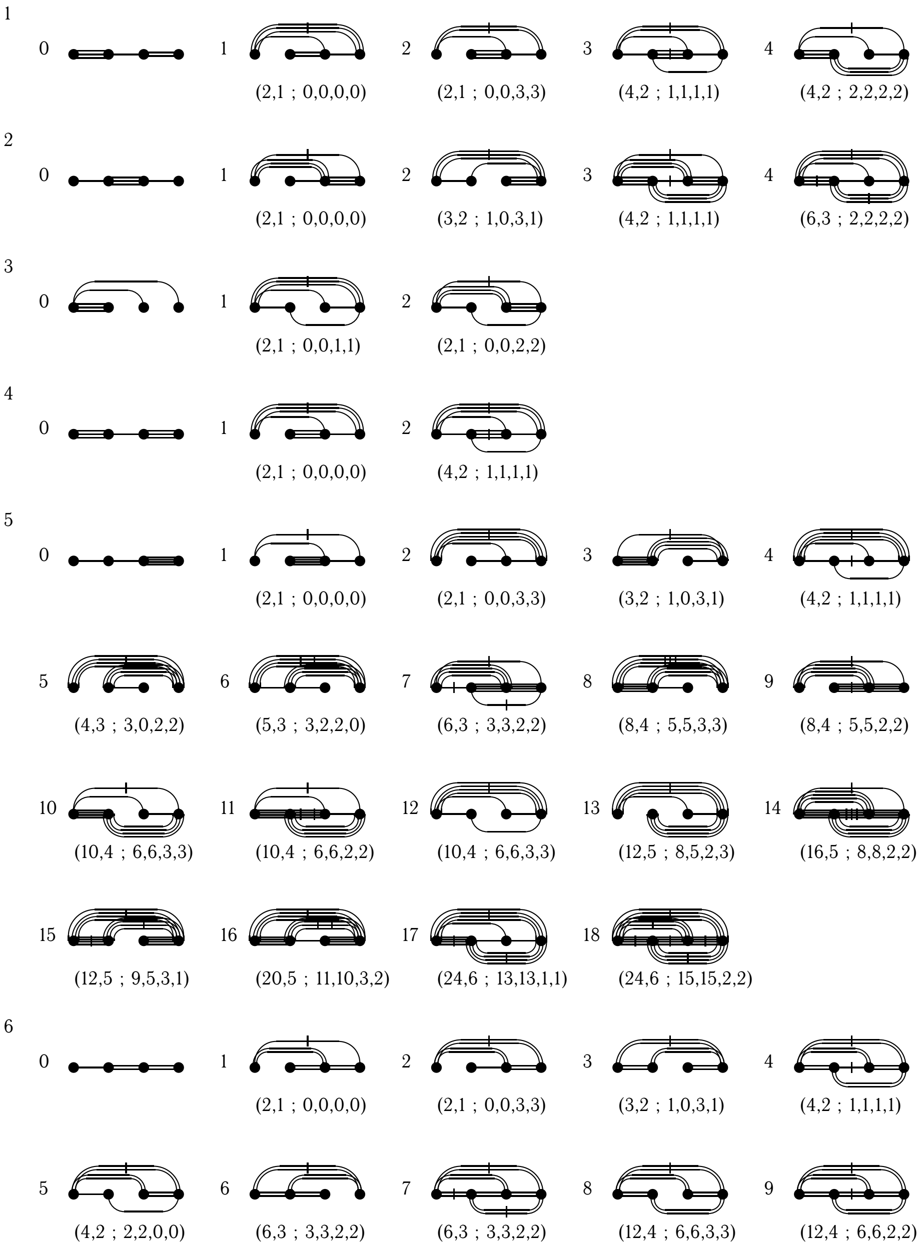
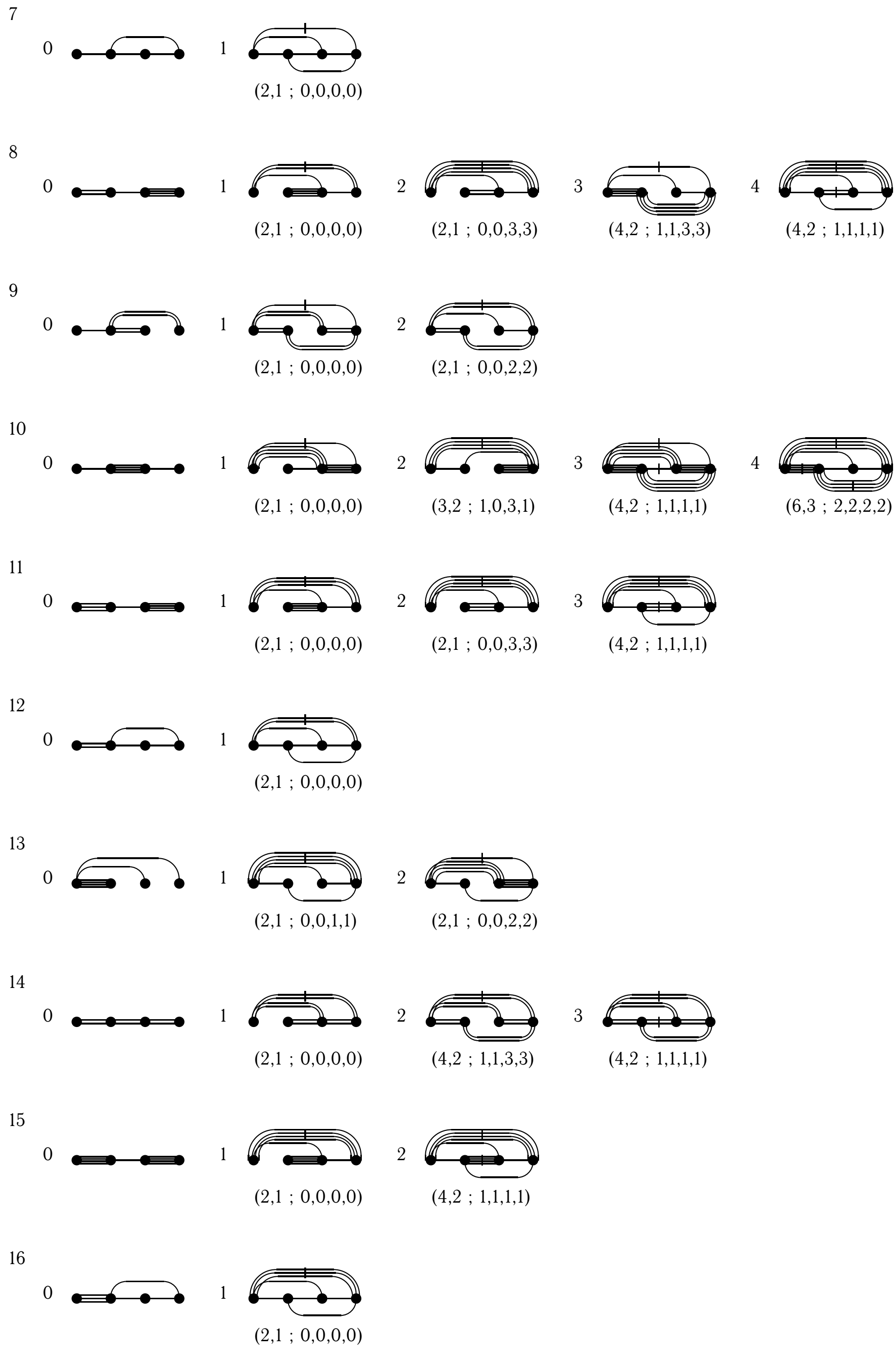
неограниченные тетраэдры			неограниченные тетраэдры		
n	схема Кокстера	объём	n	схема Кокстера	объём
H_{10}		0,0422892336	H_{23}		0,3641071004
H_{11}		0,0763304662	H_{24}		0,4228923360
H_{12}		0,0845784672	H_{25}		0,4579827971
H_{13}		0,1057230840	H_{26}		0,5074708032
H_{14}		0,1526609324	H_{27}		0,5258402692
H_{15}		0,1691569344	H_{28}		0,5562821156
H_{16}		0,1715016613	H_{29}		0,6729858045
H_{17}		0,2114461680	H_{30}		0,8457846720
H_{18}		0,2114461680	H_{31}		0,9159655942
H_{19}		0,2289913985	H_{32}		1,014916064
H_{20}		0,2537354016			
H_{21}		0.3053218647			
H_{22}		0.3430033226			

Таблица взята из работы [1]

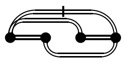
Таблица 2

Гиперболические тетраэдры первого типа



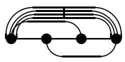

7
0
1
(2,1 ; 0,0,0,0)
8
0
1
2
3
4
(2,1 ; 0,0,0,0)
(2,1 ; 0,0,3,3)
(4,2 ; 1,1,3,3)
(4,2 ; 1,1,1,1)
9
0
1
2
(2,1 ; 0,0,0,0)
(2,1 ; 0,0,2,2)
10
0
1
2
3
4
(2,1 ; 0,0,0,0)
(3,2 ; 1,0,3,1)
(4,2 ; 1,1,1,1)
(6,3 ; 2,2,2,2)
11
0
1
2
3
(2,1 ; 0,0,0,0)
(2,1 ; 0,0,3,3)
(4,2 ; 1,1,1,1)
12
0
1
(2,1 ; 0,0,0,0)
13
0
1
2
(2,1 ; 0,0,1,1)
(2,1 ; 0,0,2,2)
14
0
1
2
3
(2,1 ; 0,0,0,0)
(4,2 ; 1,1,3,3)
(4,2 ; 1,1,1,1)
15
0
1
2
(2,1 ; 0,0,0,0)
(4,2 ; 1,1,1,1)
16
0
1
(2,1 ; 0,0,0,0)

17

0  1 

(2,1 ; 0,0,0,0)

18

0  1 

(2,1 ; 0,0,0,0)

Литература

[1] Johnson N. W., Kellerhals R., Ratcliffe J. G., Tschantz S. T. The size of a hyperbolic Coxeter simplex // Transformation Groups. — 1999. — Vol. 4, no. 4. — P. 329—353.

[2] Felikson A. Coxeter decompositions of hyperbolic polygons // European Journal of Combinatorics. — 1998. — Vol. 19. — P. 801—817.

[3] Felikson A. Coxeter decompositions of spherical tetrahedra. — Preprint. — Bielefeld, № 99-053.

[4] Felikson A. Coxeter decompositions of hyperbolic piramids and triangular prisms. — Preprint. — Bielefeld, № 00-006.