Расширения АО-групп

Е. Е. ШИРШОВА
Московский педагогический государственный университет

УДК 512.545

Ключевые слова: лексикографическое расширение, группа с условием почти ортогональности, почти ортогональные элементы.

Аннотация

Понятие расширения занимает значительное место в теории частично упорядоченных групп. В данной работе изучаются лексикографические расширения частично упорядоченных групп с помощью АО-групп. Рассматриваются, в частности, АО-группы, которые являются лексикографическими расширениями своих направленных подгрупп.

Abstract

E. E. Shirshova, On extensions of AO-groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 1, pp. 277—281.

The notion of an extension is important in the study of partially ordered groups. In the present paper the notion of a lexicographic extension of a partially ordered group by an AO-group is studied. A result is obtained concerning an AO-group G which is a lexicographic extension of a directed subgroup of G.

§ 1. Введение

Пусть G — частично упорядоченная группа (ро-группа). G^+ — положительный конус группы G, то есть $\{x \in G \mid e \leqslant x\}$.

Напомним, что подгруппа M ро-группы G называется *выпуклой*, если из неравенств $m \leqslant g \leqslant n$ и условия $g \in G$ всякий раз следует, что $g \in M$, если $m, n \in M$.

Пусть G — ро-группа и M — выпуклая подгруппа группы G. Положим $M \leqslant Ma$, если $e \leqslant a'$ для некоторого элемента $a' \in Ma$. Это определяет отношение частичного порядка на множестве всех правых смежных классов группы G по подгруппе M. Если M является выпуклой нормальной подгруппой группы G, то фактор-группа G/M — ро-группа. В этом случае G называют *расширением* ро-группы M с помощью ро-группы G/M. Говорят, что G является *лексикографическим расширением* выпуклой нормальной подгруппы M с помощью ро-группы G/M, если каждый строго положительный элемент группы

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 1, с. 277—281.

G/M состоит только из положительных элементов группы G (см. [1, гл. 2, § 3] или [2]).

В работах Конрада [3,4] рассматриваются свойства лексикографических расширений решёточно упорядоченных групп и абелевых псевдо-решёточно упорядоченных групп. В статьях [5, 6] содержится ряд результатов о лексикографических расширениях произвольных направленных групп с интерполяционным условием. Цель данной работы — продолжить исследование свойств лексикографических расширений ро-групп.

Начнём с рассмотрения свойств лексикографических расширений произвольных ро-групп с помощью ро-групп и свойств отношения почти ортогональности.

Пусть a и b — элементы положительного конуса G^+ ро-группы G. Элементы a и b называются *почти ортогональными*, если из неравенств $c \leqslant a$ и $c \leqslant b$ следует $c^n \leqslant a$ и $c^n \leqslant b$ для всех целых положительных чисел n и всех элементов $c \in G$.

Доказательство следующего утверждения содержится в § 2.

Теорема 1. *Пусть G — лексикографическое расширение ро-группы M с помощью ро-группы G/M. Если a и b — произвольные почти ортогональные элементы группы M, то a и b являются почти ортогональными элементами и в группе G.*

ро-группа G называется *группой с условием почти ортогональности* (*АО-группой*), если каждый элемент $g \in G$ представим в виде $g = ab^{-1}$, где элементы a и b образуют пару почти ортогональных элементов группы G.

Основным результатом § 3 является следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть G — лексикографическое расширение некоторой АО-группы M с помощью АО-группы G/M, тогда и группа G является АО-группой.*

Доказательству теоремы 2 предшествует доказательство следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть G — ро-группа, являющаяся лексикографическим расширением выпуклой нормальной подгруппы M с помощью АО-группы G/M. Тогда каждый элемент $g \in G \setminus M$ ($g \parallel e$) представим в виде $g = ab^{-1}$, где $a, b \in G^+ \setminus M$, кроме того a и b являются почти ортогональными элементами в группе G.*

В § 4 будет доказано следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть G является АО-группой и лексикографическим расширением выпуклой направленной нормальной подгруппы M с помощью ро-группы G/M. Тогда и группа G/M является АО-группой.*

Если элементы a и b являются несравнимыми элементами, то будем писать $a \parallel b$.

§ 2. Лексикографические расширения ро-групп с помощью ро-групп

В этом параграфе будет приведено доказательство теоремы 1.

Лемма 2.1. *Если G — ро-группа и $a \in G^+$, то e и a образуют пару почти ортогональных элементов в группе G.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из определения отношения почти ортогональности.

Лемма 2.2. *Пусть G — лексикографическое расширение ро-группы M с помощью ро-группы G/M. Если A и B — смежные классы группы G по подгруппе M и $A < B$, то $a < b$ для всех элементов $a \in A$ и $b \in B$.*

Доказательство. Следует обратиться к доказательству леммы 2.2 статьи [5].

Доказательство теоремы 1. Допустим, что $x \leqslant a$ и $x \leqslant b$ для некоторого элемента $x \in G$. Если $x \in M$, то $x^n \leqslant a$ и $x^n \leqslant b$ для каждого целого положительного числа n.

Допустим, далее, что $x \notin M$. Согласно определению отношения частичного порядка на множестве правых смежных классов группы G по подгруппе M имеет место неравенство $xM < M$. Отсюда следует, что $x^nM = (xM)^n < M$ для каждого целого положительного числа n. Отсюда по лемме 2.2 заключаем, что $x^n < a$ и $x^n < b$ для каждого целого положительного числа n. Это завершает доказательство теоремы.

Лемма 2.3 будет использована в § 3.

Лемма 2.3. *Пусть G — лексикографическое расширение ро-группы M с помощью ро-группы G/M, классы $A \neq M$ и $B \neq M$ являются почти ортогональными элементами группы G/M. Если $a \in A$ и $b \in B$, то a и b образуют пару почти ортогональных элементов в группе G.*

Доказательство. Допустим, что $c \leqslant a$ и $c \leqslant b$ для некоторого элемента $c \in G$. Отсюда по определению отношения частичного порядка на множестве правых смежных классов группы G по подгруппе M заключаем, что $c^nM = (cM)^n \leqslant A$ и $c^nM \leqslant B$ для каждого целого положительного числа n.

Предположим, что $c^nM = A$. Это означает, что $A \leqslant B$. Из верного соотношения $A \leqslant A$ выводим неравенство $A^2 \leqslant A$, так как смежные классы A и B являются почти ортогональными элементами группы G/M. Из последнего неравенства следует, что $A \leqslant M$. Так как по условию $M \leqslant A$, то $M = A$, что противоречит тому факту, что $A \neq M$.

Аналогично доказывается, что $c^nM \neq B$.

Теперь имеют место неравенства $c^nM < A$ и $c^nM < B$. Согласно лемме 2.2 это влечёт верность неравенств $c^n < a$ и $c^n < b$ для всех целых положительных чисел n. Следовательно, a и b являются почти ортогональными элементами группы G.

§ 3. Лексикографические расширения ро-групп с помощью АО-групп

Пусть далее до конца параграфа G является лексикографическим расширением ро-группы M с помощью АО-группы G/M.

Доказательство теоремы 3. Допустим, что $g \in G \setminus M$ и $g \parallel e$. По определению отношения частичного порядка на множестве правых смежных классов группы G по подгруппе M из этого следует, что $gM \parallel M$.

Так как G/M является АО-группой, то существуют классы A и B, для которых $gM = AB^{-1}$, при этом A и B образуют пару почти ортогональных элементов в группе G/M. Очевидно, что $A \neq M$ и $B \neq M$.

Таким образом, $g = ab^{-1}$ для некоторых элементов $a \in A$ и $b \in B$. Согласно лемме 2.3 элементы a и b являются почти ортогональными элементами группы G.

Доказательство теоремы 2. Следует доказать, что каждый элемент $g \in G$ представим в виде $g = ab^{-1}$, где элементы a и b являются почти ортогональными элементами в группе G.

Если $g \geqslant e$, то $g = ge^{-1}$, где по лемме 2.1 элементы g и e являются почти ортогональными в группе G.

Если $g < e$, то $g = e(g^{-1})^{-1}$, где по лемме 2.1 элементы e и g^{-1} являются почти ортогональными элементами группы G.

Допустим, далее, что $g \parallel e$. Если $g \in M$, то $g = ab^{-1}$ для некоторых почти ортогональных элементов a и b группы M, так как M является по условию АО-группой. Согласно теореме 1 элементы a и b образуют пару почти ортогональных элементов и в группе G.

Для элемента $g \in G \setminus M$ утверждение следует из теоремы 3.

§ 4. Одно свойство АО-групп

Лемма 4.1. *Пусть G — лексикографическое расширение направленной группы M с помощью ро-группы G/M. Каждый смежный класс группы G/M является направленным множеством.*

Доказательство. Следует воспользоваться доказательством леммы 4.1 статьи [6].

Далее до конца статьи будем считать, что M является выпуклой направленной нормальной подгруппой группы G.

Лемма 4.2. *Пусть G является лексикографическим расширением M с помощью ро-группы G/M. Если элементы a и b образуют пару почти ортогональных элементов группы G, то смежные классы aM и bM являются почти ортогональными элементами группы G/M.*

Доказательство. Рассмотрим смежный класс $X \in G/M$, для которого верны неравенства $X \leqslant aM$ и $X \leqslant bM$. Согласно определению отношения частичного порядка на множестве правых смежных классов группы G по подгруппе M найдутся такие элементы $x_1, x_2 \in X$, для которых верны неравенства $x_1 \leqslant a$ и $x_2 \leqslant b$.

Так как по лемме 4.1 класс X является направленным множеством, то существует такой элемент $x \in X$, что $x \leqslant x_1$ и $x \leqslant x_2$.

Таким образом, $x \leqslant a$ и $x \leqslant b$. Отсюда, по условию, $x^n \leqslant a$ и $x^n \leqslant b$ для всякого целого положительного числа n. Следовательно, $X^n \leqslant aM$ и $X^n \leqslant bM$ для каждого целого положительного числа n. Лемма доказана полностью.

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим смежный класс $K \in G/M$. Покажем, что K представим в виде $K = AB^{-1}$, где классы A и B являются почти ортогональными элементами в группе G/M.

Если $M \leqslant K$, то $K = KM^{-1}$, где по лемме 2.1 классы K и M являются почти ортогональными элементами группы G/M.

Если $K < M$, то $K = M(K^{-1})^{-1}$, где по лемме 2.1 классы M и K^{-1} являются почти ортогональными элементами группы G/M.

Допустим, что $K \parallel M$. Это означает, что найдётся такой элемент $g \in K$, что $g \parallel e$. Так как G является АО-группой, то $g = ab^{-1}$, где элементы a и b образуют пару почти ортогональных элементов в группе G.

Таким образом, $K = aM(bM)^{-1}$. Согласно лемме 4.2 смежные классы aM и bM являются почти ортогональными элементами группы G/M. Следовательно, группа G/M является АО-группой.

Литература

[1] Копытов В. М. Решеточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.

[2] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.

[3] Conrad P. The lattice of all convex l-subgroups of lattice-ordered group // Czechosl. Math. J. — 1965. — Vol. 15. — P. 101—123.

[4] Conrad P. Representation of partially ordered Abelian groups as groups of real valued functions // Acta Math. — 1966. — Vol. 116. — P. 199—221.

[5] Shirshova E. E. On extensions of po-groups // Contemporary Mathematics. — 1992. — Vol. 131, part 1. — P. 345—353.

[6] Ширшова Е. Е. Лексикографические расширения и pl-группы // Фундам. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, вып. 4. — С. 1133—1138.