λ-топологии на пространствах функций

Н. В. ВЕЛИЧКО
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: vel@imm.uran.ru

УДК 517.982.272+515.122.55

Ключевые слова: функциональное пространство, λ-топологии.

Аннотация

Статья посвящена пространствам $C_\lambda(X)$ всех непрерывных вещественных функций на X в произвольной λ-топологии. Она представляет достаточно полный обзор результатов, полученных в основном автором, в следующих направлениях теории λ-топологий: кардинальнозначные инварианты, локально выпуклые свойства, слабые и сильные топологии, сопряжённые пространства, решётки λ-топологий, полнота.

Abstract

N. V. Velichko, λ-topologies on function spaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 2, pp. 3—56.

This paper is devoted to the spaces $C_\lambda(X)$ of all continuous real-valued functions on X endowed with arbitrary λ-topologies. This is a fairly complete survey of the results obtained by the author in the following domains of the theory of λ-topologies: cardinal functions; locally convex properties; weak and strong topologies; dual spaces; lattices of λ-topologies; completeness.

Работа представляет достаточно полный обзор той части теории линейных топологических пространств, в которой изучаются пространства непрерывных функций в произвольной λ-топологии.

Начнём с описания λ-топологий.

Пусть X — тихоновское топологическое пространство, $C(X)$ — линейное пространство всех непрерывных вещественных функций на X. Множество A называется *ограниченным в* X, если всякая функция $f \in C(X)$ ограничена на A. Пусть λ — некоторое семейство ограниченных подмножеств X. Топология равномерной сходимости на элементах λ называется *λ-топологией*. Более подробно: предбазу такой топологии образуют множества $V = V(f, A, \varepsilon) = \{g \in C(X) \colon |f(t) - g(t)| < \varepsilon$ при $t \in A,\ A \in \lambda\}$. От семейства λ, конечно, требуются определённые свойства. λ-топология всегда линейна и локально выпукла. Она хаусдорфова тогда и только тогда, когда множество $\tilde\lambda = \bigcup\{A \colon A \in \lambda\}$ плотно в X. Обычно предполагают, что $\tilde\lambda = X$, это мы, как правило, и будем делать в дальнейшем.

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 2, с. 3—56.

λ-топология не изменится, если λ пополнить конечными объединениями, замыканиями и подмножествами своих элементов; такое пополнение будем называть *насыщением*. Как правило, мы будем рассматривать насыщенные семейства.

Далее мы будем использовать следующие свойства ограниченных множеств:

а) непрерывный образ ограниченного множества ограничен,

б) ограниченное множество может пересекаться только с конечным числом элементов локально конечного семейства открытых множеств.

В работе используются следующие обозначения.

ω_0 — первый бесконечный, ω_1 — первый несчётный кардиналы, $\mathfrak{c}$ — мощность континуума; ω_0 и ω_1 рассматриваются и как ординалы, являющиеся семействами всех меньших ординалов, $\omega^+ = \omega_0 \setminus \{0\}$.

X *функционально замкнуто* (по-другому — вещественно компактно, или R-полно, или является Q-пространством), если оно вкладывается в произведение прямых в качестве замкнутого множества.

νX — хьюиттовское расширение X (иногда его называют расширением Хьюитта—Нахбина). Его можно представить как подмножество стоун-чеховского расширения βX, состоящее из точек X и всех таких точек $z \in \beta X \setminus X$, что любая функция $f \in C(X)$ имеет непрерывное продолжение на $X \cup \{z\}$. Нам потребуются следующие свойства νX и функционально замкнутых пространств:

в) если A является ограниченным в X, то $[A]_{\nu X}$ компактно,

г) G_δ-множество в νX обязано пересекаться с X,

д) если X функционально замкнуто, то $X = \nu X$,

е) псевдокомпактное функционально замкнутое пространство компактно.

При $A \subseteq X$ полагаем $\|f|_A\| = \sup\{|f(x)|\colon x \in A\}$, $\|f|_\varnothing\| = 0$, $V_\varepsilon(A) = \{f\colon \|f|_A\| < \varepsilon\}$. $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ — числовая прямая и (как правило) множество положительных целых чисел, $\mathfrak{P}(X)$ — семейство всех подмножеств X, $|X|$ — мощность X, $[A]$ $(\bar{A})$ — замыкание A, $\langle A \rangle$ — внутренность A. Понятия и факты, относящиеся к теории линейных топологических пространств, берутся из книги [2], хотя мы используем термин «линейное пространство» вместо термина «векторное пространство». Общетопологические понятия и результаты берутся из книги [1].

Кардинальнозначным (или коротко — *кардинальным*) *инвариантом* называется отображение φ (некоторого) класса топологических пространств в класс кардиналов, обладающее свойством: $\varphi(X) = \varphi(Y)$, если X и Y гомеоморфны.

Среди кардинальных инвариантов основными являются следующие.

$w(X) = \min\{|B|\colon B$ — база $X\}$ — *вес*; $d(X) = \min\{|S|\colon S$ — всюду плотное множество в $X\}$ — *плотность* X; $hd(X) = \min\{d(Y)\colon Y \subset X\}$ — *наследственная плотность* X; $\chi(X) = \sup\{\chi(x,X)\colon x \in X\}$ — *характер* X (где $\chi(x,X) = \min\{|B(x)|\colon B(x)$ — база в точке $x \in X\}$); $nw(X) = \min\{|B|\colon B$ — сеть в $X\}$ — *сетевой вес*; $l(X) = \min\{\tau\colon$ из всякого открытого покрытия X можно выделить подпокрытие, мощность которого не превосходит $\tau\}$ — *число Линделёфа*; $iw(X) = \min\{\tau\colon X$ уплотняется (непрерывно и взаимно-однозначно отображается) на (вполне регулярное) пространство веса $\tau\}$ — *i-вес*; $pw(X) = \min\{|B|\colon B$ — псевдобаза $X\}$ — *псевдовес*; $\psi(X) = \sup\{\psi(x, X)\colon x \in X\}$ — *псевдохарактер* (где $\psi(x, X) = \min\{|B(x)|\colon B(x)$ — псевдобаза в точке x, т. е. $x = \bigcap\{H \in B(x)\}\}$; $\pi(X) = \min\{|B|\colon B$ — π-база $X\}$ (такое семейство открытых множеств, что каждое открытое множество содержит элемент B) — *π-вес*; $\pi\chi(X) = \sup\{\pi(x, X)\colon x \in X\}$ — *π-характер* (где $\pi(x, X)$ — π-база в точке x).

Если не оговаривается противное, всякий кардинальный инвариант считается бесконечным.

Большинство результатов приводятся с доказательствами, бóльшая часть этих результатов содержится в работах [3, 4, 6, 8—14].

Обычно обозначают через p семейство всех конечных, через c — всех (относительно) компактных, через b — всех ограниченных подмножеств X. Соответствующие топологии T_p, T_c, T_b называются *топологией поточечной сходимости*, *компактно-открытой* и *топологией ограниченной сходимости*. $C(X)$ с этими топологиями обозначают через $C_p(X)$, $C_c(X)$, $C_b(X)$. Если X — компакт, то пишем $C(X)$ вместо $C_c(X)$ и c-топологию называем *равномерной*.

1. Кардинальнозначные инварианты

Начинаем с проблемы описания кардинальнозначных инвариантов в классе пространств $C_\lambda(X)$. Эта проблема хорошо разработана в C_p-теории (т. е. для пространств $C(X)$ с топологией поточечной сходимости), и результаты C_p-теории будут для нас точками отправления. Например, для p-топологий установлена следующая формула [1]:

$$nw(C_p(X)) = nw(X). \tag{1}$$

Напомним, что *сеть* в пространстве X есть такое семейство ν подмножеств X, что всякое открытое множество является объединением элементов ν.

Семейство σ называется *λ-сетью* X, если для любого $A \in \lambda$ и произвольной его окрестности OA найдётся такое $B \in \sigma$, что $A \subseteq B \subseteq OA$. *Сетевой λ-вес* определяется как $\lambda nw(X) = \min\{|\sigma|\colon \sigma$ — λ-сеть $X\}$.

Теорема 1 (М. О. Асанов, [3]). *Пусть $\lambda \subseteq c$. Тогда $nw(C_\lambda(X)) = \lambda nw(X)$.*

Ниже будет доказана более общая теорема 14.

Для $C_\lambda(X)$ формула (1) неверна даже в счётном случае. Действительно, пусть X — счётное пространство, не имеющее счётной k-сети (такие имеются, см., например, [20]). Понятие k-сети эквивалентно понятию c-сети. Тогда мы имеем, учитывая теорему Асанова, что $nw(C_c(X)) = cnw(X) > nw(X)$.

Ниже мы вернёмся к проблеме сетевого веса.

Для p-топологий справедлива следующая формула [1]:

$$d(C_p(X)) = iw(X). \tag{2}$$

Верна ли эта формула для произвольных λ-топологий? Ответ положителен в следующем широком случае [14].

Напомним, что если $\sigma = \{f_\alpha\colon X \to X_\alpha\}$ — семейство отображений, то *диагональным произведением* семейства σ называют отображение $f\colon X \to \prod X_\alpha$, задаваемое правилом: $f(x) = (f_\alpha(x)) \in \prod X_\alpha$. Если все отображения из σ непрерывны, то непрерывным будет и f.

Напомним также, что если $w(X_\alpha) \leqslant \tau$ и мощность множества индексов не превосходит τ, то $w(\prod X_\alpha) \leqslant \tau$.

Доказательства нижеследующих теорем 2—5 см. в [14].

Теорема 2. *Пусть $\lambda \subseteq c$. Тогда $d(C_\lambda(X)) = iw(X)$.*

В общем случае ответ отрицателен — соответствующие примеры построены Е. Г. Пыткеевым и автором. Вот один из них.

Пример 1. Пусть D — дискрет мощности континуума $\mathfrak{c}$, $X = [D]^\omega_{\beta D}$ — ω-замыкание D в стоун-чеховском расширении βD (объединение замыканий в βD счётных подмножеств D). Точки D и замыкания счётных подмножеств D образуют базу топологии X, из которой нельзя выделить подбазу меньшей мощности, так что вес X равен $\mathfrak{c}$. Легко понять, что пространство X псевдокомпактно. В качестве λ возьмём семейство, порождённое одним множеством $\{X\}$. Пространство $C_\lambda(X)$ нормируется обычной sup-нормой. Для $A \subseteq D$ пусть κ_A — продолжение на X характеристической функции A. Таких функций $\exp\mathfrak{c}$, и они образуют замкнутое дискретное подмножество в $C_\lambda(X)$, так что плотность $C_\lambda(X)$ равна $\exp\mathfrak{c}$, и мы имеем $d(C_\lambda(X)) > w(X) \geqslant iw(X) = \mathfrak{c}$.

В важнейшем счётном случае можно обойтись без предположений.

Теорема 3 ([14]). *$C_\lambda(X)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда X уплотняется на пространство счётного веса.*

В C_p-теории известна следующая формула [1]: $iw(C_p(X)) = \psi(C_p(X)) = d(X)$.

В общем случае она неверна. Например, если X — произвольный компакт, то всегда $\psi(C_c(X)) = \omega$, а $d(X)$ может быть сколь угодно большим.

Ясно, что $iw(C_\lambda(X)) \leqslant d(X)$ в любом случае. Обратное неравенство не имеет места.

Продемонстрируем это следующим простым утверждением.

Теорема 4. *Если X — компактное пространство, то $iw(C_c(X)) = \omega$ тогда и только тогда, когда $w(X) \leqslant c$.*

Ниже будут доказаны более общие утверждения.

Очень прост критерий псевдохарактера.

Определение 1. *λ-плотностью* X назовём число $d_\lambda(X) = \min\{|\sigma|\colon \sigma \subseteq \lambda,$ $\tilde\sigma$ плотно в $X\}$.

Теорема 5. $\psi(C_\lambda(X)) = d_\lambda(X)$.

Определение 2. Семейство $\lambda' \subseteq \lambda$ будем называть *определяющим*, если каждое $A \in \lambda$ содержится в некотором $B = B(A) \in \lambda'$.

Введём число $\psi(\lambda) = \min\{|\lambda'|\colon \lambda'$ — определяющее подсемейство $\lambda\}$ — *псевдохарактер* λ (допускаются конечные значения).

Введём также число $l(\lambda) = \min\{|\lambda'|\colon \lambda' \subseteq \lambda$ — покрытие $X\}$ (которое можно назвать *λ-числом Линделёфа*).

Следующие два утверждения являются вполне самодостаточными, хотя по существу не требуют доказательства.

Теорема 6. *$C_\lambda(X)$ нормируемо тогда и только тогда, когда $\psi(\lambda) = 1$.*

Теорема 7. *$C_\lambda(X)$ метризуемо тогда и только тогда, когда $\psi(\lambda) \leqslant \omega$.*

Теорему 7 можно записать в более общем виде ($\chi(z, Z) = \min\{|\gamma|\colon \gamma$ — фундаментальное семейство окрестностей точки $z\}$, $\chi(Z) = \max\{\chi(z, Z)\colon z \in Z\}$ — характер Z).

Теорема 8. $\chi(C_\lambda(X)) = \max\{\omega, \psi(\lambda)\}$.

Доказательство. Ограничиваемся случаем бесконечного $\psi(\lambda)$.

Пусть $\psi(\lambda) = \tau$. Положим $\sigma = \{V(A, 1/n)\colon A \in \lambda',\ n \in \mathbb{N}\}$, где λ' — определяющее семейство мощности τ. Тогда σ — фундаментальная система окрестностей нуля и $\chi(C_\lambda(X)) \leqslant \tau$.

Пусть $\sigma = \{V(A, \varepsilon(A))\colon A \in \lambda'\}$ — фундаментальная система окрестностей нуля. Тогда λ' — определяющее семейство. Действительно, пусть $B \in \lambda$. Множество $V(B, 1)$ содержит некоторое $V(A, \varepsilon(A)) \in \sigma$. Тогда $B \subseteq A$ (в противном случае при $t \in B \setminus A$ нашлась бы такая функция $x \in C(X)$, что $x(t) = 1$ и $x(s) = 0$ при $s \in A$, ясно, что $x \in V(A, \varepsilon(A)) \setminus V(B, 1)$). Имеем $\chi(C_\lambda(X)) \geqslant \psi(\lambda)$.

Доказательство завершено.

Определение 3. *λ-весом* пространства X назовём число $w_\lambda(X) = \sup\{w(A)\colon A \in \lambda\}$.

Если αX — некоторое расширение пространства X, то положим $w_{\lambda\alpha}(X) = \sup\{w([A]_{\alpha X})\colon A \in \lambda\}$.

В первую очередь нас будет интересовать число $w_{\lambda\nu}(X)$, где νX — хьюиттовское расширение X.

Далее нам понадобится следующее известное утверждение (доказательство которого основывается на теореме Вейерштрасса—Стоуна).

Теорема 9. *Если X — компакт, то $w(X) = w(C(X)) = d(C(X))$.*

Теорема 10. $w(C_\lambda(X)) = w_{\lambda\nu}(X) \cdot \psi(\lambda)$.

Доказательство. Сначала отметим следующее. Положим $\lambda X = \bigcup\{[A]_{\nu X}\colon A \in \lambda\}$. Заметим, что семейство $\tilde{\lambda} = \{[A]_{\nu X}\colon A \in \lambda\}$ состоит из компактных множеств. Легко проверяется, что пространство $C_\lambda(X)$ линейно гомеоморфно пространству $C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)$ (функции $x \in C(X)$ ставим в соответствие $\tilde{x} \in C(\lambda X)$ — непрерывное продолжение x на λX). Далее работаем с $C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)$. (Эту конструкцию мы будем использовать и в последующих рассмотрениях.)

Пусть $w(C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)) = \tau$. Тогда и $\chi(C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)) \leqslant \tau$, так что $\psi(\tilde{\lambda}) = \psi(\lambda) \leqslant \tau$ (теорема 8). Также $d(C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)) = \mu \leqslant \tau$. Выберем подмножество $S \subset C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)$ мощности μ, плотное в $C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)$, и пусть $f = \Delta S$ — диагональное произведение элементов S. Отображение f непрерывно и взаимно-однозначно отображает λX

в $\mathbb{R}^\mu$, поэтому $w(f(\lambda X)) \leqslant \mu$. Так как $[A]_{\nu X}$ компактно при $A \in \lambda$, то сужение f на $[A]_{\nu X}$ является гомеоморфизмом, так что $w([A]_{\nu X}) \leqslant \mu$. Окончательно имеем $w_{\tilde\lambda}(\lambda X) = w_{\lambda\nu}(X) \leqslant \mu \leqslant \tau$, следовательно, $w(C_\lambda(X)) \geqslant w_{\lambda\nu}(X) \cdot \psi(\lambda)$.

Обратно, пусть $w_{\lambda\nu}(X)\cdot\psi(\lambda) = \tau$. Пусть λ' — определяющее семейство для $\tilde\lambda$, мощность которого не превосходит τ. Для каждого множества $B = [A]_{\nu X} \in \lambda'$ вводим в рассмотрение пространство $C(B)$, наделённое топологией равномерной сходимости на B. Так как $w(B) \leqslant \tau$, то плотность $C(B)$, а следовательно, и вес $C(B)$, не превосходят τ (теорема 9). Выберем в $C(B)$ базу $\mathcal{B}_B$ мощности не более τ, состоящую из стандартных множеств $V(x, \varepsilon) = \{y\colon |x(t) - y(t)| < \varepsilon$ при $t \in B$ и $x, y \in C(B)\}$. Положим $V(\tilde x, \varepsilon) = \{z \in C(\lambda X)\colon z|_B \in V(x, \varepsilon)\}$ (где $\tilde x$ — непрерывное продолжение x на λX) и $\mathcal{B}'_B = \{V(\tilde x, \varepsilon)\colon V(x, \varepsilon) \in \mathcal{B}_B\}$. Тогда семейство $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}'_B\colon B \in \lambda'\}$ имеет мощность не более τ и является базой $C_{\tilde\lambda}(\lambda X)$. Действительно, пусть $x \in C_{\tilde\lambda}(\lambda X)$ и $V(x, A, \varepsilon)$ — стандартная окрестность точки x в $C_{\tilde\lambda}(\lambda X)$. Найдётся множество $B \in \lambda'$, содержащее A. Множество $V(x|_B, A, \varepsilon)$ — окрестность точки $x|_B$ в $C(B)$, поэтому найдётся такое $V(y, \delta) \in \mathcal{B}_B$, что $x|_B \in V(y, \delta) \subseteq V(x|_B, A, \varepsilon)$. Ясно, что $V(\tilde y, \delta) \subseteq V(x, A, \varepsilon)$. Доказано, что $\mathcal{B}$ — база $C_{\tilde\lambda}(\lambda X)$, так что $w(C_{\tilde\lambda}(\lambda X)) = w(C_\lambda(X)) \leqslant \tau$.

Теорема 10 доказана.

Выделим следующее

Следствие. $w(C_\lambda(X)) \geqslant nw(X)$.

Вопрос 1. Можно ли получить внутренний (без привлечения νX) и вполне рабочий критерий веса $C_\lambda(X)$?

В достаточно важном случае $\lambda \subseteq c$ (в частности, когда X является функционально замкнутым пространством) мы имеем такой внутренний критерий.

Теорема 11. *Пусть* $\lambda \subseteq c$. *Тогда* $w(C_\lambda(X)) = w_\lambda(X) \cdot \psi(\lambda)$.

В случае p-топологий вес и характер совпадают. В общем случае это не так. А для каких λ это так? Сравнивая теоремы 2 и 5, получаем тривиальный ответ: когда $w_{\lambda\nu}(X) \leqslant \psi(\lambda)$. Например, когда λ состоит из метризуемых компактов (это уже не так, если λ составлена из метризуемых подпространств счётного веса).

Вернёмся к вопросу о плотности $C_\lambda(X)$.

Учитывая теорему 2, а также линейную гомеоморфность $C_\lambda(X)$ и $C_{\tilde\lambda}(\lambda X)$, мы можем записать следующую формулу.

Теорема 12. $d(C_\lambda(X)) = iw(\lambda X)$.

Выше мы ввели λ-число Линделёфа $l(\lambda)$. Заменив X на λX и λ на $\tilde\lambda$, получим число $l(\tilde\lambda)$. Несмотря на линейную гомеоморфность $C_\lambda(X)$ и $C_{\tilde\lambda}(\lambda X)$, числа $l(\lambda)$ и $l(\tilde\lambda)$ различны. Ясно, что $l(\lambda) \leqslant l(\tilde\lambda)$, но легко построить пример, где неравенство будет строгим (в качестве X можно взять $\omega_1 \times (\omega_2 + 1)$ и подобрать требуемое λ). Можно только заметить, что из счётности $l(\lambda)$ следует счётность и числа $l(\tilde\lambda)$. Действительно, пусть $\lambda' \subseteq \lambda$ счётно и $X = \bigcup\{A\colon A \in \lambda'\}$. Положим $\lambda'' = \{[A]_{\nu X}\colon A \in \lambda'\}$. Тогда $\lambda X = \bigcup\{B\colon B \in \lambda''\}$. Если предположить противное, то при $x \in \lambda X \setminus \bigcup\{B\colon B \in \lambda''\}$ для каждого B выберем окрестность $O_B(x)$ точки x в λX так, чтобы $O_B(x) \cap B = \varnothing$. Тогда $\bigcap\{O_B(x)\colon B \in \lambda''\}$ будет G_δ-множеством, целиком лежащим в $\nu X \setminus X$, что противоречит известным свойствам νX.

Учитывая всё это, получим следующую формулу.

Теорема 13. $d(C_\lambda(X)) \leqslant w_{\lambda\nu}(X) \cdot l(\tilde{\lambda})$.

Доказательство. Будем работать с пространством $C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)$. Пусть $w_{\lambda\nu}(X) \times l(\tilde{\lambda}) = \tau$. Выберем $\lambda' \subseteq \lambda$ удовлетворяющим следующим условиям: $|\lambda'| \leqslant \tau$, далее, $\tilde{\lambda}'$ покрывает λX и λ' замкнуто относительно конечных объединений. Если $A \in \lambda$, то $w([A]_{\nu X}) \leqslant \tau$, откуда вытекает, что $d(\pi_A(C_\lambda(X))) \leqslant \tau$ (где $\pi_A(f) = f|_A$), так что для каждого $A \in \lambda'$ можно выбрать такое множество $S_A \subseteq C_\lambda(X)$, что $\pi_A(S_A)$ плотно в $\pi_A(C_\lambda(X))$ и $|S_A| \leqslant \tau$. Положим $S = \bigcup\{S_A\colon A \in \lambda'\}$. Пусть $\tilde{S} = \{\tilde{x}\colon x \in S\}$. Тогда $|\tilde{S}| \leqslant \tau$ и $\tilde{S}$ разделяет точки λX. Докажем последнее. Пусть t и s — две различные точки λX. Найдётся такое множество $A \in \lambda'$, что $t, s \in [A]_{\nu X}$. Пусть функция x непрерывна и $x(t) = 0$, $x(s) = 1$. В её окрестности $V(x, [A]_{\nu X}, 1/4)$ найдётся функция $\tilde{y}\colon y \in S_A$ (в силу плотности $\pi_A(S_A)$ в $\pi_A(C_\lambda(X))$). Тогда мы будем иметь $\tilde{y}(t) \neq \tilde{y}(s)$). Доказано, что семейство $\tilde{S}$ разделяет точки λX. Тогда, взяв диагональ элементов $\tilde{S}$, получим уплотнение пространства λX на некоторое пространство, вес которого не превосходит τ. Остаётся применить теорему 11.

Следствие. При $\lambda \subseteq c$ выполняется формула $d(C_\lambda(X)) \leqslant w_\lambda(X) \cdot l(\lambda)$.

Вопрос 2. Когда в последней формуле достигается равенство?

Оно достигается, например, при $l(\lambda) \leqslant w_\lambda(X)$, ибо, очевидно, всегда $d(C_\lambda(X)) \geqslant w_{\lambda\nu}(X)$.

Вопрос 3. Насколько необходимым в следствии является условие $\lambda \subseteq c$?

Переходим к проблеме оценки сетевого веса $C_\lambda(X)$.

Определение 4. Окрестность V множества A назовём *функциональной*, если множества A и $X \setminus V$ функционально отделимы.

Такова, например, любая окрестность компактного множества или замкнутого множества в нормальном пространстве.

Определение 5. Семейство δ подмножеств X назовём *$f\lambda$-сетью*, если для любого множества $A \in \lambda$ и любой его функциональной окрестности V найдётся такое множество $B \in \delta$, что $A \subseteq B \subseteq V$.

Введём число $\lambda nwf(X) = \min\{|\lambda'|\colon \lambda' \subseteq \lambda$, где λ' — $f\lambda$-сеть$\}$.

Теорема 14. $nw(C_\lambda(X)) = \lambda nwf(X)$.

Доказательство. Предположим, что $nw(C_\lambda(X)) = \tau$. Выберем в $C_\lambda(X)$ сеть $\gamma = \{H\}$ мощности τ, а в $\mathbb{R}$ счётную базу $\mathcal{B} = \{U_n\}$. Для каждой пары (H, U_n), где $H \in \gamma$, $U_n \in \mathcal{B}$, определим множество $S_{H,n} = \{t \in X\colon x(t) \in U_n$ для каждого $x \in H\}$. Семейство $S = \{S_{H,n}\}$ будет $f\lambda$-сетью в X. Действительно, пусть $A \in \lambda$, V — функциональная окрестность множества A. Пусть $x \in C(X)$ таково, что $x|_A = 1$ и $x|_{X\setminus V} = 0$. Пусть $U_n \in \mathcal{B}$ есть окрестность единицы в $\mathbb{R}$ диаметра меньше $1/2$. Множество $V(x, A, U_n) = \{y \colon y(t) \in U_n$ при $t \in A\}$ является окрестностью точки x в $C_\lambda(X)$, поэтому найдётся такой элемент $H \in \gamma$, что $x \in H \subseteq V(x, A, U_n)$. В этом случае выполняется формула $A \subseteq S_{H,n} \subseteq V$. Действительно, если $t \in A$ и $y \in H$, то $y(t) \in U_n$ по определению $V(x, A, U_n)$, так что $A \subseteq S_{H,n}$. Если $t \notin V$, то $x(t) = 0$, откуда следует, что $x(t) \notin U_n$. Но $x \in H$, следовательно, $t \notin S_{H,n}$. Остаётся заметить, что $|S| \leqslant \tau$, так что $\lambda nwf(X) \leqslant \tau$.

Обратно, пусть $\lambda nwf(X) = \tau$. Пусть $\mathcal{B} = \{U_n\}$ — счётная база $\mathbb{R}$, $S = \{H\}$ — $f\lambda$-сеть X мощности τ. Для каждой пары (H, U_n) определим множество $W_{H,n} = \{x \colon x(H) \subseteq U_n\}$. Семейство $\{W_{H,n} \colon H \in S,\ U_n \in \mathcal{B}\}$ замкнём относительно конечных пересечений, получим семейство T, мощность которого не превосходит τ. Докажем, что T будет сетью в $C_\lambda(X)$. Действительно, пусть $x \in C_\lambda(X)$, $V(x, A, \varepsilon) = \{y \colon |x(t) - y(t)| < \varepsilon$ при $t \in A\}$ — окрестность x, где $A \in \lambda$. Положим $B = [x(A)]$. Множество B компактно, так что оно допускает конечное покрытие $\{U_{n(i)} \colon i \leqslant n\}$ элементами базы $\mathcal{B}$ диаметра меньше $\varepsilon/2$. Для каждого i выберем замкнутое множество $B_i \subseteq U_{n(i)}$ так, чтобы семейство $\{B_i\}$ покрывало B. Положим $A_i = x^{-1}(B_i) \cap A$. Тогда $A_i \in \lambda$ и $V_i = x^{-1}(U_{n(i)})$ есть функциональная окрестность множества A_i. Найдётся такой элемент $H_i \in S$, что $A_i \subseteq H_i \subseteq V_i$. Понятно, что $x \in W_{H_i,n(i)}$. Положим $W = \bigcap\{W_{H_i,n(i)} \colon i \leqslant n\}$. Тогда $W \in T$, $x \in W$, остаётся показать, что $W \subseteq V(x, A, \varepsilon)$. Пусть $y \in W$. Тогда $y \in W_{H_i,n(i)}$ для каждого i, откуда при $t \in A_i$ выполняются формулы $x(t) \in B_i$ и $y(t) \in U_{n(i)}$, так что $|x(t) - y(t)| < \varepsilon$ (диаметр $U_{n(i)}$ не превосходит $\varepsilon/2$). Это верно для всякого $t \in A$, ибо $A = \bigcup A_i$, в силу того что семейство $\{B_i\}$ покрывает $x(A)$.

Итак, T действительно есть сеть в $C_\lambda(X)$.

Теорема доказана.

Понятно, что $f\lambda$-сеть является λ-сетью, если $\lambda \subseteq c$, так что теорема 1 является следствием теоремы 14.

Вернёмся к i-весу.

Непосредственным обобщением теоремы 4 будет следующая утверждение, которое доказывается практически так же, как и сама теорема 4.

Теорема 15. *Если пространство X компактно, то $iw(C(X)) \leqslant \tau$ тогда и только тогда, когда $w(X) \leqslant \exp\tau$.*

Кроме того, используя схему доказательства теоремы 4, можно получить следующее общее утверждение.

Теорема 16. *$iw(C_\lambda(X)) \leqslant \tau$ тогда и только тогда, когда $w_{\lambda\nu}(X) \leqslant \exp\tau$ и $d_\lambda(X) \leqslant \tau$.*

Доказательство. В данном вопросе удобнее работать с пространством $C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)$.

Пусть $iw(C_\lambda(X)) \leqslant \tau$. По известной формуле C_p-теории (см. [7]) имеем $d(C_p(C_\lambda(X))) = \eta \leqslant \tau$. По другой известной формуле (для псевдовеса, см. там же) $pw(C_p(C_\lambda(X))) \leqslant \exp d(C_p(C_\lambda(X))) \leqslant \exp\eta \leqslant \exp\tau$. Для компактных пространств вес и псевдовес совпадают, так что для всякого $A \in \tilde{\lambda}$ выполняется формула $w(A) \leqslant \exp\tau$, откуда следует, что $w_{\lambda\nu}(X) \leqslant \exp\tau$. Неравенство $d_\lambda(X) \leqslant \tau$ следует из теоремы 5 (ибо $\psi(Z) \leqslant iw(Z)$ для всякого Z).

В одну сторону теорема доказана. Докажем в обратную.

Так как $d_\lambda(X) \leqslant \tau$, найдётся семейство $\sigma' \subseteq \lambda$, мощность которого не превосходит τ и тело которого плотно в X. Положим $\sigma = \{[C]_{\lambda X} \colon C \in \sigma'\}$. Пусть $A \in \sigma$. Отображение сужения $\pi_A \colon C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X) \to C_{\lambda'}(A)$, где $\lambda' = \{B \cap A \colon B \in \tilde{\lambda}\}$, непрерывно. Так как A компактно и $w(A) \leqslant \exp\tau$, то, применяя теорему 5, получим неравенство $iw(C_{\lambda'}(A)) \leqslant \tau$. Пусть $f_A \colon C_{\lambda'}(A) \to X_A$ — уплотнение $C_{\lambda'}(A)$ на пространство X_A, вес которого не превосходит τ. Положив $\tilde{f}_A = f_A \circ \pi_A$, получим непрерывное отображение пространства $C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)$ на пространство X_A. Рассмотрим диагональное произведение f отображений $\tilde{f}_A$. Оно отображает пространство $C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)$ на произведение $\prod\{X_A \colon A \in \sigma\}$, вес которого не превосходит τ (так как $|\sigma| \leqslant \tau$ и $w(X_A) \leqslant \tau$). Остаётся показать, что отображение f взаимно-однозначно.

Пусть x, y — произвольные элементы $C(\lambda X)$ и $x \neq y$. В силу плотности множества $\tilde{\sigma}$ в λX найдётся такое множество $A \in \sigma$, что $\pi_A(x) \neq \pi_A(y)$. В силу взаимной однозначности отображения f_A имеем $f_A(\pi_A(x)) \neq f_A(\pi_A(y))$, или $f(x) \neq f(y)$.

Этим всё доказано.

Можно сформулировать теорему 16 несколько иначе.

Теорема 17. *$iw(C_\lambda(X)) \leqslant \tau$ тогда и только тогда, когда найдётся такое семейство $\sigma \subseteq \lambda$, что выполняются следующие условия:*

а) *$|\sigma| \leqslant \tau$;*

б) *$\tilde{\sigma}$ плотно в X;*

в) *$w([A]_{\nu X}) \leqslant \exp\tau$ для каждого $A \in \sigma$.*

Когда $iw(C_\lambda(X)) = \psi(C_\lambda(X))$? Очевидно, что в общем случае это не так, но так в случае $\lambda = p$. Из теоремы 17 видно, что равенство выполняется, если λ состоит, например, из метризуемых компактов.

Несколько слов о числе Линделёфа.

Если обратиться к C_p-теории, то там имеется формула (М. О. Асанов, [4])

$$l(C_p(X)) \geqslant t^*(X),$$

где $t^*(X) = \sup\{t(X^n) \colon n \in \mathbb{N}\}$ — супертеснота X. Пространство $C_\lambda(X)$ естественно уплотняется на пространство $C_p(X)$, число Линделёфа не увеличивается при непрерывных отображениях, так что получается формула $l(C_\lambda(X)) \geqslant l(C_p(X)) \geqslant t^*(X)$.

Если использовать пространство $C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)$, то появится следующая дополнительная информация. Пусть $A \in \lambda$, $\tilde{A} = [A]_{\nu X}$. Тогда $\tilde{A}$ компактно, отображение сужения $\pi_{\tilde{A}}$ переводит $C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)$ на $C_{\lambda'}(\tilde{A})$ (λ' определено в доказательстве теоремы 16), так что $l(C_{\lambda'}(\tilde{A})) \leqslant l(C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)) = l(C_\lambda(X))$ и

$d(C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)) = l(C_{\lambda'}(\tilde{A}))$ (равномерная топология). По известной теореме анализа имеем $w(\tilde{A}) \leqslant l(C_\lambda(X))$.

В итоге получается следующая теорема.

Теорема 18. *Выполняются следующие два утверждения:*

а) $l(C_\lambda(X)) \geqslant t^*(X)$,

б) *вес любого* $A \in \lambda$, *более того, вес* $[A]_{\nu X}$ *не превосходит* $l(C_\lambda(X))$.

Следствие 1. Если пространство $C_\lambda(X)$ линделёфово, то X обладает счётной супертеснотой и каждое $A \in \lambda$, а также его замыкание в νX, обладает счётной базой.

Вопрос 4. Будут ли в данном случае элементы λ компактными множествами?

Следствие 2. Если пространство $C_\lambda(X)$ линделёфово и имеет счётный псевдохарактер, то X — сепарабельное пространство счётной супертесноты и счётного λ-веса.

Действительно, линделёфовость влечёт счётность λ-веса и счётность супертесноты, а счётность псевдохарактера — плотность в X объединения элементов некоторого счётного подсемейства элементов λ (каждый из которых сепарабелен).

Вопрос 5. Существует ли естественный критерий линделёфовости $C_\lambda(X)$ (или $C_p(X)$)?

Больше о числе Линделёфа пространства $C_\lambda(X)$ сказать нечего.

Переходим к вопросу о тесноте.

Определение 6. Семейство σ открытых множеств пространства X назовём *λ-покрытием* (*λ-функциональным покрытием*) X, если для всякого $A \in \lambda$ найдётся множество $V \in \sigma$, являющееся (функциональной) окрестностью множества A.

Введём инвариант $l_\lambda(X) = \min\{\tau\colon$ любое λ-покрытие пространства X содержит λ-подпокрытие, мощность которого не превосходит $\tau\}$, а также аналогичный инвариант $l_{\lambda,f}(X)$, отличающийся от первого заменой λ-покрытий на λ-функциональные покрытия.

В частности, если $l_\lambda(X)$ счётно, то пространство X можно назвать *λ-линделёфовым*.

Понятно, что эти инварианты совпадают, если λ состоит из компактных множеств.

Теорема 19. $t(C_\lambda(X)) = l_{\lambda,f}(X)$.

Доказательство. Пусть $t(C_\lambda(X)) = \tau$, а σ — λ-функциональное покрытие пространства X. Для каждого множества $A \in \lambda$ найдём множество $V(A) \in \sigma$, являющееся функциональной окрестностью A, и выберем функцию $x_A \in C(X)$ таким образом, чтобы $x_A|_A = 1$ и $x_A|_{X\setminus V(A)} = 0$. Очевидно, что множество

$S = \{x_A \colon A \in \lambda\}$ имеет предельную точку x, тождественно равную 1. По условию найдётся подмножество $T \subseteq S$ мощности не больше τ, для которого x также будет точкой прикосновения. Положим $\sigma(T) = \{V(A) \colon x_A \in T\}$. Тогда $\sigma(T)$ будет λ-функциональным покрытием пространства X мощности не больше τ. Действительно, пусть $B \in \lambda$ — произвольный элемент. Рассмотрим окрестность $V(x, B, 1/2)$ точки x. Найдётся элемент $x_A \in T \cap V(x, B, 1/2)$. Так как $x_A(t) > 1/2$ при $t \in B$ и $x_A(t) = 0$ при $t \notin V(A)$, то функция x_A разделяет множества B и $X \setminus V(A)$, т. е. $V(A)$ есть функциональная окрестность множества B.

Доказано, что $\sigma(T)$ — λ-функциональное покрытие, так что $l_{\lambda,f}(X) \leqslant \tau$.

Обратно, пусть $l_{\lambda,f}(X) = \tau$. Докажем, что $t(C_\lambda(X)) \leqslant \tau$. Пусть x — единичная функция на X и $x \in [S]$. Для каждого $A \in \lambda$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем окрестность $V_n = V(x, A, 1/2^n) = \{y \colon |x(t) - y(t)| < 1/2^n \text{ при } t \in A\}$ точки x, в этой окрестности выберем точку $x_{A,n} \in S$ и положим $W(A, n) = x^{-1}_{A,n}((1 - 1/n, 1 + 1/n))$. При этих условиях будут выполнены соотношения $x_{A,n}(A) \subseteq [1 - 1/2^n, 1 + 1/2^n]$ и $x_{A,n}(X \setminus W(A, n)) \subseteq \mathbb{R} \setminus [1 - 1/n, 1 + 1/n]$. Это означает, что $W(A, n)$ — функциональная окрестность множества A и что $\sigma_n = \{W(A, n) \colon A \in \lambda\}$ — λ-функциональное покрытие пространства X. Выделим из σ_n λ-функциональное подпокрытие γ_n, мощность которого не превосходит τ. Тем самым будет определено множество $S_n \subseteq S$ мощности не больше τ, состоящее из всех тех точек $x_{A,n}$, для которых $W(A, n) \in \gamma_n$. Положив $S' = \bigcup\{S_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, получим формулу $x \in [S']$. Действительно, пусть $V(x, A, \varepsilon)$ — произвольная базисная окрестность точки x. Пусть n таково, что $1/n < \varepsilon$. В семействе γ_n найдётся множество $W(B, n)$, являющееся функциональной окрестностью множества A. Соответствующая этому множеству функция $x_{B,n}$ обладает свойством $|x_{B,n}(t) - 1| \leqslant 1/n$ при $t \in W(B, n) \supseteq A$, или $|x_{B,n}(t) - x(t)| \leqslant 1/n < \varepsilon$ при $t \in A$, так что $x_{B,n} \in S_n \cap V(x, A, \varepsilon)$.

Доказано, что $x \in [S']$, а следовательно, что $t(C_\lambda(X)) \leqslant \tau$.

Теорема доказана полностью.

Следствие 1. Если $\lambda \subseteq c$, то $t(C_\lambda(X)) = l_\lambda(X)$.

При $\lambda = p$ имеем

Следствие 2. $t(C_\lambda(X)) = l_p(X)$.

Например, $C_\lambda(X)$ имеет счётную тесноту тогда и только тогда, когда любое p-покрытие пространства X содержит не более чем счётное p-подпокрытие (p-покрытия названы в [1] ω-покрытиями).

Сравнивая следствие 2 и теорему Архангельского—Пыткеева [1], получаем

Следствие 3. Любая конечная степень пространства X линделёфова тогда и только тогда, когда любое p-покрытие X содержит не более чем счётное p-подпокрытие.

Кратко: $l^*(X) = l_p(X)$.

2. Тополого-алгебраические инварианты

Под тополого-алгебраическим инвариантом понимается свойство линейного топологического пространства, сохраняющееся при линейных гомеоморфизмах.

Определения основных тополого-алгебраических инвариантов можно найти в [2] и [6]. Для работы с ними нам потребуются следующие известные и новые понятия (см. [8]).

Пусть $A \subseteq X$, $f \in C(X)$. Напомним, что $\|f|_A\| = \sup\{|f(t)| \colon t \in A\}$ и $\|f|_\varnothing\| = 0$.

Функция f разделяет множества A и B, если $\sup\{f(t) \colon t \in A\} < \inf\{f(t) \colon t \in B\}$ (или $\sup\{f(t) \colon t \in B\} < \inf\{f(t) \colon t \in A\}$). Если f разделяет A и B, будем писать $A_f B$, отрицание записываем формулой $A_{\bar f} B$. Пусть λ — семейство подмножеств X. Пишем $A_{\bar f}\lambda$ ($A_{\bar C}\lambda$), если $A_{\bar f}H$ для всех $H \in \lambda$ (и для всех $f \in C(X)$). Отрицания записываем через $A_f\lambda$ ($A_C\lambda$).

2.1. Z-фильтры

Под фильтром мы будем понимать фильтр на семействе $Z(X)$ всех нуль-множеств X. Под Z-фильтром понимается счётно центрированный фильтр.

Определение 7. Фильтр $\mathcal{F}$ назовём

а) *r-ограниченным*, если каждая функция $f \in C(X)$ ограничена на некотором (зависящем от f) множестве $H \in \mathcal{F}$;

б) *λ-простым*, если найдётся такое $A \in \lambda$, что $A_{\bar C}\mathcal{F}$;

в) *λ-связанным*, если каждое конуль-множество V, пересекающее все элементы $\mathcal{F}$, содержит такой элемент $A \in \lambda$, что $A_{\bar C}\mathcal{F}$;

г) *λ-устойчивым*, если существует множество $A \in \lambda$, обладающее свойством

$$\text{если } A_f B \text{ и } B \in \lambda, \text{ то } B_f \mathcal{F}; \tag{s}$$

д) *λ-ограниченным*, если каждая последовательность, ограниченная в $C_\lambda(X)$, ограничена на некотором элементе $H \in \mathcal{F}$.

Положим $F = F(\mathcal{F}) = \bigcap\{[H]_{\beta X} \colon H \in \mathcal{F}\}$ (где βX — стоун-чеховское расширение X).

Лемма 1. *Если $\mathcal{F}$ — r-ограниченный фильтр, то $F \subseteq \nu X$.*

Доказательство. Пусть $f \in C(X)$. Из r-ограниченности $\mathcal{F}$ следует, что найдутся множество $H \in \mathcal{F}$ и число $a \geqslant 0$, для которых $\|f|_H\| \leqslant a$. Положим $W = \{x \in X \colon |f(x)| < a+1\}$. Функция g, определённая формулой $g(x) = \sup\{\inf\{f(x), a+1\}, -a-1\}$, непрерывна на X. Пусть $\tilde g$ — непрерывное продолжение g на βX, а $\tilde f$ — непрерывное продолжение f на νX. Обозначим через $\tilde W$ максимальное открытое в βX множество, высекающее W в X. Функции $\tilde g|_{\tilde W}$ и $\tilde f|_{\nu X \setminus \tilde W}$ непрерывны и согласуются на границе $\partial\tilde W$ множества $\tilde W$ в νX, так что можно определить непрерывную функцию f' по формулам $f'|_{\tilde W} = \tilde g$ и $f'|_{\nu X \setminus \tilde W} = \tilde f$. Она будет непрерывным продолжением f на пространство $\nu X \cup \tilde W$.

Если $x \in [X \setminus W]_{\beta X}$, то $|\tilde{g}(x)| = a + 1$, если $x \in [H]_{\beta X}$, то $|\tilde{g}(x)| \leqslant a$, так что $[H]_{\beta X} \subseteq \tilde{W}$, в частности $\tilde{W} \supseteq F$. Доказано, что любая функция из $C(X)$ продолжается по непрерывности на F. Это означает, что $F \subseteq \nu X$.

Лемма доказана.

Лемму 1 можно рассматривать как обобщение следующего известного утверждения: если A — ограниченное множество, то $[A]_{\beta X} \subseteq \nu X$.

Далее рассматриваются только r-ограниченные фильтры.

Пусть $\Phi \subseteq \beta X$. Положим $\Phi^0 = \{x \in \Phi\colon x \in [A]_{\beta X}\}$ для некоторого $A \in \lambda$, $\Phi^1 = [\Phi^0]_{\beta X}$.

Лемма 2. *Z-фильтр $\mathcal{F}$ λ-связан тогда и только тогда, когда $F = F^1$.*

Доказательство. Пусть фильтр $\mathcal{F}$ λ-связан, $x \in F$, U' — окрестность точки x в νX, являющаяся конуль-множеством, $U = U' \cap X$. По определению λ-связанности найдётся такое множество $A \in \lambda$, что $A \subseteq U$ и $A_{\bar{C}}\mathcal{F}$. Тогда $[A]_{\nu X} \cap F \neq \varnothing$ (в противном случае A и F отделялись бы непрерывной функцией в силу компактности F), и если $y \in [A]_{\nu X} \cap F$, то $y \in F^0 \cap [U']$, откуда следует, что $x \in [F^0] = F^1$.

Обратно, пусть $F = F^1$, U — конуль-множество в X, пересекающееся со всеми элементами $\mathcal{F}$. Пусть $\tilde{U}$ — максимальное открытое в νX множество, высекающее U в X. Так как U — конуль-множество, то U можно представить как $\bigcup\{U_n\colon n \in \mathbb{N}\}$, где U_n — конуль-множество, $[U_n] \subseteq U_{n+1}$, U_n и $X \setminus U$ функционально отделимы, т. е. $[U_n]_{\nu X} \subseteq \tilde{U}$. В силу счётной центрированности $\mathcal{F}$ найдётся такое n, что $U_n \cap H \neq \varnothing$ для каждого $H \in \mathcal{F}$. Тогда $[U_n]_{\nu X} \cap F \neq \varnothing$ (так как в любой окрестности F в νX содержится некоторое $H \in \mathcal{F}$). Следовательно, $\tilde{U} \cap F \neq \varnothing$. Из равенства $F = [F^0]$ и открытости $\tilde{U}$ следует, что $\tilde{U} \cap F^0 \neq \varnothing$. Пусть $x \in \tilde{U} \cap F^0$ и множество $A \in \lambda$ таково, что $x \in [A]_{\nu X}$. Положим $B = A \cap U$. Тогда $B \in \lambda$ и $x \in [B]_{\nu X}$, так что $B_{\bar{C}}\mathcal{F}$.

Лемма доказана.

Пусть $\tilde{f}$ — непрерывное продолжение функции $f \in C(X)$ на νX. Пусть $\varepsilon \geqslant 0$. Положим $V_\varepsilon(A) = \{f \in C(X)\colon \|\tilde{f}|_A\| < \varepsilon\}$, $\bar{V}_\varepsilon(A) = \{f \in C(X)\colon \|\tilde{f}|_A\| \leqslant \varepsilon\}$, $V_\varepsilon(\mathcal{F}) = V_\varepsilon(F)$, $\bar{V}_\varepsilon(\mathcal{F}) = \bar{V}_\varepsilon(F)$.

В предыдущих двух леммах мы не предполагали λ семейством ограниченных множеств. В последующих λ будет насыщенным семейством ограниченных множеств.

Лемма 3. *Фильтр $\mathcal{F}$ λ-прост тогда и только тогда, когда $F^0 \neq \varnothing$.*

Доказательство. Если $\mathcal{F}$ λ-прост, то найдётся такое $A \in \lambda$, что $A_{\bar{C}}\mathcal{F}$. Тогда $[A]_{\nu X} \cap F \neq \varnothing$ и $F^0 \neq \varnothing$.

Если $F^0 \neq \varnothing$, то найдётся такое $A \in \lambda$, что $[A]_{\nu X} \cap F \neq \varnothing$. Ясно, что $A_{\bar{C}}\mathcal{F}$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если $F^0 = \varnothing$, то для любых $f \in C(X)$ и $A \in \lambda$ найдётся $g \in V_0(\mathcal{F})$, совпадающая с f на A.*

Доказательство. Пусть $f \in C(X)$ и $A \in \lambda$ произвольно выбраны. Фильтр $\mathcal{F}$ не является λ-простым по лемме 3. Тогда найдётся множество $H \in \mathcal{F}$, функционально отделимое от A. Из функциональной отделимости следует, что $[A]_{\nu X} \cap [H]_{\nu X} = \varnothing$, в частности $[A]_{\nu X} \cap F = \varnothing$. Определим функцию g' на $[A]_{\nu X} \cup F$ по формулам $g'|_{[A]_{\nu X}} = \tilde{f}$ (где $\tilde{f}$ — продолжение f на νX), $g'|_F = 0$. Функция g' непрерывна, поэтому, используя компактность $[A]_{\nu X} \cup F$ и вариант теоремы Титце—Урысона, её можно продолжить до непрерывной функции $\tilde{g}'$ на νX. Тогда $g = \tilde{g}'|_X$ совпадает с f на A и $g \in V_0(\mathcal{F})$.

Лемма доказана.

Используя λ-топологию, предыдущую лемму можно сформулировать так:

Лемма 4′. *Если $F^0 = \varnothing$, то $V_\varepsilon(\mathcal{F})$ плотно в $C_\lambda(X)$.*

Лемма 5. *Множество $A \in \lambda$ удовлетворяет условию* (s) *по отношению к фильтру $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $[A]_{\nu X} \supseteq F$.*

Доказательство. Пусть $A \in \lambda$ обладает свойством (s) по отношению к фильтру $\mathcal{F}$. Если предположить, что найдётся точка $x \in F \setminus [A]_{\nu X}$, то можно выбрать такую функцию $f \in C(X, [0,1])$, что $\tilde{f}(x) = 1$, $\tilde{f}|_{[A]_{\nu X}} = 0$, затем взять точку $y \in X \cap \tilde{f}^{-1}(1)$ (это возможно, так как всякое G_δ-множество νX пересекается с X) и получить противоречие: множество $\{y\} \in \lambda$ отделяется от A функцией f, но $\{y\}_{\bar{f}}\mathcal{F}$.

Обратно, пусть $[A]_{\nu X} \supseteq F$ и функция $f \in C(X)$ отделяет A от некоторого множества $B \in \lambda$. Пусть $\alpha = \sup\{f(x)\colon x \in A\} < \beta = \inf\{f(x)\colon x \in B\}$. Тогда $V = \{y\colon \tilde{f}(y) < \alpha + (\beta - \alpha)/2\}$ — коуль-окрестность F в νX. Так как $F = \bigcap\{[H]_{\beta X} : H \in \mathcal{F}\}$, то найдётся множество $H \in \mathcal{F}$, лежащее в V. Это H и отделяется функцией f от B.

Лемма доказана.

Следствие 1. Фильтр $\mathcal{F}$ λ-устойчив тогда и только тогда, когда существует такое $A \in \lambda$, что $[A]_{\nu X} \supseteq F$.

Следствие 2. λ-устойчивый фильтр λ-прост.

Следствие 3. Пусть множество $A \in \lambda$ обладает свойством (s) по отношению к фильтру $\mathcal{F}$. Тогда $V_\varepsilon(A) \subseteq V_\varepsilon(\mathcal{F})$.

Следствие 4. Если фильтр $\mathcal{F}$ не является λ-устойчивым, то для любых $A \in \lambda$ и $\varepsilon > 0$ выполняется $V_0(A) \setminus V_\varepsilon(\mathcal{F}) \neq \varnothing$.

Доказательство. Пусть $A \in \lambda$. Так как A не удовлетворяет условию (s), то $F \setminus [A]_{\nu X} \neq \varnothing$ по лемме 4. Если $y \in F \setminus [A]_{\nu X}$, то выберем функцию $f \in C(\nu X)$ так, чтобы $f(y) = \varepsilon + 1$, $f|_{[A]_{\nu X}} = 0$. Тогда $f \in V_0(A) \setminus V_\varepsilon(\mathcal{F})$.

Доказательство завершено.

Следствие 5. Множество $A \in \lambda$ удовлетворяет условию (s) по отношению к фильтру $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $V_\varepsilon(A) \subseteq V_\varepsilon(\mathcal{F})$.

Топологический вариант леммы 5:

Лемма 5′. *Если фильтр $\mathcal{F}$ не является λ-устойчивым, то множество $V_\varepsilon(\mathcal{F})$ не является окрестностью нуля в $C_\lambda(X)$ ни для какого $\varepsilon > 0$.*

Лемма 6. *Пусть $\mathcal{F}$ — λ-связанный Z-фильтр, $f \in C(X)$. Если для каждых $A \in \lambda$ и $\delta > 0$ найдётся такая функция $g \in \bar{V}_\varepsilon(\mathcal{F})$, что $\|(f-g)_A\| < \delta$, то $f \in \bar{V}_\varepsilon(\mathcal{F})$.*

Доказательство. Пусть $f \notin \bar{V}_\varepsilon(\mathcal{F})$. Тогда в некоторой точке $x \in F$ будет выполняться формула $|\tilde{f}(x)| = \alpha > \varepsilon$. Предположим, что $\tilde{f}(x) = \alpha$. Положим $\gamma = \alpha - \varepsilon$. Пусть $W = \{y \in \nu X : |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| < \gamma\}$. Тогда W — окрестность точки x, так что найдётся точка $y \in F^0 \cap W$ (лемма 3). Далее, найдётся такое множество $A \in \lambda$, что $y \in [A]_{\nu X}$. Пусть $\tilde{f}(y) = \beta$. Тогда $\beta > \varepsilon$. Выберем $\rho > 0$ таким, что $\varepsilon + \rho < \beta$. Положим $B' = \{z \colon \tilde{f}(z) \geqslant \varepsilon + \rho\}$ и $B = B' \cap A$. Тогда $y \in [B]_{\nu X}$. Действительно, если $p \in [A]_{\nu X}$ и $p \notin [B]_{\nu X}$, то $p \in [A \setminus B]_{\nu X}$. Но $f(q) < \varepsilon + \rho$ при $q \in A \setminus B$, следовательно, $\tilde{f}(p) \leqslant \varepsilon + \rho < \beta$.

Положим $\delta = \rho/2$ и $T = \{g \in C(X) \colon \|(f-g)|_B\| < \delta\}$. Если $g \in T$, то $\tilde{g}(y) \geqslant \varepsilon + \delta$, т. е. $g \notin \bar{V}_\varepsilon(\mathcal{F})$. Таким образом, для f не выполнены условия леммы.

Лемма доказана.

Топологический вариант:

Лемма 6′. *Если $\mathcal{F}$ — λ-связанный Z-фильтр, то множество $\bar{V}_\varepsilon(\mathcal{F})$ является бочкой в $C_\lambda(X)$.*

2.2. Основные инварианты

Нуль-окрестностью множества A называют множество $f^{-1}([V])$, где V открыто в $\mathbb{R}$, $f \colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $A \subseteq f^{-1}(V)$.

Напомним, что *бочечным* называется локально выпуклое пространство, в котором всякая бочка (то есть замкнутое выпуклое уравновешенное ($=$ закруглённое) поглощающее множество) является окрестностью нуля.

Теорема 20. *$C_\lambda(X)$ бочечно тогда и только тогда, когда каждый r-ограниченный λ-связанный Z-фильтр в X λ-стабилен.*

Предварительно докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 7. *Пусть $T \in Z(X)$, W — нуль-окрестность T, $f \in C(X)$. Тогда найдётся такая функция $g \in C(X)$, что $|f(x)| \geqslant |g(x)|$ для всех $x \in X$, $g|_T = 0$, $g|_{X \setminus W} = f|_{X \setminus W}$.*

Доказательство. Если P есть нуль-множество, содержащее $X \setminus W$ и не пересекающееся с T, то найдётся такая функция $h \in C(X, [0,1])$, что $h|_T = 0$, $h|_P = 1$. Положим $g = f \cdot g$. Тогда g — искомая функция.

Лемма доказана.

Отметим для дальнейшего, что условие $\|f|_\varnothing\| = 0$ влечёт равенство $V_\varepsilon(0) = C(X)$ для любого $\varepsilon > 0$.

Лемма 8. *Пусть W — выпуклое множество в $C(X)$, $W_{\varepsilon_i}(T_i) \subseteq W$, $i \leqslant n$, $T_i \in Z(X)$. Тогда $W_{\min\{\varepsilon_i\}}(\bigcap\{(T_i)\colon i \leqslant n\}) \subseteq W$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $n = 2$. Пусть $T_0 = T_1 \cap T_2$, $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Пусть $f \in V_\varepsilon(T_0)$, $\alpha = \|f|_{T_0}\| < \varepsilon$, $M = \{x \in X\colon |f(x)| < \alpha + (\varepsilon - \alpha)/2\}$, $T_i' = T_i \setminus M$. Выберем нуль-окрестности W_i множеств T_i, непересекающиеся с T_j', и нуль-окрестности W_i' множеств T_i', содержащиеся в $\langle W_i\rangle \cap (X \setminus W_j)$, $i + j = 3$. По лемме 7 найдутся такие функции $h_i' \in C(X)$, что $h_i'|_{T_i'} = 0$, $h_i'|_{X\setminus W_i'} = f|_{X\setminus W_i'}$ и $|h_i'(x)| \leqslant |f(x)|$. Положим $h_i'' = 2f - h_i'$ и определим функции h_i по формулам $h_i|_{W_i} = h_i'|_{W_i}$, $h_i|_{X\setminus W_i} = h_j'|_{X\setminus W_i}$. Тогда $h_i \in C(X)$; если $x \in \partial W_i$, то $W_i' \subseteq \langle W_i\rangle$ влечёт $x \notin W_i'$, следовательно, $h_i'(x) = f(x)$; с другой стороны, $W_i \subseteq X \setminus W_j'$ влечёт $x \notin W_j'$, следовательно, $h_j''(x) = 2f(x) - h_j'(x) = f(x)$; таким образом, h_i и h_j'' согласуются на ∂W_i.

Далее, $\|h_i|_{T_i}\| = \|h_i'|_{T_i}\| \leqslant \alpha + (\varepsilon - \alpha)/2 < \varepsilon$, так что $h_i \in W_{\varepsilon_i}(T_i) \subseteq W$. Но $f = (h_1 + h_2)/2$: на $W_1 \cap W_2$ функции h_i совпадают с $h_j'' = 2f - h_j'$, а функции h_j — с h_j'. Будучи выпуклой комбинацией функций h_1 и h_2, функция f принадлежит W.

Лемма доказана.

Отметим, что из леммы 8 следует, что если $T_1 \cap T_2 = \varnothing$, то $W = C(X)$.

Лемма 9. *При условиях леммы* 8 *справедлива формула $W_{\max\{\varepsilon_i\}}(\bigcap\{(T_i)\colon i \leqslant n\}) \subseteq W$.*

Доказательство. Пусть $T_0 = T_1 \cap T_2$, $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2$. Возьмём $f \in V_{\varepsilon_1}(T_0)$ и положим $\alpha = \|f|_{T_0}\| < \varepsilon_1$, $M = \{x \in X\colon |f(x)| < \alpha + (\varepsilon_1 - \alpha)/2\}$, $T_1' = T_1 \setminus M$, $T_0' = T_0$. Выберем непересекающиеся нуль-окрестности W_i множеств T_i'. Пусть функции $h_i' \in C(X)$ таковы, что $h_i'|_{T_i'} = 0$, $h_i'|_{X\setminus W_i} = f$, $|h_i'(x)| \leqslant |f(x)|$ (снова используем лемму 7). Положим $h_0'' = (f - th_0')/(1-t)$, $h_1'' = (f - (1-t)h_0')/t$, где t удовлетворяет условиям $0 < t < 1$ и $\|h_0''|_{W_0\cap M}\| < \varepsilon_1$ (это возможно, так как $\|f|_M\| \leqslant \alpha + (\varepsilon_1 - \alpha)/2 < \varepsilon_1$, и при $t \to 0$ мы имеем сходимость $h_0''(x) \to f(x)$, равномерную на $M \cap W_0$).

Функции h_i определяем по формулам $h_i|_{W_i} = h_i'|_{W_i}$, $h_i|_{X\setminus W_i} = h_j''|_{X\setminus W_i}$. Тогда $h_i \in C(X)$: если $x \in \partial W_i$, то $x \in [X \setminus W_i]$ влечёт $h_i'(x) = f(x)$; $x \notin W_j$ влечёт $h_j''(x) = (f(x) - sh_j'(x))/(1-s) = f(x)$, где $s = t$ при $j = 0$ и $s = 1 - t$ при $j = 1$, следовательно, h_i' и h_j'' согласованы на ∂W_i.

Но $\|h_1|_{T_1}\| \leqslant \max\{\|h_1'|_{X\setminus W_0}\|, \|h_0''|_{T_1\cap W_0}\|\} < \varepsilon_1$ (так как $|h_i'(x)| \leqslant |f(x)|$ при $x \in X \setminus W_0$, а $\|h_0''|_{W_0\cap M}\| < \varepsilon_1$ по выбору t), так что $h_1 \in W$. Так как $h_0 \in V_\varepsilon(T_0)$, по лемме 8 $h_0 \in W$. Кроме того, $f = th_0 + (1-t)h_1$: на $X \setminus (W_0 \cup W_1)$ функция h_i совпадает с f, на W_i функция h_i совпадает с h_i', а функция h_j с $h_i'' = (f - sh_i')/(1-s)$, $sh_i + (1-s)h_j = f$, следовательно, $f \in W$.

Лемма доказана.

Положим $\mathcal{F}(W) = \{T \in Z(X)\colon V_\delta(T) \subseteq W$ для некоторого $\delta > 0\}$, $F(W) = \bigcap\{[T]_{\beta X}\colon T \in \mathcal{F}(W)\}$.

Лемма 10. *Пусть $W \neq C(X)$ — такое выпуклое множество, что $\mathcal{F}(W) \neq \varnothing$. Если $F(W) \subseteq \nu X$, то $\mathcal{F}(W)$ есть Z-фильтр и найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $V_\varepsilon(\mathcal{F}(W)) \subseteq W$.*

Доказательство. Условие $W \neq C(X)$ гарантирует отсутствие пустых элементов в $\mathcal{F}(W)$. Из леммы 8 следует, что $\mathcal{F}(W)$ замкнуто относительно конечных пересечений. Пусть $T \in \mathcal{F}(W)$ и $V_\varepsilon(T) \subseteq W$. Если $f \in V_\varepsilon(\mathcal{F}(W))$, то положим $\alpha = \|\tilde{f}|_{F(W)}\| < \varepsilon$, $M = \{x \in X \colon |\tilde{f}(x)| < \alpha + (\varepsilon - \alpha)/2\}$. Тогда $M \supseteq F(W)$ и найдётся множество $T^1 \in \mathcal{F}(W)$, лежащее в M. Положим $T^2 = T \cap T^1$. Тогда $V_\varepsilon(T^2) \subseteq W$ по лемме 9. Далее, $\|f|_{T^2}\| \leqslant \alpha + (\varepsilon - \alpha)/2$, следовательно, $f \in V_\varepsilon(T^2)$ и $f \in W$. Доказано, что $V_\varepsilon(\mathcal{F}(W)) \subseteq W$. Из этого следует, что семейство $\mathcal{F}(W)$ счётно центрированно, т. е. является Z-фильтром.
Лемма доказана.

Выпуклое уравновешенное множество называют абсолютно выпуклым.

Лемма 11. *Пусть W — выпуклое множество в $C_\lambda(X)$, поглощающее все полные ограниченные абсолютно выпуклые подмножества $C_\lambda(X)$, $\gamma = \{H_n\}$ — локально конечная последовательность конуль-множеств в X. Тогда найдутся такие $\varepsilon > 0$ и n, что $V_\varepsilon(T_n) \subseteq W$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда для каждого n найдётся функция $f_n \in V_{1/(n \cdot 2^n)}(T_n) \setminus W$. Положим $g_n = n f_n$. Тогда $\|g_m|_{T_n}\| < 1/2^m$ при $m \geqslant n$, так что последовательность $\{g_n\}$ ограничена, но не поглощается W. Пусть V — выпуклая уравновешенная оболочка $\{g_n\}$, $\bar{V}$ — замыкание V в $\mathbb{R}^X_\lambda$ — множестве всех вещественных функций на X, снабжённом λ-топологией. Множество $\mathbb{R}^X_\lambda$ полно (что очевидно), так что $\bar{V}$ — абсолютно выпуклое полное множество и остаётся показать, что $\bar{V} \subseteq C(X)$.

Пусть $f \in \bar{V}$ и $\{f_\alpha\}$ — направленность в V, сходящаяся к f в λ-топологии. Положим $A_n = X \setminus \{[H_i] \colon i > n\}$. Тогда A_n открыто в X, содержится в T_n и $X = \bigcup\{A_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Найдётся такое m, что $1/2^m < \varepsilon/2$ и $m > n$ (n зафиксируем). Тогда $\|g_i|_{A_n}\| < 1/2^i$ при $i \geqslant m$. Пусть $f_\alpha = \sum\{\lambda_i^\alpha g_i \colon i \leqslant n_\alpha\}$. Положим $\bar{f}_\alpha = \sum\{\lambda_i^\alpha g_i \colon i \leqslant m\}$. Тогда $f_\alpha - \bar{f}_\alpha = \sum\{\lambda_i^\alpha g_i \colon i = m+1, \ldots, n_\alpha\}$ и $\|(f_\alpha - \bar{f}_\alpha)|_{An}\| = \| \sum\{\lambda_i^\alpha g_i \colon i = m+1, \ldots, n_\alpha\}|_{An}\| \leqslant \sum\{\|g_i|_{An}\| \colon i = m+1, \ldots, n_\alpha\} \leqslant \sum\{1/2^i \colon i = m+1, \ldots, n_\alpha\} < 1/2^m < \varepsilon/2$. Выпуклая уравновешенная оболочка конечного множества $\{g_i \colon i \leqslant m\}$ компактна, поэтому направленность $\bar{f}_\alpha$ имеет предельную точку $\bar{f} \in \bar{V}$. При любом $x \in A_n$ имеем $|f(x_0 - \bar{f}(x)| \leqslant |f(x_0 - f_\alpha(x)| + |f_\alpha(x) - \bar{f}_\alpha(x)| + |\bar{f}_\alpha(x) - \bar{f}(x)|$. Пусть $\gamma > 0$ произвольно. Найдётся такое α_0, что $|f(x) - f_\alpha(x)| < \gamma/2$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$. Найдётся такое $\alpha_1 \geqslant \alpha_0$, что $|\bar{f}_{\alpha_1}(x) - \bar{f}(x)| < \gamma/2$. Тогда $|f(x) - \bar{f}(x)| < \varepsilon/2 + \gamma$, так что $\|(f - \bar{f})|A_n\| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$. Итак, функция f равномерно приближается элементами V, поэтому $f \in C(X)$ и $\bar{V} \subseteq C(X)$. Но абсолютно выпуклое ограниченное полное множество $\bar{V} \subseteq C_\lambda(X)$ не поглощается W, что противоречит условию леммы.

Лемма доказана.

Лемма 12. *Если $W \neq C(X)$ — бочка в $C_\lambda(X)$, то $\mathcal{F}(W) \neq \varnothing$ и $\mathcal{F}(W)$ есть r-ограниченный Z-фильтр.*

Доказательство. $\mathcal{F}(W) \neq \varnothing$, так как $X \in \mathcal{F}(W)$ (это следует из того, что бочка поглощает все полные ограниченные абсолютно выпуклые множества, и из леммы 11 при $\gamma = \{H_n = \varnothing\}$).

Пусть $f \in C(X)$ — неограниченная функция. Положим $H_n = \{x \in X : n-1 < |f(x)| < n+1$. Тогда $\{H_n\}$ — последовательность конуль-множеств, удовлетворяющая условиям леммы 11. Поэтому найдутся такие $\varepsilon > 0$ и n, что $V_\varepsilon(T_n) \subseteq W$, или $T_n \in \mathcal{F}(W)$. На T_n функция f ограничена, так что $\mathcal{F}(W)$ — r-ограниченный фильтр и $\mathcal{F}(W) \subseteq \nu X$. По лемме 10 $\mathcal{F}(W)$ — Z-фильтр.

Лемма доказана.

Лемма 13. *Пусть Φ — компакт в νX. Тогда $V_\varepsilon(\Phi^1) \subseteq [V_\varepsilon(\Phi)]$.*

Доказательство. Пусть $f \in V_\varepsilon(\Phi^1)$. Предположим, что $\|\tilde{f}|_\Phi\| \geqslant \varepsilon$. Пусть $\delta = \varepsilon - \|\tilde{f}|_\Phi\| \geqslant 0$, $M = \{x \in \nu X : |\tilde{f}(x)| \geqslant \|\tilde{f}|_{\Phi^1}\| + \delta/2\}$, $C = \Phi \cap M$. Пусть $L = \{g \in C(X) : \|(f-g)|_A\| < \omega\}$ — произвольная окрестность функции f в $C_\lambda(X)$. Положим $S = [A]_{\nu X} \cup \Phi^1$. Компактные множества C и S не пересекаются, так что их можно разделить нуль-множествами S_1 и C_1. По лемме 7 найдётся такая функция $g \in C(\nu X)$, что $|\tilde{f}(x)| \geqslant |g(x)|$, $g|_C = 0$, $g|_S = \tilde{f}$. Тогда $g' = g|_X \in L$, $\|f|_\Phi\| \leqslant \|\tilde{f}|_{\Phi^1}\| + \delta/2 < \varepsilon$, следовательно, $g' \in L \cap V_\varepsilon(\Phi)$ и $f \in [V_\varepsilon(\Phi)]$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 20. Пусть в X существует r-ограниченный λ-связанный, но не λ-устойчивый Z-фильтр $\mathcal{F}$. По лемме $6'$ множество $\bar{V}_\varepsilon(\mathcal{F})$ является бочкой в $C_\lambda(X)$, по лемме $5'$ эта бочка не является окрестностью нуля, так что $C_\lambda(X)$ небочечно.

Пусть теперь выполнено условие о фильтрах в X. Пусть W — бочка в $C_\lambda(X)$. Можно предположить, что $W \neq C(X)$. По лемме 11 множество $\mathcal{F}(W)$ есть r-ограниченный Z-фильтр в X, причём по лемме 9 найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $V_\varepsilon(\mathcal{F}(W)) = \{f \in C(X) : \|\tilde{f}|_{F(W)}\| < \varepsilon\} \subseteq W$. Пусть $\mathcal{F}$ есть семейство всех таких нуль-множеств H в X, что $[H]_{\nu X} \supseteq F(W)^1$. Тогда $\mathcal{F}$ — r-ограниченный (в силу $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}(W)$) и λ-связанный Z-фильтр (по лемме 2). По условию $\mathcal{F}$ λ-устойчив. Тогда найдётся такое $A \in \lambda$, что $[A]_{\nu X} \supseteq F(W)^1$. Следовательно, $V_\varepsilon(A) \subseteq V_\varepsilon(\mathcal{F})$ (следствие 3 леммы 5), но $V_\varepsilon(\mathcal{F}) = V_\varepsilon(F(W)^1) \subseteq [V_\varepsilon(\mathcal{F}(W))]$ (по лемме 13), $[V_\varepsilon(\mathcal{F}(W))] \subseteq [W] = W$, так что $V_\varepsilon(A) \subseteq W$ и W — окрестность нуля в $C_\lambda(X)$.

Остаётся заметить, что $F(W)^1 \neq \varnothing$, так как условие $[V_\varepsilon(\mathcal{F}(W))] \subseteq W \neq C(X)$ гарантирует нам (по лемме $4'$), что $\mathcal{F}(W)$ λ-прост.

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $\lambda \subseteq c$. $C_\lambda(X)$ бочечно тогда и только тогда, когда всякое ограниченное множество в X принадлежит λ.

Доказательство. Пусть $C_\lambda(X)$ бочечно, A является ограниченным в X. Рассмотрим фильтр $\mathcal{F}$, состоящий из всех нуль-множеств в X, содержащих A. Этот Z-фильтр r-ограничен (что очевидно) и λ-связан (если U — конуль-множество в X, пересекающееся со всеми элементами $\mathcal{F}$, то $U \cap A \neq \varnothing$; при $x \in U \cap A$ выполняется $\{x\} \in \lambda$ и $\{x\}_{\bar{C}}\mathcal{F}$). Следовательно, $\mathcal{F}$ λ-устойчив и найдётся такое $B \in \lambda$, что $[B]_{\nu X} \supseteq F \supseteq A$. Но $[B]_{\nu X} = [B]_X \in \lambda$, следовательно, $A \in \lambda$.

Докажем обратное. Пусть $\mathcal{F}$ — r-ограниченный λ-связанный Z-фильтр в X. Тогда $F \subseteq X$. Действительно, $F \cap X \in \lambda$, поэтому $F \cap X$ компактно. Если предположить, что найдётся точка $x \in F \setminus X$, то можно выбрать нуль-окрестность U' точки x в νX, не пересекающуюся с $F \cap X$. По условию λ-связанности найдётся множество $B \in \lambda$, лежащее в $U = \langle U' \cap X \rangle$, для которого $[B]_{\nu X} \cap F \neq \varnothing$. Но $[B]_{\nu X} = [B]_X$, так что $[B]_X \cap F \cap X \neq \varnothing$, что противоречит $U' \cap F \cap X = \varnothing$. Итак, $F \subseteq X$. Так как F — ограниченное множество, то $F \in \lambda$. Кроме того, F удовлетворяет свойству (s), поэтому фильтр $\mathcal{F}$ λ-устойчив и $C_\lambda(X)$ бочечно.

Следствие доказано.

Отсюда непосредственно вытекают следующие результаты (см. [2] и [16]).

Следствие 2. $C_p(X)$ бочечно тогда и только тогда, когда всякое ограниченное множество в X конечно.

X называется *μ-пространством*, если всякое ограниченное множество в X относительно компактно.

Следствие 3 (теорема Нахбина—Широты). $C_c(X)$ бочечно тогда и только тогда, когда X является μ-пространством.

Напомним, что локально выпуклое пространство называется *борнологическим*, если в нём всякое абсолютно выпуклое множество, поглощающее все ограниченные подмножества, является окрестностью нуля.

Теорема 21. *$C_\lambda(X)$ борнологично тогда и только тогда, когда любой λ-ограниченный Z-фильтр в X λ-устойчив.*

Нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 14. *Пусть W — абсолютно выпуклое множество, поглощающее ограниченные подмножества $C_\lambda(X)$, $\gamma = \{H_n\}$ — такая последовательность конуль-множеств, что любое $A \in \lambda$ пересекается с не более чем конечным числом элементов λ. Тогда найдутся такие $\varepsilon > 0$ и n, что $V_\varepsilon(T_n) \subseteq W$, где $T_n = X \setminus \bigcup\{H_i \colon i > n\} \in Z(X)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда для каждого n найдётся функция $f_n \in V_{1/n}(T_n) \setminus W$. Положим $g_n = nf_n$. Ясно, что $g_n \notin W_n$ и последовательность $\{g_n\}$ ограничена (если $A \in \lambda$, то найдётся такое k, что $A \subseteq T_k$, $\|g_n|_A\| < 1$ при $n \geqslant k$). Но последовательность $\{g_n\}$ не поглощается W, ибо $(1/m)g_m = f_m \notin W$. Противоречие.

Лемма доказана.

Фильтр $\mathcal{F}$ назовём *λ-ограниченным*, если любая ограниченная в $C_\lambda(X)$ последовательность ограничена на некотором множестве $H \in \mathcal{F}$.

Лемма 15. *Пусть $W \neq C(X)$ — абсолютно выпуклое множество, поглощающее все ограниченные подмножества $C_\lambda(X)$. Тогда $\mathcal{F}(W) \neq \varnothing$ и $\mathcal{F}(W)$ есть λ-ограниченный Z-фильтр.*

Доказательство. $\mathcal{F}(W) \neq \varnothing$ хотя бы потому, что $X \in \mathcal{F}(W)$. Пусть $\{f_n\}$ — произвольная ограниченная последовательность в $C_\lambda(X)$, неограниченная на X. Для каждого n положим $H_n = \bigcup\{\{x \in X : |f_i(x)| > n\} : i = 1, 2, \ldots\}$. Тогда последовательность конуль-множеств $\{H_n\}$ удовлетворяет условиям леммы 11. Следовательно, найдётся такое n, что $T_n = X \setminus \bigcup\{H_i : i > n\} \in \mathcal{F}(W)$. На T_n последовательность $\{f_m\}$ ограничена. Поэтому семейство $\mathcal{F}(W)$ является λ-ограниченным, следовательно, r-ограниченным фильтром. По лемме 1 $F(W) \subseteq \nu X$. По лемме 10 $\mathcal{F}(W)$ — Z-фильтр.

Лемма доказана.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 16. *Пусть $\mathcal{F}$ — λ-ограниченный Z-фильтр. Тогда множество $V_\varepsilon(\mathcal{F})$ поглощает все ограниченные подмножества $C_\lambda(X)$.*

Доказательство теоремы 21. Пусть $\mathcal{F}$ — λ-ограниченный, но не λ-устойчивый Z-фильтр в X. Тогда множество $V_\varepsilon(\mathcal{F})$ не является окрестностью нуля в $C_\lambda(X)$ по лемме $5'$, но оно абсолютно выпукло и поглощает все ограниченные подмножества $C_\lambda(X)$ по лемме 16. Следовательно, $C_\lambda(X)$ неборнологично.

Обратное утверждение немедленно следует из лемм 15 и 10 и следствия 3 леммы 5. Теорема доказана.

Следствие 1. Если $C_\lambda(X)$ борнологично, то $\nu X = \bigcup\{[A]_{\nu X} : A \in \lambda\}$.

Доказательство. Пусть $x \in \nu X \setminus X$ — произвольная точка. Рассмотрим Z-фильтр $\mathcal{F}$, состоящий из всех таких нуль-множеств H, что $[H]_{\nu X} \ni x$. Тогда $\mathcal{F}$ — λ-ограниченный фильтр. Действительно, пусть $\{f_n\}$ — ограниченная в $C_\lambda(X)$ последовательность. Тогда последовательность $\{\tilde{f}_n(x)\}$ тоже ограничена (если предположить противное, то при $y \in \bigcap\{\{z \in X : f_n(z) = \tilde{f}_n(z)\} : n \in \mathbb{N}\}$ мы бы имели, что последовательность $\{f_n\}$ не ограничена на множестве $\{y\} \in \lambda$). Если $M \geqslant \sup\{\tilde{f}_n(x)\}$, то $S = \bigcap\{\{x \in X : |f_n(x)| \leqslant M\} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}$ и последовательность $\{f_n\}$ ограничена на S. Так как $C_\lambda(X)$ борнологично, то фильтр $\mathcal{F}$ λ-устойчив и найдётся такое множество $A \in \lambda$, что $[A]_{\nu X} \supseteq F = \{x\}$.

Следствие доказано.

Следствие 2. Если $\lambda \subseteq c$ и $C_\lambda(X)$ борнологично, то X есть Q-пространство.

Так как Q-пространство является μ-пространством, то из следствия 3 теоремы 20 и следствия 2 вытекает

Следствие 3. Если $C_c(X)$ борнологично, то оно бочечно.

Лемма 17. *Если Φ — бесконечное множество в X, то найдётся последовательность $\{f_n\} \subseteq C(X)$, не ограниченная на Φ, но ограниченная в каждой точке $x \in X$.*

Доказательство. Найдётся такое дизъюнктное семейство открытых множеств $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$, что $H_n \cap \Phi \neq \varnothing$. Пусть $f_n|_{X\setminus H_n} = 0$, $\|f_n|_{H_n\cap\Phi}\| \geqslant n$. Последовательность $\{f_n\}$ искомая.

Лемма доказана.

Из леммы 17 и теоремы 21 вытекает известное [16]

Следствие 4. Эквивалентны следующие свойства:
а) $C_p(X)$ борнологично,
б) $C_c(X)$ борнологично,
в) X — Q-пространство.

Доказательство.
Импликации а) $\Longrightarrow$ в) и б) $\Longrightarrow$ в) верны по следствию 2.

Пусть X — Q-пространство, $\mathcal{F}$ — c-ограниченный Z-фильтр в X. Тогда $F \subseteq X$ по лемме 1, $F \in c$ и F удовлетворяет условию (s), следовательно, фильтр $\mathcal{F}$ c-устойчив. Если $\mathcal{F}$ p-ограничен, то снова $F \subseteq X$ по лемме 1 и $F \in p$ в силу леммы 17, т. е. фильтр $\mathcal{F}$ p-устойчив.

Следствие доказано.

Бочка, поглощающая все ограниченные множества, называется (для краткости) ограниченно поглощающей. Локально выпуклое пространство, в котором каждая ограниченно поглощающая бочка является окрестностью нуля, называется *квазибочечным*.

Теорема 22. $C_\lambda(X)$ *квазибочечно тогда и только тогда, когда каждый λ-ограниченный λ-связанный Z-фильтр в X λ-устойчив.*

Доказательство. Пусть в X существует λ-ограниченный λ-связанный, но не λ-устойчивый Z-фильтр $\mathcal{F}$. Множество $\bar{V}_\varepsilon(\mathcal{F})$ является бочкой в $C_\lambda(X)$ (лемма 6′), поглощающей все ограниченные подмножества $C_\lambda(X)$ (лемма 16), но не является окрестностью нуля в $C_\lambda(X)$ (лемма 5′), следовательно, на $C_\lambda(X)$ не выполняется условие квазибочечности.

Докажем обратное. Пусть $W \neq C(X)$ — бочка, поглощающая ограниченные подмножества $C_\lambda(X)$. По лемме 14 семейство $\mathcal{F}(W)$ есть λ-ограниченный Z-фильтр, а по лемме 10 $V_\varepsilon(\mathcal{F}(W)) \supseteq W$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Условие $W \neq C(X)$ и лемма 4′ обеспечивают свойство $F(W)^1 \neq \varnothing$. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство всех таких нуль-множеств H в X, что $[H]_{\nu X} \supseteq F(W)^1$. Тогда $\mathcal{F}$ — λ-ограниченный ($\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}(W)$) и λ-связанный (лемма 2) Z-фильтр. По условию теоремы $\mathcal{F}$ λ-устойчив. Если $A \in \lambda$ таково, что $[A]_{\nu X} \supseteq F(W)^1$, то $V_\varepsilon(A) \subseteq V_\varepsilon(F(W)^1) \subseteq$ $\subseteq [V_\varepsilon(F(W)^1)] \subseteq [W] = W$, следовательно, W есть окрестность нуля в $C_\lambda(X)$ и $C_\lambda(X)$ квазибочечно.

Теорема доказана.

Следствие ([16]). $C_p(X)$ квазибочечно.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — p-ограниченный и p-связанный Z-фильтр. Положим $F' = F \cap X$. Если L — конуль-окрестность точки $x \in F$ в νX, то по условию p-связанности найдётся такое конечное множество $A \subseteq L \cap X$, что $A \cap F \neq \varnothing$. Но $A \cap F \subseteq F'$, следовательно, $[F'] = F$. Так как фильтр $\mathcal{F}$ p-ограничен, то по лемме 17 F' конечно и $F' = F$. Тогда $\mathcal{F}$ p-устойчив и $C_p(X)$ квазибочечно по теореме 3.

Следствие установлено.

Напомним, что множество A называют полуполным (или секвенциально полным), если в нём сходится всякая последовательность Коши.

Локально выпуклое пространство называют *ультраборнологическим*, если в нём является окрестностью нуля всякое выпуклое множество, поглощающее все полуполные ограниченные абсолютно выпуклые множества.

Аналогично лемме 12 доказывается

Лемма 18. *Если $W \neq C(X)$ — выпуклое множество, поглощающее все полуполные ограниченные абсолютно выпуклые множества $C_\lambda(X)$, то $\mathcal{F}(W)$ является r-ограниченным Z-фильтром.*

Теорема 23. *$C_\lambda(X)$ ультраборнологично тогда и только тогда, когда каждый r-ограниченный Z-фильтр в X λ-устойчив.*

Доказательство. Допустим, что в X существует r-ограниченный не λ-устойчивый Z-фильтр $\mathcal{F}$. Множество $V = \bar{V}_1(\mathcal{F})$ не является окрестностью нуля в $C_\lambda(X)$ по лемме $5'$. Остаётся показать, что $\bar{V}_1(\mathcal{F})$ поглощает все полуполные ограниченные абсолютно выпуклые подмножества.

Пусть K — такое множество. Положим $C_K = \bigcup\{nK : n \in \mathbb{N}\}$. Тогда C_K — подмножество $C(X)$, и его можно наделить нормой p (функционал Минковского множества K). Пространство C_K полно в этой норме: нормированная топология не слабее λ-топологии (так как K — ограниченное множество) и имеет базис в нуле из множеств $\{K/n\}$, полуполных в λ-топологии. Докажем, что $V \cap C_K$ замкнуто в C_K. Предположим от противного, что найдётся функция $f \in [V \cap C_K]_{C_K} \setminus (V \cap C_K)$. Пусть $\alpha = \|\tilde{f}|_F\| > 1$ ($f \in C_K$). Найдётся последовательность $\{f_n\}$ элементов $V \cap C_K$, сходящаяся по норме к функции f. Очевидно, что тогда $\{f_n\}$ λ-сходится к f. Положим $P_n = \{x \in \nu X : |\tilde{f}(x) - \tilde{f}_n(x)| > (\alpha - 1)/2\}$. Если $y \in F$ и $|\tilde{f}(y)| = 1$, то P_n — окрестность y при любом n ($f_n \in V$). Поэтому множество $P = \bigcap\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ пересекается с X. Если $x \in P \cap X$, то $|f(x) - f_n(x)| > (\alpha - 1)/2$, что противоречит сходимости $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$.

Итак, $V \cap C_K$ — бочка в банаховом пространстве C_K и, следовательно, поглощает K. Доказано, что $C_\lambda(X)$ не является ультраборнологическим.

Пусть теперь выполняются условия на фильтры и W — абсолютно выпуклое множество, поглощающее все ограниченные полуполные абсолютно выпуклые подмножества $C_\lambda(X)$. Если $W \neq C(X)$, то семейство $\mathcal{F}(W)$ является r-ограниченным Z-фильтром по лемме 18, для которого найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $V_\varepsilon(\mathcal{F}(W)) \subseteq W$ (лемма 10). По условию теоремы фильтр $\mathcal{F}(W)$ λ-устойчив. Найдётся такое множество $A \in \lambda$, что $[A]_{\nu X} \supseteq F(W)$. Тогда по следствию 3 леммы 5 выполняется $V_\varepsilon(A) \subseteq V_\varepsilon(\mathcal{F}(W)) \subseteq W$. Доказано, что W — окрестность нуля, следовательно, $C_\lambda(X)$ ультраборнологично.

Теорема доказана.

Следствие 1. $C_\lambda(X)$ ультраборнологично тогда и только тогда, когда оно бочечно и борнологично.

Доказательство. Пусть $C_\lambda(X)$ бочечно и борнологично. Тогда $\nu X = \bigcup\{[A]_{\nu X} : A \in \lambda\}$ (следствие 1 теоремы 20). Пусть $\mathcal{F}$ — r-ограниченный Z-фильтр в X. Так как $F \subseteq \bigcup\{[A]_{\nu X} : A \in \lambda\}$, то $F = F^1$, и $\mathcal{F}$ λ-связан по лемме 2. Так как $C_\lambda(X)$ бочечно, то $\mathcal{F}$ λ-устойчив по теореме 20. Следовательно, $C_\lambda(X)$ ультраборнологично по теореме 23.

Следствие доказано.

Из следствия 1 и следствий 3 и 4 теоремы 21 вытекает

Следствие 2. Эквивалентны следующие утверждения:

а) $C_c(X)$ борнологично,

б) $C_c(X)$ ультраборнологично,

в) X — Q-пространство.

Следствие 3. $C_p(X)$ ультраборнологично тогда и только тогда, когда X — Q-пространство, в котором всякое ограниченное множество конечно.

Определение 8. X назовём *λ-пространством*, если множество A замкнуто в X тогда и только тогда, когда $A \cap H$ замкнуто для каждого замкнутого множества $H \in \lambda$.

Теорема 24. *Если X является λ-пространством, то $C_\lambda(X)$ борнологично тогда и только тогда, когда каждый r-ограниченный Z-фильтр в X λ-устойчив.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — r-ограниченный не λ-устойчивый Z-фильтр в X. Докажем, что множество $\bar{V}_1(\mathcal{F})$, не являющееся окрестностью нуля в $C_\lambda(X)$ по лемме $5'$, поглощает все ограниченные подмножества $C_\lambda(X)$.

Действительно, пусть множество K является ограниченным в $C_\lambda(X)$. Предположим, что оно не поглощается $\bar{V}_1(\mathcal{F})$. Тогда найдётся такая последовательность $\{f_n\}$ элементов K, что $\|\tilde{f}_n|_F\| \geqslant n$. Найдётся такая последовательность $\{y_n\}$ точек F, что $n < \tilde{f}_{k(n)}(y_n)$, $k(n) \geqslant n$, $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$. Для некоторой подпоследовательности $\{y_{i(n)}\}$ последовательности $\{y_n\}$ найдётся дизъюнктная система окрестностей $\{P_{i(n)}\}$ точек $y_{i(n)}$, $i(n) \geqslant n$. Выберем такие замкнутые окрестности $S_{i(n)} \subseteq P_{i(n)}$ точек $y_{i(n)}$, что $|f_{k(i(n))}| > i(n)$ при $x \in S_{i(n)}$. Положим $S = \bigcup\{S_{i(n)} : n \in \mathbb{N}\}$. Тогда множество $S \cap X$ незамкнуто (в противном случае семейство $\{S_{i(n)} \cap X\}$ было бы дискретным в X, следовательно, $\{S_{i(n)}\}$ было бы дискретным в F). Найдётся такое $A \in \lambda$, что $A \cap S$ незамкнуто. Но на A последовательность $\{f_n\}$ не ограничена, что противоречит выбору $\{f_n\}$. Доказано, что $C_\lambda(X)$ не является борнологическим.

Теорема доказана.

Следствие. Если X является λ-пространством, то $C_\lambda(X)$ ультраборнологично тогда и только тогда, когда оно борнологично.

Локально выпуклое пространство E называют *локально ограниченным*, если E обладает ограниченной бочкой.

Теорема 25. *$C_\lambda(X)$ локально ограничено тогда и только тогда, когда X псевдокомпактно.*

Доказательство, по существу, тривиально. Пусть функция $f \in C(X)$ не ограничена, например, сверху. Выберем такую дискретную последовательность $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ открытых в $\mathbb{R}$ множеств, что для каждого n найдётся точка x_n, для которой выполнены условия $f(x_n) \in S_n$ и $f(x_n) > n$. Положим $V_n = f^{-1}(S_n)$. Пусть V — произвольное абсолютно выпуклое замкнутое ограниченное множество в $C_\lambda(X)$. Можно предположить, что V ограничено в точке x_n числом n. Пусть функция $f_n \in C(X)$ такова, что $f_n|_{X\setminus V_n} = 0$, $f_n(x_n) = 2n^2$, и пусть $g = \sum f_n$. Тогда $g(x_n)/n = f_n(x_n)/n = 2n$, так что $g/n \notin V$ для всех n, следовательно, g не поглощается V, т. е. V не бочка. Значит, $C_\lambda(X)$ не является локально ограниченным.

Обратное очевидно. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть F есть линейное непрерывное отображение $C_\lambda(X)$ на $C_\mu(Y)$. Если X псевдокомпактно, то и Y псевдокомпактно.

Как известно, псевдокомпактное функционально замкнутое пространство компактно, так что из теоремы 25 и следствия 2 теоремы 21 мы можем вывести следующее

Следствие 2. Пусть $\lambda \subseteq c$. Если $C_\lambda(X)$ локально ограничено и борнологично, то X компактно.

Учитывая следствие 4 теоремы 21, получим следующее

Следствие 3. $C_c(X)$ локально ограничено и борнологично тогда и только тогда, когда X компактно.

Наконец,

Следствие 4. Пусть $\lambda \subseteq c$, $\mu \subseteq c$, и пусть f — топологический гомоморфизм $C_\lambda(Y)$ на $C_\mu(X)$. Если X компактно (функционально замкнуто), то и Y компактно (функционально замкнуто).

Обращение следствия 2 неверно.

Пример 2. Рассмотрим пространство $X = \omega_1 + 1$ всех порядковых чисел, не превосходящих ω_1 в обычной порядковой топологии. Семейство λ будут составлять все счётные компакты. Пусть $\{f_n\}$ — произвольная λ-ограниченная последовательность в $C_\lambda(X)$. Нетрудно проверить, что эта последовательность ограничена на X. Множество $V(X,1) = \{g : |g(x)| < 1$ при $x \in X\}$ абсолютно выпукло и поглощает все λ-ограниченные подмножества $C_\lambda(X)$, но оно не является окрестностью нуля в $C_\lambda(X)$. Следовательно, $C_\lambda(X)$ не борнологично, хотя X компактно.

Компактное множество F назовём *λ-особым*, если найдётся такая последовательность $\{V_n\}$ открытых в X множеств, что

1) $V_n \cap F \neq \varnothing$ для каждого n,

2) всякое $A \in \lambda$ пересекается лишь с конечным числом элементов V_n.

Заметим, что справедливо следующее утверждение

(A) *F не является λ-особым тогда и только тогда, когда $V(F, 1)$ поглощает все λ-ограниченные подмножества $C_\lambda(X)$.*

Доказательство. Пусть F является λ-особым. Тогда найдётся последовательность $\{V_n\}$, удовлетворяющая 1) и 2). Пусть $x_n \in F \cap V_n$. Выберем функцию $f_n \in C(X)$ так, чтобы $f_n(x_n) = n$ и $f_n(y) = 0$ при $y \notin V_n$. Ясно, что последовательность $\{f_n\}$ не ограничена на F, следовательно, не поглощается $V(F, 1)$. Но из 2) вытекает, что $\{f_n\}$ λ-ограничена.

Пусть последовательность $\{f_n\}$ λ-ограничена, но не ограничена на F. Для каждого n найдутся такие точка $x_n \in F$ и функция $f_{k(n)}$, что $f_{k(n)}(x_n) > n$. Положим $V_n = \{y \colon |f_{k(n)}(y) - f_{k(n)}(x_n)| < 1\}$. Из λ-ограниченности следует, что выполняется условие 2). Это означает, что F есть λ-особое множество.

(A) доказано.

Теорема 26. *Пусть $\lambda \subseteq c$. Для функционально замкнутого X пространство $C_\lambda(X)$ борнологично тогда и только тогда, когда всякий не λ-особый компакт в X принадлежит λ.*

Доказательство. Предположим, что $C_\lambda(X)$ борнологично. Пусть компакт F не входит в λ. Множество $V(F, 1)$ абсолютно выпукло, но нетрудно понять, что оно не является окрестностью нуля в $C_\lambda(X)$. Тогда оно не поглощает некоторую λ-ограниченную последовательность. Из (A) следует, что F является λ-особым компактом.

Обратно, пусть всякий не λ-особый компакт в X принадлежит λ.

Пусть W — произвольное абсолютно выпуклое множество в $C_\lambda(X)$, поглощающее все λ-ограниченные множества. Из лемм 10, 15 и 16 следует существование такого компактного множества F, что $V(F, \varepsilon) \subseteq W$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и $V(F, \varepsilon)$ поглощает все λ-ограниченные подмножества. Ясно, что тогда F не является λ-особым, так что $F \in \lambda$ и W — окрестность нуля.

Теорема доказана.

Абсолютно выпуклое множество называется *σ-бочкой*, если оно является пересечением счётного семейства бочек. Локальное выпуклое пространство E называется *σ-ограниченным*, если в нём имеется ограниченная σ-бочка.

Напомним, что пространство X *k-сепарабельно*, если в нём имеется плотное σ-компактное множество.

Теорема 27. *$C_p(X)$ борнологично и локально σ-ограничено тогда и только тогда, когда X является k-сепарабельным функционально замкнутым пространством.*

Доказательство. Пусть $C_p(X)$ локально σ-ограничено и борнологично. Пусть W — ограниченная σ-бочка в $C_p(X)$. По определению $W = \bigcap\{W_n \colon W_n$ — бочка в $C_p(X)\}$. Пространство X является Q-пространством по следствию 2 теоремы 20. Применяя последовательно леммы 12 и 10, мы для каждого n получим такое компактное множество F_n, что $V(F_n, \varepsilon(n)) \subseteq W_n$ для некоторого $\varepsilon(n) > 0$. Положим $F = \bigcup F_n$. Тогда F плотно в X. Действительно, если $x \notin [F]$, то для каждого n построим такую функцию $f_n \in C(X)$, что $f_n(x) = n$ и $f_n(y) = 0$ при $y \in F$. Так как каждое f_n лежит в W_m для всех m, то $f_n \in W$. Так как последовательность $\{f_n\}$ не ограничена в точке x, то W не является ограниченным, что противоречит посылкам.

Обратно, $C_p(X)$ борнологично, что следует из следствия 4 теоремы 21. Если $X = [\bigcup F_n]$, где F_n компактно, то $V(F_n, 1)$ есть бочка, $W = \bigcup(F_n, 1)$ — σ-бочка, ограниченная в силу плотности $\bigcup F_n$.

Теорема доказана.

Теорема, очевидно, верна для $C_c(X)$.

Вопрос 6. В каких теоремах можно снять ограничение $\lambda \subseteq c$?

Вопрос 7. Можно ли охарактеризовать k-сепарабельные пространства топологическими свойствами $C_p(X)$?

Рассмотрим пример, показывающий, что следствие 1 теоремы 20 не имеет места, если отбросить условие $\lambda \subseteq c$.

Пример 3. Пусть $Y = \omega_1 \times (\omega_0 + 1)$, $Y_1 = \omega_1 \times \{\omega_0\} \subseteq Y$ — верхняя грань. Выбросим из Y_1 все предельные точки. Оставшееся пространство X (которое отличается от Y тем, что все точки в $Y_0 = X \setminus (\omega_1 \times \omega_0)$ изолированные) будет искомым. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим топологию ограниченной сходимости на $C(X)$ (т. е. $\lambda = b$). Пространство $C_b(X)$ не является бочечным. Действительно, пусть $W = \{f \in C(X)\colon$ найдётся такое $\alpha < \omega_1$, что $|f(n, \beta)| \leqslant 1$ при любых $n \in \omega_0$ и $\beta \geqslant \alpha\}$. W — бочка, что легко проверяется. Но W не является окрестностью нуля. Докажем это.

Пусть A — произвольное ограниченное множество в X, $V(A, \varepsilon) = \{f\colon \|f_A\| < \varepsilon\}$ — окрестность нуля в $C_b(X)$. Возможны два варианта.

а) Найдётся такое n, что $A \setminus Y_0 \subseteq \{\{k\} \times \omega_1 \colon k \leqslant n\}$.

Ясно, что найдётся такая функция $f \in V(A, \varepsilon)$, что $f(n+1, \alpha) = 2$ при $\alpha \in \omega_1$, так что $V(A, \varepsilon) \setminus W \neq \varnothing$.

б) A пересекает бесконечное число слоёв $\{k\} \times \omega_1$.

В этом варианте найдутся такие n_0 и $\alpha \in \omega_1$, что $A \setminus Y_0 \subseteq \{(n, \beta)\colon n \geqslant n_0,\ \beta \leqslant \alpha\}$. Действительно, в противном случае можно подобрать такие возрастающие последовательности $n_1 < n_2 < \ldots$ и $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$, что $(n_k, \alpha_k) \in A$. Пусть $\alpha = \sup\{\alpha_k\}$. Точка (ω_0, α) не принадлежит X. Тогда можно построить такую функцию $f \in C(X)$, что $f(n_k, \alpha_k) = k$, следовательно, A не будет ограниченным. Итак, $A \setminus Y_0 \subseteq \{(n, \beta)\colon n \geqslant n_0,\ \beta \leqslant \alpha\}$. Теперь достаточно взять функцию $g \in V(A, \varepsilon)$, для которой $g(n_0 + 1, \alpha + 1) = 2$, чтобы убедиться в том, что $V(A, \varepsilon) \setminus W \neq \varnothing$.

Доказано, что W не может быть окрестностью нуля и $C_b(X)$ небочечно.

Заметим, что W поглощает все ограниченные множества, поэтому $C_b(X)$ не является и борнологическим.

Пример 4. Пространство $C_b(X)$ борнологическое, но X не является функционально замкнутым.

В качестве X возьмём ω_1. Так как X ограничено, то b-топология на $C(X)$ совпадает с нормируемой топологией (равномерной сходимости). Следовательно, $C_b(X)$ борнологично, но X не является функционально замкнутым, что очевидно. Это показывает, что в следствии 2 теоремы 20 нельзя снять условие $\lambda \subseteq c$.

3. Слабые и сильные топологии. Сопряжённые пространства

3.1. Равномерная топология

В этом разделе X будет предполагаться компактом, $C(X)$ наделяться равномерной топологией, $C_\omega(X)$ ($C'_\omega(X)$) будет обозначать $C(X)$ ($C'(X)$) в $C'(X)$-топологии ($C(X)$-топологии), где $C'(X)$ — сопряжённое к $C(X)$ пространство.

Следующие три утверждения носят вспомогательный характер.

Лемма 19. $w(C_\omega(X)) \leqslant \exp w(X)$.

Доказательство. Пусть $w(X) = \tau$. По теореме 9 $d(C(X)) = w(C(X)) = \tau$, так что $|C(C(X))| \leqslant \exp\tau$. Из того что $C'(X) \subseteq C(C(X))$, следует формула $|C'(X)| \leqslant \exp\tau$. Кроме того, $C_\omega(X)$ является подпространством $C_p(C'(X))$, по известной формуле [1] $w(C_p(Z)) = |Z|$, следовательно, $w(C_\omega(X)) \leqslant w(C_p(C'(X))) \leqslant |C'(X)|$. В итоге получается формула $w(C_\omega(X)) \leqslant \exp w(X)$.

Лемма доказана.

Лемма 20. *Пусть E_ω — банахово пространство E в слабой топологии, S_ω — замкнутый единичный шар E, рассматриваемый как подпространство E_ω. Тогда $d(E') \leqslant \chi(S_\omega) \leqslant \chi(E_\omega)$.*

Доказательство. Пусть $\pi = \{V_\alpha\colon \alpha \in T\}$ — база в точке $0 \in S_\omega$ мощности $\chi(S_\omega)$, такая что $V_\alpha = S_\omega \cap \{x \in E\colon |f_{\alpha i}(x)| < \varepsilon_\alpha,\ i \leqslant n(\alpha),\ f_{\alpha i} \in E'\}$. Докажем, что линейная оболочка Z' множества $Z = \{f_{\alpha i}\colon \alpha \in T,\ i \leqslant n(\alpha)\}$ будет плотным подмножеством E'.

Предположим от противного, что найдётся элемент $f \in E' \setminus [Z']$. По известному следствию теоремы Хана—Банаха найдётся такой элемент g второго сопряжённого пространства E'', что $g(f) = 1$ и $g|_{Z'} = 0$. Без потери общности можно предположить, что g лежит в замкнутом единичном шаре S'' пространства E''. Пусть $V = \{x \in E\colon |f(x)| < 1/2\}$. Тогда найдётся такое $\alpha \in T$, что $S_\omega \cap V \supseteq V_\alpha$. Положим $L = \{f_{\alpha i}\colon i \leqslant n(\alpha)\}$. Окрестность $V(g, L, f, \varepsilon_\alpha, 1/2) = \{g' \in E''\colon |g'|_L| < \varepsilon_\alpha,\ |g'(f) - 1| < 1/2\}$ точки g в E'-топологии пространства E'' содержит некоторое $\kappa(x)$, где $x \in S$ и $\kappa\colon E \to E''$ — каноническое вложение (по теореме Голдстайна $S'' = [\kappa(S)]$). Тогда $x \in V_\alpha \setminus V$, что противоречит выбору V_α. Доказано, что $[Z'] = E'$. Так как Z плотно в Z' и $|Z| = |T|$, то $d(E') \leqslant |T| \leqslant \chi(S_\omega) \leqslant \chi(E_\omega)$.

Лемма доказана.

Следствие. $|X| \leqslant d(C'(X)) \leqslant \chi(S_\omega)$.

Доказательство. Каноническое отображение $q\colon q(t)(x) = x(t)$ переводит множество X в дискретное подмножество $C'(X)$ (так как $\|q(t) - q(t')\| = 2$ для каждых двух различных точек t, t' из X). Отсюда следует, что $|X'| \leqslant d(C'(X))$, и можно применить лемму 2.

Доказательство завершено.

Вопрос 8. Верна ли формула $|X| \leqslant d(C(X))$?

Пусть $F \subseteq E'$. Будем обозначать через E_F пространство E в F-топологии.

Лемма 21. $\chi(E_F) = w(E_F)$.

Доказательство. Пусть $\{V_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — такая фундаментальная система окрестностей нуля в E_F, что $|A| = \chi(E_F)$. Можно предположить, что $V_\alpha = \{x \in E\colon |f_{\alpha i}| < \varepsilon_\alpha,\ f_{\alpha i} \in F,\ i \leqslant n(\alpha)\}$. Выберем счётный базис π в $\mathbb{R}$ и положим $\gamma = \{\bigcap\{f_{\alpha i}^{-1}(V_i)\colon i \leqslant n(\alpha)\}\colon \alpha \in A,\ V_i \in \pi\}$. Тогда $|\gamma| = |A|$, и достаточно показать, что γ будет базисом F-топологии.

Пусть x_0 — произвольная точка в E, V — её произвольная F-окрестность. Так как множество $V - x_0$ является окрестностью нуля, то найдётся такое $\alpha \in A$, что $V_\alpha \subseteq V - x_0$. Выберем такое $W_{\alpha i} \in \pi$, что $f_{\alpha i}(x_0) \in W_{\alpha i} \subseteq (f_{\alpha i}(x_0) - \varepsilon_\alpha, f_{\alpha i}(x_0) + \varepsilon_\alpha)$, $i \leqslant n(\alpha)$. Положим $\Gamma = \bigcap\{f_{\alpha i}^{-1}(W_{\alpha i})\colon i \leqslant n(\alpha)\}$ и докажем, что $\Gamma \subseteq V$.

Пусть $x \in \Gamma$. Так как $f_{\alpha i}(x) \in W_{\alpha i}$, то $|f_{\alpha i}(x) - f_{\alpha i}(x_0)| < \varepsilon_\alpha$, или $|f_{\alpha i}(x - x_0)| < \varepsilon_\alpha$, для всех $i \leqslant n(\alpha)$, так что $x - x_0 \in V_\alpha \subseteq V - x_0$ и $x \in V$. Доказано, что γ является базисом, из чего следует формула $w(E_F) \leqslant |\gamma| = |A| \leqslant \chi(E_F)$.

Лемма доказана.

Лемма 22. $\pi\chi(C_\omega(X)) = \pi w(C_\omega(X)) = \chi(C_\omega(X))$.

Доказательство. Равенства $\pi\chi = \chi$ и $\pi w = w$ выполняются в любой топологической группе. По лемме 3 $\chi(C_\omega(X)) = w(C_\omega(X))$.

Лемма доказана.

На основе приведённых результатов получаются следующие две теоремы.

Теорема 28. $w(X) = d(C(X)) \leqslant \pi\chi(C_\omega(X)) = \pi w(C_\omega(X)) = \chi(C_\omega(X)) = w(C_\omega(X)) \leqslant \exp w(X)$.

Доказательство. $w(X) = d(C(X))$ по теореме 9. По лемме 19 $w(C_\omega(X)) \leqslant \exp w(X)$. Из компактности X следует, что $w(X) \leqslant |X|$. По следствию из леммы 20 $|X| \leqslant d(C'(X)) \leqslant \chi(S_\omega) \leqslant \chi(C_\omega(X))$. По лемме 22 $\pi\chi(C_\omega(X)) = \pi w(C_\omega(X)) = \chi(C_\omega(X))$. По лемме 21 $\chi(C_\omega(X)) = w(C_\omega(X))$.

Доказательство завершено.

Теорема 29. $|X| \leqslant \chi(S_\omega) = d(C'(X)) \leqslant \exp w(X)$.

Доказательство. С учётом следствия леммы 2, теоремы 9 и леммы 1 достаточно доказать неравенство $\chi(S_\omega) \leqslant d(C'(X))$.

По известной формуле C_p-теории [1] $nw(C_p(C'(X))) = w(C'(X))$. Так как $S''_\omega \subseteq C_p(C'(X))$ (где S''_ω — замкнутый единичный шар второго сопряжённого пространства $C''(X)$ в $C'(X)$-топологии), то $nw(S''_\omega) \leqslant w(C'(X)) = d(C'(X))$. Так как S''_ω компактно, то $w(S''_\omega) = nw(S''_\omega)$, а так как S_ω топологически вкладывается в S''_ω, то $\chi(S_\omega) \leqslant w(S_\omega) \leqslant d(C'(X))$.

Теорема доказана.

Вопрос 9. Верно ли, что $w(E_\omega \geqslant w(E)$?

Вопрос 10. Верно ли, что $w(E') \geqslant w(E'_\omega)$?

Заметим, что вес $C_\omega(X)$ не обязан совпадать с весом S_ω. Действительно, пусть X — александровская компактификация счётного дискрета (сходящаяся последовательность). Тогда $C(X)$ изоморфно пространству c всех сходящихся числовых последовательностей. Пространство $c' = l_1$ сепарабельно, следовательно, единичный замкнутый шар в c метризуем в $C'(X)$-топологии, т. е. $\chi(S_\omega) = w(S_\omega) = \omega$. Но $C_\omega(X)$ неметризуемо, так что $\chi(C_\omega) > w(S_\omega)$.

Что касается псевдовеса и псевдохарактера, то здесь мы имеем следующую формулу.

Теорема 30. $\psi(C_\omega(X)) = pw(C_\omega(X)) = d(C'_\omega(X))$.

Доказательство. Пусть $\{V_\alpha\colon \alpha \in D\}$ — псевдобаза $C_\omega(X)$ в нуле мощности $\psi(C_\omega(X))$. Можно предположить, что $V_\alpha = \{x \in C(X)\colon |f_{\alpha i}| < \varepsilon_\alpha,\ i \leqslant n(\alpha)\}$. Пусть T — замыкание линейной оболочки множества $\{f_{\alpha i}\colon \alpha \in D,\ i \leqslant n(\alpha)\}$ в $C(X)$-топологии. Докажем, что $C'(X) = T$. Предположим противное: найдётся точка $g \in C'(X) \setminus T$. По теореме о разделении выпуклых множеств найдётся такая $C(X)$-непрерывная линейная форма f на $C'\omega(X)$, что $f_T = 0$ и $f(g) > 0$. Всякая линейная непрерывная форма на пространстве $C_p(Z)$ является линейной комбинацией элементов X [1]. Так как $C'_\omega(X)$ есть (замкнутое) подпространство $C_p(C(X))$, то f продолжается до линейной непрерывной формы на $C_p(C(X))$, следовательно, $f \in C(X)$. Так как $f(f_{\alpha i}) = f_{\alpha i}(f) = 0$, то $f \in V_\alpha$ для каждого $\alpha \in D$. С другой стороны, $\bigcap\{V_\alpha\colon \alpha \in D\} = \{0\}$, что противоречит определению f. Следовательно, $C'(X) = T$ и $d(C'\omega(X)) \leqslant \psi(C_\omega(X))$.

Очевидно, что $\psi(C_\omega(X)) \leqslant pw(C_\omega(X))$.

Пусть теперь $M = \{g_\alpha\colon \alpha \in D\}$ — плотное подмножество $C'\omega(X)$ мощности $d(C'_\omega(X))$. Тогда M разделяет точки пространства $C_\omega(X)$ и диагональное произведение отображений g_α является уплотнением пространства $C_\omega(X)$ в пространство $\mathbb{R}^{|D|}$, вес которого равен $|D|$. Прообраз базы $\mathbb{R}^{|D|}$ мощности $|D|$ будет псевдобазой в $C_\omega(X)$, так что $pw(C_\omega(X)) \leqslant |D| = d(C'_\omega(X))$.

Теорема доказана.

Напомним, что компактами Эберлейна называются слабо компактные подмножества банаховых пространств.

В качестве следствия теоремы 30 получаем следующую формулу.

Теорема 31. *Если X — компакт Эберлейна, то $\psi(C_\omega(X)) = d(X)$.*

Доказательство. Из того что X является компактом Эберлейна, следует существование компакта Y в $C_p(X)$, разделяющего точки X [1, IV.1]. Из этого свойства вытекает формула $w(Y) = d(Y) = w(X) = d(X)$. Можно предположить, что Y лежит в S_ω. По теореме Гротендика [17] Y компактно в $C_\omega(X)$. Для компактов $w = pw$. Тогда $w(Y) = pw(Y) \leqslant pw(C_\omega(X))$. По теореме 30 $pw(C_\omega(X)) = \psi(C_\omega(X))$. В итоге получается формула $d(X) \leqslant \psi(C_\omega(X))$. Но $\psi(C_\omega(X)) \leqslant \psi(C_p(X)) = d(X)$ [1].

Теорема доказана.

Теорема 32. *Следующие утверждения эквивалентны:*
1) *$C_\omega(X)$ есть k-пространство,*
2) *$C_\omega(X)$ секвенциально,*
3) *$C_\omega(X)$ есть пространство Фреше—Урысона,*
4) *$C_\omega(X)$ метризуемо,*
5) *X конечно.*

Доказательство. Очевидно, что 5) $\Longrightarrow$ 4) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 1). Докажем 1) $\Longrightarrow$ 5).

Предположим, что X бесконечно. Тогда $C(X)$ бесконечномерно, следовательно, $C(X)$ содержит такое подмножество A, что $0 \in [A]_\omega$, но пересечение A с любым ограниченным подмножеством конечно [18].

Пусть K — произвольное компактное подмножество пространства $C_\omega(X)$. Тогда K, будучи компактом Эберлейна (как слабо компактное подмножество банахова пространства $C(X)$), является пространством Фреше—Урысона. Это означает, что если $x \in [K \cap A]_\omega$, то x является пределом некоторой последовательности $\{x_n\}$ элементов A. Из определения A следует, что множество точек этой последовательности, будучи ограниченным, конечно, т. е. последовательность $\{x_n\}$ стационарна. Тогда $x \in A$, следовательно, множество $K \cap A$ слабо замкнуто, но само A не является слабо замкнутым, и k-условие не выполняется.

Теорема доказана.

Что касается S_ω, то здесь ситуация несколько иная.

Теорема 33. *S_ω метризуемо тогда и только тогда, когда X счётно.*

Доказательство. Если S_ω метризуемо, то X счётно по теореме 29.

Если X счётно, то $C_p(X)$ метризуемо [1, I.1]. Так как пространство X компактно, то оно разрежено [1, III.1]. В этом случае S_ω гомеоморфно S_p (S в топологии поточечной сходимости, см. [19]), так что и S_ω метризуемо.

Теорема доказана.

Используя те же аргументы, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 34. *Если X — разреженный компакт, то S_ω является пространством Фреше—Урысона.*

Заключительная формула такова:

Теорема 35. $d(C_\omega(X)) = hd(C_\omega(X)) = nw(C_\omega(X)) = w(X)$.

Доказательство. Очевидно, что $d(Z) \leqslant hd(Z) \leqslant nw(Z)$ для любого Z.

По теореме 9 $d(C(X)) = w(X)$. Так как $d(C(X)) = nw(C(X))$ в силу метризуемости, а $nw(C_\omega(X)) \leqslant nw(C(X))$, в силу того что ω-топология слабее равномерной, $nw(C_\omega(X)) \leqslant w(X)$.

С другой стороны, любое плотное в $C_\omega(X)$ множество D разделяет точки множества $C'(X)$, а следовательно, и точки X. Диагональ отображений из D даёт тогда уплотнение X на пространство веса $|D|$, которое является гомеоморфизмом в силу компактности X. Из этого следует формула $w(X) \leqslant d(C_\omega(X))$.

Теорема доказана.

3.2. Сопряжённые пространства и сильные топологии

Пространство, сопряжённое к $C_\lambda(X)$, будем обозначать через $C'_\lambda(X)$ и рассматривать его только в слабой топологии (относительно двойственности $\langle C_\lambda(X), C'_\lambda(X)\rangle$), которая является топологией поточечной сходимости на элементах $C(X)$.

Так как между $C(X)$ и $C(\nu X)$ существует естественное взаимно-однозначное соответствие, то $C_\lambda(X)$ гомеоморфно пространству $C_{\bar\lambda}(\nu X)$, где $\bar\lambda$ получается из λ добавлением замыканий в νX элементов λ. Так как $\bar\lambda \subseteq c$, то элементы $C'_\lambda(X)$ можно рассматривать как регулярные борелевские меры на νX, носители которых являются элементами $\bar\lambda$ [6].

Через $L_p(X)$ обычно обозначается пространство, сопряжённое к $C_p(X)$ и наделённое $(L_p(X), C_p(X))$-топологией; по-другому, $L_p(X)$ — свободное линейное пространство, натянутое на X и снабжённое топологией, проективной относительно семейства форм $\varphi \in L_p(X)^+$, сужения которых на X непрерывны.

Каждая точка $x \in L_p(X)$ имеет единственное представление $\sum\{x^i y_i(x)\colon i \leqslant \rho(x)\}$, где $x^i \in \mathbb{R}$, $y_i(x) \in X$.

Положив $b(x) = \{y_i(x)\colon i \leqslant \rho(x)\}$, получим конечнозначное отображение $b\colon L_p(X) \to X$. Оно порождает отображения $b_i\colon \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(L_p(X))$, $i \in (\omega{+}1)^+$, работающие по правилам $b_i(V) = \{x \in L_p(X)\colon |b(x) \cap V| \geqslant i\}$, $i \in \omega^+$, и $b_\omega(V) = \{x \in L_p(X)\colon b(x) \subseteq V\}$.

Продолжим отображение $b\colon L_p(X) \to X$ до отображения $\tilde b\colon C'(X) \to \nu X$, положив $\tilde b(\varphi)$ равным носителю меры, соответствующей элементу $\varphi \in C'(X)$. Тогда $\tilde b(\varphi)$ компактно и $b'(\varphi) = \tilde b(\varphi) \cap X \in \lambda$. Заменив в определении b_i множество $b(x)$ на множество $\tilde b(\varphi)$, получим отображения $\tilde b_i\colon \mathfrak{P}(\nu X) \to \mathfrak{P}(C'_\lambda(X))$. Заметим, что автоматически выполняются следующие свойства.

I. Отображения $\tilde b_i$ открыты для всех $i \in \omega^+$.

II. Отображение $\tilde b$ полунепрерывно снизу.

Установим другие свойства.

III. Отображение $\tilde{b}$ является ограниченным, т. е. переводит ограниченные множества в ограниченные.

Действительно, пусть множество $\tilde{b}(A)$ не является ограниченным. Тогда найдётся функция $f \in C(\nu X)$, не ограниченная (скажем, сверху) на $\tilde{b}(A)$. Для каждого $n \in \omega^+$ выберем такой элемент $\varphi_n \in A$, что $s_n = \sup\{f(x) \colon x \in \tilde{b}(\varphi_n)\} \geqslant n$ и $s_n > s_{n-1}$. Пусть точка $x_n \in \tilde{b}(\varphi_n)$ такова, что $f(x_n) = s_n$. Семейство $\{s_n \colon n \in \omega^+\}$ дискретно в $\mathbb{R}$, поэтому можно выбрать дискретную систему окрестностей $\{V_n \colon n \in \omega^+\}$ точек x_n в νX так, чтобы выполнялось следующее условие.

1. $V_n \cap \tilde{b}(\varphi_i) = \varnothing$ при $i < n$.

Выберем функции $f_n \in C(\nu X)$ такими, чтобы выполнялись следующие условия.

2. $f_n \equiv 0$ вне V_n.

3. $\sum\{f_i(\varphi_n) \colon i \leqslant n\} = n$.

Понятно, что это можно сделать. Положим $\bar{f} = \sum\{f_i \colon i \in \omega^+\}$. Тогда $\bar{f} \in C(\nu X)$ (в силу 2 и дискретности $\{V_n\}$) и $\bar{f}(\varphi_n) = n$ (в силу 2 и вытекающего из 1 свойства $\varphi_i(f_n) = 0$ при $n > i$). Доказано, что $\bar{f}$ не ограничена на A, следовательно, A — неограниченное множество.

Так как ограниченное множество в νX относительно компактно, то III можно переформулировать так.

III$'$. Отображение $\tilde{b} \colon C'_\lambda(X)) \to \nu X$ компактно.

Следующее утверждение имеет технический характер.

IV. Пусть A — ограниченное в $C'_\lambda(X)$ множество, $\gamma = \{H_n\}$ — локально конечная последовательность функционально открытых подмножеств νX, $T_n = \nu X \setminus \bigcup\{H_i \colon i > n\}$. Тогда найдутся такие $n \in \omega^+$ и $\varepsilon > 0$, что $V_\varepsilon(T_n) = \{f \in C(X) \colon \|f|_{T_n}\| < \varepsilon\} \subseteq A^0$, где A^0 — абсолютная поляра A.

Предположим, что таких n и ε не найдётся. Абсолютная поляра φ^0 точки $\varphi \in C'_\lambda(X)$ является окрестностью нуля в $C_\lambda(X)$, поэтому найдутся такие множество $B_\varphi \in \lambda$ и число $\gamma_\varphi > 0$, что $\{f \in C(X) \colon \|f|_{B_\varphi}\| < \gamma_\varphi\} \subseteq \varphi^0$. Для каждой точки $\varphi \in A$ зафиксируем такие B_φ и $\gamma_\varphi < 1$. Построим по индукции последовательности $\{f_n \in C(X)\}$, $\{T_{k(n)}\}$, $\{\varphi_n \in A\}$ с выполнением следующих условий:

а) $\|f_n|_{T_{k(n)}}\| \leqslant 1$,

б) $|\sum\{2^{-n} f_n(\varphi_k) \colon n \leqslant k\}| \geqslant k + 1$,

в) $T_{k(n)} \supseteq \bigcup\{B_{\varphi_i} \colon i < n\}$,

г) $\tilde{f}_n(\varphi_k) \leqslant 1$ при $n > k$ (где $\tilde{f}$ — продолжение f на $C'_\lambda(X)$).

Для начала положим $T_{k(1)} = T_1$. Выберем функцию $f'_1 \in C(X)$ так, чтобы $\|f'_1|_{T_1}\| < 1/2$ и $\|\tilde{f}'_1|_A\| \geqslant 1$ (последнее неравенство осуществимо в силу предположения $V_{1/2}(T_1) \not\subset A^0$). Точку φ_1 выберем из A, исходя из условия $|\tilde{f}'_1(\varphi_1)| \geqslant 1$. Положим $f_1 = 2f'_1$, будем иметь $\|f_1|_{T_{k(1)}}\| < 1$ и $|\tilde{f}_1(\varphi_1)| \geqslant 2$.

Предположим, что построены f_i, $T_{k(i)}$ и φ_i для всех $i < n$ с выполнением условий а)—г). В силу ограниченности множества $\bigcup\{B_{\varphi_i} \colon i < n\}$ и локальной конечности γ найдётся такое число $k(n)$, что $T_{k(n)} \supseteq \bigcup\{B_{\varphi_i} : i < n\}$. Выберем функцию $f'_n \in C(X)$ так, чтобы выполнялись условия

$\alpha)$ $\|f'_n|_{T_{k(n)}}\| < 2^{-n}(n+1)^{-1}\delta$, где $\delta = \min\{\gamma_{\varphi_i} : i < n\}$,

$\beta)$ $\|\tilde{f}'_n|_A\| > 1$.

Элемент $\varphi_n \in A$ выберем, исходя из условия $|\tilde{f}'_n(\varphi_n)| > 1$. Для удобства предположим, что числа $f'_n(\varphi_n)$ и $\sum\{\tilde{f}_i(\varphi_n) \colon i < n\}$ одного знака. Положим $f_n = (n+1)2^n f'_n$. Тогда $\|f_n|_{T_{k(n)}}\| = (n+1)2^n\|f'_n|_{T_{k(n)}}\| < \delta < 1$, но $|\tilde{f}_n(\varphi_n)| = (n+1)2^n|\tilde{f}'_n(\varphi_n)| > (n+1)2^n$, или $2^{-n}|\tilde{f}_n(\varphi_n)| > n+1$, а в силу равенства знаков $|\sum\{2^{-i}\tilde{f}_i(\varphi_n) \colon i \leqslant n\}| > 2^{-n}|\tilde{f}_n(\varphi_n)| > n+1$. Так как $B_{\varphi_k} \subseteq T_{k(n)}$ при $k < n$, то $\|f_n|_{B_{\varphi_k}}\| < \delta < \gamma_{\varphi_k}$ (по выбору δ), следовательно, $|\tilde{f}_n(\varphi_k)| \leqslant 1$ при $k < n$. Доказано, что для последовательностей $\{f_i \colon i \leqslant n\}$, $\{T_{k(i)} \colon i \leqslant n\}$ и $\{\varphi_i \colon i \leqslant n\}$ выполняются условия а)—г).

Положим $f = \sum\{2^{-n} f_n : n \in \omega^+\}$. Функция f определена корректно и непрерывна. Действительно, если $x \in X$, то в силу локальной конечности γ и определения T_i найдётся такой номер N, что T_N содержит некоторую окрестность V точки x. Пусть $k(n) \geqslant N$. Функции f_i при $i \geqslant n$ ограничены на $T_{k(n)}$ единицей (по условию а) и включению $T_{k(n)} \subseteq T_{k(m)}$ при $m \geqslant n$). Поэтому функция $g_n = \sum\{2^{-i} f_i \colon i \geqslant n\}$ непрерывна на $T_{k(n)}$, следовательно, непрерывна на $T_{k(n)}$ и функция $f = g_n + \sum\{2^{-i} f_i \colon i < n\}$. Так как $V \subseteq T_{k(n)}$, то f непрерывна в точке x.

Пусть $B \in \lambda$. Найдётся такое n, что $B \subseteq T_{k(n)}$. Рассуждения, аналогичные вышеприведённым, показывают, что ряд $\sum\{2^{-n} f_n \colon n \in \omega^+\}$ сходится к функции f равномерно на B. Это означает, что ряд сходится к f в пространстве $C_\lambda(X)$, поэтому $\tilde{f}(\varphi) = \sum\{2^{-n}\tilde{f}_n(\varphi) \colon n \in \omega^+\}$ для всякого $\varphi \in C'_\lambda(X)$.

По условию б) $|\sum\{2^{-i}\tilde{f}_i(\varphi_n) \colon i \leqslant n\}| \geqslant n+1$. С другой стороны, $|\sum\{2^{-i}\tilde{f}_i(\varphi_n) \colon i > n\}| \leqslant \sum\{2^{-i} \colon i > n\} = 1/2^n$ (см. условие г)). Следовательно, $|\tilde{f}(\varphi_n)| \geqslant n + 1 - 1/2^n \geqslant n$. Это означает, что функция $\tilde{f}$ не ограничена на A, чего быть не может.

IV доказано.

Если положить $\gamma = \{\varnothing\}$, то $T_n = \nu X$, и мы получим

V. Пусть A — ограниченное в $C'_\lambda(X)$ множество. Тогда найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $V_\varepsilon(\nu X) = \{f \in C(X) \colon \|f\| < \varepsilon\} \subseteq A^0$, где A^0 — абсолютная поляра A.

Далее понадобится следующее утверждение.

VI. Пусть W — выпуклое множество в $C(X)$, $V_{\varepsilon_i}(T_i) \subseteq W$, $i \leqslant n$, где T_i — нуль-множество в X. Тогда $V_{\max\{\varepsilon_i\}}(\bigcap\{\bar{T}_i \colon i \leqslant n\}) \subseteq W$, где $\bar{T}_i = [T_i]_{\nu X}$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 9.

VII. Пусть $A \neq \varnothing$ — ограниченное подмножество $C'_\lambda(X)$. Положим $\mathfrak{F}(A) = \{T \colon T$ — нуль-множество в νX и $V_\delta(T) \subseteq A^0$ для некоторого $\delta > 0\}$. Тогда $\mathfrak{F}(A)$ — базис фильтра, обладающий следующими свойствами:

д) $F = \bigcap\{T \colon T \in \mathfrak{F}(A)\} \neq \varnothing$,

е) F является ограниченным в νX,

ж) $V_\varepsilon(F) \subseteq A^0$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Заметим, что $\mathfrak{F}(A) \neq \varnothing$ ($\nu X \in \mathfrak{F}(A)$ в силу утверждения V). Если найдётся конечный набор $\{T_i \in \mathfrak{F}(A)\}$ с пустым пересечением, то из условия $\|f|_\varnothing\| = 0$ и утверждения VI следует, что $f \in A^0$ для всякой функции из $C(X)$, что возможно только в случае $A = \varnothing$. Следовательно, $\mathfrak{F}(A)$ не содержит пустых множеств и центрированно в силу VI.

Докажем, что $F \neq \varnothing$. Для каждой точки $\varphi \in A$ зафиксируем такое множество $A_\varphi \in \lambda$, что $V_{\varepsilon(\varphi)}(A_\varphi) \subseteq \varphi^0$ для некоторого $\varepsilon(\varphi) > 0$. Ясно, что $V_{\varepsilon(\varphi)}(\bar{A}_\varphi) \subseteq \varphi^0$, где $\bar{A}_\varphi = [A_\varphi]_{\nu X}$. Предположим, что для некоторой точки $\varphi \in A$ найдётся такое множество $T \in \mathfrak{F}(A)$, что $T \cap \bar{A}_\varphi = \varnothing$. В силу компактности $\bar{A}_\varphi$ найдётся нуль-множество Φ, содержащее $\bar{A}_\varphi$ и не пересекающееся с T. Ясно, что $V_{\varepsilon(\varphi)}(\Phi) \subseteq \varphi^0$. Пусть $V_\delta(T) \subseteq A^0 \subseteq \varphi^0$. По утверждению VI $\varphi^0 \supseteq (S = V_{\max\{\delta,\varepsilon(\varphi)\}}(T \cap \Phi))$. Но $T \cap \Phi = \varnothing$ влечёт $S = C(\nu X)$, или $\varphi^0 = C(\nu X)$, что невозможно. Доказано, что семейство $\{T \cap \bar{A}_\varphi \colon T \in \mathfrak{F}(A)\}$ является базисом фильтра в $\bar{A}_\varphi$ для каждой точки $\varphi \in A$. Следовательно, $\bigcap\{T \cap \bar{A}_\varphi \colon T \in \mathfrak{F}(A)\} = F \cap \bar{A}_\varphi = F\varphi \neq \varnothing$. Установлено д).

Предположим, что F — неограниченное множество. Тогда найдётся такая дискретная последовательность $\gamma = \{H_n\}$ непустых функционально открытых в νX множеств, что $F \cap H_n \neq \varnothing$ для всех n. Ясно, что в такой ситуации применимо утверждение IV, из которого можно вывести, что $V_\varepsilon(T_n) \subseteq A^0$ для некоторых n и $\varepsilon > 0$ (где $T_n = \nu X \setminus \bigcup\{H_i \colon i \geqslant n\}$), т. е. $T_n \in \mathfrak{F}(A)$. Но $F \setminus T_n \neq \varnothing$, что невозможно. Установлено е).

Проверим ж). Пусть $T_0 \in \mathfrak{F}(A)$ произвольно выбрано и $V_\varepsilon(T_0) \subseteq A^0$. Пусть $f \in V_\varepsilon(F)$. Положим $\alpha = \|f|_F\|$ и $M = \{y \in \nu X \colon |f(y)| < \alpha + (\varepsilon - \alpha)/2\}$. Тогда $F \subseteq M$. Пусть $\varphi \in A$ и Z_φ — семейство всех нуль-множеств, содержащих $\bar{A}_\varphi$. Тогда найдутся такие множества $T_1 \in \mathfrak{F}(A)$ и $\Phi \in Z_\varphi$, что $(T_1 \cap \Phi) \subseteq M$. Действительно, $\bigcap\{T \cap \Phi \colon T \in \mathfrak{F}(A),\ \Phi \in Z_\varphi\} = F\varphi$, поэтому найдутся такие множества $T_1 \in \mathfrak{F}(A)$ и $\Phi_0 \in Z_\varphi$, что $T_1 \cap \Phi_0 \cap (\bar{A}_\varphi \setminus M) = \varnothing$ (в силу компактности $\bar{A}_\varphi \setminus M$). Замкнутое множество $K = (T_1 \cap \Phi_0) \setminus M$ не пересекается с компактным множеством $\bar{A}_\varphi$, поэтому найдётся множество $\Phi_1 \in Z_\varphi$, не пересекающееся с K. Множества T_1 и $\Phi = \Phi_0 \cap \Phi_1$ искомые. Положим $P = T_0 \cap T_1 \cap \Phi$. По утверждению VI $V_\varepsilon(P) \subseteq \varphi^0$. Но $\|f|_P\| \leqslant \alpha + (\varepsilon - \alpha)/2 < \varepsilon$, следовательно, $f \in V_\varepsilon(P) \subseteq \varphi^0$. Так как точка φ выбрана произвольно из A, то $f \in A^0$, и ж) установлено.

VII доказано.

VIII. $F = [\tilde{b}(A)]_{\nu X}$.

Пусть $\varphi \in A$ и $\tilde{b}(\varphi) \cap (\nu X \setminus F) \neq \varnothing$. Тогда найдётся такая функция $f \in C(X)$, что $\varphi(f) > 1$ и $f = 0$ на F. Но это противоречит свойству ж). Следовательно, $F \supseteq \tilde{b}(A)$.

Допустим, что $F \setminus [\tilde{b}(A)] \neq \varnothing$. Тогда найдётся нуль-множество S, содержащее $\tilde{b}(A)$ и не содержащее F. Пусть $f \in V_\varepsilon(S)$ и $\alpha = (\varepsilon - \|f|_S\|)/2$. Положим $T = \{x \colon |f(x)| \geqslant (\varepsilon - \alpha)\}$. Нуль-множества S и T не пересекаются, поэтому найдётся такая функция $h \in C(\nu X, [0,1])$, что $h|_T \equiv 0$, $h|_S \equiv 1$. Положим $g = fh$. Тогда $\|g\| \leqslant \varepsilon - \alpha < \varepsilon$, так что $g \in V_\varepsilon(F)$ и $|\varphi(g)| \leqslant 1$ для всякого $\varphi \in A$

(по свойству ж)). Но $g \equiv f$ на S, тем более $g \equiv f$ на всяком $\tilde{b}(\varphi)$, а это означает, что $\varphi(f) = \varphi(g)$ для всех $\varphi \in A$, так что $V_\varepsilon(S) \subseteq A^0$ и $S \in \mathfrak{F}(A)$ по определению $\mathfrak{F}(A)$. Тогда $F \subseteq S$, что противоречит строгому включению $(S \cap F) \subset F$.

VIII доказано.

Теорема 36. *Множество A является ограниченным в $C'_\lambda(X)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{b}(A)$ является ограниченным в νX и $V_\varepsilon(\tilde{b}(A)) \subseteq A^0$ для некоторого $\varepsilon = \varepsilon(A) > 0$.*

Доказательство. Необходимость следует из III, VII, VIII.

Пусть $\tilde{b}(A)$ является ограниченным и $V_\varepsilon(\tilde{b}(A)) \subseteq A^0$. Пусть $f \in C(X)$. Функция f ограничена на $\tilde{b}(A)$ некоторым числом k. При $g = \varepsilon(k+1)^{-1} f$ мы имеем $\|g|_{\tilde{b}(A)}\| < \varepsilon$, так что $|\varphi(g)| \leqslant 1$ для всех $\varphi \in A$, или $|\varphi(f)| \leqslant (k+1)/\varepsilon$ при $\varphi \in A$.

Теорема доказана.

На подмножествах $C'_\lambda(X)$ можно определить неотрицательную функцию в $\bar{R} = \mathbb{R} \cup \infty$, положив $|A| = \sup\{|\varphi(f)| \colon \varphi \in A,\ \|f|_{\tilde{b}(A)}\| \leqslant 1\}$. Тогда теорема 36 получит более компактную формулировку.

Теорема 37. *Множество A является ограниченным в $C'_\lambda(X)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{b}(A)$ является ограниченным и $|A| < \infty$.*

Переходим к описанию сильно ограниченных множеств.

Скажем, что множество $B \subseteq \nu X$:

а) является *сильно-λ-ограниченным*, или *обладает свойством* (sb), если всякая ограниченная в C_λ последовательность ограничена на B,

б) *обладает свойством* (ub), или является (ub)-*множеством*, если всякая сходящаяся к нулю последовательность в C_λ равномерно сходится к нулю на B.

Теорема 38. *Следующие предложения эквивалентны:*

α) множество $A \subseteq C'_\lambda(X)$ является сильно ограниченным,

β) $|A| < \infty$ и множество $\tilde{b}(A)$ обладает свойством (sb),

γ) $|A| < \infty$ и множество $\tilde{b}(A)$ обладает свойством (ub).

Доказательство. Пусть множество $\tilde{b}(A)$ не обладает свойством (ub). Это означает, что найдётся последовательность $\{f_n\}$, сходящаяся к нулю в $C_\lambda(X)$, но сходимость не является равномерной на множестве $\tilde{b}(A)$. Тогда можно предположить, что $\|f_n|_{\tilde{b}(A)}\| > \alpha$ для всех n и некоторого $\alpha > 0$. Последовательность $\sigma = \{V_n = \{x \colon |f_n(x)| > \alpha\} \colon n \in \omega^+\}$ обладает свойством

в) всякое $C \in \lambda$ пересекается только с конечным числом элементов σ.

Можно подобрать функции $h_n \in C(X)$ так, чтобы выполнялись свойства

г) $h_n = 0$ вне V_n,

д) $h_n(\varphi) \geqslant n$ для некоторого $\varphi \in A$.

Свойства в) и г) в совокупности гарантируют нам ограниченность последовательности $\{h_n\}$ в $C_\lambda(X)$. Тогда свойство д) говорит о неограниченности множества A в сильной топологии $C'_\lambda(X)$. Доказано $\alpha) \implies \gamma)$.

Пусть теперь последовательность $\{f_n\}$ ограничена в $C_\lambda(X)$, но не ограничена на $\tilde{b}(A)$. Можно предположить, что $\|f_n|_{\tilde{b}(A)}\| > n$. Последовательность $\{V_n = \{x\colon |f_n(x)| > n\}\}$ обладает вышеопределённым свойством в), так что любая последовательность $\{h_n\}$, обладающая свойством г), будет сходиться к нулю в $C_\lambda(X)$. Ясно, что среди таких последовательностей имеются не сходящиеся равномерно на $\tilde{b}(A)$. Этим доказано $\gamma) \implies \beta)$.

Пусть последовательность $\{f_n\}$ ограничена в $C_\lambda(X)$. Если выполняется условие β), то $\{f_n\}$ ограничена на $\tilde{b}(A)$ некоторым числом k. Тогда $\varepsilon_A > \|\varepsilon_A/k+1f_n|_{\tilde{b}(A)}\|$, так что $|\varphi(\varepsilon_A/(k+1)f_n)| \leqslant 1$, или $|\varphi(f_n)| \leqslant (k+1)/\varepsilon_A$ для всех $\varphi \in A$. Это означает, что A является сильно ограниченным.

Теорема доказана.

Описать аналогичным образом компактные подмножества $C'_\lambda(X)$ нельзя, ибо отображение $\tilde{b}$ не выделяет их из класса ограниченных множеств.

Напомним, что сильная топология β на $C(X)$ является топологией равномерной сходимости на семействе всех ограниченных подмножеств $C'_\lambda(X)$ (наделённого $C_\lambda(X)$-топологией).

Теорема 36 позволяет описать сильную топологию пространства $C_\lambda(X)$. Проще всего это получается в случае $\lambda \subseteq c$. Здесь $\tilde{b}(A)$ лежит в X, так что элементарным следствием теоремы 36 является

Теорема 39. *Пусть $\lambda \subseteq c$. Сильная топология пространства $C_\lambda(X)$ совпадает с топологией ограниченной сходимости на X. Другими словами, $C_{\lambda\beta}(X) = C_b(X)$, где $C_{\lambda\beta}(X) = C_\beta(X)$, b — семейство всех ограниченных подмножеств X.*

Отметим, что из теоремы 39 вытекает следствие 2 теоремы 20. Таким образом, теорема 39 объединяет два известных результата: классическую теорему Нахбина—Широты ($C_c(X)$ бочечно тогда и только тогда, когда всякое ограниченное подмножество X относительно компактно) и теорему А. В. Архангельского [5, добавление] (всякий линейный гомеоморфизм $\varphi\colon C_p(X) \to C_p(Y)$ является линейным гомеоморфизмом $C_b(X)$ на $C_b(Y)$).

Обозначим через sb множество всех сильно ограниченных подмножеств X.

Из теоремы 38 вытекает

Следствие. Пусть $\lambda \subseteq c$. Сильная топология второго сопряжённого к $C_\lambda(X)$ пространства порождает на $C(X)$ топологию равномерной сходимости на элементах sb.

Другими словами, $C_{\lambda\beta'}(X) = C_{sb}(X)$, где β' — след на $C(X)$ сильной топологии пространства $C''_\lambda(X)$.

Отсюда вытекает результат, вполне аналогичный теореме Нахбина—Широты.

Теорема 40. *Если $\lambda \subseteq c$, то $C_\lambda(X)$ квазибочечно тогда и только тогда, когда λ содержит все сильно λ-ограниченные подмножества X.*

В качестве приложения рассмотрим свойства пространства $L_p(X)$, сопряжённого к $C_p(X)$. Следствиями теоремы 36 являются следующие утверждения A—D.

A. *Множество B является сильно ограниченным в $L_p(X)$ тогда и только тогда, когда оно конечномерно.*

B. $C_p(X)$ *всегда квазибочечно* (см. [6]).

Оба утверждения справедливы в силу того, что всякое сильно p-ограниченное множество в X конечно.

Напомним некоторые определения (см., например, [2]).

Локально выпуклое пространство E называется полурефлексивным, если каноническое вложение $E \to E''$ сюръективно.

Топологией Макки называется такая максимальная топология τ на E, что $(E, \tau)' = E'$.

C. *Любой выпуклый компакт в $L_p(X)$ конечномерен.*

Это так, поскольку любой выпуклый компакт в $L_p(X)$ является сильно ограниченным.

D. *Эквивалентны следующие утверждения:*

d1) $L_p(X)$ *полурефлексивно,*

d2) $L_p(X)$ *квазиполно,*

d3) $C_p(X)$ *бочечно.*

Действительно, пространство полурефлексивно тогда и только тогда, когда сопряжённое к нему пространство бочечно в топологии Макки τ. Но $L'_p(X) = C_p(X)$ и $C_{p\tau}(X) = C_p(X)$ в силу B, откуда следует эквивалентность d1) и d3). d1) и d2) эквивалентны для любых локально выпуклых пространств.

E. *Эквивалентны следующие утверждения:*

e1) $L_p(X)$ — *пространство Макки,*

e2) $L_p(X)$ *полно,*

e3) X *конечно.*

Пусть X бесконечно. Выберем дизъюнктную последовательность $\{V_n\}$ открытых в X множеств и последовательность функций $\{f_n \in C(X, [0, 1])\}$, таких что $f_n \equiv 0$ вне V_n. Пусть $v = \Gamma(\{f_n\})$ — абсолютно выпуклая оболочка $\{f_n\}$. Докажем, что $v_0 = [v]_{C_p(X)}$ замкнуто в $\mathbb{R}^X$. Пусть $f \in [v]$. Тогда $f|_{V_n} = \lambda_n f_n$ для некоторых $\lambda_n \in \mathbb{R}$. Так как $v = \{\sum \mu_i f_{n(i)} \colon \sum |\mu_i| \leqslant 1\}$, то очевидно, что $\lambda_n \to 0$ и $f \in C(X)$. Из ограниченности v_0 и замкнутости его в $\mathbb{R}^X$ следует компактность. Итак, в $C_p(X)$ существует бесконечномерный абсолютно выпуклый компакт. Далее, последовательность $\{f_n\}$ сходится к нулю в $C_p(X)$ и является линейно независимой системой. Положив $\alpha(f_n) = 1$, мы можем продолжить α по линейности на $C_p(X)$. Ясно, что форма α разрывна. Так как $L_p(X)$ плотно в $C_p^+(X)$ — пространстве, алгебраически сопряжённом к $C_p(X)$, то $L_p(X)$ не может быть полным. Если же $L_p(X)$ — пространство Макки, то любой абсолютно выпуклый компакт в $C_p(X)$ равностепенно непрерывен относительно $L_p(X)$, а потому конечномерен, так как топология $L_p(X)$ есть топология поточечной сходимости на $C_p(X)$.

Этим всё доказано.

Таким образом, в $L_p(X)$ эквивалентны свойства квазибочечности, бочечности, борнологичности, ультраборнологичности и рефлексивности.

Можно доказать также следующее утверждение.

F. *Сильная топология β на $L_p(X)$ совпадает с сильнейшей локально выпуклой топологией.*

Пусть V — элемент сильнейшей топологии. Можно предположить, что $V = \Gamma\{V(x,\varepsilon(x))\colon x \in X\}$, где $V(x,\varepsilon(x)) = \{y = \lambda x\colon |\lambda| \leqslant \varepsilon(x) \leqslant 1\}$. Обозначим через M множество всех элементов $C(X)$, ограниченных в каждой точке $x \in X$ числом $\varepsilon(x)^{-1}$. Множество M является ограниченным в $C_p(X)$. Докажем, что $M^0 \subseteq V$. Действительно, пусть $\alpha = \sum \alpha_i x_i \in M^0$. Выберем функцию f из M так, чтобы выполнялось условие $f(x_i) = \operatorname{sign}\alpha_i \times \varepsilon(x_i)^{-1}$. Положив $\alpha^{-i} = \alpha_i\varepsilon(x_i)^{-1}$, мы можем записать $\alpha = \sum \alpha^{-i}\varepsilon(x_i)x_i$. Тогда $\tilde f(\alpha) = \sum \alpha^{-i}\operatorname{sign}\alpha_i = \sum |\alpha^{-i}| \leqslant 1$ (так как $\alpha \in M^0$, $f \in M$). Учитывая, что $\varepsilon(x_i)x_i \in V(x_i,\varepsilon(x_i))$, имеем $\alpha \in V$.

F доказано.

В качестве следствий из F имеем следующие утверждения.

G. $C_p''(X) = \mathbb{R}^X$.

H. $L_{p\beta}(X) = (L_p(X),\beta)$ *полно.*

Вышеизложенное показывает, что класс пространств $L_p(X)$ может служить источником разнообразных примеров. Вот некоторые из них.

I. *Пространство $L_p(X)$ ядерно, но сильно сопряжённое к $L_p(X)$, как правило, неядерно.*

J. *Если X — бесконечный дискрет, то*

j1) *$L_p(X)$ полурефлексивно, но нерефлексивно,*

j2) *$L_p(X)$ квазиполно, но неполно,*

j3) *$L_p(X)$ полуборнологическое, но не борнологическое пространство.*

В заключение отметим следующее.

Теорема 41. *Эквивалентны следующие утверждения:*

а) *$C_\lambda(X)$ σ-компактно,*

б) *$C_\lambda(X)$ σ-счётно компактно,*

в) *$C_\lambda(X)$ — пространство Гуревича,*

г) *X конечно.*

Теорема следует из того, что $C_\lambda(X)$ естественно уплотняется на $C_p(X)$, σ-(счётно) компактность и свойство Гуревича сохраняются при непрерывных отображениях и условия а)—г) эквивалентны в классе пространств $C_p(X)$.

4. Решётки λ-топологий

Этот раздел будет посвящён исследованию (упорядоченного по включению) множества всех λ-топологий на множестве X.

Топологию, порождённую семейством λ, будем обозначать через T_λ.

Положим $\mu \cdot \lambda = \mu \cap \lambda$ (μ и λ — два семейства). Через $\Lambda(X)$ будем обозначать семейство всех таких λ, что $[\tilde{\lambda}] = X$ (напомним, что $\tilde{\lambda} = \bigcup\{H \colon H \in \lambda\}$, $[T]$ — замыкание T); через $A\Lambda T(X)$ — семейство всех λ-топологий, $\lambda \in \Lambda(X)$. Семейство $A\Lambda T(X)$ можно разложить на классы $\Lambda_s T(X) = \{T_\lambda \colon \tilde{\lambda} = s\}$ по всюду плотным подмножествам X. Если $s = X$, то пишем $\Lambda T(X)$.

Из определений следует, что

1) T_b — наибольший элемент частично упорядоченного множества $A\Lambda T(X)$,

2) $T_{p\cdot\lambda}$ — наименьший элемент семейства $\Lambda_{\tilde{\lambda}} T(X)$,

3) $\tilde{\lambda}$ естественно вкладывается в сопряжённое к $C_\lambda(X)$ пространство $C'_\lambda(X)$ (всех непрерывных линейных форм на $C_\lambda(X)$, наделённое $(C'_\lambda(X), C_\lambda(X))$-топологией).

Топология T_λ порождает слабую топологию σT_λ и топологию Макки τT_λ. Первая из них является топологией поточечной сходимости на $C'_\lambda(X)$, вторая — максимальной топологией относительно свойства $(C(X), \tau T_\lambda)' = C'_\lambda(X)$. Введём обозначения $C_{\lambda\sigma}(X) = (C(X), \sigma T_\lambda)$, $C_{\lambda\tau}(X) = (C(X), \tau T_\lambda)$.

Известно, что топология σT_p совпадает с T_p (см., например, [1, 0.5]). Легко проверить, что $\sigma T_{p\cdot\lambda} = T_{p\cdot\lambda}$, поэтому справедлива формула $T_{p\cdot\lambda} \subseteq \sigma T_\lambda \subseteq T_\lambda$. Это означает, что существуют естественные уплотнения (биективные непрерывные отображения) $\omega_1 \colon C_{\lambda\sigma}(X) \to C_{p\cdot\lambda}(X)$ и $\omega_2 \colon C_\lambda(X) \to C_{\lambda\sigma}(X)$.

Первый вопрос, который нас интересует, — когда σT_λ является λ-топологией?

Для этого мы должны разобраться с определёнными выше уплотнениями. Что они из себя представляют? Когда они, например, являются гомеоморфизмами, т. е. когда непрерывны обратные отображения ω_1^{-1} и ω_2^{-1}?

Теорема 42. ω_1^{-1} *непрерывно тогда и только тогда, когда* $\lambda = p \cdot \lambda$.

Отсюда следует, что ω_1^{-1} редко бывает непрерывным. А секвенциально непрерывным?

Теорема 43. *Отображение* ω_1^{-1} *секвенциально непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно.*

Не будучи (как правило) секвенциально непрерывным глобально, отображение ω_1^{-1} хорошо ведёт себя локально. Точнее говоря, имеет место

Теорема 44. *Отображение* ω_1^{-1} *секвенциально непрерывно на каждом* λ*-ограниченном подмножестве* $C(X)$.

Из теоремы 44 вытекает следующий классический результат.

Следствие 1. Пусть X компактно. Последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится в банаховом пространстве $C(X)$ тогда и только тогда, когда она ограничена и сходится поточечно.

Напомним, что пространство X секвенциально, если в X замкнуты все множества, которые содержат пределы обычных последовательностей своих точек. На таких пространствах секвенциальная непрерывность отображений эквивалентна непрерывности, так что мы имеем

Следствие 2. $p \cdot \lambda$-топология и слабая λ-топология совпадают на всяком подмножестве $A \subseteq C(X)$, которое является λ-ограниченным и $p{\cdot}\lambda$-секвенциальным.

Переходим к отображению ω_2^{-1}.

Теорема 45. *$\sigma T_\lambda \in A\Lambda T(X)$ тогда и только тогда, когда $\lambda = p \cdot \lambda$.*

Следствие 1. Отображение ω_2^{-1} непрерывно тогда и только тогда, когда $\lambda = p \cdot \lambda$.

Заметим, что непрерывность ω_2^{-1} эквивалентна равенству $T_\lambda = \sigma T_\lambda$.

К ω_2^{-1} относится и такое

Следствие 2. Отображение $\omega_2^{-1}\colon C_{\lambda\sigma}(X) \to C_\lambda$ секвенциально непрерывно на каждом λ-ограниченном подмножестве $C(X)$ тогда и только тогда, когда $\lambda = p \cdot \lambda$.

Через $\sigma A\Lambda T(X)$ мы обозначим семейство всех слабых топологий, порождённых семейством $A\Lambda T(X)$.

Полученные результаты говорят о том, что $\sigma A\Lambda T(X) \neq A\Lambda T(X)$ и что $A\Lambda T(X) \cap \sigma A\Lambda T(X) = \{T_{p\cdot\lambda}\colon \lambda \in \Lambda(X)\}$.

Выписанные выше результаты можно свести в одну теорему.

Теорема 46. *Следующие утверждения эквивалентны:*

а) *отображение $\omega_1^{-1}\colon C_{p(\lambda)}(X) \to C_{\lambda\sigma}(X)$ непрерывно,*

б) *отображение ω_1^{-1} секвенциально непрерывно,*

в) $\sigma T_\lambda = T_{p\cdot\lambda}$,

г) $\sigma T_\lambda \in A\Lambda T(X)$,

д) *отображение $\omega_2^{-1}\colon C_{\lambda\sigma} \to C_\lambda(X)$ непрерывно,*

е) *отображение ω_2^{-1} секвенциально непрерывно на каждом λ-ограниченном подмножестве $C(X)$,*

ж) *отображение ω_2^{-1} секвенциально непрерывно,*

з) $\sigma T_\lambda = T_\lambda$,

и) $\lambda = p \cdot \lambda$.

Следующий вопрос, который мы разберём, заключается в изучении строения упорядоченного множества $A\Lambda T(X)$.

Всякое семейство $\mathcal{A} \subseteq A\Lambda T(X)$ порождает топологии $\inf \mathcal{A}$, $\inf_\lambda \mathcal{A}$, $\sup \mathcal{A}$, $\sup_\lambda \mathcal{A}$ — точные нижние и верхние грани семейства $\mathcal{A}$ в семействе $LCT(X)$ всех локально-выпуклых топологий на $C(X)$ и в семействе $A\Lambda T(X)$. Каковы взаимоотношения между ними?

Исследование по структурным вопросам даёт следующее.

Обозначим через $\operatorname{Inf} A\Lambda T(X)$ ($\operatorname{Inf} \Lambda_s T(X)$) совокупность нижних граней семейств из $A\Lambda T(X)$ ($\Lambda_s T(X)$).

1. Семейство σ всех слабых топологий, порождённых $A\Lambda T(X)$, не совпадает с $A\Lambda T(X)$, а в пересечении их лежит только топология поточечной сходимости.

2. То же самое справедливо и для семейства $\operatorname{Inf} A\Lambda T(X)$.

3. $\operatorname{Inf}\Lambda_s T(X) = \Lambda_s T(X)$ тогда и только тогда, когда X является μ-пространством.

4. Операции σ и $\inf$, σ и $\sup$ коммутируют, т. е. $\sigma\inf = \inf\sigma$, $\sigma\sup = \sup\sigma$.

Множество $LCT(X)$ является полной решёткой, т. е. замкнуто относительно взятия верхней и нижней граней любого своего подмножества. Семейство $A\Lambda T(X)$, вообще говоря, не является полной решёткой относительно того же порядка, таковыми являются его слои $\Lambda_s T(X)$, но, будучи вложенным в $LCT(X)$ (естественным образом), $\Lambda_s T(X)$ не обязано быть полной подрешёткой.

Операцию взятия точной нижней (верхней) грани в $LCT(X)$ будем обозначать через $\inf$ ($\sup$), а в $A\Lambda T(X)$ — через $\inf_\Lambda$ ($\sup_\Lambda$).

Теорема 47. *Пусть* $\mathcal{A} = \{T_\lambda\colon \lambda \in \Gamma \subseteq \Lambda(X)\}$. *Тогда* $\sup_\Lambda \mathcal{A} = T_{\bigcup\widetilde{\{\lambda\colon \lambda\in\Gamma\}}}$, *где* $\sim$ — *знак насыщения. Если* $\bigcap\{\lambda\colon \lambda \in \Gamma\} = \mu \in \Lambda(X)$, *то* $\inf_\Lambda \mathcal{A} = T_\mu$.

Нетрудно проверить, что $\sup_\Lambda \mathcal{A} = \sup\mathcal{A}$, но для $\inf$ подобная формула выполняется не всегда — даже для конечных $\mathcal{A}$. Пример будет дан ниже.

Напомним, что топологии T и T' на линейном пространстве E называются согласованными, если $(E,T)' = (E,T')'$, что эквивалентно совпадению слабых топологий. Через $s(\lambda)$ будем обозначать семейство всех локально выпуклых топологий на $C(X)$, согласованных с T_λ. В $s(\lambda)$ есть наибольший элемент (топология Макки τT_λ) и наименьший элемент (слабая топология σT_λ). Положим $\bar{s}(\lambda) = s(\lambda)\cap A\Lambda T(X)$. В классе $\bar{s}(\lambda)$ есть наибольший элемент (это $\sup_\Lambda \bar{s}(\lambda)$), но наименьший имеется не всегда.

Пример 5. $\inf\bar{s}(\lambda) \notin A\Lambda T(X)$.

В качестве искомого X можно взять пространство ω_1 всех счётных порядковых чисел в обычной интервальной топологии.

Как мы видели, $\operatorname{Inf} A\Lambda T(X)$ ($\operatorname{Inf}\Lambda_s T(X)$) строго содержит $\Lambda T(X)$ ($\Lambda_s T(X)$). Взаимоотношения Inf и σ определяет

Теорема 48. *Пусть* $\mathcal{A} \subseteq A\Lambda T(X)$. *Тогда* $\inf\mathcal{A} \in \sigma A\Lambda T(X)$ *в том и только том случае, когда* $\inf\mathcal{A} = T_{p\cdot\lambda}$ *для некоторого* $\lambda \in \Lambda(X)$.

Следствие. $\operatorname{Inf} A\Lambda T(X) \cap \sigma A\Lambda T(X) = \{T_{p\cdot\lambda}\colon \lambda \in \Lambda(X)\}$.

Вопрос 11. Когда $\inf\mathcal{A} \in A\Lambda T(X)$?

Посмотрим ситуацию на уровне классов $\operatorname{Inf}\Lambda_s T$.

Напомним, что X называется μ-пространством, если всякое ограниченное подмножество X относительно компактно.

Итак, пусть s плотно в X и $\lambda(s) = \{H \in \lambda\colon H \subseteq s\}$.

Теорема 49. $\operatorname{Inf}\Lambda_s T(X) = \Lambda_s T(X)$ *тогда и только тогда, когда* X *есть* μ*-пространство.*

В доказательстве используется следующая

Лемма 23. *Пусть* $\mathcal{A} = \{T_\lambda \colon \lambda \in \Gamma \subseteq \Lambda_s(X)\}$ *и* $\lambda \subseteq c$ *для всех* $\lambda \in \Gamma$. *Тогда* $\inf \mathcal{A} \in \Lambda_s T(X)$.

Лемма 23 необратима, что показывает следующий пример.

Пример 6. $\inf \bar{s}(\lambda) \in \Lambda T(X)$ при $\lambda \setminus c \neq \varnothing$.

В качестве X можно взять пространство $((\omega_1 + 1) \times (\omega_0 + 1)) \setminus (\omega_1, \omega_0)$, λ — насыщение семейства $p \cup \{V_\alpha = \{\alpha\} \times \omega_0 \colon \alpha \leqslant \omega_1\}$.

$\operatorname{Inf} A\Lambda T(X)$ — наименьшая полная подрешётка в $LCT(X)$, содержащая $A\Lambda T(X)$, её уместно назвать *структурным пополнением* $A\Lambda T(X)$. Что можно сказать о структурном пополнении $\sigma A\Lambda T(X)$? При его описании придётся учитывать обе операции — inf и sup. Напомним, что $\sigma\mathcal{A} = \{\sigma T \colon T \in \mathcal{A}\}$.

Теорема 50. $\sigma \inf \mathcal{A} = \inf \sigma\mathcal{A}$, *где* $\mathcal{A} \subseteq LCT(X)$.

Вопрос 12. Верна ли подобная формула для sup?

В частном случае справедлива

Теорема 51. *Если* $\mathcal{A} \subseteq A\Lambda T(X)$, *то* $\sigma \sup \mathcal{A} = \sup \sigma\mathcal{A}$.

Рассмотрим интервалы $\sigma_0(\lambda) = (T_{p(\lambda)}, \sigma T_\lambda)$ и $\sigma_1(\lambda) = (\sigma T_\lambda, \inf \bar{s}_\lambda)$. Имеет место

Теорема 52. $\sigma_0 \cap A\Lambda T(X) = \sigma_1 \cap \inf A\Lambda T(X) = \sigma_1 \cap \sigma A\Lambda T(X) = \varnothing$.

Заметим, что топология Макки τT_λ не обязана принадлежать $A\Lambda T(X)$. Примером может служить пространство $X = (\omega_2 + 1) \times (\omega_1 + 1) \setminus (\{\omega_2\} \times \omega_1)$, где в качестве λ берётся насыщение семейства $\{\{(\omega_2, \omega_1)\}, \omega_2 \times [0, \alpha] \colon \alpha \leqslant \omega_1\}$.

5. Проблемы полноты

Существует несколько естественных понятий полноты линейного топологического пространства. Такое пространство называется

а) *полным*, если оно полно в своей единственной равномерности;

б) *квазиполным*, если в нём полно всякое ограниченное замкнутое множество;

в) *полным по Чеху*, если оно имеет тип G_δ в некотором (а тогда в любом) компактном хаусдорфовом расширении;

г) *секвенциально полным*, если в нём всякая фундаментальная последовательность (= последовательность Коши) сходится.

В C_p-теории были получены следующие результаты (см. [1, I.3]).

A. $C_p(X)$ *полно тогда и только тогда, когда* X *дискретно.*

B. $C_p(X)$ *полно по Чеху тогда и только тогда, когда* X *счётно и дискретно.*

Переходим к пространствам $C_\lambda(X)$.

Определение 9. Скажем, что функция f *s-непрерывна на множестве* $A \subseteq X$, если найдётся такая функция $g \in C(X)$, что $f|_A = g|_A$.

Введённое понятие позволяет сформулировать следующий простой критерий (квази)полноты.

Предложение 1. *Эквивалентны следующие утверждения:*

а) $C_\lambda(X)$ *полно,*

б) $C_\lambda(X)$ *квазиполно,*

в) *всякая вещественная функция f, s-непрерывная на всех элементах $A \in \lambda$, непрерывна на X.*

Доказательство. Предположим, что $C_\lambda(X)$ квазиполно, функция f s-непрерывна, $A \in \lambda$. Пусть $x \in X$ — произвольная точка, $n > |f(x)|$. Положим $f_n = \min\{\max\{f, -n\}, n\}$. Тогда $\|f_n\| \leqslant n$. Ограниченное множество $P = \{g \in C(X) \colon \|g\| \leqslant n\}$ полно по условию, семейство $\mathcal{F} = \{H_A = \{g_A = f_n|_A\} \colon A \in \lambda\}$ является базисом фильтра Коши в P, следовательно, $\mathcal{F}$ сходится в P. Ясно, что пределом $\mathcal{F}$ будет функция f_n, так что $f_n \in C(X)$. Положим $V = \{y \colon f_n(y) < n\}$. Тогда V открыто в X, $x \in V$, а так как $V = \{y \colon f(y) < n\}$, то f непрерывна в точке x. Доказано, что $f \in C(X)$.

Пусть теперь любая функция f, s-непрерывная на элементах λ, непрерывна на X.

Пусть $\mathcal{F}$ — фильтр Коши в $C_\lambda(X)$. Тогда $\mathcal{F}$ λ-сходится к некоторой функции $f \in \mathbb{R}^X$. Пусть множество $A \in \lambda$ произвольно. Найдётся такая функция $f_1 \in C(X)$, что $\|(f - f_1)|_A\| < 1/4$. Далее, найдётся такая функция $f_2' \in C(X)$, что $\|(f - f_2')|_A\| < 1/8$. Тогда $\alpha = \|(f_1 - f_2')|_A\| < 1/8 + 1/4 < 1/2$. Положим $H = \{x \colon |f_1(x) - f_2'(x)| \geqslant 1/2\}$ и $W = \{x \colon |f_1(x) - f_2'(x)| \geqslant \alpha + (1/2 - \alpha)/2\}$. По лемме 7 найдётся такая функция $h \in C(X)$, что $|h(x)| < |f_1(x) - f_2'(x)|$ при $x \in X$, $h|_H = 0$, $h|_{X \setminus W} = (f_1 - f_2')|_{X \setminus W}$. Положим $f_2 = f_1 - h$. Тогда $f_1|_A = f_2'|_A$, но $|f_1(x) - f_2(x)| = |h(x)| < 1/2$, так что $\|f_1 - f_2\| \leqslant 1/2$. По индукции можно построить такую последовательность $\{f_n\}$ в $C(X)$, что $\|f_n - f_{n+1}\| \leqslant 1/2^n$ и $\|(f_n - f)|_A\| < 1/2^{n+1}$. Если g — равномерный предел этой последовательности, то $g \in C(X)$ и $g|_A = f|_A$. Таким образом, функция f s-непрерывна на A, следовательно, непрерывна на X и $f = \lim \mathcal{F}$. Пространство $C_\lambda(X)$ полно.

Предложение доказано.

Существенно сложнее обстоит дело с секвенциальной полнотой.

Говорят, что множество A *функционально вписано* в множество B, если существует такое непрерывное отображение $f \colon X \to [0,1]$, что $f(A) = 0$, $f(X \setminus B) = 1$. Мы будет записывать это формулой $A \ll B$.

Будем говорить, что последовательность $\{A_n\}$ функционально вписана в последовательность $\{B_n\}$, если $A_n \ll B_n$ для каждого n.

Конкретно в $C_\lambda(X)$ фундаментальная последовательность $\{f_n\}$ определяется следующим свойством: $\{f_n|_A\}$ — последовательность Коши в топологии равномерной сходимости на A для всякого $A \in \lambda$. Отсюда следует, что всякая фундаментальная последовательность $\{f_n\}$ в $C_p(X)$ сходится к некоторой функции f равномерно на элементах λ и секвенциальная полнота $C_\lambda(X)$ полностью зависит от непрерывности этой предельной функции f на X.

Рассмотрим сначала свойства, которые можно вывести из секвенциальной полноты.

Наиболее простым из них кажется следующее.

(S1) Пусть последовательность $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ нуль-множеств функционально вписана в последовательность $\gamma = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ открытых множеств и каждое $A \in \lambda$ пересекается лишь с конечным числом элементов γ. Тогда $[\bigcup\{W_n : n \in \mathbb{N}\}] \subseteq \bigcup\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Предложение 2. *Если $C_\lambda(X)$ секвенциально полно, то выполняется условие* (S1).

Здесь и ниже нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 24. *Пусть $W = \bigcup\{\bar{W}_n : n \in \mathbb{N}\}$, где $W_n \ll W_{n+1} \ll W$, и $0 = \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ — возрастающая последовательность чисел, сходящаяся к* 1. *Тогда найдётся такая функция $f \in C(X, [0,1])$, что $x \in W_{n+1} \setminus W_n$ влечёт $f(x) \in [\lambda_n, \lambda_{n+1}]$.*

Доказательство. Функцию $f_1 \in C(X, [0, \lambda_2])$ выбираем так, чтобы выполнялись следующие условия: $f_1|_{W_1} = 0$, $f_1|_{X \setminus W_2} = \lambda_2$. При $n > 1$ выбираем функцию $f_n \in C(X, [1, \lambda_{n+1}/\lambda_n])$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $f_n|_{W_n} = 1$,

2) $f_n|_{X \setminus W_{n+1}} = \lambda_{n+1}/\lambda_n$.

Положим $f = \prod\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ (т. е. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$, где $g_n = \prod\limits_{i=1}^{n} f_i$).

Пусть $x \in W_{n+1} \setminus W_n$, $n > 1$. Тогда $f_n(x) \in [1, \lambda_{n+1}/\lambda_n]$. Если $i < n$, то $f_1(x) = \lambda_2$, $f_i(x) = \lambda_{i+1}/\lambda_i$ (в силу условия 2)); если $i > n$, то $f_i(x) = 1$ (в силу 1)), откуда следует $f(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x) = \lambda_2 \cdot (\lambda_3/\lambda_2) \cdots (\lambda_n/\lambda_{n-1}) f_n(x) = \lambda_n f_n(x) \in [\lambda_n, \lambda_{n+1}]$.

Докажем, что $f \in C(X)$. Ясно, что $f|_{X\setminus W} = 1$. Далее, $f|_{W_{n+1}} = \prod\{f_i : i \leqslant n\}|_{W_{n+1}}$, что следует из 1), так что f непрерывна в точках $\langle W_{n+1} \rangle$, в частности в точках $\bar{W}_n$. Но тогда f непрерывна в точках $W = \bigcup W_n$.

Пусть $x \notin W$, $1 > \delta > 0$. По δ найдётся такое n, что $\lambda_n > 1 - \delta > 0$. Положим $T = X \setminus \bar{W}_n$. Если $y \in T$, то $f(y) \geqslant \lambda_n$, следовательно, $|f(x) - f(y)| = |1 - f_y| \leqslant 1 - \lambda_n < \delta$.

Доказано, что функция f непрерывна в точке x.

Лемма доказана.

Используя лемму, мы можем доказать формально более сильное свойство, чем (S1).

(S2) Пусть последовательность $\sigma = \{V_n\}$ открытых в X множеств такова, что $V_n = \bigcup\{\bar{V}_n^i : i \in \mathbb{N}\}$, где V_n^i открыты и $V_n^i \ll V_n^{i+1} \ll V_n$. Пусть каждое $A \in \lambda$ пересекается лишь с конечным числом элементов семейства $\gamma^i = \{V_n^i : n \in \mathbb{N}\}$. Тогда $\overline{\bigcup \gamma^i} \ll \bigcup \sigma$.

Пусть $C_\lambda(X)$ секвенциально полно и семейство $\{V_n, V_n^i\}$ удовлетворяет посылкам условия (S2). В соответствии с леммой 24 построим функцию

$f_1 \in C(X,[0,1])$ при $\lambda^1_n = 1 - 2^{-n}$, $W_1 = V_1$ и $W_{1n} = V_1^n$. Далее построение ведём по рекурсии. Для $i > 1$ выбираем функцию $f_i \in C(X,[0,1])$ в соответствии с леммой 24 для последовательностей $\{\lambda^i_j\}$ и $\{W_{ij}\}$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $\lambda^i_1 = 2^{-i}$;

2) $\lambda^i_{2k} = \lambda^{i-1}_k$;

3) $\lambda^i_{2k+1} = 2^{-1}(\lambda^{i-1}_k + \lambda^{i-1}_{k+1})$;

4) $W_{i,2k-1} = W_{i-1,k} \cup \tilde{W}_{i,2k-1}$;

5) $W_{i,2k} = \tilde{W}_{i,2k} \cup \{x\colon f_{i-1}(x) < \lambda^i_{2k-1}\}$;

6) $W_i = \bigcup\{V_j : j \leqslant i\}$.

Кроме того, при $k \geqslant 1$ должны соблюдаться условия

7) $\tilde{W}_{i,2^{i-1}(k-1)+1} = V^k_i$;

8) $\tilde{W}_{is} \ll \tilde{W}_{i,s+1}$.

Ясно, что $W_i = \bigcup\{W_{i,j} : j \in \mathbb{N}\}$.

Полагая $\lambda^i_0 = 0$, мы можем записать следующие формулы.

9) $\lambda^i_{2m+1} - \lambda^i_{2m} = 2^{-1}(\lambda^{i-1}_{m+1} - \lambda^{i-1}_m)$; $\lambda^i_{2m} - \lambda^i_{2m-1} = \lambda^i_{2m-1} - \lambda^i_{2m-2} = 2^{-1}(\lambda^{i-1}_m - \lambda^{i-1}_{m-1})$.

Действительно, используя 2) и 3), мы имеем $\lambda^i_{2m+1} - \lambda^i_{2m} = 2^{-1}(\lambda^{i-1}_m + \lambda^{i-1}_{m+1}) - \lambda^{i-1}_m = 2^{-1}(\lambda^{i-1}_{m+1} - \lambda^{i-1}_m)$. Далее, положив $s = m-1$, получаем $\lambda^i_{2m} - \lambda^i_{2s+1} = \lambda^{i-1}_m - 2^{-1}(\lambda^{i-1}_s + \lambda^{i-1}_{s+1}) = \lambda^{i-1}_m - 2^{-1}(\lambda^{i-1}_{m-1} + \lambda^{i-1}_m) = 2^{-1}(\lambda^{i-1}_m - \lambda^{i-1}_{m-1})$. Аналогично, $\lambda^i_{2m-1} - \lambda^i_{2m-2} = \lambda^i_{2s+1} - \lambda^i_{2s} = 2^1(\lambda^{i-1}_s + \lambda^{i-1}_{s+1}) - \lambda^{i-1}_s = 2^{-1}(\lambda^{i-1}_{s+1} - \lambda^{i-1}_s) = 2^{-1}(\lambda^{i-1}_m - \lambda^{i-1}_{m-1})$.

Из 9) можно вывести

10) $\lambda^i_k - \lambda^i_{k-1} \leqslant \lambda^i_{k-1} - \lambda^i_{k-2}$.

Действительно, $\lambda^1_k - \lambda^1_{k-1} = 1 - 2^{-k} - 1 + 2^{-k+1} = 2^{-k} < 2^{-k+1} = \lambda^1_{k-1} - \lambda^1_{k-2}$. Далее рассуждаем по индукции. Из 9) следует, что из i-уровня мы можем перейти в $(i-1)$-уровень и в последнем использовать предположение индукции.

Кроме того, справедливы следующие формулы.

11) $k > 2^{i-1} \implies \lambda^i_k - \lambda^i_{k-1} \leqslant 2^{-(i+1)}$.

Действительно, при $i = 1$ получается $k > 1$, $\lambda^1_k - \lambda^1_{k-1} \leqslant \lambda^1_2 - \lambda^1_1 = 2^{-2} = 2^{-i-1}$. Далее рассуждаем по индукции. Пусть $k = 2m+1$. Тогда $\lambda^i_k - \lambda^i_{k-1} = 2^{-1}(\lambda^{i-1}_{m+1} - \lambda^{i-1}_m)$. Дано $2m+1 > 2^{i-1}$. Тогда $2m > 2^{i-1} - 1$, $m > 2^{i-2} - 2^{-1}$, $m+1 > 2^{i-2} + 2^{-1} > 2^{i-2}$. По предположению индукции $\lambda^{i-1}_{m+1} - \lambda^{i-1}_m \leqslant 2^{-i}$. Тогда $\lambda^i_k - \lambda^i_{k-1} \leqslant 2^{-1}2^{-i} = 2^{-i-1}$.

Пусть $k = 2m$. Тогда $\lambda^i_k - \lambda^i_{k-1} = 2^{-1}(\lambda^{i-1}_m - \lambda^{i-1}_{m-1})$. Мы имеем $2m > 2^{i-1}$, откуда $m > 2^{i-2}$, используя предположение индукции, получаем $\lambda^i_k - \lambda^i_{k-1} \leqslant 2^{-i-1}$. Свойство 11) доказано.

12) $k \leqslant 2^{i-1} \implies \lambda^i_k - \lambda^i_{k-1} \leqslant 2^{-i}$.

Проводим аналогичные рассуждения, учитывая формулу 11) и тот факт, что $\lambda^1_1 - \lambda^1_0 = 2^{-1}$.

Докажем, что $\{f_n\}$ — последовательность Коши.

Пусть $A \in \lambda$, $\delta > 0$. Найдётся k, для которого выполнено условие $2^{-k} < \delta/4$. Найдётся такое m, что $A \cap V_n^k = \varnothing$ для всех $n \geqslant m$ и $2^{-(m-2)} < \delta$. Рассмотрим функцию f_{m+t}, где t произвольно. Пусть $x \in A$. Допустим, что выполняется формула $x \in W_m$.

В этом случае найдётся такое s, что $x \in W_{m,s} \setminus W_{m,s-1}$. Рассмотрим вариант

а) $s < 2^{m-1}(k-1) + 1$.

Пусть $s \geqslant 2$. Из 4) следует, что $W_{m+1,2s-3} = \tilde{W}_{m+1,2s-3} \cup W_{m,s-1}$. Предположим, что $W_{m+i-1,2^{i-1}(s-2)+1} = W_{m,s-1} \cup \ldots \cup \tilde{W}_{m+j,2^j(s-2)+1} \cup \ldots \cup \tilde{W}_{m+i-1,2^{i-1}(s-2)+1}$. Заметим, что $2^i(s-2)+1 = 2(2^{i-1}(s-2))+1 = 2(2^{i-1}(s-2)+1)-1$. Снова используя 4), будем иметь $W_{m+i,2^i(s-2)+1} = \tilde{W}_{m+i,2^i(s-2)+1} \cup W_{m+i-1,2^{i-1}(s-2)+1} = W_{m,s-1} \cup \ldots \cup \tilde{W}_{m+i-1,2^{i-1}(s-2)+1} \cup \tilde{W}_{m+i,2^i(s-2)+1}$. В силу 7) $\tilde{W}_{m+i,2^{m+i-1}(k-1)+1} = V_{m+i}^k$. Далее, $2^i(s-2)+1 < 2^i(2^{m-1}(k-1)+1-2)+1 = 2^{i+m-1}(k-1)+2^i-2^{i+1}+1 = 1+2^{m+i-1}(k-1)-2^i \leqslant 1+2^{m+i-1}(k-1)$. Учитывая формулу 8) и тот факт, что $x \notin V_{m+i}^k \supseteq \tilde{W}_{m+i,2^i(s-2)+1}$, получаем $x \notin W_{m+i,2^i(s-2)+1}$.

С другой стороны, $x \in W_{m,s} = W_{m,2^0(s-1)+1}$, и мы можем доказать справедливость

13) $W_{m+i,2^i(q-1)+1} = W_{m,q} \cup \ldots \cup \tilde{W}_{m+i,2^i(q-1)+1}$.

Предположим, что $W_{m+i-1,2^{i-1}(q-1)+1} = W_{m,q} \cup \tilde{W}_{m+1,2q-1} \cup \ldots \cup \tilde{W}_{m+i-1,2^{i-1}(q-1)+1}$. Тогда $W_{m+i,2^i(q-1)+1} = W_{m+i-1,2^{i-1}(q-1)+1} \cup \tilde{W}_{m+i,2^i(q-1)+1}$ (ибо $2^i(q-1)+1 = 2(2^{i-1}(q-1))+2-1 = 2((2^{i-1}(q-1)+1)-1)$. Подставляя в последнюю формулу значение $W_{m+i-1,2^{i-1}(q-1)+1}$, получим искомую формулу 13).

Учитывая всё вышеизложенное, мы получим, что для всякого i справедливо

14) $x \in W_{m,s} \setminus W_{m,s-1} \implies x \in W_{m+i,2^i(s-1)+1} \setminus W_{m+i,2^i(s-2)+1}$.

Пусть теперь $x \in W_{m+i,l} \setminus W_{m+i,l-1}$ (где $l \geqslant 2^i(s-2)+1$). Из 14) следует, что $x \in W_{m+i+1,2(l-1)+1} \setminus W_{m+i+1,2(l-2)+1} = W_{m+i+1,2l-1} \setminus W_{m+i+1,2l-3}$. По 10) $\lambda_{2l-1}^{m+i+1} - \lambda_{2l-2}^{m+i+1} \leqslant \lambda_{2l-2}^{m+i+1} - \lambda_{2l-3}^{m+i+1}$, так что достаточно рассмотреть случай $x \in W_{m+i+1,2l-2} \setminus W_{m+i+1,2l-3}$.

По определению f_{m+i+1} мы имеем $\lambda_{2l-3}^{m+i+1} \leqslant f_{m+i+1}(x) \leqslant \lambda_{2l-2}^{m+i+1}$. В силу 2) $\lambda_{2l-2}^{m+i+1} = \lambda_{l-1}^{m+i}$. Так как $\lambda_{2l-3)}^{m+i+1} = \lambda_{2(l-1)+1}^{m+i+1}$, то в силу 3) $\lambda_{2l-3}^{m+i+1} = 2^{-1}(\lambda_{l-2}^{m+i} + \lambda_{l-1}^{m+i})$. С другой стороны, $\lambda_{l-1}^{m+i} \leqslant f_{m+i}(x) \leqslant \lambda_l^{m+i}$, откуда $|f_{m+i+1}(x) - f_{m+i}(x)| \leqslant \lambda_l^{m+i} - 2^{-1}(\lambda_{l-2}^{m+i} + \lambda_{l-1}^{m+i}) \leqslant (\lambda_l^{m+i} - \lambda_{l-1}^{m+1}) + (\lambda_{l-1}^{m+i} - \lambda_{l-2}^{m+i})$. Но в силу 11) и 12) $\lambda_p^{m+i} - \lambda_{p-1}^{m+i} \leqslant 2^{-m-1}$, так что $|f_{m+i+1}(x) - f_{m+1}(x)| \leqslant 2^{-(m+i-1)}$. Тогда $|f_m(x) - f_{m+t}(x)| \leqslant |f_m(x) - f_{m+1}(x)| + \ldots + |f_{m+t-1}(x) - f_{m+t}(x)| \leqslant 2^{-(m-1)} + \ldots + 2^{-(m-2)} < \delta$.

Пусть $s = 1$. Тогда $x \in W_{m,1}$ и $f_m(x) = 0$. Из 4) следует, что $W_{m+1,1} = \tilde{W}_{m+1,1} \cup W_{m,1}$, так что $x \in W_{m+1,1}$ и по индукции $x \in W_{m+t,1}$, откуда мы имеем $f_{m+t}(x) = 0$. Здесь всё ясно.

Рассмотрим вариант

б) $s \geqslant 1 + 2^{m-1}(k-1)$.

Здесь $f_m(x) \geqslant \lambda^m_{s-1} \geqslant \lambda^m_{2^{m-1}(k-1)} = \lambda^1_{k-1} = 1 - 2^{-(k-1)}$ (мы многократно использовали формулу 2)).

С другой стороны, из 13) следует, что $W_{m+i,2^i(2^{m-1}(k-1)-1)+1} = W_{m,2^{m-1}(k-1)} \cup \ldots \cup \tilde{W}_{m+i,2^i(2^{m-1}(k-1)-1)+1}$. Учтём, что $V^k_{m+i} = \tilde{W}_{m+i,2^{m+i-1}(k-1)+1}$ (формула 7)) и $2^i(2^{m-1}(k-1)-2^i \leqslant 2^{m+i-1}(k-1)$, получим $x \notin W_{m+i,2^i(2^{m-1}(k-1)-1)+1}$ (ибо $x \notin V^k_{m+i}$ и выполняется формула 8)). Тогда $f_{m+i}(x) \geqslant \lambda^{m+i}_{2^{m+i-1}(k-1)-2^i+1} \geqslant \lambda^{m+i}_{2^{m+i-1}(k-1)-2^{m+i-1}} = \lambda^{m+i}_{2^{m+i-1}(k-2)} = \lambda^1_{k-2} = 1 - 2^{-(k-2)}$. В итоге мы имеем $|f_m(x) - f_{m+t}(x)| \leqslant 2^{-(k-2)} < \delta$.

Доказано, что $\{f_n\}$ — последовательность Коши. Тогда она сходится к некоторой функции $f \in C(X)$ равномерно на элементах λ.

Пусть $x \in \bigcup\{V^k_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Тогда найдётся такое m, что $x \in V^k_m$. По 7) $V^k_m = \tilde{W}_{m,1+2^{m-1}(k-1)}$. Используя 4), имеем $x \in W_{m,1+2^{m-1}(k-1)}$. Предположим, что $x \in W_{m,q} \setminus W_{m,q-1}$. Ясно, что $q \leqslant 1 + 2^{m-1}(k-1)$. Из 14) следует, что $x \in W_{m+i,2^i(q-1)+1}$. Тем более $x \in W_{m+i,2^i(1+2^{m-1}(k-1)-1)+1} = W_{m+i,2^{m+i-1}(k-1)+1}$. Из определения f_{m+i} следует, что $f_{m+i}(x) \leqslant \lambda^{m+i}_{2^{m+i-1}(k-1)+1}$. Предположим, что $\lambda^i_{1+2^{i-1}(k-1)} \leqslant \lambda^1_k$. Тогда по 3) $\lambda^{i+1}_{1+2^i(k-1)} = \lambda^{i+1}_{2(2^{i-1}(k-1)+1} = 2^{-1}(\lambda^i_{2^{i-1}(k-1)} + \lambda^i_{1+2^{i-1}(k-1)}) \leqslant \lambda^i_{2^{i-1}(k-1)+1} \leqslant \lambda^1_k$. Итак, $f_{m+i}(x) \leqslant \lambda^1_k$, а следовательно, $f(x) \leqslant \lambda^1_k$ для всякой точки $x \in \bigcup \gamma^k$. Если же $x \notin \bigcup \sigma$, то, очевидно, $f(x) = 1$. Отсюда следует, что $\overline{\bigcup \gamma^k} \ll \bigcup \sigma$.

Все доказано.

К сожалению, доказать достаточность условия (S1) удалось только в самом простом случае $\lambda = p$. Здесь условие (S1) можно переписать в следующей форме.

(S3) Если последовательность $\{W_n\}$ нуль-множеств пространства X функционально вписана в точечно конечную последовательность $\{V_n\}$ открытых в X множеств, то $[\bigcup\{W_n \colon n \in \mathbb{N}\}] \subseteq \bigcup\{V_n \colon n \in \mathbb{N}\}$.

Напомним, что семейство γ называется *точечно конечным*, если каждая точка содержится не более чем в конечном числе элементов γ.

Доказательство достаточности. Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в $C_p(X)$. Для каждой точки $x \in X$ последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна, потому сходится к некоторой точке $f(x)$. Остаётся показать, что функция f непрерывна.

Предположим противное. Тогда найдутся такие точка x, число $\varepsilon > 0$ и множества A, что

1) $x \in [A]$,

2) для каждой точки $y \in A$ выполняется $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$.

Без потери общности можно предположить, что

3) $f(x) - f(y) \geqslant \varepsilon$,

4) $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 1/4\varepsilon$.

Положив $a = f(x) - \varepsilon$, получим $f(y) \leqslant a$ для всех y. Положим $\Psi_n = \{z \colon f(z) \leqslant a + 1/4\varepsilon\}$ и $W_n = \{z \colon f(z) \leqslant a + 1/2\varepsilon\}$. В силу наших предположений

5) $x \notin W_n$ для всех n.

Для каждого n построим множества F_n, V_n^0, V_n^1, $\tilde{V}_n^1$, V_n^2 и $\tilde{V}_n^2, U_n^k$ $(k \in \mathbb{N})$, для которых выполнены условия

6) F_n, $\tilde{V}_n^1$, $\tilde{V}_n^2$ — нуль-множества, V_n^s $(s = 1, 2)$, U_n^k $(k \in \mathbb{N})$ — конуль-множества,

7) $F_n \ll U_n^k \subseteq [U_n^k] \ll V_n^2 \subseteq \tilde{V}_n^2 \ll V_n^1 \subseteq \tilde{V}_n^1 \ll V_n^0$, $k \in \mathbb{N}$,

8) $V_n^2 = \bigcup\{[U_n^k] \colon k \in \mathbb{N}\}$,

9) $V_n^0 = \bigcup\{W_s \colon s \leqslant n\} \setminus \bigcup\{[U_s^k] \colon k < n,\ s < n\}$,

10) $F_n = (\Psi_n \cup \bigcup\{\tilde{V}_s^1 \colon s < n\}) \setminus \bigcup\{V_s^2 \colon s < n\}$.

Для начала положим $F_1 = \Psi_1$, $V_1^0 = W_1$, $V_1^1 = \{z \colon f_1(z) < a + 0{,}4\varepsilon\}$, $\tilde{V}_1^1 = \{z \colon f_1(z) \leqslant a + 0{,}4\varepsilon\}$, $V_1^2 = \{z \colon f_1(z) < a + 0{,}3\varepsilon\}$, $\tilde{V}_1^2 = \{z \colon f_1(z) \leqslant a + 0{,}3\varepsilon\}$, $U_1^k = \{z \colon f_1(z) < a + (0{,}3 - 0{,}001k^{-1})\varepsilon\}$. Далее по индукции. Для n определяем V_n^0 по формуле 9), F_n по формуле 10). Заметим, что $\Psi_n \cup \bigcup\{\tilde{V}_s^1 \colon s < n\}$ и $X \setminus \bigcup\{V_s^2 \colon s < n\}$ есть нуль-множества (первое как объединение конечного числа нуль-множеств, второе как дополнение до конуль-множества). Тогда F_n — нуль-множество как пересечение двух нуль-множеств.

Далее, $\Psi_n \ll W_n$ и $\tilde{V}_n^1 \ll W_s$ $(s < n)$, откуда следует, что $F_n \ll \bigcup\{W_s \colon s \leqslant n\}$. Из формулы $U_s^k \ll V_s^2$ следует, что $[\bigcup\{U^k s \colon s < n,\ k < n\}] \ll \bigcup\{V_s^2 \colon s < n\}$. Сопоставляя два последних факта, получаем, что $F_n \ll V_n^0$. Теперь нетрудно построить остальные множества с выполнением условий 6), 7) и 8).

Положим $U_s = V_s^1$. Семейство $\{U_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ точечно конечно. Действительно, пусть $x \in U_s$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$.

Если $z \in V_t^2$ для некоторого $t \leqslant s$, то $z \in [U_t^k]$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ по условию 8). Тогда $z \notin V_m^0$ при $m \geqslant \max\{s, k\}$ по условию 9) и $z \notin U_m$ в силу 7) и определения U_m.

Если $z \notin V_t^2$ при $t \leqslant s$, то из того, что $z \in \tilde{V}_s^1$ и выполняется условие 10), следует, что $z \in F_{s+1}$. Тогда $z \in U_{s+1}^1$ (по условию 7)) и $z \notin V_m^0$ при $m > s + 1$ (условие 9)), так что $z \notin U_m$ при $m > s + 1$.

Доказано, что семейство $\{U_n\}$ точечно конечно.

Заметим, что из условия 10) вытекает формула $\Psi_n \subseteq F_n \cup \bigcup\{V_s^2 \colon s < n\} \subseteq F_n \cup \bigcup\{V_s^2 \colon s \in \mathbb{N}\}$, а так как $F_n \subseteq V_n^2$ (условие 7)), то $\Psi_n \subseteq \bigcup\{V_s^2 \colon s \in \mathbb{N}\}$. Далее, $\tilde{V}_n^2 \ll V_n^1 = U_n$ (условие 7)). Докажем, что формула $[\bigcup\{\tilde{V}_n^2 \colon n \in \mathbb{N}\}] \subseteq \bigcup\{U_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ не выполняется.

По условиям 5) и 9) $x \notin \bigcup\{U_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Далее, $x \in [\bigcup\{\tilde{V}_n^2 \colon n \in \mathbb{N}\}]$. Если предположить противное, то множество $B = X \setminus [[\bigcup\{\tilde{V}_n^2 \colon n \in \mathbb{N}\}]$ будет окрестностью точки x. Из 1) следует, что найдётся точка $y \in B \cap A$. Для неё $f(y) \leqslant a$ (условие 2)). Так как $\{f_n(y)\} \to f(y)$, то $|f(y) - f_s(y)| < 1/4\varepsilon$ для некоторого s. Последнее означает, что $y \in \Psi_s$. Из 10) следует, что либо $y \in V_t^2$ для некоторого $t < s$, либо $y \in F_s$. Но если $y \in F_s$, то $y \in V_s^2$, так что обязательно $y \in \bigcup\{V_n^2 \colon n \in \mathbb{N}\}$, что противоречит первоначальному предположению.

Доказано, что (S3) не выполняется.

Итак, нами доказана

Теорема 53. *Пространство $C_p(X)$ секвенциально сепарабельно тогда и только тогда, когда выполняется* (S3).

Выведем простые следствия.

Так как, очевидно, топологическая сумма пространств, удовлетворяющих (S3), удовлетворяет (S3), получается

Следствие 1. Пространство $\prod\{C_p(X_\alpha)\colon \alpha \in A\}$ секвенциально полно тогда и только тогда, когда $C_p(X_\alpha)$ секвенциально полно для каждого $\alpha \in A$.

Свойство (S3) сохраняется факторными отображениями (что очевидно), так что мы имеем

Следствие 2. Если $C_p(X)$ секвенциально полно, а Y — некоторое фактор-пространство X, то $C_p(Y)$ секвенциально полно.

Выведем из теоремы 28 следующий известный критерий (полученный ранее с помощью аналитических методов).

Теорема 54 ([16]). *Пространство $C_p(X)$ секвенциально полно тогда и только тогда, когда всякое G_δ-множество открыто в X.*

Точку $x \in X$ называют P-точкой в X, если пересечение счётного семейства окрестностей этой точки содержит окрестность этой же точки. Пространство X, которое фигурирует в формулировке теоремы 29, можно описать как пространство, в котором каждая точка является P-точкой. Очевидно, что такое пространство удовлетворяет (S3).

Докажем обратное.

Рассмотрим в X множество A вида $\bigcup\{F_n\colon n \in \mathbb{N}\}$, где F_n замкнуты в X. Предположим, что найдётся точка $x \in [A] \setminus A$. Построим по индукции для каждого n точечно конечные семейства $\gamma_n = \{V_k^n\colon k \in \mathbb{N}\}$ открытых в X множеств, последовательности $\delta_n = \{W_k^n\colon k \in \mathbb{N}\}$ нуль-множеств X, функционально вписанные в γ_n, таким образом, чтобы выполнялись условия

1) $\tilde{\delta}_n = \bigcup\{E\colon E \in \delta_n\} = \tilde{\gamma}_n$;

2) $\tilde{\gamma}_n \cap \tilde{\gamma}_m = \varnothing$ при $n \neq m$;

3) $F_n \subseteq \bigcup\{\tilde{\delta}_k\colon k \leqslant n\}$;

4) $x \notin \tilde{\gamma}_n$ для каждого n.

Предположим, что γ_k и δ_k построены для всех $k < n$. Из (S3), функциональной вписанности W_k^n в V_k^n и условий 1) и 4) следует, что множество $\bigcup\{\tilde{\delta}_k\colon k < n\}$ открыто-замкнуто в X, а $x \in X \setminus \bigcup\{\tilde{\delta}_k\colon k < n\} = E_n$. Положим $G_n = F_n \cap E_n$.

Выберем такую непрерывную функцию $f\colon E_n \to [0,1]$, что $f(x) = 0$ и $f(G_n) = 1$. Положим $U_k = \{y\colon f(y) < k^{-1}\}$, $\tilde{U}_k = \{y\colon f(y) \leqslant k^{-1}\}$. Определим нуль-множества W_k^n следующим образом: $W_1^n = E_n \setminus U_2$, $W_k^n = \tilde{U}_k \setminus U_{k+1}$. Далее определим конуль-множества $V_1^n = E_n \setminus \tilde{U}_3$, $V_k^n = U_{k-1} \setminus \tilde{U}_{k+2}$. Будем иметь

5) $W_k^n \ll V_k^n$;

6) $\bigcup\{W_k^n\colon k \in \mathbb{N}\} = \bigcup\{V_k^n\colon k \in \mathbb{N}\} = E_n \setminus \{z\colon f(z) = 0\}$;

7) семейство $\{V_k^n\colon k \in \mathbb{N}\}$ точечно конечно.

Положим $\delta_n = \{W_k^n \colon k \in \mathbb{N}\}$ и $\gamma_n = \{V_k^n \colon k \in \mathbb{N}\}$. Тогда для семейств $\{\delta_k \colon k \leqslant n\}$ и $\{\gamma_k \colon k \leqslant n\}$ выполняются условия 1)—4).

Положим $C_n = B_n = \tilde{\gamma}_n$. Как уже отмечалось, множество $\tilde{\gamma}_n$ открыто-замкнуто, так что B_n мы можем считать нуль-множеством, функционально вписанным в открытое множество C_n. Последовательность $\{C_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ дизъюнктна в силу условия 2), следовательно, точечно конечна. Так как $X \in$ (S3), то $[\bigcup\{B_n \colon n \in \mathbb{N}\}] \subseteq \bigcup\{C_n \colon n \in \mathbb{N}\} = \bigcup\{B_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ (условие 1)) и $x \notin [\bigcup\{B_n \colon n \in \mathbb{N}\}]$ (условие 4)).

С другой стороны, $A \subseteq \bigcup\{B_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ по условию 3). Получено противоречие с тем, что $x \in [A]$.

Все доказано.

Доказательство основной теоремы о секвенциальной полноте основывается на лемме 19 и на её нижеследующем частном случае.

Лемма 25. *Пусть* $\{W_i \colon i = 1, \ldots, n\}$ — *такая последовательность конуль-множеств, что* $W_i \ll W_{i+1}$, $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n = 1$ — *возрастающая последовательность чисел из* $(0, 1]$. *Тогда найдётся такая функция* $f \in C(X, [0, 1])$, *что* $f|_{W_1} \leqslant \lambda_1$, $x \in W_{i+1} \setminus W_i \implies f(x) \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}]$.

Доказательство. Действительно, положим $\tilde{W} = W_n$, $\tilde{W}_i = W_i$, $i < n$, $\tilde{W}_0 = \{x\}$, $\lambda_0 = 0$, где x выбрано произвольно из W_1; выберем последовательность $\{\tilde{W}_i \colon i > n - 1\}$ конуль-множеств так, чтобы выполнялось условие $\tilde{W}_j \ll \tilde{W}_{j+1} \ll W_n$. В соответствие с леммой 3 построим функцию f для $\{\tilde{W}_n\}$. Она будет искомой.

Доказательство завершено.

Пусть $a(k) = (a_1, \ldots, a_k)$ — последовательность длины k из нулей и единиц. Обозначим через S_k совокупность всех таких последовательностей. На S_k вводим лексикографический порядок. Обозначим через $0(k)$ последовательность из одних нулей, через $1(k)$ — последовательность единиц, через $\underline{a(k)}$ — элемент, предшествующий $a(k)$, через $\overline{a(k)}$ — следующий за $a(k)$. Запись $a(k)b(s)$ обозначает последовательность $a(m) = (a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_s)$, где $m = k + s$, $a(k) = (a_1, \ldots, a_k)$, $b(s) = (b_1, \ldots, b_s)$. Такое представление однозначно. Совокупность S_k можно представить в форме $\{a_j(k) \colon j = 1, \ldots, 2^k\}$, где $j < i \implies a_j(k) < a_i(k)$. Положим $\operatorname{ord} a(k) = j$, где $a(k) = a_j(k)$. Тогда будет справедлива формула

A) $\operatorname{ord} a(k)b(s) = 2^s(\operatorname{ord} a(k) - 1) + \operatorname{ord} b(s)$.

Формула, очевидно, выполняется при $k = s = 1$. Предположим, что она выполняется при $k + s < n$. Рассмотрим $a(n) = a(k)b(s)$. Для $0(n)$ мы имеем $\operatorname{ord} 0(n) = 2^s(\operatorname{ord} 0(k) - 1) + \operatorname{ord} 0(s) = 1$ — формула верна. Пусть она верна для всех $a'(n) < a(n)$. Пусть $a_1(n) = a(k)0(s)$. Имеем $\operatorname{ord} a_1(n) = \operatorname{ord} \underline{a(k)}1(s) + 1 = 2^s(\operatorname{ord} \underline{a(k)} - 1) + \operatorname{ord} 1(s) + 1 = 2^s(\operatorname{ord} a(k) - 1 - 1) + 2^s + 1 = 2^s(\operatorname{ord} a(k) - 1) + \operatorname{ord} 0(s)$. Формула выполняется для $a_1(n)$. Тогда

$\operatorname{ord} a(n) = \operatorname{ord} a_1(n) + \operatorname{ord} b(s) - 1 = 2^s(\operatorname{ord} a(k) - 1) + 1 + \operatorname{ord} b(s) - 1 = 2^s(\operatorname{ord} a(k) - 1) + \operatorname{ord} b(s)$.

Формула установлена.

Семейство $\{W^k_{a(k)}\colon k \in N,\ a(k) \in S_k\}$ конуль-множеств пространства X назовём λ-*системой*, если

$\lambda 1)$ $a(k) < c(k) \implies W^k_{a(k)} \ll W^k_{c(k)}$,

$\lambda 2)$ для любых $A \in \lambda$ и $k \in N$ найдётся такое $n = n(k) \geqslant k$, что при $m \geqslant n$ на A выполняется формула

$$W^n_{\underline{a(k)}1(s)} \subseteq W^m_{a(k)1(t)} \subseteq W^n_{\overline{a(k)}1(s)}.$$

Для бесконечной последовательности $\gamma = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ положим $\gamma(k) = (a_1, \ldots, a_k)$.

Введём следующее условие

(S) Пусть $\{W^k_{a(k)}\}$ — λ-система. Тогда для любого n и любой такой последовательности γ, что $\gamma(k) < 1(k)$ при $k \geqslant n$, выполняется $\overline{\bigcup\{W^k_{\gamma(k)}\}} \subseteq \bigcup\{W^k_{1(k)}\}$, $k \geqslant n$.

Теперь мы в состоянии сформулировать основной результат.

Теорема 55. *$C_\lambda(X)$ секвенциально полно тогда и только тогда, когда X удовлетворяет условию* (S).

Доказательство. Пусть $C_\lambda(X)$ секвенциально полно, $\{W^k_{a(k)}\}$ — λ-система в X. Для каждого k построим функцию f_k в соответствии с леммой 20 при $\lambda_i = i/2^k$, т. е. $x \in W^k_{\overline{a(k)}} \setminus W^k_{a(k)} \implies 2^{-k} \operatorname{ord} a(k) \leqslant f_k(x) \leqslant 2^{-k} \operatorname{ord} \overline{a(k)}$.

Докажем, что $\{f_n\}$ — λ-фундаментальная последовательность.

Пусть $A \in \lambda$, $\varepsilon > 0$. Находим такое $k \in N$, чтобы $2^{-k} < \varepsilon/4$. По k находим такое $n = n(k) \geqslant k$, что при $m \geqslant n$ выполняется $W^n_{\underline{a(k)}1(s)} \subseteq W^m_{a(k)1(t)} \subseteq W^n_{\overline{a(k)}1(s)}$.

Пусть $x \in A$. Допустим, что найдётся такое $a(k)$, что $x \in W^n_{\overline{a(k)}1(s)} \setminus W^n_{a(k)1(s)}$. Имеем $2^{-n} \operatorname{ord} a(k)1(s) \leqslant f_n(x) \leqslant 2^{-n} \operatorname{ord} \overline{a(k)}1(s)$. Заметим, что справедлива формула

B) $\operatorname{ord} c(q)1(p) = 2^p \operatorname{ord} c(q)$.

Действительно, используя A), получаем $\operatorname{ord} c(q)1(p) = 2^p(\operatorname{ord} c(q) - 1) + 2^p = 2^p \operatorname{ord} c(q)$.

Из формулы B) следует, что $2^{-k} \operatorname{ord} a(k) \leqslant f_n(x) \leqslant 2^{-k} \operatorname{ord} \overline{a(k)}$.

Из того что $W^m_{\underline{a(k)}1(t)} \subseteq W^n_{a(k)1(s)}$, следует, что $x \notin W^m_{\underline{a(k)}1(t)} = W^m_{c(k)1(t)}$. С другой стороны, из того что $W^n_{\overline{a(k)}1(s)} \subseteq W^m_{\overline{\overline{a(k)}}1(t)} = W^m_{e(k)1(t)}$, следует, что $x \in W^m_{e(k)1(t)}$, откуда $2^{-m} \operatorname{ord} c(k)1(t) \leqslant f_m(x) \leqslant 2^{-m} \operatorname{ord} e(k)1(t)$.

Из формулы B) следует, что $\operatorname{ord} c(k)1(t) = 2^t \operatorname{ord} c(k)$, $\operatorname{ord} e(k)1(t) = 2^t \operatorname{ord} e(k)$, так что $2^{-k} \operatorname{ord} c(k) \leqslant f_m(x) \leqslant 2^{-k} \operatorname{ord} e(k)$. Учитывая, что $\operatorname{ord} e(k) - \operatorname{ord} c(k) = 3$, будем иметь $|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant 2^{-k}(\operatorname{ord} e(k) - \operatorname{ord} c(k)) = 3 \cdot 2^{-k} < 3 \cdot (\varepsilon/4) < \varepsilon$.

Пусть $x \notin W^n_{1(n)}$. Тогда $f_n(x) = 1$. Так как $W^m_{\underline{a(k)}1(t)} \subseteq W^n_{1(n)}$, то $x \notin W^m_{\underline{1(k)}1(t)}$, откуда следует, что $f_m(z) \geqslant 2^{-k} \operatorname{ord} \underline{i(k)} = 2^{-k}(2^k - 1) = 1 - 2^{-k}$, так что $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant 2^{-k} < \varepsilon/4$.

Доказано, что последовательность f_n λ-фундаментальна. Следовательно, она имеет предельную функцию $f \in C(X)$.

Пусть $x \notin \bigcup W^k_{1(k)}$. Тогда $f_n(x) = 1$ для всех n, что влечёт $f(x) = 1$. Фиксируем n. Пусть $k \geqslant n$. Пусть γ — произвольная последовательность с $\gamma(k) < 1(k)$ и $\gamma(m) = a(m)$. При $a(n) < 1(n)$ имеем $\operatorname{ord} a(n) \leqslant 2^n - 1$, откуда $2^{-n} \operatorname{ord} a(n) \leqslant 1 - 2^{-n} = a$. Предположим, что $2^{-m} \operatorname{ord} a(m) \leqslant a$. Вычисляем $\operatorname{ord} a(m+1) = \operatorname{ord} a(m)b(1) = 2(\operatorname{ord} a(m) - 1) + \operatorname{ord} b(1) \leqslant 2(\operatorname{ord} a(m) - 1) + 2 = 2 \operatorname{ord} a(m)$, откуда $2^{-m-1} \operatorname{ord} a(m+1) \leqslant 2^{-m} \operatorname{ord} a(m) \leqslant a$. Итак, для всякого t выполняется $2^{-t} \operatorname{ord} a(t) \leqslant a$. Тогда если $y \in W^k_{\gamma(k)}$, то $f_k(y) \leqslant 2^{-k} \operatorname{ord} a(k) \leqslant a$, откуда следует, что $f(y) \leqslant a$ и $x \notin \overline{\bigcup\{W^k_{\gamma(k)} \colon k \geqslant n\}}$.

Доказано, что выполняется условие (S).

Пусть выполняется условие (S), докажем секвенциальную полноту $C_\lambda(X)$.

Пусть $\{f_n\}$ — λ-фундаментальная последовательность. Тогда $\{f_n\}$ сходится к некоторой функции f равномерно на элементах λ. Надо установить непрерывность этой функции. Предположим противное: функция f разрывна в некоторой точке $x \in X$. Тогда найдутся такие $\varepsilon > 0$ и множество $A \subseteq X$, что

а) $x \in \overline{A}$,

б) $y \in A \implies |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$.

Положим $a = f(x) - \varepsilon$. Без потери общности можно предположить, что

в) $f(x) - f(y) \geqslant \varepsilon$ для всякой точки $y \in A$,

г) $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/4$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Тогда

д) для каждой точки $y \in A$ выполняется $f(y) \leqslant a$.

Положим

е) $W^k_{a(k)} = \{z \colon f_k(z) < a + \varepsilon \operatorname{ord} a(k) \cdot 2^{-k-1}\}$.

Тогда $\lambda1$) выполняется автоматически. Проверим условие $\lambda2$).

Пусть $A \in \lambda$, $k \in \mathbb{N}$ произвольно. Так как $\{f_n\}$ сходится к f равномерно на A, то по $\delta = \varepsilon \cdot 2^{-k-1}$ найдётся такое $n \geqslant k$, что

ж) $\|f_n - f_{n+m}\|_A < \delta$.

Справедливо утверждение

з) $z \in W^q_{a(q)}$ тогда и только тогда, когда $f_q(z) < a + 2^{-r-1}\varepsilon \operatorname{ord} a(r)$, где $a(q) = a(r)1(q - r)$.

Действительно, по формуле (S) $\operatorname{ord} a(q) = \operatorname{ord} a(r)1(q - r) = 2^{q-r} \operatorname{ord} a(r)$. Формула е) утверждает, что $z \in W^q_{a(q)}$ тогда и только тогда, когда $f_q(z) < a + 2^{-q-1}\varepsilon \operatorname{ord} a(q)$, но последнее число равно $a + 2^{-q-1}2^{q-r}\varepsilon \operatorname{ord} a(r) = a + 2^{-r-1}\varepsilon \operatorname{ord} a(r)$. Утверждение з) установлено.

Пусть $z \in W^n_{\underline{a(k)}1(s)}$. Из ж) следует, что $|f_n(z) - f_m(z)| < 2^{-k-1}\varepsilon$. Учитывая е) и з), получаем $f_m(z) < f_n(z) + 2^{-k-1}\varepsilon < a + 2^{-k-1}\varepsilon \operatorname{ord} \underline{a(k)} + 2^{-k-1}\varepsilon = a+2^{-k-1}\varepsilon(\operatorname{ord} a(k)-1)+2^{-k-1}\varepsilon = a+2^{-k-1}\varepsilon \operatorname{ord} a(k)$, откуда, снова используя з), делаем вывод, что $z \in W^m_{a(k)1(t)}$, или $W^n_{\underline{a(k)}1(s)} \subset W^m_{a(k)1(t)}$.

Если $z \in W^m_{a(k)1(t)}$, то $f_m(z) < a + 2^{-k-1}\varepsilon \operatorname{ord} a(k)$ в силу з), из ж) вытекает, что $f_n(z) < f_m(z) + 2^{-k-1}\varepsilon$, так что $f_n(z) < a + 2^{-k-1}\varepsilon \operatorname{ord} a(k) + 2^{-k-1}\varepsilon = a+2^{-k-1}\varepsilon(a(k)+1) = a+2^{-k-1} \operatorname{ord} \overline{a(k)}$; применяя з), получаем $z \in W^n_{\overline{a(k)}1(s)}$, или $W^m_{a(k)1(t)} \subseteq W^n_{\overline{a(k)}1(s)}$. Доказано, что выполняется условие $\lambda 2$), т. е. $\{W^k_{a(k)} : k \in \mathbb{N},\ a(k) \in S_k\}$ есть λ-система. Докажем, что условие (S) не выполняется.

Фиксируем n и рассмотрим семейство $\xi = \{W^k_{\gamma(k)\colon k \geqslant n}\}$ для подходящей последовательности $\gamma = (a_n : n \in \mathbb{N})$. Из в), г) и е) следует, что $x \notin W^k_{1(k)}$ для всех k. Предположим, что $x \notin \overline{\bigcup \xi}$. Тогда $V = X \setminus \overline{\bigcup \xi}$ есть окрестность точки x. Найдётся точка $y \in A \cap V$. Так как $\{f_m(y)\} \to f(y)$ и $f(y) \leqslant a$ (в силу д)), то $f_m(y) < a + 2^{-n-2}\varepsilon$ начиная с некоторого m. Тогда $f_m(y) < a + 2^{-n-1}\varepsilon \operatorname{ord} \gamma(n)$, что в силу з) означает $y \in W^m_{\gamma(m)}$. Получено противоречие. Значит, (S) не выполняется.

Теорема доказана.

Литература

[1] Архангельский А. В. Топологические пространства функций. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.

[2] Шефер Х. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971.

[3] Асанов М. О. О пространствах непрерывных отображений // Изв. высш. учебн. завед. Матем. — 1980. — № 4. — С. 6—10.

[4] Асанов М. О. О кардинальных инвариантах пространств непрерывных функций // Современная топология и теория множеств. Т. 2. — Ижевск, 1979. — С. 8—12.

[5] Келли Дж. Л. Общая топология. — М.: Наука, 1981.

[6] Schmets J. Espaces de Fonctions Continues. — Berlin: Springer, 1976. — Lect. Notes Math. Vol. 514.

[7] Архангельский А. В. Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты // Успехи мат. наук. — 1978. — Т. 33, № 6. — С. 29—84.

[8] Величко Н. В. О теории пространств непрерывных функций // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1993. — Т. 3. — С. 57—63.

[9] Velichko N. V. $C(X)$ in the weak topology // Georgian Math. J. — 1995. — Vol. 2. — P. 653—658.

[10] Величко Н. В. О семействе λ-топологий на пространстве функций // Сиб. мат. журн. — 1998. — Т. 39, № 3. — С. 490—500.

[11] Величко Н. В. Замечания по $C_\lambda(X)$ // Изв. Ин-та матем. и инф. УдГУ. — 1998. — Вып. 3 (14). — С. 46—48.

[12] Величко Н. В. О секвенциальной полноте $C_\lambda(X)$ // Фундам. и прикл. мат. — 1998. — Т. 4, вып. 1. — С. 39—47.

[13] Величко Н. В. О сильной топологии $C_\lambda(X)$ // Труды ИММ. — 1998. — Т. 5. — С. 67—76.

[14] Velichko N. V. On spaces $C_\lambda(X)$ // Topol. and Its Appl. — 2000. — Vol. 107. — P. 191—195.

[15] Engelking R. General Topology. — Warszawa: PWN, 1977.

[16] Bushwalter H., Schmets J. Sur quelques propriétés de l'espace // J. Math. Pures Appl. — 1973. — Vol. 52. — P. 337—352.

[17] Grothendieck A. Criteres generaux de compacite les espaces fontionels generaux // Amer. J. Math. — 1952. — Vol. 74. — P. 165—186.

[18] Дэй М. М. Нормированные линейные пространства. — М.: ИЛ, 1961.

[19] Semadeni Z. Banach spaces of continuous functions. — Warszawa: PWN, 1971.

[20] Dobrowolski T., Marciszewski W., Mogilski J. On topological classification of function spaces $C_p(X)$ of low Borel complexity // Trans. Amer. Math. Soc. — 1991. — Vol. 328, no. 1. — P. 307—324.