Топология свободной топологической группы

О. В. СИПАЧЁВА
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: osipa@rol.ru

УДК 512.546+515.12

Ключевые слова: свободная топологическая группа, свободная абелева топологическая группа, топология свободной группы, граевская псевдометрика, факторные отображения в свободные топологические группы, свободная топологическая группа с топологией прямого предела, число Суслина, мальцевское пространство.

Аннотация

В статье собраны известные явные описания топологии свободной и свободной абелевой топологической группы. Приведены примеры использования таких описаний разными авторами в исследованиях свойств топологических групп и некоторых других тополого-алгебраических объектов. Излагаются разные подходы к описанию топологии свободной топологической группы и предлагается общий метод топологизации свободных групп. Обсуждаются основные свойства свободных топологических групп и их строение. Отмечены наиболее важные результаты о свободных топологических группах, полученные разными авторами в разные годы.

Abstract

O. V. Sipacheva, The topology of free topological groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 2, pp. 99—204.

The known explicit descriptions of the topology of free and free Abelian topological groups are collected. Examples of the application of such descriptions by various authors to study the properties of topological groups and some related topological-algebraic objects are given. Various approaches to describing the topology of free topological groups are presented and a general method for topologizing free groups is suggested. The fundamental properties of free topological groups and their structure are considered. The most important results on free topological groups obtained by various authors through the years are mentioned.

Введение

В самом начале 1940-х годов А. А. Марков [18, 19] ввёл понятия свободной топологической группы и свободной абелевой топологической группы произвольного тихоновского топологического пространства и доказал существование и единственность этих групп. Данное им определение свободной топологической группы вполне аналогично определению абстрактной свободной группы; в частности, любая топологическая группа является фактор-группой некоторой

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 2, с. 99—204.

свободной топологической группы. Свободные топологические группы играют в теории топологических групп ту же роль, что и свободные группы в теории абстрактных групп, и теория свободных топологических групп представляет собой мощный аппарат для решения многих проблем, связанных с топологическими группами.

За последующее десятилетие Граев [10, 11], Накаяма [80] и Какутани [68] упростили доказательства основных утверждений марковской теории свободных топологических групп, обобщили конструкцию Маркова и получили ряд новых теорем о свободных топологических группах, более полно вскрывающих их строение и в определённой мере параллельных результатам теории абстрактных свободных групп. Полученные результаты привлекли внимание А. И. Мальцева, который считал, что наиболее естественное место теории абстрактных свободных групп — в рамках общей теории алгебраических систем, и побудили его создать общую теорию свободных топологических алгебраических систем. Он написал большую статью, которая вышла в свет в 1957 г. [17] и в которой излагались основы теории свободных топологических универсальных алгебр с самых общих позиций (в частности, он не требовал тихоновости от порождающего топологического пространства, и место вложения порождающего пространства в свободную топологическую группу занимало непрерывное каноническое отображение этого пространства в его свободную топологическую универсальную алгебру). В той же статье Мальцев конструктивно описал топологию свободной топологической универсальной алгебры при помощи трансфинитного процесса неопределённой длины и поставил задачу явного описания топологии свободных топологических групп для произвольных тихоновских пространств (для компактов[1] эта задача была решена ещё Граевым в конце 1940-х годов [10, 11]).

Ещё десять лет спустя С. А. Моррис опубликовал серию статей [73—75] (см. также [77]), в которых он развил общий подход Мальцева в применении к топологическим группам — ввёл понятия многообразия топологических групп (это непустой класс топологических групп, замкнутый относительно перехода к топологическим подгруппам и к топологическим фактор-группам и относительно операции тихоновского произведения групп) и полного многообразия топологических групп и исследовал свободные объекты в этих многообразиях. Свободным объектам в многообразиях посвящены работы С. Сверчковского [101] и М. М. Чобана [46]; кроме того, Чобан внёс весьма значительный вклад в развитие теории свободных топологических универсальных алгебр [13, 15, 47, 48, 54, 55].

Эта статья посвящена наиболее важным, потому самым популярным, свободным объектам в многообразиях групп — свободной топологической группе $F(X)$ (в смысле Маркова) и свободной топологической абелевой группе $A(X)$, порождённым тихоновским пространством X. Эти объекты характеризуются соответствующими универсальными свойствами. Так, группа $F(X)$ допускает

[1]Под компактами подразумеваются хаусдорфовы компактные (не обязательно метризуемые) пространства.

следующее описание: X топологически вкладывается в $F(X)$ и для любого непрерывного отображения f пространства X в топологическую группу G существует и единствен непрерывный гомоморфизм $h\colon F(X) \to G$, для которого $f = h \restriction X$. Группа $F(X)$ как абстрактная группа является свободной группой множества X. Топологию группы $F(X)$ можно определить как сильнейшую групповую топологию, которая индуцирует исходную топологию на X. С другой стороны, свободная топологическая группа $F(X)$ — это абстрактная свободная группа, порождённая множеством X (а значит, любое отображение множества X в произвольную абстрактную группу продолжается до гомоморфизма на $F(X)$), наделённая самой слабой топологией, относительно которой непрерывны все гомоморфные продолжения непрерывных отображений из X в топологические группы.

Точно так же определяется свободная абелева топологическая группа $A(X)$; вместо непрерывных отображений в произвольные топологические группы нужно рассматривать непрерывные отображения в топологические абелевы группы.

Как правило, топологии свободных топологических групп устроены очень сложно (топологии свободных абелевых групп выглядят гораздо проще). Относительно простое описание имеют только свободные топологические группы компактных пространств. Поэтому бо́льшая часть результатов, связанных со свободными топологическими группами, получена методами, которые сводят рассмотрение к компактному случаю (или к случаю конкретного просто устроенного пространства) или используют «внешние» соображения, связанные с сохранением топологических свойств определёнными топологическими операциями или отображениями из определённого класса. К таким методам относятся метод А. В. Архангельского, основанный на разложении свободной группы в объединение множеств слов ограниченной длины и применении стоун-чеховской компактификации [2—4]; метод О. Г. Окунева построения примеров M-эквивалентных (имеющих топологически изоморфные свободные группы) пространств (метод параллельных ретракций) [83]; метод М. Г. Ткаченко представлений свободных групп в группе матриц [38,100]; метод тестовых пространств, широко применявшийся В. Г. Пестовым и К. Ямадой (см., например, [58,87,109]). Разумеется, эти методы далеко не исчерпывают всего арсенала средств, используемых в теории свободных топологических групп, да и применение каждого из них в конкретных ситуациях требует подчас изобретения специальных весьма нетривиальных подходов. Например, чтобы доказать, что свободная абелева топологическая группа конечномерного метрического компакта вкладывается как топологическая подгруппа в свободную абелеву группу обычного отрезка, А. Г. Лейдерману, С. А. Моррису и В. Г. Пестову [69] понадобилась теорема Колмогорова о суперпозиции (которая представляет собой решение 13-й проблемы Гильберта).

Однако бывают ситуации, когда не удаётся обойтись без использования явного описания топологии свободной группы. Один из примеров — фундаментальная проблема о вложении свободной топологической группы подпространства в свободную топологическую группу объемлющего пространства (она обсуждается во втором разделе). Этой проблемой занимались многие авторы в течение долгого времени (см., например, [21, 32, 41, 44, 66, 81]; первый нетривиальный результат принадлежит, по-видимому, П. Сэмюэлу, который отметил без доказательства в [93] (1948 г.), что свободная топологическая группа тихоновского пространства Y является естественной топологической подгруппой свободной топологической группы тихоновского пространства $X \supseteq Y$, если (а) Y — ретракт X; (б) X — пополнение по Дьёдонне пространства Y; (в) X нормально и Y замкнуто в X. (Первые два утверждения были впоследствии доказаны М. Г. Ткаченко [36] и В. Г. Пестовым [21], а третье оказалось неверным.) Однако окончательно проблема о вложении была решена только в 2000 г. [98] (О. В. Сипачёвой), и в её решении использовалось явное описание топологии свободной топологической группы в терминах продолжения псевдометрик до полунорм (собственно, это описание и есть основное содержание статьи [98]). Сто́ит отметить, что для свободных абелевых групп решение этой проблемы тоже потребовало явного описания топологии; однако топология свободной абелевой группы устроена значительно проще, поэтому проблема для абелевых групп была решена почти на двадцать лет раньше (её решил М. Г. Ткаченко в 1983 г. [32]).

Эта статья представляет собой попытку демонстрации полезности явных описаний топологий свободных групп. Здесь приведены примеры использования таких описаний разными авторами в исследованиях свойств свободных — и не только свободных — топологических групп и связанных с ними тополого-алгебраических объектов. Автор надеется, что здесь упомянуты все наиболее интересные примеры подобного сорта. Кроме того, излагаются разные подходы к описанию топологий свободных топологических групп и предлагается общий метод топологизации свободных групп (без топологии).

Однако эта статья ни в коем случае не является обзором по теории свободных топологических групп. Некоторые важные результаты вообще не упоминаются. Полное представление о состоянии теории свободных топологических групп в середине 1980-х гг. даёт обзор [7] А. В. Архангельского. Многие более новые результаты цитируются в этой статье. Однако даже не затронута такая важная тема, как кружевные свободные топологические группы и локально выпуклые пространства (класс кружевных пространств важен потому, что на него распространяется теорема Дугунджи о продолжении) [28, 44]. Ничего не сказано об обобщении двойственности Понтрягина на свободные абелевы топологические группы [23, 61]. Не обсуждается категорный подход к свободным топологическим группам (см. [85]). О других важных результатах и подходах, не упомянутых ни в обзоре Архангельского, ни в этой статье, можно прочесть в [51, 57, 86, 105].

Терминология и обозначения

Для удобства встречающиеся в данной статье понятия и обозначения собраны в этом разделе. Недостающие определения, а также факты и понятия, используемые без ссылок, можно найти в книге Р. Энгелькинга [50] или в первом томе двухтомника Э. Хьюитта и К. Росса [45] (в этой книге содержится определение топологической группы, а также основные факты, касающиеся топологических групп).

Все рассматриваемые топологические пространства предполагаются тихоновскими (т. е. вполне регулярными T_1-пространствами), если явно не оговорено противное.

Под компактами понимаются хаусдорфовы компактные (не обязательно метризуемые) пространства.

Обозначение $\mathbb{N}$ используется для множества всех натуральных (положительных целых) чисел, а обозначение $\mathbb{N}_0$ — для множества всех неотрицательных целых чисел. Как обычно, $\mathbb{Q}$ — это множество рациональных, а $\mathbb{R}$ — вещественных чисел.

Псевдометрика определяется так же, как метрика, за исключением того, что она может принимать нулевые значения на парах разных точек.

Для псевдометрики p на множестве X, числа $a > 0$ и точки $x \in X$

$$B_p(x,a) = \{y \in X \colon p(x,y) < a\} —$$

шар радиуса a с центром в x относительно псевдометрики p. Так же обозначаются шары для полунорм на группах.

Псевдометрика p на множестве X называется *неархимедовой*, если $p(x,z) \leqslant \max\{p(x,y), p(y,z)\}$ при всех $x, y, z \in X$.

Пространство X является *индуктивным* (или *прямым*) *пределом* семейства своих подпространств $\{X_\alpha \colon \alpha \in A\}$, если множество $A \subseteq X$ замкнуто тогда и только тогда, когда каждое пересечение $A \cap X_\alpha$ замкнуто в X_α, или, что то же самое, если $A \subseteq X$ открыто тогда и только тогда, когда каждое пересечение $A \cap X_\alpha$ открыто в X_α.

Топологическое пространство называется *k-пространством* (*k_ω-пространством*), если оно является индуктивным пределом некоторого семейства (возрастающей последовательности) своих компактных подпространств.

Говорят, что подмножество A топологического пространства X *имеет тип G_δ* (или является *G_δ-множеством*), если A есть пересечение счётного числа открытых множеств. Подмножество A имеет тип G_λ, где λ — кардинал, если A есть пересечение λ открытых множеств. Точка в топологическом пространстве называется *P-точкой*, если она принадлежит внутренности любого содержащего её множества типа G_δ. Пространство, в котором все точки являются P-точками, называется *P-пространством*.

Мы говорим, что подмножество A топологического пространства X *ограничено*, если всякая непрерывная функция $f \colon X \to \mathbb{R}$ ограничена на A.

Символом $|A|$ обозначается мощность множества A.

Для бесконечного кардинала τ через $\mathrm{cf}(\tau)$ обозначается его конфинальность.

Отображение $f \colon X \xrightarrow{\text{на}} Y$ топологических пространств *факторно*, если в Y открыты те и только те множества, которые имеют открытые прообразы в X, или, что то же самое, если в Y замкнуты те и только те множества, которые имеют замкнутые прообразы в X. Иными словами, топология пространства Y должна быть самой сильной из всех топологий, относительно которых отображение f непрерывно. Непрерывное отображение $f\colon X \xrightarrow{\text{на}} Y$ называется *ретракцией*, если $Y \subseteq X$ и сужение f на Y является тождественным отображением; в этом случае Y называется *ретрактом* пространства X и автоматически оказывается замкнутым в X. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *компактно накрывающим*, если для всякого компакта $K \subseteq Y$ найдётся компакт $K' \subseteq X$, для которого $f(K') = K$.

Для пространства X через id_X мы обозначаем тождественное отображение X на себя;

$$\Delta_X = \{(x,x)\colon x \in X\} -$$

диагональ в квадрате $X \times X$; обозначение δX используется для естественного факторного отображение из $X \times X$ в $(X \times X)/\Delta X$.

Носитель функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ — это множество $\operatorname{supp} f = \{x \in X\colon f(x) \neq 0\}$.

Универсальная равномерность на топологическом пространстве определяется как сильнейшая из всех равномерностей, индуцирующих топологию этого пространства. Пространство называется *полным по Дьёдонне*, если оно полно относительно этой равномерности. *Пополнение по Дьёдонне* — это пополнение по универсальной равномерности.

Пусть G — топологическая группа и $\mathcal{B}$ — база её топологии в единице. Каждый элемент $U \in \mathcal{B}$ определяет три покрытия пространства группы G: $\gamma_l(U) = \{gU\}_{g\in G}$, $\gamma_r(U) = \{Ug\}_{g\in G}$ и $\gamma(U) = \{gUh\}_{g,h\in G}$. Обозначим через $\mathcal{C}_l$, $\mathcal{C}_r$ и $\mathcal{C}$ совокупности всех покрытий G, в которые вписаны покрытия вида $\gamma_l(U)$, $\gamma_r(U)$ и $\gamma(U)$ соответственно ($U \in \mathcal{B}$). Каждая из этих совокупностей порождает равномерность на G, индуцирующую исходную топологию. Первая равномерность называется *левой равномерностью*, вторая — *правой*, и третья — *двусторонней*. Топологическая группа *полна по Вейлю*, если она полна относительно левой (или, что то же самое, правой) равномерности; топологическая группа *полна по Райкову*, если она полна относительно двусторонней равномерности. Пополнение топологической группы по левой (или, эквивалентно, по правой) равномерности как равномерного пространства может не быть топологической группой. Топологическая группа называется *пополняемой по Вейлю*, если она топологически изоморфно вкладывается в полную по Вейлю группу в качестве (всюду плотной) подгруппы. Пополнение топологической группы по двусторонней равномерности всегда является топологической группой и называется *пополнением по Райкову*. Всякая полная по Вейлю группа полна по Райкову. Топологическая группа полна по Райкову тогда и только тогда, когда она замкнута во всякой топологической группе, содержащей её в качестве подгруппы. Более подробную информацию можно найти в [11]. Для абелевых групп левая, правая и двусторонняя равномерности совпадают, поэтому для них нет смысла различать полноту по Вейлю и по Райкову.

Топологическое пространство X *строго коллективно нормально*, если любая открытая окрестность диагонали в X^2 является равномерным окружением диагонали относительно универсальной равномерности пространства X. Из строгой коллективной нормальности вытекает коллективная нормальность, и из паракомпактности вытекает строгая коллективная нормальность.

Подпространство Y P-вложено в пространство X, если любая непрерывная псевдометрика на Y продолжается до непрерывной псевдометрики на X (или, что то же самое, если универсальная равномерность пространства X индуцирует на Y универсальную равномерность пространства Y).

Пусть γ — семейство подмножеств множества X и $A \subseteq X$. Мы полагаем $\mathrm{St}_\gamma F = \{U \in \gamma \colon U \cap F \neq \varnothing\}$ (это семейство называется *звездой* множества A относительно γ) и $\mathrm{st}_\gamma F = \bigcup \mathrm{St}_\gamma F$. Для $A = \{x\}$ мы будем писать $\mathrm{St}_\gamma x$ и $\mathrm{st}_\gamma x$ вместо $\mathrm{St}_\gamma\{x\}$ и $\mathrm{st}_\gamma\{x\}$.

Если γ и γ' — семейства подмножеств множества X (например, его покрытия), то запись $\gamma \succ \gamma'$ означает, что γ вписано в γ',

$$\gamma \wedge \gamma' = \{A \cap B \colon A \in \gamma,\ B \in \gamma',\ A \cap B \neq \varnothing\} -$$

максимальное (относительно вписанности) семейство, вписанное в γ и γ' одновременно, и

$$\gamma \circ \gamma' = \{\mathrm{st}_\gamma A \colon A \in \gamma'\}.$$

Семейство γ *сильно звёздно вписано* в семейство γ', если $\gamma \circ \gamma \succ \gamma'$.

Мы называем подмножество A частично упорядоченного множества $(P, \leqslant)$ *антицепью*, если ни для каких различных $x, y \in A$ не существует такого $z \in P$, что $x \leqslant z$ и $y \leqslant z$.

Символом $\oplus$ мы обозначаем операцию дискретной топологической суммы пространств. Так, если X_α для $\alpha \in A$ — топологические пространства, то $\bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ это пространство, представляющее собой дизъюнктное объединение множеств X_α и наделённое топологией индуктивного предела семейства $\{X_\alpha \colon \alpha \in A\}$.

Мы используем стандартное обозначение S_n для множества всех перестановок элементов множества $\{1, \ldots, n\}$.

Вещественнозначная функция $\|\cdot\|$ на топологической группе G называется *полунормой*, если $\|e\| = 0$ (e — единица группы G) и $\|g_1 g_2^{-1}\| \leqslant \|g_1\| + \|g_2\|$ для любых $g_1, g_2 \in G$. Полунормы были введены А. А. Марковым [19], который называл их нормами.

Свободная топологическая группа (*свободная абелева топологическая группа*) топологического пространства[2] X — это такая топологическая группа $F(X)$ (абелева топологическая группа $A(X)$), что X топологически вкладывается в $F(X)$ (в $A(X)$) и для любого непрерывного отображения f пространства X в топологическую группу G (в абелеву топологическую группу G) существует и единствен непрерывный гомоморфизм $\hat{f} \colon F(X) \to G$ ($\hat{f} \colon A(X) \to G$), для

[2] Напомним, что под топологическими пространствами мы подразумеваем тихоновские пространства — здесь требование тихоновости весьма существенно.

которого $f = \hat{f} \restriction X$. Как абстрактные алгебраические объекты $F(X)$ и $A(X)$ являются, соответственно, свободной группой и свободной абелевой группой с базисом X. Элементами свободной группы $F(X)$ служат слова, составленные из букв алфавита $X \cup X^{-1}$, с отношением эквивалентности, порождённым равенствами $\mathbf{g}x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}\mathbf{h} = \mathbf{gh}$ для любых $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in F(X)$, $x \in X$ и $\varepsilon = \pm 1$, и с операцией конкатенации (приписывания). Когда мы говорим о словах как элементах свободных групп, мы всегда имеем в виду элементы (классы эквивалентности), чьими представителями (*записями*) являются данные слова. Единица группы $F(X)$ — пустое слово — обозначается как $\mathbf{e}$. Слово — запись элемента группы $F(X)$ — называется *несократимым* (приведённым), если оно не содержит пар стоящих рядом букв вида xx^{-1} или $x^{-1}x$. Элементами группы $A(X)$ служат формальные линейные комбинации элементов из X с целыми коэффициентами с естественным отношением эквивалентности. Линейные комбинации с коэффициентами ± 1 мы тоже называем словами. Слово — запись элемента $A(X)$ — несократимо, если оно не содержит букв вида x и $-x$ одновременно. Нуль группы $A(X)$ обозначается как $\mathbf{0}$.

Мы обозначаем моноид всех (в том числе сократимых) слов в алфавите $X \cup X^{-1}$ с единицей $\mathbf{e}$ через $S(X)$. Для $\mathbf{g} = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} \in S(X)$, где $x_i \in X$ и $\varepsilon_i = \pm 1$, мы используем формальное обозначение $\mathbf{g}^{-1}$ для слова $x_n^{-\varepsilon_n} \dots x_1^{-\varepsilon_1} \in S(X)$. Свободную группу $F(X)$ можно интерпретировать как подмножество (но не подмоноид!) моноида $S(X)$, состоящее из всех несократимых слов. В таком случае произведение двух слов в $F(X)$ — это слово, которое получится, если записать два данных слова подряд и последовательно вычеркнуть из получившегося слова все пары букв вида $x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}$.

Мы полагаем

$$S^*(X) = \left\{ x_1^{\varepsilon_1} \dots x_{2n}^{\varepsilon_{2n}} \in S(X) \colon n \in \mathbb{N},\ x_i \in X,\ \varepsilon_i = \pm 1,\ \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i = 0 \right\} \cup \{\mathbf{e}\}$$

и

$$F^*(X) = \left\{ x_1^{\varepsilon_1} \dots x_{2n}^{\varepsilon_{2n}} \in F(X) \colon n \in \mathbb{N},\ x_i \in X,\ \varepsilon_i = \pm 1,\ \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i = 0 \right\} \cup \{\mathbf{e}\}.$$

Для $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in S(X)$ запись $\mathbf{g} \equiv \mathbf{h}$ означает, что слова $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ равны как элементы моноида $S(X)$, т. е. имеют одинаковое число букв и их соответственные буквы совпадают. Для обозначения равенства приведённых форм этих слов используется запись $\mathbf{g} = \mathbf{h}$. Когда $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ рассматриваются как элементы моноида $S(X)$ или его подмоноида $S^*(X)$, $\mathbf{gh}$ обозначает конкатенацию слов $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$, т. е. слово, которое получается, если написать $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ друг за другом. Когда речь идет о словах $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ как элементах группы $F(X)$ или её подгруппы $F^*(X)$, та же запись обозначает групповое произведение слов $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$.

Если $\mathbf{g}$ — слово из $S(X)$, то его *длина* $l(g)$ — это число букв в слове $\mathbf{g}$, а если это слово из $F(X)$ или $A(X)$, то длина этого слова равна числу букв в его несократимой записи. Мы используем обозначения $F_n(X)$ и $A_n(X)$ для множеств слов длины, не превосходящей n, в $F(X)$ и $A(X)$ соответственно.

Мы полагаем $\tilde{X} = (X \oplus \{\mathbf{e}\} \oplus X^{-1})^n$ и рассматриваем естественное отображение умножения

$$\mathbf{i}\colon \sigma\,\tilde{X}^{\mathbb{N}} \to F(X), \quad \mathbf{i}((x_1, \ldots, x_n, \mathbf{e}, \mathbf{e}, \mathbf{e}, \ldots)) = x_1 \ldots x_n,$$

где

$$\sigma\,\tilde{X}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon x_n \in \tilde{X},\ |\{x_n \neq \mathbf{e}\}| < \omega\};$$

каждой точке это отображение ставит в соответствие произведение её координат (мы считаем, что произведение бесконечного числа единиц равно единице). Для всякого натурального n $\mathbf{i}_n$ обозначает естественное отображение $\tilde{X}^n$ в $F_n(X)$, определённое правилом

$$\mathbf{i}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$$

для $x_i \in \tilde{X}$; таким образом, $\mathbf{i}_n = \mathbf{i} \restriction \tilde{X}^n$ (мы отождествляем $\tilde{X}^n$ с множеством точек в $\sigma\,\tilde{X}^{\mathbb{N}}$, у которых лишь первые n координат могут отличаться от единицы). Из непрерывности умножения в свободной топологической группе вытекает непрерывность всех отображений $\mathbf{i}_n$ и отображения $\mathbf{i}$.

Для произвольного набора $\xi_1 \ldots \xi_n$ запись $\xi_1 \ldots \check{\xi}_i \ldots \xi_n$ обозначает набор $\xi_1 \ldots \xi_{i-1}\xi_{i+1} \ldots \xi_n$.

Иногда мы используем записи вида $\{1, \ldots, n\}$, $x_1 \ldots x_n$ и т. п., где $n \in \mathbb{N}_0$; подразумевается, что при $n = 0$ множество $\{1, \ldots, n\}$ (слово $x_1 \ldots x_n$) пусто.

Буквами x, y и z всегда обозначаются элементы пространства X, а буквами k, l, m, n, r, s и t — неотрицательные целые числа; ε и δ — величины, принимающие значения -1 и 1 или (в разделе 7) -1, 0 и 1.

Как правило, слова (элементы свободных групп), упорядоченные наборы (элементы произведений множеств) и другие «векторoподобные» объекты выделяются полужирным шрифтом в отличие от составляющих их букв, координат и т. п.

1. Описания топологии свободной группы

Ещё Мальцев [17] сформулировал (а до Мальцева Граев [11] пытался решить) проблему явного описания топологии свободных топологических групп для произвольных тихоновских пространств.

Топология на свободной абелевой топологической группе $A(X)$ имеет простое описание в терминах псевдометрик, которое было предложено ещё Граевым [11]. Для псевдометрики d на множестве $X \cup \{\mathbf{0}\}$ ($\mathbf{0}$ — нуль в $A(X)$) обозначим через $\bar{d}$ максимальную инвариантную (относительно сдвигов на элементы группы, т. е. такую, что всегда $\bar{d}(u, v) = \bar{d}(u + w, v + w)$) псевдометрику на $A(X)$ со свойством $\bar{d} \restriction X \cup \{\mathbf{0}\} = d$. Существование такой псевдометрики более или менее очевидно, и её можно вычислить явно. Семейство псевдометрик вида $\bar{d}$ (они называются *граевскими*, или *максимальными*, псевдометриками) определяет топологию свободной топологической абелевой группы $A(X)$, когда d пробегает множество всех непрерывных псевдометрик на дискретном объединении $X \oplus \{\mathbf{0}\}$.

На свободной (неабелевой) топологической группе $F(X)$ тоже можно строить граевские продолжения псевдометрик — максимальные инвариантные (относительно левых и правых сдвигов) псевдометрики, продолжающие непрерывные псевдометрики на порождающем топологическом пространстве X. Конструкция таких продолжений также вполне естественна и проста (она подробно описана Граевым [11]), однако они уже не определяют топологию свободной топологической группы, поскольку определяемая ими топология локально инвариантна (т. е. для любой открытой окрестности единицы U найдётся такая меньшая окрестность единицы V, что $\mathbf{g}^{-1}V\mathbf{g} = U$ для любого $\mathbf{g} \in F(X)$), а свободная топология может обладать этим свойством только если X является P-пространством. Правда, граевские продолжения определяют самую сильную локально инвариантную групповую топологию, порождающую исходную топологию на X (т. е. любое непрерывное отображение из X в локально инвариантную топологическую группу продолжается до непрерывного гомоморфизма из $F(X)$ с граевской топологией в эту группу) [11].

Первые явные описания топологии свободной топологической группы были предложены М. Г. Ткаченко (в 1982 г. в терминах универсальных равномерностей на конечных степенях порождающего топологического пространства [30]) и В. Г. Пестовым (в 1985 г. в терминах универсальной равномерности самого́ порождающего пространства [22]). О. В. Сипачёва тоже получила ряд описаний топологии свободной топологической группы [25, 26, 98]. Наиболее удачным из них оказалось описание в терминах продолжения семейств непрерывных псевдометрик на порождающем пространстве до полунорм на свободной группе. К сожалению, как было сказано выше, граевская конструкция, столь удачно описывающая топологию свободных абелевых групп, не работает в случае свободных топологических групп, и описать топологию свободной группы с помощью полунорм, каждая из которых определяется одной непрерывной псевдометрикой на порождающем пространстве, нельзя; приходится одновременно продолжать целые семейства псевдометрик. Так что построенное описание топологии свободной группы никак нельзя назвать простым; выглядит оно значительно сложнее описаний Пестова и Ткаченко. Однако использование псевдометрик позволяет описывать окрестности единицы неравенствами, а гораздо проще иметь дело с неравенствами, чем следить за отношениями между покрытиями (их пересечениями, композицией, звёздной вписанностью и пр.), которые возникают при использовании универсальных равномерностей. Доказательством тому служат результаты, которые удаётся получить с помощью нового описания свободной топологии; некоторые из них цитируются в следующем разделе. Ниже приводятся известные явные описания топологии (базы открытых окрестностей единицы) свободной топологической группы и свободной абелевой топологической группы; кроме того, обсуждается граевская конструкция продолжения псевдометрик до полунорм.

1.1. Описание топологии свободной группы в терминах элементов универсальных равномерностей пространств X^n

Первое явное описание открытых окрестностей единицы в свободной топологической группе произвольного тихоновского пространства X принадлежит М. Г. Ткаченко [30, 103]. В этом описании используются элементы универсальных равномерностей $\mathcal{U}^{(n)}$ пространств X^n — равномерные окружения диагонали в $X^n \times X^n$. Оно выглядит так. Для произвольной последовательности $\Xi = \{W^{(n)} \in \mathcal{U}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ мы полагаем

$$U_n(\Xi) = \{x_n^{-\varepsilon_n} \dots x_2^{-\varepsilon_2} x_1^{-\varepsilon_1} y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \dots y_n^{\varepsilon_n} : \\ ((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) \in W^{(n)},\ \varepsilon_i = \pm 1\}$$

и

$$U(\Xi) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\pi\in S_n} U_{\pi(1)}(\Xi) \cdot U_{\pi(2)}(\Xi) \cdot \ldots \cdot U_{\pi(n)}(\Xi)$$

(S_n — группа перестановок на $\{1, 2, \dots, n\}$). Множества $U(\Xi)$, где Ξ пробегает все последовательности равномерных окружений диагоналей в $X^n \times X^n$, образуют базу в единице топологии свободной топологической группы $F(X)$.

1.2. Описание топологии свободной группы в терминах открытых покрытий пространств X^n

В предыдущем описании равномерные окружения диагоналей можно заменить на нормальные (т. е. равномерные в универсальной равномерности) покрытия. Действительно, каждое равномерное окружение диагонали $W^{(n)}$ в $X^n \times X^n$ содержит окружение вида $V^{(n)} \circ V^{(n)}$; $V^{(n)}$ порождает нормальное покрытие γ_n пространства X^n: оно состоит из элементов вида $\{\mathbf{y} \colon (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W^{(n)}\}$, где $\mathbf{x} \in X^n$. Ясно, что две точки $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X^n$ принадлежат одному элементу покрытия γ_n в том и только том случае, если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V^{(n)} \circ V^{(n)} \subseteq W^{(n)}$. С другой стороны, каждое нормальное покрытие γ_n пространства X^n определяет элемент $W^{(n)} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \colon \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ для некоторого $U \in \gamma_n\}$ универсальной равномерности пространства X^n. Таким образом, описание 1.1 можно модифицировать следующим образом. Для произвольной последовательности $\Xi = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ открытых нормальных покрытий пространств X^n (γ_n — покрытие пространства X^n) положим

$$U_n(\Xi) = \{x_n^{-\varepsilon_n} \dots x_2^{-\varepsilon_2} x_1^{-\varepsilon_1} y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \dots y_n^{\varepsilon_n} : \\ (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in U \text{ для некоторого } U \in \gamma_n,\ \varepsilon_i = \pm 1\}$$

и

$$U(\Xi) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\pi\in S_n} U_{\pi(1)}(\Xi) \cdot U_{\pi(2)}(\Xi) \cdot \ldots \cdot U_{\pi(n)}(\Xi).$$

Множества $U(\Xi)$, где Ξ пробегает все последовательности нормальных покрытий пространств X^n, образуют базу в единице топологии свободной топологической группы $F(X)$.

В работе [26] показано, что требование нормальности не обязательно — достаточно рассматривать произвольные открытые покрытия.

1.3. Описание топологии свободной группы в терминах непрерывных псевдометрик на пространствах X^n

Вместо произвольных нормальных покрытий можно рассматривать покрытия, состоящие из единичных шаров относительно непрерывных псевдометрик (в любое нормальное покрытие можно вписать покрытие шарами, и любое покрытие шарами нормально [50, 5.4.H(c), 5.1.A(c)]). Получаем ещё одну очевидную модификацию описания 1.1: для произвольной последовательности $\Xi = \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ непрерывных псевдометрик на пространствах X^n (d_n — псевдометрика на X^n) положим

$$U_n(\Xi) = \{x_n^{-\varepsilon_n}\dots x_2^{-\varepsilon_2}x_1^{-\varepsilon_1}y_1^{\varepsilon_1}y_2^{\varepsilon_2}\dots y_n^{\varepsilon_n}: \\ d_n((x_1,x_2,\dots,x_n),(y_1,y_2,\dots,y_n))<1,\ \varepsilon_i=\pm1\}$$

и

$$U(\Xi) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\ \bigcup_{\pi\in S_n} U_{\pi(1)}(\Xi)\cdot U_{\pi(2)}(\Xi)\cdot\ldots\cdot U_{\pi(n)}(\Xi).$$

Множества $U(\Xi)$, где Ξ пробегает все последовательности непрерывных псевдометрик на пространствах X^n, образуют базу в единице топологии свободной топологической группы $F(X)$.

1.4. Описания топологии свободной группы в терминах элементов универсальной равномерности, покрытий и непрерывных псевдометрик на пространстве X

Следующее описание окрестностей единицы в свободной топологической группе было предложено В. Г. Пестовым [22]. В этом описании равномерные окружения диагоналей степеней X уже не участвуют — нужна только универсальная равномерность $\mathcal{U}$ самогó пространства X. Оно обладает тем достоинством, что применимо к любому равномерному пространству: для произвольной равномерности $\mathcal{U}$ на X получается база окрестностей единицы свободной равномерной группы равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$.

Для каждого $n\in\mathbb{N}$ зафиксируем произвольное отображение $\psi_n\colon F(X)\to\mathcal{U}$ (каждому элементу $\mathbf{g}$ группы $F(X)$ ставится в соответствие равномерное окружение диагонали $\psi_n(\mathbf{g})\in\mathcal{U}$). Положим $\Psi=\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$U(\psi_n) = \{\mathbf{g}\cdot x^{\varepsilon}\cdot y^{-\varepsilon}\cdot\mathbf{g}^{-1}\colon \mathbf{g}\in F(X),\ (x,y)\in\psi_n(\mathbf{g}),\ \varepsilon=\pm1\}$$

и
$$U(\Psi) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\pi\in S_n} U(\psi_{\pi(1)}) \cdot U(\psi_{\pi(2)}) \cdot \ldots \cdot U(\psi_{\pi(n)}).$$
Множества $U(\Psi)$, где Ψ — последовательности отображений $F(X) \to \mathcal{U}$, образуют базу в единице топологии свободной топологической группы $F(X)$.

Как и выше, вместо окружений диагонали можно рассматривать нормальные или произвольные открытые покрытия пространства X или непрерывные псевдометрики на X. В первом случае ψ_n ставит в соответствие каждому элементу $\mathbf{g} \in F(X)$ некоторое нормальное (или произвольное) открытое покрытие пространства X и
$$U(\psi_n) = \{\mathbf{g} \cdot x^\varepsilon \cdot y^{-\varepsilon} \cdot \mathbf{g}^{-1} \colon \mathbf{g} \in F(X),\ x, y \in U \in \psi_n(\mathbf{g}),\ \varepsilon = \pm 1\},$$
а во втором ψ_n ставит в соответствие каждому $\mathbf{g} \in F(X)$ некоторую непрерывную псевдометрику на X и
$$U(\psi_n) = \{\mathbf{g} \cdot x^\varepsilon \cdot y^{-\varepsilon} \cdot \mathbf{g}^{-1} \colon \mathbf{g} \in F(X),\ \psi_n(\mathbf{g})(x, y) < 1,\ \varepsilon = \pm 1\};$$
определение множеств $U(\Psi)$ остаётся тем же. Вместо единичных шаров относительно последовательности псевдометрик можно рассматривать шары радиусов $1/2^n$ относительно одной псевдометрики (см. [50, 5.4.H(c), 5.1.A(c)]); отсюда получается ещё одна модификация того же описания: зафиксируем произвольное отображение ψ, которое каждому элементу $\mathbf{g}$ группы $F(X)$ ставит в соответствие непрерывную псевдометрику на X. Положим
$$U_n(\psi) = \{\mathbf{g} \cdot x^\varepsilon \cdot y^{-\varepsilon} \cdot \mathbf{g}^{-1} \colon \mathbf{g} \in F(X),\ \psi(\mathbf{g})(x, y) < 1/2^n,\ \varepsilon = \pm 1\}$$
и
$$U(\psi) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\pi\in S_n} U_{\pi(1)}(\psi) \cdot U_{\pi(2)}(\psi) \cdot \ldots \cdot U_{\pi(n)}(\psi).$$
Множества $U(\psi)$ образуют базу в единице топологии группы $F(X)$.

1.5. Описание топологии свободной группы в терминах продолжения псевдометрик до полунорм для псевдокомпактных пространств

Первую попытку описать семейство полунорм, определяющих топологию свободной группы, сделал М. Г. Ткаченко в 1984 г. [34, 35] (полунормы на свободной группе строил и Граев, но случаи, когда его семейства полунорм определяют свободную топологию на $F(X)$, настолько редки — X должно быть P-пространством со специальными свойствами, — что сам Граев даже не пытался их описать). Ткаченко назвал (групповую) топологию, которую его полунормы определяют на свободной группе произвольного тихоновского пространства, *ρ-топологией* и обозначил свободную группу с этой топологией через $F_\rho(X)$. Топология ρ обладает рядом замечательных свойств [34]; в частности,

- топология ρ является самой сильной топологией на свободной группе среди всех групповых топологий $\mathcal{T}$, индуцирующих на X исходную топологию и обладающих тем свойством, что X тонко в $(F(X), \mathcal{T})$ (т. е. для любой открытой окрестности единицы U в $(F(X), \mathcal{T})$ найдётся такая открытая окрестность единицы V в $(F(X), \mathcal{T})$, что $x^{-1}Vx \subseteq U$ для всех $x \in X$). Более того, если $f\colon X \to G$ — непрерывное отображение и $f(X)$ тонко в G, то f продолжается до непрерывного гомоморфизма $\hat{f}\colon F_\rho(X) \to G$;
- группа $F_\rho(X)$ полна по Вейлю в том и только том случае, если X полно по Дьёдонне;
- если пространство X псевдокомпактно, то топология ρ совпадает с топологией свободной топологической группы $F(X)$. Более того, если X не является P-пространством, то ρ-топология совпадает со свободной топологией тогда и только тогда, когда X псевдокомпактно.

Полунормы, определяющие топологию ρ, строятся так. Пусть d — непрерывная псевдометрика на пространстве X. Для каждого $\mathbf{g} \in S^*(X)$ определим число $\|\mathbf{g}\|_d$ индукцией по длине слова $\mathbf{g}$. Положим $\|\mathbf{e}\|_d = 0$. Для $x, y \in X$ полагаем $\|xy^{-1}\|_d = \|x^{-1}y\|_d = d(x, y)$. Предположим, что $m \in \mathbb{N}$ и для каждого $\mathbf{g} \in S^*(X)$ длины не более $2m$ число $\|\mathbf{g}\|_d$ уже определено. Пусть $n = m+1$ и $\mathbf{g} \in S^*(X)$, $l(\mathbf{g}) = 2n$. Рассмотрим всевозможные записи слова $\mathbf{g}$ в виде $\mathbf{g} \equiv \mathbf{ab}$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in S^*(X) \setminus \{\mathbf{e}\}$. Пусть $\mathbf{g} \equiv \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 \equiv \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 \equiv \ldots \equiv \mathbf{a}_k\mathbf{b}_k$ — список всех таких представлений слова $\mathbf{g}$. Положим $A(\mathbf{g}) = \min\{\|\mathbf{a}_i\|_d + \|\mathbf{b}_i\|_d\colon i = 1, 2, \ldots, k\}$, если этот список непуст, и $A(\mathbf{g}) = \infty$ в противном случае. Величина $A(\mathbf{g})$ определена корректно, так как $l(\mathbf{a}_i) \leqslant 2m$ и $l(\mathbf{b}_i) \leqslant 2m$ для каждого $i \leqslant k$. Слово $\mathbf{g}$ имеет вид $\mathbf{g} \equiv x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_{2n}^{\varepsilon_{2n}}$. Если $\varepsilon_1 = -\varepsilon_{2n}$, т. е. $x_1^{\varepsilon_1} x_{2n}^{\varepsilon_{2n}} \in S^*(X)$, то полагаем $B(\mathbf{g}) = d(x_1, x_{2n}) + 2 \cdot \|\mathbf{h}\|_d$, где $\mathbf{h} \equiv x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_{2n-1}^{\varepsilon_{2n-1}}$, и $\|\mathbf{g}\|_d = \min\{A(\mathbf{g}), B(\mathbf{g})\}$. Если же $\varepsilon_1 = \varepsilon_{2n}$, полагаем $\|\mathbf{g}\|_d = A(\mathbf{g})$.

Мы определили число $\|\mathbf{g}\|_d$ для каждого $\mathbf{g} \in S^*(X)$. Рассматривая свободную группу $F(X)$ как подмножество моноида $S(X)$, состоящее из несократимых слов, мы получаем функцию $\|\cdot\|_d$ на нормальной подгруппе $F^*(X)$ группы $F(X)$. В [35] доказано, что эта функция является полунормой на группе $F^*(X)$; более того, семейство всех полунорм $\|\cdot\|_d$, где d — непрерывные псевдометрики на X, замкнуто относительно сопряжений элементами группы $F(X)$ в том смысле, что для любой непрерывной псевдометрики d и любого $\mathbf{h} \in F(X)$ найдётся такая непрерывная псевдометрика d', что $\|\mathbf{h}^{-1}\mathbf{g}\mathbf{h}\|_{d'} \geqslant \|\mathbf{g}\|_d$. Следовательно (см. [11]), полунормы $\|\cdot\|_d$ порождают групповую топологию на $F(X)$, т. е. множества $\{\mathbf{g} \in F^*(X)\colon \|\mathbf{g}\|_d < 1\}$ являются базой в единице некоторой групповой топологии на $F(X)$. Это и есть топология ρ.

Конструкция Ткаченко отличается от граевского продолжения псевдометрик одной цифрой — двойкой в определении числа $B(\mathbf{g})$. Без этой двойки получались бы инвариантные полунормы — значение полунормы на слове не зависело бы от циклических перестановок букв в слове. Однако для того чтобы получить свободную топологию, одной двойки мало, и даже одной псевдометрики мало — нужно продолжать целые семейства псевдометрик (каждому слову из

$F(X)$ должна быть поставлена в соответствие своя псевдометрика, как в описании 1.4), и в выражении для $B(\mathbf{g})$ норма слова $\mathbf{h}$ должна определяться псевдометрикой, зависящей от x_1 и x_{2n}. Разумеется, псевдометрики, определяющие нормы в выражении для $A(\mathbf{g})$, тоже должны быть разными. Подробное описание полунорм, определяющих свободную топологию, приводится ниже.

Благодаря неинвариантности конструкции Ткаченко его продолжения псевдометрик, в отличие от граевских продолжений, определяют топологию свободной топологической группы для компактов (точнее, для псевдокомпактных пространств). Однако граевская конструкция тоже может быть использована для явного описания топологии свободных групп компактов: нужно рассматривать граевские продолжения псевдометрик не на всю группу $F(X)$, а на её подмножества $F_n(X)$ слов длины не более n. Естественные отображения умножения $\mathbf{i}_n\colon (X \oplus \{\mathbf{e}\} \oplus X^{-1})^n \to F_n(X)$ непрерывны и сюръективны, поэтому все $F_n(X)$ компактны; значит, топология, индуцированная на $F_n(X)$ из свободной топологической группы, совпадает с топологией, индуцированной более слабой граевской топологией, которая получается граевским продолжением всех непрерывных псевдометрик. Таким образом, граевские продолжения определяют топологию на всех $F_n(X)$; для любого компакта X свободная группа $F(X)$ является индуктивным пределом своих подпространств $F_n(X)$ [11], так что открытые множества в $F(X)$ — это в точности те множества U, для которых все пересечения $U \cap F_n(X)$ открыты.

1.6. Граевское продолжение псевдометрик

Сейчас мы наконец приведём подробное описание граевского продолжения псевдометрик.

Пусть d — произвольная псевдометрика на X, ограниченная единицей. Обозначим через $d_{\mathbf{e}}$ псевдометрику на $X \oplus \{\mathbf{e}\}$, определяемую формулой

$$d_{\mathbf{e}}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ d(x,y), & \text{если } x, y \in X, \\ 1 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

для $x, y \in X \oplus \{\mathbf{e}\}$. Псевдометрика $d_{\mathbf{e}}$ продолжается до максимальной инвариантной псевдометрики $\hat{d}$ на $F(X)$ (см. [11, n°23]) — граевского продолжения псевдометрики $d_{\mathbf{e}}$. Каждой инвариантной псевдометрике на группе однозначно соответствует инвариантная полунорма. Полунорму, соответствующую псевдометрике $\hat{d}$, обозначим через $\|\cdot\|_{\hat{d}}$; тогда $\|\mathbf{g}\|_{\hat{d}} = \hat{d}(\mathbf{e},\mathbf{g})$ и $\hat{d}(\mathbf{g},\mathbf{h}) = \|\mathbf{g}\mathbf{h}^{-1}\|_{\hat{d}}$ для $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in F(X)$.

Обозначим через $\tilde{d}$ псевдометрику на $\tilde{X}$, определяемую формулой

$$\tilde{d}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ d_{\mathbf{e}}(x,y), & \text{если } x, y \in X \oplus \{\mathbf{e}\}, \\ d_{\mathbf{e}}(x^{-1},y^{-1}), & \text{если } x, y \in (X \oplus \{\mathbf{e}\})^{-1}, \\ 2 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

для $x, y \in \tilde{X}$. Граевскую псевдометрику $\hat{d}$ можно определить следующей формулой [11]: для $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in F(X)$

$$\hat{d}(\mathbf{g}, \mathbf{h}) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} \tilde{d}(g_i, h_i) \colon n \in \mathbb{N},\ (g_1, g_2, \dots, g_n) \in \tilde{X}^n,\ g_1 g_2 \dots g_n = \mathbf{g}, \\ (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \tilde{X}^n,\ h_1 h_2 \dots h_n = \mathbf{h} \right\}.$$

Таким образом,

$$\|\mathbf{g}\|_{\hat{d}} = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} \tilde{d}(g_i, x_i) \colon n \in \mathbb{N},\ (g_1, g_2, \dots, g_n) \in \tilde{X}^n,\ g_1 g_2 \dots g_n = \mathbf{g}, \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \tilde{X}^n,\ x_1 x_2 \dots x_n = \mathbf{e} \right\}. \tag{1}$$

Граев доказал [11], что в (1) достигается минимум, и притом на несократимой записи слова $\mathbf{g}$, т. е.

$$\|\mathbf{g}\|_{\hat{d}} = \min\left\{ \sum_{i=1}^{n} \tilde{d}(g_i, x_i) \colon g_1 g_2 \dots g_n \equiv \mathbf{g},\ x_1 x_2 \dots x_n = \mathbf{e} \right\}.$$

В [29] была найдена эффективная формула для вычисления граевской полунормы. В ней используется понятие *схем сокращения*, или просто *схем*, слов из $S^*(X)$. Формальное определение этого понятия будет дано в следующем подразделе. Неформально схему слова $\mathbf{g} \in S^*(X)$ можно понимать как набор дужек, которые нарисованы над последовательностью букв, представляющей собой запись слова $\mathbf{g}$, и соединяют разные буквы. Дужка может соединять только буквы с разными степенями, т. е. буквы вида x^{ε} и $y^{-\varepsilon}$; разные дужки не могут пересекаться (но могут быть нарисованы друг под другом), в частности, никакие две дужки не могут выходить из одной и той же буквы. Пусть $\mathbf{g} \equiv x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} \in S^*(X)$ и σ — такой набор дужек. Мы будем писать $\langle i, j \rangle \in \sigma$, если одна из дужек соединяет буквы $x_i^{\varepsilon_i}$ и $x_j^{\varepsilon_j}$. Эффективная формула, предложенная в [29], такова: если $\mathbf{g} \in F^*(X)$ и $\mathbf{g} = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} \in S^*(X)$, то

$$\|\mathbf{g}\|_{\hat{d}} = \min_{\substack{\sigma \text{ — схема} \\ \text{слова } x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}}} \sum_{\langle i,j \rangle \in \sigma} d(x_i, x_j). \tag{2}$$

Для $\mathbf{g} \in F(X) \setminus F^*(X)$ полагаем $\|\mathbf{g}\|_{\hat{d}} = l(\mathbf{g})$. В качестве $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ можно брать любую запись слова $\mathbf{g}$ — например, несократимую; результат от выбора записи не зависит.

Для продолжения псевдометрик, предложенного Ткаченко, тоже существует эффективная формула, использующая схемы, но в ней уже нужно учитывать «глубину» каждой дужки, т. е. количество дужек, нарисованных над ней: для $\mathbf{g} = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} \in S^*(X)$

$$\|\mathbf{g}\|_{\hat{d}} = \min_{\substack{\sigma \text{ — схема} \\ \text{слова } x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}}} \sum_{\substack{\langle i,j \rangle \in \sigma \\ \text{глубина } \langle i,j \rangle \\ \text{равна } k}} 2^k \cdot d(x_i, x_j)$$

(здесь $\|\cdot\|_d$ — ткаченковское продолжение псевдометрики d); эту формулу несложно вывести из индуктивной конструкции Ткаченко.

Для получения описания свободной топологии эту формулу нужно существенно усложнить: учитывать не только глубину дужек, но сами буквы, соединённые дужками, и продолжать нужно не одну псевдометрику, а сложное семейство псевдометрик. Для этого приходится формализовать понятие схемы слова и ввести на схемах некоторые естественные операции.

1.7. Схемы слов

В этом разделе мы вводим (или, скорее, напоминаем) понятие схем слов; по существу оно представляет собой не что иное, как хорошо известную конструкцию обхода дерева, которая используется для построения равных единице слов в свободной группе, только рёбра дерева помечаются не одной, а двумя буквами. Схемы слов и операции на них в том виде, в каком они определены в этом разделе, были введены О. В. Сипачёвой в [98], где они применялись для построения продолжений псевдометрик до полунорм, определяющих свободную топологию.

Пусть $\mathbf{g} \equiv x_1^{\varepsilon_1} \dots x_{2n}^{\varepsilon_{2n}} \in S^*(X)$. Рассмотрим такое разбиение

$$\langle i_1, j_1\rangle, \dots, \langle i_n, j_n\rangle$$

множества $\{1, \dots, 2n\}$ на пары, что $i_s < j_s$, $\varepsilon_{i_s} = -\varepsilon_{j_s}$ и для всех $s, t \leqslant n$ либо отрезки $[i_s, j_s], [i_t, j_t]$ не пересекаются, либо один из них (строго) содержится в другом. Мы называем множество $\boldsymbol{\sigma} = \{\langle i_s, j_s\rangle : 1 \leqslant s \leqslant n\}$ *схемой* слова $\mathbf{g}$. Слово $\mathbf{g}$ вместе с фиксированной схемой $\boldsymbol{\sigma}$ обозначается как $[\mathbf{g}, \boldsymbol{\sigma}]$ или просто как $[\mathbf{g}]$. Пустое слово $\mathbf{e}$ допускает только одну схему — пустое множество.

Положим

$$[S^*(X)] = \{[\mathbf{g}, \boldsymbol{\sigma}] : \mathbf{g} \in S^*(X),\ \boldsymbol{\sigma} \text{ — схема слова } \mathbf{g}\}.$$

Элементы множества $[S^*(X)]$ мы называем словами, так же как и элементы моноида $S^*(X)$.

Символ $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}}$ всегда обозначает схему слова $\mathbf{g}$, и мы всегда подразумеваем, что $[\mathbf{g}] = [\mathbf{g}, \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}}]$.

Пусть $[\mathbf{a}], [\mathbf{b}] \in [S^*(X)]$ и $l(\mathbf{a}) = n$. Положим

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{ab}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{a}} \cup \{\langle i+n, j+n\rangle : \langle i, j\rangle \in \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{b}}\}.$$

Тогда $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{ab}}$ является схемой слова $\mathbf{ab}$ (*полугруппового* произведения слов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$). Мы пишем $[\mathbf{g}] = [\mathbf{a}][\mathbf{b}]$, если $\mathbf{g} \equiv \mathbf{ab}$ и схема $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}}$ совпадает с $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{ab}}$.

Пусть $[\mathbf{g}] \in [S^*(X)]$ и $l(\mathbf{g}) = n$. Положим

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}^{-1}} = \{\langle n-j+1, n-i+1\rangle : \langle i, j\rangle \in \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}}\}.$$

Тогда $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}^{-1}}$ — схема слова $\mathbf{g}^{-1}$. Мы пишем $[\mathbf{g}^{-1}]$ для обозначения слова $\mathbf{g}^{-1}$ со схемой $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}^{-1}}$.

Пусть $\mathbf{g} \in [S^*(X)]$, $l(\mathbf{g}) = n$ и $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{g}$ — схема слова $\mathbf{g}$. Назовём слово $[\mathbf{g}, \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{g}]$ *неразложимым*, если $\mathbf{g}$ непусто (т. е. $n \geqslant 2$) и $\langle 1, n\rangle \in \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{g}$. Для $[\mathbf{g}], [\tilde{\mathbf{g}}] \in [S^*(X)]$ отношение $[\mathbf{g}] = [x^\varepsilon[\tilde{\mathbf{g}}]y^{-\varepsilon}]$ означает, что $\mathbf{g} \equiv x^\varepsilon \tilde{\mathbf{g}} y^{-\varepsilon}$ и

$$\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{g} = \{\langle 1, l(\mathbf{g})\rangle\} \cup \{\langle i+1, j+1\rangle \colon (i,j) \in \boldsymbol{\sigma}_{\tilde{\mathbf{g}}}\}.$$

Ясно, что слово неразложимо тогда и только тогда, когда оно имеет вид $[x^\varepsilon[\tilde{\mathbf{g}}]y^{-\varepsilon}]$.

Замечание 1.1. Всякое непустое слово $[\mathbf{g}] \in [S^*(X)]$ можно представить как произведение $[\mathbf{g}_1][\mathbf{g}_2]$, где $\mathbf{g}_1$ — произвольное (возможно, пустое) слово и $[\mathbf{g}_2]$ — неразложимое слово из $[S^*(X)]$, причём единственным образом. В самом деле, для $\mathbf{g} \equiv x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$ найдём содержащую n пару $\langle k, n\rangle \in \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{g}$ и положим

$$\mathbf{g}_1 \equiv x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}, \quad \mathbf{g}_2 \equiv x_k^{\varepsilon_k} \ldots x_n^{\varepsilon_n},$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}_1} = \{\langle i,j\rangle \in \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{g} \colon j < k\}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}_2} = \{\langle i-k+1, j-k+1\rangle \colon \langle i,j\rangle \in \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{g},\ i \geqslant k\}.$$

Пусть $\mathbf{h} \equiv x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_n^{\varepsilon_n} \in S(X)$ и $[\mathbf{g}], [\tilde{\mathbf{g}}] \in [S^*(X)]$. Мы будем писать $[\mathbf{g}] = [\mathbf{h}[\tilde{\mathbf{g}}]\mathbf{h}^{-1}]$, если

$$[\mathbf{g}] = [x_1^{\varepsilon_1}[x_2^{\varepsilon_2}[\ldots[x_n^{\varepsilon_n}[\tilde{\mathbf{g}}]x_n^{-\varepsilon_n}]\ldots]x_2^{-\varepsilon_2}]x_1^{-\varepsilon_1}].$$

Назовём слово $[\mathbf{g}]$ *разложимым*, если оно непусто и не является неразложимым. Ясно, что слово $[\mathbf{g}]$ разложимо в том и только том случае, если существуют $n \geqslant 2$ и неразложимые слова $[\mathbf{g}_i]$, $i = 1, \ldots, n$, для которых $[\mathbf{g}] = [\mathbf{g}_1] \ldots [\mathbf{g}_n]$, причём это представление слова $[\mathbf{g}]$ единственно.

Пусть $[\mathbf{g}] \in [S^*(X)]$, $\mathbf{g} \equiv \mathbf{a}x^\varepsilon x^{-\varepsilon}\mathbf{b}$ для некоторых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in S(X)$, $\hat{\mathbf{g}} \equiv \mathbf{ab}$ и $l(\mathbf{a}) = k - 1$. Ясно, что $\hat{\mathbf{g}} \in S^*(X)$. Положим

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{\hat{\mathbf{g}}} = \{&\langle i,j\rangle \in \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{g} \colon j < k\} \cup \\ &\cup \{\langle i, j-2\rangle \colon \langle i,j\rangle \in \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{g},\ i < k,\ j > k+1\} \cup \\ &\cup \{\langle i-2, j-2\rangle \colon \langle i,j\rangle \in \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{g},\ i > k+1\} \cup \\ &\cup \{\langle i, j-2\rangle \colon \langle i,k\rangle \in \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{g},\ \langle k+1, j\rangle \in \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{g}\}.\end{aligned}$$

Заметим, что если $\langle k, k+1\rangle \in \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{g}$, то последнее множество в этом объединении пусто.

Легко проверить, что $\boldsymbol{\sigma}_{\hat{\mathbf{g}}}$ является схемой слова $\hat{\mathbf{g}}$. Мы используем обозначение $[\hat{\mathbf{g}}]$ для слова $\hat{\mathbf{g}}$ со схемой $\boldsymbol{\sigma}_{\hat{\mathbf{g}}}$.

1.8. Описание топологии свободной группы в терминах продолжения семейств псевдометрик до полунорм для произвольных пространств

Этот раздел посвящён построению определяющего топологию семейства непрерывных полунорм на свободной топологической группе. Как уже отмечалось, такое описание топологии намного сложнее всех других известных описаний, но пока оно зарекомендовало себя как самое полезное. Это описание было получено О. В. Сипачёвой в [98] и использовано для доказательства ряда важных утверждений о свойствах свободных топологических групп [98,99]; бóльшая их часть цитируется в следующем разделе.

Пусть $\langle \mathbf{P}, \leqq \rangle$ — частично упорядоченное множество.

Определим отношение $\trianglelefteq$ на семействе всех непустых подмножеств в $\mathbf{P}$ следующим правилом:

$$A \trianglelefteq B, \text{ если для всякого } \alpha \in A \text{ существует такое } \beta \in B, \text{ что } \alpha \leqq \beta.$$

Очевидно, отношение $\trianglelefteq$ транзитивно.

Для $\alpha \in \mathbf{P}$ и $B \subseteq \mathbf{P}$ мы полагаем

$$B(\alpha) = \{\beta \in B \colon \alpha \leqq \beta\}.$$

Замечание 1.2. Если A — непустая антицепь в $\mathbf{P}$ и $B \subseteq \mathbf{P}$, то семейство лучей $\{B(\alpha) \colon \alpha \in A\}$ дизъюнктно (собственно, это и есть определение антицепи).

Возьмём частично упорядоченное множество $\langle \mathbf{P}, \leqq \rangle$.

Пусть $\mathcal{A}$ — счётное семейство непустых подмножеств в $\mathbf{P}$, перенумерованных неотрицательными целыми числами:

$$\mathcal{A} = \{A_k \colon k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Рассмотрим множество $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathbf{P})$ троек $\mathfrak{s} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathcal{D} \rangle$, удовлетворяющих следующим условиям:

0°. а)

$$\mathcal{A} = \{A_k \colon k \in \mathbb{N}_0\},$$

где A_k — непустые дизъюнктные антицепи в $\mathbf{P}$;

б)

$$\mathcal{F} = \{F_k \colon k \in \mathbb{N}_0\} \text{ —}$$

набор семейств

$$F_k = \{f_\alpha \colon \alpha \in A_k\}$$

непрерывных неотрицательнозначных функций на X, причем множество $\{\alpha \in A_k \colon f_\alpha(x) \neq 0\}$ конечно для любых $x \in X$ и $k \in \mathbb{N}_0$;

в)

$$\mathcal{D} = \{d_k \colon k \in \mathbb{N}_0\} \text{ —}$$

семейство непрерывных псевдометрик на X.

Всякий раз, когда мы говорим об элементе $\mathfrak{s}$ семейства $\mathfrak{S}$, мы подразумеваем, что $\mathfrak{s} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathcal{D} \rangle$ и множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{D}$ имеют вид, указанный в условии 0°. Символы $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{D}$, A, F, f и d со штрихами, индексами и иными пометками относятся к $\mathfrak{s}$ с теми же пометками. Например, $\mathfrak{s}' = \langle \mathcal{A}', \mathcal{F}', \mathcal{D}' \rangle$, $\mathcal{A}' = \{A'_k \colon k \in \mathbb{N}_0\}$ и т. п.

1°. Если $k < m$, то

а) $A_k \trianglelefteq A_m$;

б) для любых $x \in X$ и $\alpha \in A_k$

$$f_\alpha(x) \leqslant \sum_{\beta \in A_m(\alpha)} f_\beta(x);$$

в) для любых $x, y \in X$

$$2 \cdot d_k(x,y) \leqslant d_m(x,y).$$

2°. Для любых x, y и k

а)

$$\sum_{\alpha \in A_k} f_\alpha(x) \geqslant 1;$$

б)

$$2 \cdot \sum_{\alpha \in A_k} |f_\alpha(x) - f_\alpha(y)| \leqslant d_k(x,y).$$

Прежде чем формулировать последнее условие на семейство $\mathfrak{S}$, мы должны упорядочить элементы этого семейства.

Пусть $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}' \in \mathfrak{S}$. Мы пишем $\mathfrak{s} < \mathfrak{s}'$, если для каждого $k \in \mathbb{N}_0$ имеют место следующие отношения:

1)

$$A_k \trianglelefteq A'_k;$$

2) для любых $x \in X$ и $\alpha \in A_k$

$$f_\alpha(x) \leqslant \sum_{\beta \in A'_k(\alpha)} f'_\beta(x);$$

3) для любых $x, y \in X$

$$2 \cdot d_k(x,y) \leqslant d'_k(x,y).$$

Как обычно, запись $\mathfrak{s} \leqslant \mathfrak{s}'$ означает, что $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}'$ или $\mathfrak{s} < \mathfrak{s}'$.

3°. Каждому $\mathfrak{s} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathcal{D} \rangle$ сопоставлено семейство

$$\Big\{\mathfrak{s}_\alpha = \langle \mathcal{A}_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, \mathcal{D}_\alpha \rangle \in \mathfrak{S} \colon \alpha \in \bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} A_k \Big\}$$

так, что $\mathfrak{s}_\alpha > \mathfrak{s}$ для всех $\alpha \in \bigcup \mathcal{A}$, и если $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}' \in \mathfrak{S}$, $\alpha \in \bigcup \mathcal{A}$, $\alpha' \in \bigcup \mathcal{A}'$, $\mathfrak{s} \leqslant \mathfrak{s}'$, $\alpha \leqq \alpha'$ и $\mathfrak{s} \neq \mathfrak{s}'$ или $\alpha \neq \alpha'$, то $\mathfrak{s}_\alpha < \mathfrak{s}'_{\alpha'}$.

Заметим, что условие 3° подразумевает наличие у семейства $\mathfrak{S}$ сложной структуры: поскольку тройки $\mathfrak{s}_\alpha$, сопоставленные тройкам $\mathfrak{s}$, принадлежат семейству $\mathfrak{S}$, этим тройкам тоже сопоставлены тройки из $\mathfrak{S}$ и т. д. Заметим также, что не все частично упорядоченные множества $\mathbf{P}$ допускают существование непустого семейства $\mathfrak{S}$ со свойствами 0°—3°: например, 0°а) влечёт, что $\mathbf{P}$ должно быть бесконечным. Ниже предполагается, что $\mathfrak{S}$ — непустое семейство, определённое для подходящего упорядоченного множества $\mathbf{P}$ и удовлетворяющее условиям 0°—3°.

Возьмём $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$. Сейчас мы построим функции $N_\mathfrak{s}$ и $\bar{N}_\mathfrak{s}$ на множестве $[S^*(X)]$, т. е. определим числа $N_\mathfrak{s}([\mathbf{g}])$ и $\bar{N}_\mathfrak{s}([\mathbf{g}])$ для каждого $[\mathbf{g}]$ из $[S^*(X)]$. Мы будем строить эти функции индукцией по длине слова $\mathbf{g}$.

Положим $N_\mathfrak{s}([\mathbf{e}]) = \bar{N}_\mathfrak{s}([\mathbf{e}]) = 0$ для всех $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$.

Пусть $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ и $[\mathbf{g}] \in [S^*(X)]$, $l(\mathbf{g}) > 0$. Допустим, что для всех $\mathfrak{s}' \in \mathfrak{S}$ и $[\mathbf{h}] \in [S^*(X)]$ с $l(\mathbf{h}) < l(\mathbf{g})$ числа $N_{\mathfrak{s}'}([\mathbf{h}])$ и $\bar{N}_{\mathfrak{s}'}([\mathbf{h}])$ уже определены. Возможны два случая.

А. Слово $[\mathbf{g}]$ разложимо, т. е. $[\mathbf{g}] = [\mathbf{g}_1] \dots [\mathbf{g}_n]$, где $n \geqslant 2$ и все $[\mathbf{g}_i]$ неразложимы; ясно, что $l(\mathbf{g}_i) < l(\mathbf{g})$ для всех $i \leqslant n$. В этом случае мы полагаем

$$N_\mathfrak{s}([\mathbf{g}]) = \sum_{i \leqslant n} \bar{N}_\mathfrak{s}([\mathbf{g}_i]) \quad \text{и} \quad \bar{N}_\mathfrak{s}([\mathbf{g}]) = \min\{N_\mathfrak{s}([\mathbf{g}]), 1\}.$$

Б. Слово $[\mathbf{g}]$ неразложимо, т. е. $[\mathbf{g}] = [x^\varepsilon [\tilde{\mathbf{g}}] y^{-\varepsilon}]$ для некоторых x, y, ε и $\tilde{\mathbf{g}}$. Положим

$${}^kN_\mathfrak{s}([\mathbf{g}]) = 2^k \cdot \sum_{\alpha \in A_k} \min\{f_\alpha(x), f_\alpha(y)\} \cdot \bar{N}_{\mathfrak{s}_\alpha}([\tilde{\mathbf{g}}]) + \frac{1}{2^k} + 2^k \cdot d_k(x, y)$$

(сумма в этом выражении определена в силу условия 0°б)) и

$$N_\mathfrak{s}([\mathbf{g}]) = \inf_{k \in \mathbb{N}_0} \{{}^kN_\mathfrak{s}([\mathbf{g}])\}.$$

Наконец, мы полагаем

$${}^k\bar{N}_\mathfrak{s}([\mathbf{g}]) = \min\{{}^kN_\mathfrak{s}([\mathbf{g}]), 1\}$$

и

$$\bar{N}_\mathfrak{s}([\mathbf{g}]) = \inf_{k \in \mathbb{N}_0} \{{}^k\bar{N}_\mathfrak{s}([\mathbf{g}])\} = \min\{N_\mathfrak{s}([\mathbf{g}]), 1\}.$$

Мы определили функции $N_\mathfrak{s}$ и $\bar{N}_\mathfrak{s}$. Теперь можно переходить непосредственно к определению обещанных полунорм.

Пусть $K = \{\mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_n\}$ — непустое конечное подмножество семейства $\mathfrak{S}$. Для каждого $\mathbf{g} \in F(X)$ положим

$$\|g\|_K = \begin{cases} \min\Big\{ \sum\limits_{i \leqslant n} \bar{N}_{\mathfrak{s}_i}([\mathbf{g}, \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{g}]) \colon \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{g} \text{ — схема } \mathbf{g} \Big\}, & \text{если } \mathbf{g} \in S^*(X), \\ n & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В [98] доказано, что функция $\|\cdot\|_K$ является полунормой на $F(X)$. Кроме того, для любых $\mathbf{h} \in F(X)$ и $a > 0$ существуют такие конечное множество $L \subseteq \mathfrak{S}$ и положительное число b, что если $\mathbf{g} \in F(X)$, $\|\mathbf{g}\|_L < b$ и $\mathbf{u} = \mathbf{hgh}^{-1} \in F(X)$, то $\|\mathbf{u}\|_K < a$. Из этих свойств нетрудно вывести (по существу это проделано в [11]), что семейство

$$\mathcal{N} = \{\|\cdot\|_K \colon K \text{ — конечное подмножество семейства } \mathfrak{S}\}$$

порождает групповую топологию на группе $F(X)$, т. е. семейство

$$\mathcal{B} = \{U_K(a) \colon K \text{ — конечное подмножество семейства } \mathfrak{S},\ a > 0\},$$

где

$$U_K(a) = \{\mathbf{g} \in F(X) \colon \|\mathbf{g}\|_K < a\},$$

удовлетворяет всем аксиомам базы открытых окрестностей единицы.

Итак, семейство $\mathcal{N}$ порождает групповую топологию на $F(X)$. Однако это ещё не свободная топология группы $F(X)$, поскольку до сих пор мы рассматривали только одно семейство $\mathfrak{S}$. Для того чтобы получить свободную топологию, нужно взять все подходящие $\mathfrak{S}$. Топология свободной топологической группы $F(X)$ порождается семейством полунорм

$$\begin{aligned}\mathfrak{N} = \bigcup \{\{\|\cdot\|_K \colon & K \text{ — конечное подмножество множества } \mathfrak{S}(\mathbf{P})\} \colon \\ & \mathbf{P} \text{ — частично упорядоченное множество} \\ & \text{и } \mathfrak{S}(\mathbf{P}) \text{ — семейство, удовлетворяющее условиям } 0^\circ\text{—}3^\circ\}.\end{aligned}$$

В некоторых случаях, когда пространство X обладает достаточно представительным набором «удобных» псевдометрик, это описание топологии выглядит значительно проще; в следующем разделе продемонстрировано его применение в случае нульмерного (в смысле $\dim$) пространства X, когда псевдометрики можно считать неархимедовыми (более того, принимающими значения 0 и 1), а разбиения единицы — наборами функций, тоже принимающих значения 0 и 1 и имеющих непересекающиеся носители. Ситуация настолько упрощается, что описание свободной топологии трудно узнать; даже схемы слов оказываются ненужными — полунормы определяются по индукции подобно полунормам Ткаченко. И тем не менее это именно то описание топологии, которое представлено выше.

1.9. Описания топологии свободной абелевой группы

Поскольку свободная абелева топологическая группа является фактор-группой свободной топологической группы по коммутанту, из описания В. Г. Пестова (описание 1.4) сразу получаются описания окрестностей нуля в свободной абелевой группе (в абелевой группе $\mathbf{g}x^\varepsilon y^{-\varepsilon}\mathbf{g}^{-1} = x^\varepsilon y^{-\varepsilon}$, поэтому все $\psi_n(\mathbf{g})$ можно заменить на $\psi_n(\mathbf{0})$; так что отображения ψ_n вообще оказываются ненужными — достаточно зафиксировать одну последовательность окружений диагонали, покрытий или псевдометрик; перестановки тоже не нужны — от порядка слагаемых ничего не зависит).

I. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ зафиксируем произвольное окружение диагонали $W_n \in \mathcal{U}$ в $X \times X$. Положим $\mathbf{W} = \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$U(W_n) = \{\varepsilon x - \varepsilon y \colon (x, y) \in W_n,\ \varepsilon = \pm 1\}$$

и

$$U(\mathbf{W}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(U(W_1) + U(W_2) + \ldots + U(W_n)\big).$$

Множества $U(\mathbf{W})$, где $\mathbf{W}$ — последовательности равномерных окружений диагонали, образуют базу в нуле топологии свободной абелевой топологической группы $A(X)$.

II. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ зафиксируем произвольное нормальное (или произвольное открытое) покрытие γ_n пространства X. Положим $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$U(\gamma_n) = \{\varepsilon x - \varepsilon y\colon (x, y) \in U \in \gamma_n,\ \varepsilon = \pm 1\}$$

и

$$U(\Gamma) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(U(\gamma_1) + U(\gamma_2) + \ldots + U(\gamma_n)\big).$$

Множества $U(\Gamma)$, где Γ — последовательности нормальных (или произвольных открытых) покрытий образуют базу в нуле топологии свободной абелевой топологической группы $A(X)$.

III. Возьмём произвольную непрерывную псевдометрику d на X и положим

$$U_n(d) = \{\varepsilon x - \varepsilon y\colon d(x, y) < 1/2^n,\ \varepsilon = \pm 1\}$$

и

$$U(d) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(U_1(d) + U_2(d) + \ldots + U_n(n)\big).$$

Множества $U(d)$, где d — непрерывные псевдометрики на X, образуют базу в нуле топологии свободной абелевой топологической группы $A(X)$.

Из граевской конструкции продолжения псевдометрик немедленно вытекает другое описание того же сорта (см. также [32]): для непрерывной псевдометрики d на X положим

$$U(d) = \left\{x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \ldots + x_n - y_n\colon n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{n} d(x_i, y_i) < 1\right\}.$$

Семейство

$$\{U(d)\colon d \text{ — непрерывная псевдометрика на } X\}$$

образует базу в нуле топологии свободной абелевой топологической группы $A(X)$.

Легко понять, как выглядят максимальные непрерывные полунормы $\|\cdot\|_d$ на группе $A(X)$, определяющие свободную топологию этой группы и продолжающие непрерывные псевдометрики d (см. [32, 44]. Как и выше, достаточно определить эти полунормы на подгруппе

$$A^*(X) = \left\{\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_{2n} x_{2n} \in A(X)\colon n \in \mathbb{N},\ x_i \in X,\ \varepsilon_i = \pm 1,\ \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i = 0\right\} \cup \{\mathbf{0}\}$$

(эта подгруппа открыта и замкнута в $A(X)$, будучи ядром непрерывного гомоморфизма $\hat{f}\colon A(X) \to \{0, 1\}$, продолжающего непрерывное отображение $f\colon X \to \{0, 1\}$, определённое правилом $f(x) = 1$ для всех $x \in X$). На $A(X) \setminus A^*(X)$ полунормы можно продолжить, например положив $\|\mathbf{g}\|_d = l(\mathbf{g})$.

Итак, для $\mathbf{g} \in A^*(X)$ мы имеем

$$\|\mathbf{g}\|_d = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} d(x_i, y_i) \colon \mathbf{g} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i),\ x_i, y_i \in X \right\}.$$

Если запись $\mathbf{g} = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)$ сократима, т. е. сумма содержит слагаемые вида $x - z$ и $z - y$, то эти слагаемые можно заменить на одно слагаемое $x - y$ — сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} d(x_i, y_i)$ при такой замене не увеличится; таким образом, достаточно рассматривать несократимые записи. Получаем следующую формулу (по-видимому, впервые в явном виде её выписал В. В. Успенский в [44]): если

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i - \sum_{j=1}^{n} b_j y_j, \tag{3}$$

где $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots y_n \in X$ попарно различны (т. е. запись (3) несократима), а a_i и b_j — положительные целые числа, для которых $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, то

$$\|\mathbf{g}\|_d = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} d(x_i, y_i) \colon \right.$$
$$\left. c_{ij} \text{ — неотрицательные целые, } \sum_{j=1}^{n} c_{ij} = a_i,\ \sum_{i=1}^{m} c_{ij} = b_i \right\}. \tag{4}$$

Минимум берётся по всем матрицам (c_{ij}) размера $m \times n$, у которых суммы элементов каждой строки и каждого столбца имеют предписанные значения.

Если рассматривать слова, представляющие собой формальные линейные комбинации элементов X с произвольными вещественными (а не только с целыми) коэффициентами, то получится свободное вещественное векторное пространство $L(X)$. На этом пространстве можно определить топологию, которая превращает $L(X)$ в свободное вещественное локально выпуклое пространство: всякое непрерывное отображение X в вещественное ЛВП E продолжается до непрерывного линейного отображения $L(X) \to E$. Полунормы, определяющие топологию свободного ЛВП, получаются из непрерывных псевдометрик точно так же — нужно только заменить в формуле (4) «целые» на «вещественные» (разумеется, в записи (3) коэффициенты тоже должны быть не целыми, а вещественными).

Группа $A(X)$ естественно вкладывается в $L(X)$ в качестве подгруппы. Более того, она является топологической подгруппой в $L(X)$ — это теорема Ткаченко—Успенского. М. Г. Ткаченко объявил этот результат в 1983 г. [32]; он заметил, что если взять произвольную непрерывную псевдометрику d на X, продолжить её (граевским методом) до непрерывной полунормы на $L(X)$ и рассмотреть ограничение этой полунормы на $A(X)$, то получится в точности граевское продолжение псевдометрики d до полунормы $\|\cdot\|_d$ на $A(X)$. Это утверждение верно, однако оно нуждается в доказательстве: не очевидно, что если все коэффициенты в записи (3) целые, то минимум в формуле, определяющей норму, достигается на целочисленной матрице (c_{ij}). Полное доказательство этого факта было дано В. В. Успенским в [44].

На самом деле граевские псевдометрики имеют значительно более глубокие корни, чем теория свободных топологических групп. Пусть $X = (X, d)$ — метрическое пространство. Рассмотрим классическую транспортную задачу, интерпретируя значение метрики $d(x, y)$ как стоимость перевозки единицы массы груза из x в y: предположим, что груз единичной массы распределён между пунктами $x_1, \ldots, x_n \in X$, причём для каждого i в x_i хранится масса λ_i (так что $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$). Допустим, что мы хотим перевезти этот груз в пункты $y_1, \ldots, y_m$, причём так, чтобы в пункте y_j оказалась масса μ_j $(j = 1, \ldots, m)$. Минимальная стоимость такой перевозки известна как расстояние Канторовича между $\sum \lambda_i x_i$ и $\sum \mu_j y_j$. Метрика Канторовича играет весьма важную роль в разных областях математики и прикладных наук, начиная с теории вероятностей и кончая информатикой и теорией хранения данных; недавно вышедший двухтомник [90], посвящённый исключительно метрике Канторовича, даёт полное представление о современных проблемах и результатах, связанных с транспортной задачей. В то же время легко видеть, что метрика Канторовича совпадает с метрикой, порождённой максимальной нормой $\|\cdot\|_d$ на свободном ЛВП $L(X)$, и в качестве таковой может быть аппроксимирована граевской метрикой на $A(X)$ с любой точностью.

2. Применения описания топологии свободной группы в терминах продолжения псевдометрик. Вложения, полнота и нульмерность свободных топологических групп

В этом разделе обсуждаются результаты, которые удаётся получить с помощью описания 1.8 топологии свободной топологической группы в терминах продолжения семейств псевдометрик до полунорм. Самые важные из них — теоремы о вложении и полноте свободных топологических групп.

Пусть Y — подпространство в X. По определению свободной топологической группы вложение Y в X продолжается до непрерывного инъективного гомоморфизма $i\colon F(Y) \to F(X)$. Гомоморфизм i может не быть топологическим вложением, так что в общем случае $F(Y)$ нельзя рассматривать как топологическую подгруппу в $F(X)$; например, алгебраическая оболочка интервала $(0, 1)$ в группе $F([0, 1])$ с топологией, индуцированной из $F([0, 1])$, не совпадает со свободной топологической группой $F((0, 1))$ пространства $(0, 1)$ (топология группы

$F((0,1))$ сильнее) [66]. В тех случаях, когда i является топологическим вложением, мы будем говорить, что $F(Y)$ — *естественная топологическая подгруппа* в $F(X)$. Аналогичную терминологию будем использовать для $A(X)$. Как отмечалось во введении, благодаря граевской конструкции те пары пространств $X \subseteq Y$, для которых $A(Y)$ — естественная подгруппа в $A(X)$, удалось охарактеризовать ещё в 1983 г. (М. Г. Ткаченко [32]); а именно, для подпространства Y в X $A(Y)$ является естественной топологической подгруппой в $A(X)$ тогда и только тогда, когда Y P-вложено в X[3]. Последнее условие означает, что всякая непрерывная псевдометрика на Y продолжается до непрерывной псевдометрики на X. Эквивалентные условия: (i) всякое непрерывное отображение из Y в замкнутое выпуклое подмножество банахова пространства допускает непрерывное продолжение на X; (ii) пространство Y со своей универсальной равномерностью (сильнейшей равномерной структурой, согласованной с его топологией) является равномерным подпространством пространства X с его универсальной равномерностью. В частности, если подпространство Y всюду плотно в X, то оно P-вложено в X тогда и только тогда, когда X лежит в его пополнении по Дьёдонне μY. Один из основных результатов статьи [98] состоит в том, что тот же критерий верен и для свободных топологических групп, а именно, $F(Y)$ является естественной топологической подгруппой в $F(X)$ тогда и только тогда, когда Y P-вложено в X. Как и в абелевом случае, этот критерий немедленно вытекает из того, что значения определяющих топологию свободной группы полунорм зависят только от букв, входящих в несократимые записи слов.

Другая важная проблема, которую удаётся решить с помощью описания 1.8, — это проблема о полноте свободной топологической группы.

Вопрос о полноте свободной абелевой группы $A(X)$ был решён М. Г. Ткаченко в 1983 г. [32] (для абелевых групп полнота по Вейлю совпадает с полнотой по Райкову): $A(X)$ полна тогда и только тогда, когда X полно по Дьёдонне, и пополнение группы $A(X)$ отождествимо с $A(\mu X)$, где μX — пополнение по Дьёдонне пространства X. (Кстати, Ткаченко получил этот результат с помощью явного описания топологии свободной абелевой топологической группы.) Полученное О. В. Сипачёвой решение проблемы о полноте свободной топологической группы, как и следовало ожидать, совпадает с решением для свободной абелевой группы — группа $F(X)$ полна по Вейлю тогда и только тогда, когда X полно по Дьёдонне [98]. Более того, нетрудно показать, что пополнение свободной группы тихоновского пространства отождествимо со свободной группой пополнения по Дьёдонне этого пространства — точно так же, как это сделал Ткаченко в абелевом случае [32]. Таким образом, всякая свободная топологическая группа пополняема по Вейлю, что даёт ответ на вопрос, поставленный Хантом и Моррисом в 1974 г. [66].

[3] Это немедленно вытекает из приведённой в первом разделе формулы (4) для полунорм, определяющих топологию абелевой группы — полунорма слова зависит только от букв, входящих в несократимую запись этого слова.

Ещё одно следствие из нового описания топологии свободной группы связано с нульмерностью свободной группы. Если размерность пространства X положительна, то нельзя рассчитывать на то, что размерность свободной топологической группы $F(X)$ будет равняться размерности X, так как $F(X)$ содержит топологические копии пространств X^n для всех натуральных n (см. [2]). Однако остаётся вопрос о нульмерности свободной группы, порождённой нульмерным пространством. Ясно, что если $\operatorname{ind} F(X) = 0$, то $\operatorname{ind} X = 0$, поскольку X вкладывается в $F(X)$, однако обратное неверно: Д. Б. Шахматов построил нормальное пространство X и псевдокомпактное пространство Y, которые нульмерны в смысле ind, но имеют ненульмерные свободные топологические группы [94]. Разными авторами были получены результаты, содержащие достаточные условия нульмерности свободных групп; все эти условия включают в себя нульмерность пространства X в смысле размерности dim: $\operatorname{ind} F(X) = 0$, если $\dim X = 0$ и (1) X линделёфово (В. К. Бельнов [8]); (2) X метризуемо (А. В. Архангельский [5]; в этом случае $F(X)$ также паракомпактно и $\dim F(X) = 0$); (3) X $\aleph_0$-ограничено (М. Г. Ткаченко [37]); (4) X псевдокомпактно (М. Г. Ткаченко [39]; в этом случае $\dim F(X) = 0$). Некоторые другие результаты о нульмерности свободных групп принадлежат А. В. Архангельскому [6]; с их помощью ему удалось представить произвольную топологическую группу как фактор-группу нульмерной группы. Кроме того, М. Г. Ткаченко доказал, что если $\dim X = 0$, то свободная абелева топологическая группа пространства X нульмерна в смысле размерности ind [31]. Д. Б. Шахматов получил важные и интересные результаты о нульмерности свободных предкомпактных групп нульмерных пространств [96].

Из описанной в разделе 1.8 конструкции продолжения семейств непрерывных псевдометрик до полунорм на свободной группе довольно просто выводится следующее общее утверждение [98].

Теорема 2.1. *Если* X *— тихоновское пространство и* $\dim X = 0$, *то* $\operatorname{ind} F(X) = 0$.

На самом деле верно несколько более сильное (по крайней мере формально) утверждение: *для нульмерного пространства среди всех полунорм, продолжающих псевдометрики, можно выбрать подсемейство полунорм, которые порождают топологию свободной топологической группы и принимают только рациональные значения*; шары с рациональными радиусами относительно этих полунорм образуют открыто-замкнутую базу топологии свободной группы.

Вышеупомянутые примеры Шахматова показывают, что заменить dim на ind в теореме 2.1 нельзя; если понимать dim в смысле Урысона (как в [1]), то заменить ind на dim тоже нельзя, так что в этом отношении теорема неулучшаема[4].

[4]Она неулучшаема также и в том отношении, что получить подобные общие утверждения для ненулевых конечных размерностей нельзя: нетрудно построить одномерные пространства X и Y, для которых $\operatorname{ind} F(X) = \dim F(X) = \operatorname{Ind} F(X) = 1$ и $\operatorname{ind} F(Y) = \infty$. В этой связи сто́ит упомянуть старый неопубликованный результат Б. А. Пасынкова, который говорит, что если группа $F(X)$ нормальна, то $\dim F(X) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dim X^n$; см. также [95, 96].

Ниже мы приводим доказательство теоремы 2.1, которое использует «нульмерный» вариант описания 1.8; это доказательство не было опубликовано — в [98] теорема 2.1 была выведена из общей конструкции. Как отмечалось в первом разделе, нульмерная модификация описания 1.8 значительно проще общего описания и потому полезнее (в тех ситуациях, когда она применима). С другой стороны, она даёт более или менее полное представление об общей идее конструкции 1.8 и о возможностях применения этой конструкции.

Пусть X — нульмерное (в смысле размерности $\dim$) тихоновское пространство. Поскольку $\dim X = 0$, для всякой непрерывной псевдометрики на этом пространстве существует мажорирующая её непрерывная неархимедова псевдометрика (см., например, [50, с. 602]).

2.1. Определение семейства $\mathcal{D}$

Через $\mathcal{D}$ мы будем обозначать семейство всех множеств D, удовлетворяющих следующим условиям.

0°. $D = \{{}^k d^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n} : k, n, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0,\ x_1, \dots, x_n \in X\}$, где ${}^k d^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}$ — непрерывные псевдометрики на X, принимающие значения 0 и 1. Нулевому n соответствует псевдометрика ${}^k d$.

1°. Для любых $n, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ и $x_1, \dots, x_n \in X$ ${}^0 d^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n} \equiv 0$.

2°. а) Если $k \leqslant m$ и $k_i \leqslant m_i$ для $i \leqslant n$, то для любых x и y из X

$$ {}^k d^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}(x, y) \leqslant {}^m d^{m_1\dots m_n}_{x_1\dots x_n}(x, y); $$

б) если $n > 0$ и $1 \leqslant i \leqslant n$, то для любых x и y из X

$$ {}^k d^{k_1\dots \check{k}_i\dots k_n}_{x_1\dots \check{x}_i\dots x_n}(x, y) \leqslant {}^k d^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}(x, y). $$

3°. Если ${}^k d^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}(x, y) = 0$, то для любых $r, m, l_1, \dots, l_m \in \mathbb{N}_0$ и $y_1, \dots, y_m \in X$

$$ {}^r d^{k_1\dots k_n k l_1\dots l_m}_{x_1\dots x_n x y_1\dots y_m} \equiv {}^r d^{k_1\dots k_n k l_1\dots l_m}_{x_1\dots x_n y y_1\dots y_m}. $$

В дальнейшем при упоминании элемента D множества $\mathcal{D}$ всегда будет подразумеваться, что

$$ D = \{{}^k d^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n} : k, n, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0,\ x_1, \dots, x_n \in X\}. $$

Если буква D имеет штрих, индекс или другую метку, то та же метка появляется у буквы d, обозначающей соответствующие псевдометрики. Например, если мы говорим о $D' \in \mathcal{D}$, то мы подразумеваем при этом, что

$$ D' = \{{}^k d'^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n} : k, n, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0,\ x_1, \dots, x_n \in X\}. $$

Пусть $D \in \mathcal{D}$, $m \in \mathbb{N}_0$ и $y \in X$. Для $k, n, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ и $x_1, \dots, x_n \in X$ положим

$$ {}^k d'^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n} \equiv {}^k d^{m k_1\dots k_n}_{y x_1\dots x_n}. $$

Нетрудно убедиться в том, что для семейства

$$ D' = \{{}^k d'^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n} : k, n, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0,\ x_1, \dots, x_n \in X\} $$

выполняются условия 0°—3°, т. е. $D' \in \mathcal{D}$. Естественно обозначить семейство D' через D^m_y; такое обозначение хорошо согласуется с введённой системой индексов.

Аналогичным образом для любых $l \in \mathbb{N}_0$ и $z \in X$ можно определить семейство $((D^m_y)^l_z)$ и, по индукции, для $n, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ и $x_1, \ldots, x_n \in X$ семейство

$$\tilde{D} = ((\ldots((D^{k_1}_{x_1})^{k_2}_{x_2})\ldots)^{k_n}_{x_n}) \in \mathcal{D}.$$

Легко видеть, что

$${}^m\tilde{d}^{m_1\ldots m_l}_{y_1\ldots y_l} \equiv {}^m d^{k_1\ldots k_n m_1\ldots m_l}_{x_1\ldots x_n y_1\ldots y_l}.$$

Это обстоятельство позволяет вместо $((\ldots((D^{k_1}_{x_1})^{k_2}_{x_2})\ldots)^{k_n}_{x_n})$ писать $D^{k_1\ldots k_n}_{x_1\ldots x_n}$.

Мы будем говорить, что для $D, D' \in \mathcal{D}$ выполнено отношение $D \leqslant D'$, если для любых $n, k, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ и $x_1, \ldots, x_n, x, y \in X$

$${}^k d^{k_1\ldots k_n}_{x_1\ldots x_n}(x, y) \leqslant {}^k d'^{k_1\ldots k_n}_{x_1\ldots x_n}(x, y).$$

Замечание 2.1. Из условия 2° вытекает, что для $m \leqslant k$ $D^m_x \leqslant D^k_x$ и всегда $D \leqslant D^k_x$.

2.2. Определение функции $\|\cdot\|_D$

Пусть $D \in \mathcal{D}$. Сейчас мы построим функцию $\|\cdot\|_D$ на множестве $S^*(X)$, т. е. для каждого $\mathbf{g} \in S^*(X)$ определим число $\|\mathbf{g}\|_D$. Построение будем проводить индукцией по длине слова $\mathbf{g}$.

Полагаем $\|\mathbf{e}\|_D = 0$.

Пусть $\mathbf{g} \in S^*(X)$, $l(\mathbf{g}) > 0$ и числа $\|\mathbf{h}\|_{D'}$ определены для всех $D' \in \mathcal{D}$ и всех $\mathbf{h} \in S^*(X)$ меньшей длины. Определим две вспомогательные величины: $A_D(\mathbf{g})$ и $B_D(\mathbf{g})$.

А. Если существуют такие $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in S^*(X)$, что $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \not\equiv \mathbf{e}$ и $\mathbf{g} \equiv \mathbf{h}_1\mathbf{h}_2$, то полагаем

$$A_D(\mathbf{g}) = \min\bigl\{\|\mathbf{g}_1\|_D + \|\mathbf{g}_2\|_D : \mathbf{g}_1\mathbf{g}_2 \equiv \mathbf{g},\ \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in S^*(X) \setminus \{\mathbf{e}\}\bigr\}.$$

В противном случае полагаем $A_D(\mathbf{g}) = \infty$.

Б. Если существует такое $\tilde{\mathbf{g}} \in S^*(X)$, что $\mathbf{g} \equiv x^\varepsilon \tilde{\mathbf{g}} y^{-\varepsilon}$ для некоторых x, y и ε, то полагаем

$$B_D(\mathbf{g}) = \inf\{2^k \cdot \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D^k_x} + 1/2^k : {}^k d(x, y) = 0\}.$$

В противном случае полагаем $B_D(\mathbf{g}) = \infty$.

Индукцией по длине слова $\mathbf{g}$ легко показать, что всегда хотя бы одно из чисел $A_D(\mathbf{g})$ и $B_D(\mathbf{g})$ не равно ∞.

Наконец, полагаем

$$\|\mathbf{g}\|_D = \min\{A_D(\mathbf{g}), B_D(\mathbf{g})\}.$$

Вспомогательные функции $A_D(\mathbf{g})$ и $B_D(\mathbf{g})$ будут использоваться в дальнейшем.

2.3. Леммы

Лемма 2.1. *Если $D \in \mathcal{D}$ и ${}^k d(x,y) = 0$, то для всех $m \leqslant k$ $D^m_x = D^m_y$.*

Доказательство. По условию 2°а) для всех $m \leqslant k$ ${}^m d(x,y) = 0$. Из условия 3° и определения семейств D^m_x и D^m_y немедленно вытекает доказываемая лемма. □

Из леммы 2.1 следует

Лемма 2.2. *Если $D \in \mathcal{D}$ и ${}^k d(x,y) = 0$, то для $m \leqslant k$ $\|\cdot\|_{D^m_x} = \|\cdot\|_{D^m_y}$.*

Лемма 2.3. *Если $\mathbf{g}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in S^*(X)$, $\mathbf{g} \equiv \mathbf{g}_1\mathbf{g}_2$ и $D \in \mathcal{D}$, то $\|\mathbf{g}\|_D \leqslant \leqslant \|\mathbf{g}_1\|_D + \|\mathbf{g}_2\|_D$.*

Доказательство. Если хотя бы одно из слов $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ пусто, то неравенство очевидно. В случае, когда оба эти слова непусты, по определению функций $A_D(\cdot)$ и $\|\cdot\|_D$ имеем

$$\|\mathbf{g}\|_D \leqslant A_D(\mathbf{g}) \leqslant \|\mathbf{g}_1\|_D + \|\mathbf{g}_2\|_D. \quad \square$$

Лемма 2.4. *Если $D, D' \in \mathcal{D}$ и $D \leqslant D'$, то для всех $\mathbf{g}$ из $S^*(X)$ $\|\mathbf{g}\|_D \leqslant \|\mathbf{g}\|_{D'}$.*

Доказательство. Применим индукцию по длине слова $\mathbf{g}$. Если $\mathbf{g} \equiv \mathbf{e}$, то утверждение очевидно. Пусть $l(\mathbf{g}) > 0$. Предположим, что $\|\mathbf{h}\|_{\tilde{D}} \leqslant \|\mathbf{h}\|_{\tilde{D}'}$ для всех $\mathbf{h} \in S^*(X)$ и $\tilde{D}, \tilde{D}' \in \mathcal{D}$, удовлетворяющих неравенствам $l(\mathbf{h}) < l(\mathbf{g})$ и $\tilde{D} \leqslant \tilde{D}'$. Покажем, что $\|\mathbf{g}\|_D \leqslant \|\mathbf{g}\|_{D'}$. Возможны следующие два варианта.

А. Для некоторых непустых $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ из $S^*(X)$ $\mathbf{g} \equiv \mathbf{g}_1\mathbf{g}_2$ и $\|\mathbf{g}\|_{D'} = A_{D'}(\mathbf{g}) = \|\mathbf{g}_1\|_{D'} + \|\mathbf{g}_2\|_{D'}$. Ясно, что $l(\mathbf{g}_1), l(\mathbf{g}_2) < l(\mathbf{g})$. По лемме 2.3 и по индуктивному предположению имеем

$$\|\mathbf{g}\|_D \leqslant \|\mathbf{g}_1\|_D + \|\mathbf{g}_2\|_D \leqslant \|\mathbf{g}_1\|_{D'} + \|\mathbf{g}_2\|_{D'} = \|\mathbf{g}\|_{D'}.$$

Б. $\|\mathbf{g}\|_{D'} = B_{D'}(\mathbf{g})$, т. е. $\mathbf{g} \equiv x^{\varepsilon}\tilde{\mathbf{g}}y^{-\varepsilon}$ и

$$\|\mathbf{g}\|_{D'} = \inf\{2^k \cdot \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D'^k_x} + 1/2^k \colon {}^k d'(x,y) = 0\}.$$

Из определений вытекает, что для любого k $D^k_x \leqslant D'^k_x$ и ${}^k d(x,y) \leqslant {}^k d'(x,y)$. По индуктивному предположению для всякого k $\|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D^k_x} \leqslant \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D'^k_x}$. Для всех k, удовлетворяющих условию ${}^k d'(x,y) = 0$, имеем ${}^k d(x,y) \leqslant {}^k d'(x,y) = 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} B_D(\mathbf{g}) &= \inf\{2^k \cdot \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D^k_x} + 1/2^k \colon {}^k d(x,y) = 0\} \leqslant \\ &\leqslant \inf\{2^k \cdot \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D^k_x} + 1/2^k \colon {}^k d'(x,y) = 0\} \leqslant \\ &\leqslant \inf\{2^k \cdot \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D'^k_x} + 1/2^k \colon {}^k d'(x,y) = 0\} = B_{D'}(\mathbf{g}) = \|\mathbf{g}\|_{D'}. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 2.5.

а) *Всегда $\|\mathbf{g}\|_D \leqslant \|\mathbf{g}\|_{D^k_x}$;*
б) *для $m \leqslant k$ $\|\mathbf{g}\|_{D^m_x} \leqslant \|\mathbf{g}\|_{D^k_x}$.*

Доказательство. Достаточно применить замечание и лемму 2.4. □

Лемма 2.6. *Для произвольных D из $\mathcal{D}$ и $\mathbf{g} \equiv x^{\varepsilon}\tilde{\mathbf{g}}y^{-\varepsilon}$ выполняется одно из двух условий:*

а) *для всех k $\|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D^k_x} = 0$ и ${}^k d(x,y) = 0$ (и тогда $B_D(\mathbf{g}) = 0$);*

б) *существует k, для которого ${}^k d(x,y) = 0$ и $B_D(\mathbf{g}) = 2^k \cdot \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D^k_x} + 1/2^k$ (и тогда $B_D(\mathbf{g}) \geqslant 1/2^k > 0$).*

Доказательство. Пусть ${}^{k_0}d(x,y) \neq 0$ для некоторого k_0. Тогда из условия 2°а) в определении семейства $\mathcal{D}$ вытекает, что для всякого $k > k_0$ ${}^k d(x,y) \geqslant$ $\geqslant {}^{k_0}d(x,y) > 0$; значит, множество $\{k \in \mathbb{N}_0 \colon {}^k d(x,y) = 0\}$ конечно и

$$\inf\{2^k \cdot \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D^k_x} + 1/2^k \colon {}^k d(x,y) = 0\} = \\ = \min\{2^k \cdot \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D^k_x} + 1/2^k \colon {}^k d(x,y) = 0\} = B_D(\mathbf{g});$$

следовательно, выполняется условие б).

Предположим теперь, что для всякого k ${}^k d(x,y) = 0$. Положим $a_k = \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D^k_x}$. Если $a_k = 0$ для всех k, то выполнено условие а). Пусть $a_{k_0} > 0$. По лемме 2.5б) $a_m \leqslant a_k$ при $m \leqslant k$, значит, для всех $k > k_0$ $2^k \cdot a_k + 1/2^k \geqslant 2^k \cdot a_{k_0} + 1/2^k$. Последовательность $\{2^k \cdot a_{k_0} + 1/2^k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ стремится к бесконечности при $k \to \infty$, значит, последовательность $\{2^k \cdot a_k + 1/2^k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ тоже стремится к бесконечности, поэтому при некотором k она должна принимать минимальное значение. Для этого k имеем

$$B_D(\mathbf{g}) = \inf_{m\in\mathbb{N}_0}\{2^m \cdot a_m + 1/2^m\} = \min_{m\in\mathbb{N}_0}\{2^m \cdot a_m + 1/2^m\} = 2^k \cdot a_k + 1/2^k.$$

Таким образом, в этом случае тоже выполнено условие б). □

Лемма 2.7. *Пусть $D \in \mathcal{D}$. Тогда для любого $\mathbf{g} \in S^*(X) \setminus \{\mathbf{e}\}$ найдутся такие $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in S^*(X)$, что $\mathbf{h}_2 \not\equiv \mathbf{e}$, $\mathbf{g} \equiv \mathbf{h}_1\mathbf{h}_2$ и $\|\mathbf{g}\|_D = \|\mathbf{h}_1\|_D + B_D(\mathbf{h}_2)$.*

Доказательство. Индукция по длине слова $\mathbf{g}$. Если $l(\mathbf{g}) = 2$, то, очевидно, $\|\mathbf{g}\|_D = B_D(\mathbf{h}_2)$. В этом случае достаточно положить $\mathbf{h}_1 \equiv \mathbf{e}$ и $\mathbf{h}_2 \equiv \mathbf{g}$. Пусть $l(\mathbf{g}) > 2$ и для слов меньшей длины утверждение доказано. Возможны два варианта.

А. Для некоторых непустых $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ из $S^*(X)$ $\mathbf{g} \equiv \mathbf{g}_1\mathbf{g}_2$ и $\|\mathbf{g}\|_D = A_D(\mathbf{g}) =$ $= \|\mathbf{g}_1\|_D + \|\mathbf{g}_2\|_D$. Тогда $l(\mathbf{g}_2) < l(\mathbf{g})$. По индуктивному предположению найдутся такие $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ из $S^*(X)$, что $\mathbf{u}_2 \not\equiv \mathbf{e}$, $\mathbf{g}_2 \equiv \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2$ и $\|\mathbf{g}_2\|_D = \|\mathbf{u}_1\|_D + B_D(\mathbf{u}_2)$. Полагаем $\mathbf{h}_1 \equiv \mathbf{g}_1\mathbf{u}_1$, $\mathbf{h}_2 \equiv \mathbf{u}_2$.

Б. $\|\mathbf{g}\|_D = B_D(\mathbf{g})$. Полагаем $\mathbf{h}_1 \equiv \mathbf{e}$, $\mathbf{h}_2 \equiv \mathbf{g}$. □

Лемма 2.8. *Всегда $\|\mathbf{g}\|_D = \|\mathbf{g}^{-1}\|_D$.*

Доказательство. Индукция по длине слова $\mathbf{g}$. Если $\mathbf{g} \equiv \mathbf{e}$, то утверждение верно. Пусть слово $\mathbf{g}$ непусто и для слов меньшей длины лемма доказана. Возможны два варианта.

А. Для некоторых непустых $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ из $S^*(X)$ $\mathbf{g} \equiv \mathbf{g}_1\mathbf{g}_2$ и $\|\mathbf{g}\|_D = A_D(\mathbf{g}) =$ $= \|\mathbf{g}_1\|_D + \|\mathbf{g}_2\|_D$. Тогда $l(\mathbf{g}_1), l(\mathbf{g}_2) < l(\mathbf{g})$. Поскольку $\mathbf{g}^{-1} \equiv \mathbf{g}_2^{-1}\mathbf{g}_1^{-1}$, по лемме 2.3 и по индуктивному предположению имеем

$$\|\mathbf{g}^{-1}\|_D \leqslant \|\mathbf{g}_2^{-1}\|_D + \|\mathbf{g}_1^{-1}\|_D = \|\mathbf{g}_1\|_D + \|\mathbf{g}_2\|_D = \|\mathbf{g}\|_D.$$

Б. $\mathbf{g} \equiv x^\varepsilon \tilde{\mathbf{g}} y^{-\varepsilon}$ и $\|\mathbf{g}\|_D = B_D(\mathbf{g})$. Тогда $\mathbf{g}^{-1} \equiv y^\varepsilon \tilde{\mathbf{g}}^{-1} x^{-\varepsilon}$ и

$$\|\mathbf{g}^{-1}\|_D \leqslant B_D(\mathbf{g}^{-1}) = \inf\{2^k \cdot \|\tilde{\mathbf{g}}^{-1}\|_{D_x^k} + 1/2^k \colon {}^k d(x,y) = 0\}.$$

По индуктивному предположению для всех $D_x^k \in \mathcal{D}$ $\|\tilde{\mathbf{g}}^{-1}\|_{D_x^k} = \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D_x^k}$, следовательно,

$$\|\mathbf{g}^{-1}\|_D \leqslant \inf\{2^k \cdot \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D_x^k} + 1/2^k \colon {}^k d(x,y) = 0\} = B_D(\mathbf{g}) = \|\mathbf{g}\|_D.$$

Таким образом, всегда $\|\mathbf{g}^{-1}\|_D \leqslant \|\mathbf{g}\|_D$, значит, $\|\mathbf{g}\|_D = \|\mathbf{g}^{-1}\|_D$. □

2.4. Утверждения

Утверждение 2.1. *Пусть $D \in \mathcal{D}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in S(X)$, $\mathbf{ab} \in S^*(X)$, $\mathbf{g} \equiv \mathbf{a} x^\varepsilon x^{-\varepsilon} \mathbf{b}$ и $\hat{\mathbf{g}} \equiv \mathbf{ab}$ (ясно, что $\mathbf{g}, \hat{\mathbf{g}} \in S^*(X)$). Тогда $\|\hat{\mathbf{g}}\|_D \leqslant \|\mathbf{g}\|_D$.*

Доказательство. Индукция по длине слова $\mathbf{g}$. Если $\mathbf{g} \equiv x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$, то утверждение очевидно. Пусть $l(\mathbf{g}) > 2$ и для слов меньшей длины утверждение доказано. Рассмотрим все возможные варианты.

1. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \not\equiv \mathbf{e}$.

1.1. $\boldsymbol{\mathbf{g} \equiv y^\delta \tilde{\mathbf{g}} z^{-\delta}}$ **и** $\boldsymbol{\|\mathbf{g}\|_D = B_D(\mathbf{g})}$**.** Тогда $\mathbf{a} \equiv y^\delta \tilde{\mathbf{a}}$, $\mathbf{b} \equiv \tilde{\mathbf{b}} z^{-\delta}$ и $\tilde{\mathbf{g}} \equiv \mathbf{a} \tilde{x}^\varepsilon x^{-\varepsilon} \tilde{\mathbf{b}}$ для некоторых $\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}} \in S(X)$, удовлетворяющих условию $\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}} \in S^*(X)$. Имеем $\hat{\mathbf{g}} = y^\delta \tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}} z^{-\delta}$ и

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}\|_D &= B_D(\mathbf{g}) = \\ &= \inf\{2^k \cdot \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D_y^k} + 1/2^k \colon {}^k d(y,z) = 0\} = \\ &= \inf\{2^k \cdot \|\tilde{\mathbf{a}} x^\varepsilon x^{-\varepsilon} \tilde{\mathbf{b}}\|_{D_y^k} + 1/2^k \colon {}^k d(y,z) = 0\}. \end{aligned}$$

По индуктивному предположению для всех k

$$\|\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}}\|_{D_y^k} \leqslant \|\tilde{\mathbf{a}} x^\varepsilon x^{-\varepsilon} \tilde{\mathbf{b}}\|_{D_y^k},$$

следовательно,

$$\|\mathbf{g}\|_D \geqslant \inf\{2^k \cdot \|\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}}\|_{D_y^k} + 1/2^k \colon {}^k d(y,z) = 0\} = B_D(\hat{\mathbf{g}}) \geqslant \|\hat{\mathbf{g}}\|_D.$$

1.2. $\boldsymbol{\|\mathbf{g}\|_D = A_D(\mathbf{g}) = \|\mathbf{g}_1\|_D + \|\mathbf{g}_2\|_D}$, где $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in S^*(X) \setminus \{\mathbf{e}\}$ и $\mathbf{g} \equiv \mathbf{g}_1\mathbf{g}_2$.

1.2.1а. $\boldsymbol{l(\mathbf{g}_1) \leqslant l(\mathbf{a})}$**.** Тогда $\mathbf{a} \equiv \mathbf{g}_1\tilde{\mathbf{a}}$ для некоторого $\tilde{\mathbf{a}} \in S(X)$, $\mathbf{g}_2 \equiv \tilde{\mathbf{a}} x^\varepsilon x^{-\varepsilon} \mathbf{b}$ и $\hat{\mathbf{g}} \equiv \mathbf{g}_1\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}$. Имеем $\|\mathbf{g}\|_D = A_D(\mathbf{g}) = \|\mathbf{g}_1\|_D + \|\mathbf{g}_2\|_D = \|\mathbf{g}_1\|_D + \|\tilde{\mathbf{a}} x^\varepsilon x^{-\varepsilon} \mathbf{b}\|_D$. Поскольку $l(\tilde{\mathbf{a}} x^\varepsilon x^{-\varepsilon} \mathbf{b}) = l(\mathbf{g}_2) < l(\mathbf{g})$, по индуктивному предположению $\|\tilde{\mathbf{a}} x^\varepsilon x^{-\varepsilon} \mathbf{b}\|_D \geqslant \|\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}\|_D$. По лемме 2.3 $\|\hat{\mathbf{g}}\|_D \leqslant \|\mathbf{g}_1\|_D + \|\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}\|_D$, значит, $\|\hat{\mathbf{g}}\|_D \leqslant \|\mathbf{g}\|_D$.

1.2.1б. $\boldsymbol{l(\mathbf{g}_2) \leqslant l(\mathbf{b})}$**.** Аналогично п. 1.2.1а.

1.2.2. $\boldsymbol{\mathbf{g}_1 \equiv \mathbf{a} x^\varepsilon, \mathbf{g}_2 \equiv x^{-\varepsilon} \mathbf{b}}$**.**

1.2.2.1а. $\|\mathbf{g_1}\|_D = A_D(\mathbf{g_1}) = \|\mathbf{u}\|_D + \|\mathbf{v}\|_D$, где $\mathbf{u},\mathbf{v} \in S^*(X) \setminus \{\mathbf{e}\}$ и $\mathbf{g}_1 \equiv \mathbf{uv}$. Имеем $\|\mathbf{g}\|_D = \|\mathbf{g}_1\|_D + \|\mathbf{g}_2\|_D = \|\mathbf{u}\|_D + \|\mathbf{v}\|_D + \|\mathbf{g}_2\|_D \geqslant \|\mathbf{u}\|_D + \|\mathbf{vg}_2\|_D$ (по лемме 2.3). Поскольку $\mathbf{g}_1 \equiv \mathbf{uv} \equiv \mathbf{a}x^\varepsilon$ и $\mathbf{g}_2 \equiv x^{-\varepsilon}\mathbf{b}$, для некоторого $\tilde{\mathbf{a}} \in S(X)$ $\mathbf{v} \equiv \tilde{\mathbf{a}}x^\varepsilon$ и $\mathbf{vg}_2 \equiv \tilde{\mathbf{a}}x^\varepsilon x^{-\varepsilon}\mathbf{b}$. По индуктивному предположению $\|\mathbf{vg}_2\|_D = \|\tilde{\mathbf{a}}x^\varepsilon x^{-\varepsilon}\mathbf{b}\|_D \geqslant \|\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}\|_D$. Поскольку $\hat{\mathbf{g}} \equiv \mathbf{u}\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}$, по лемме 2.3 имеем

$$\|\hat{\mathbf{g}}\|_D \leqslant \|\mathbf{u}\|_D + \|\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}\|_D \leqslant \|\mathbf{u}\|_D + \|\mathbf{vg}_2\|_D \leqslant \|\mathbf{g}\|_D.$$

1.2.2.1б. $\|\mathbf{g_2}\|_D = A_D(\mathbf{g_2})$**.** Аналогично п. 1.2.2.1а.

1.2.2.2. $\mathbf{g_1} \equiv y^{-\varepsilon}\tilde{\mathbf{a}}x^\varepsilon$**,** $\|\mathbf{g_1}\|_D = B_D(\mathbf{g_1})$ **и** $\mathbf{g_2} \equiv x^{-\varepsilon}\tilde{\mathbf{b}}z^\varepsilon$**,** $\|\mathbf{g_2}\|_D = B_D(\mathbf{g_2})$**.** Имеем

$$\begin{aligned}\|\mathbf{g}\|_D = \|\mathbf{g}_1\|_D + \|\mathbf{g}_2\|_D &= \\ &= \inf\{2^k \cdot \|\tilde{\mathbf{a}}\|_{D^k_y} + 1/2^k \colon {}^k d(x,y) = 0\} + \\ &+ \inf\{2^m \cdot \|\tilde{\mathbf{b}}\|_{D^m_x} + 1/2^m \colon {}^m d(x,z) = 0\}.\end{aligned}$$

1.2.2.2.1а. Для всех k ${}^k d(x,y) = 0$ **и** $\|\tilde{\mathbf{a}}\|_{D^k_y} = 0$**.** По лемме 2.6 $B_D(\mathbf{g}_1) = 0$ и

$$\|\mathbf{g}\|_D = B_D(\mathbf{g}_2) = \inf\{2^m \cdot \|\tilde{\mathbf{b}}\|_{D^m_x} + 1/2^m \colon {}^m d(x,z) = 0\}.$$

Пусть $m \in \mathbb{N}_0$. По лемме 2.3 $\|\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}}\|_{D^m_x} \leqslant \|\tilde{\mathbf{a}}\|_{D^m_x} + \|\tilde{\mathbf{b}}\|_{D^m_x}$. Поскольку в силу леммы 2.2 $\|\tilde{\mathbf{a}}\|_{D^m_x} = \|\tilde{\mathbf{a}}\|_{D^m_y} = 0$ для $m \in \mathbb{N}_0$, имеем $\|\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}}\|_{D^m_x} \leqslant \|\tilde{\mathbf{b}}\|_{D^m_x}$ для $m \in \mathbb{N}_0$ и

$$\begin{aligned}\|\mathbf{g}\|_D = \inf\{2^m \cdot \|\tilde{\mathbf{b}}\|_{D^m_x} + 1/2^m \colon {}^m d(x,z) = 0\} &\geqslant \\ \geqslant \inf\{2^m \cdot \|\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}}\|_{D^m_x} + 1/2^m \colon {}^m d(x,z) = 0\}. &\quad (*)\end{aligned}$$

Поскольку всегда ${}^m d(x,y) = 0$, условие ${}^m d(x,z) = 0$ равносильно условию ${}^m d(y,z) = 0$. По лемме 2.2 если m таково, что ${}^m d(x,z) = 0$, то 1) $\|\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}}\|_{D^m_x} = \|\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}}\|_{D^m_z}$ и, поскольку ${}^m d(y,z) = 0$ для всех таких m, 2) $\|\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}}\|_{D^m_z} = \|\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}}\|_{D^m_y}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}(*) = \inf\{2^m \cdot \|\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}}\|_{D^m_y} + 1/2^m \colon {}^m d(y,z) = 0\} &= \\ &= B_D(\hat{\mathbf{g}}) \geqslant \|\hat{\mathbf{g}}\|_D.\end{aligned}$$

Таким образом, $\|\hat{\mathbf{g}}\|_D \leqslant (*) \leqslant \|\mathbf{g}\|_D$.

1.2.2.2.1б. Для всех m ${}^m d(x,z) = 0$ **и** $\|\tilde{\mathbf{b}}\|_{D^m_x} = 0$**.** Аналогично п. 1.2.2.2.1а.

1.2.2.2.2. Для некоторого k ${}^k d(x,y) \neq 0$ **или** $\|\tilde{\mathbf{a}}\|_{D^k_y} \neq 0$**, и для некоторого** m ${}^m d(x,z) \neq 0$ **или** $\|\tilde{\mathbf{b}}\|_{D^m_y} \neq 0$**.** По лемме 2.6 найдутся k_0 и m_0, для которых

$$B_D(\mathbf{g}_1) = 2^{k_0} \cdot \|\tilde{\mathbf{a}}\|_{D^{k_0}_y} + 1/2^{k_0},$$

$$B_D(\mathbf{g}_2) = 2^{m_0} \cdot \|\tilde{\mathbf{b}}\|_{D_x^{m_0}} + 1/2^{m_0},$$
$$^{k_0}d(y,x) = {}^{m_0}d(x,z) = 0.$$

Положим $l = \min\{k_0, m_0\}$. Тогда

$$\|\mathbf{g}\|_D = \|\mathbf{g}_1\|_D + \|\mathbf{g}_2\|_D = B_D(\mathbf{g}_1) + B_D(\mathbf{g}_2) = \\ = 2^{k_0} \cdot \|\tilde{\mathbf{a}}\|_{D_y^{k_0}} + 1/2^{k_0} + 2^{m_0} \cdot \|\tilde{\mathbf{b}}\|_{D_y^{m_0}} + 1/2^{m_0} \geqslant \\ \geqslant 2^l \cdot \|\tilde{\mathbf{a}}\|_{D_y^l} + 2^l \cdot \|\tilde{\mathbf{b}}\|_{D_x^l} + 1/2^l$$

(последнее неравенство справедливо по лемме 2.5б)). Поскольку $^{k_0}d(x,y) = {}^{m_0}d(x,z) = 0$, из условия 2°а) в определении семейства $\mathcal{D}$ вытекает, что $^{l}d(x,y) = {}^{l}d(x,z) = 0$ и $^{l}d(y,z) = 0$. По лемме 2.2 $\|\tilde{\mathbf{b}}\|_{D_x^l} = \|\tilde{\mathbf{b}}\|_{D_y^l}$. Итак, $\|\mathbf{g}\|_D \geqslant 2^l\|\tilde{\mathbf{a}}\|_{D_y^l} + 2^l\|\tilde{\mathbf{b}}\|_{D_y^l} + 1/2^l$, причём $^{l}d(y,z) = 0$. По лемме 2.3 $\|\mathbf{g}\|_D \geqslant 2^l\|\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}}\|_{D_y^l} + 1/2^l$. Поскольку $^{l}d(y,z) = 0$, имеем

$$\|\mathbf{g}\|_D \geqslant 2^l\|\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}}\|_{D_y^l} + 1/2^l \geqslant \\ \geqslant \inf\{2^k \cdot \|\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}}\|_{D_y^k} + 1/2^k : {}^{k}d(y,z) = 0\} = \\ = B_D(\hat{\mathbf{g}}) \geqslant \|\hat{\mathbf{g}}\|_D.$$

2. $\mathbf{b} \equiv \mathbf{e}$, $\mathbf{g} \equiv \mathbf{a}x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}$, $\hat{\mathbf{g}} \equiv \mathbf{a}$.

2.1. $\|\mathbf{g}\|_D = A_D(\mathbf{g}) = \|\mathbf{g}_1\|_D + \|\mathbf{g}_2\|_D$, где $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in S^*(X) \setminus \{\mathbf{e}\}$ и $\mathbf{g} \equiv \mathbf{g}_1\mathbf{g}_2$. Тогда для некоторого $\tilde{\mathbf{a}} \in S^*(X)$ $\mathbf{g}_2 \equiv \tilde{\mathbf{a}}x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}$; при этом $l(\mathbf{g}_2) < l(\mathbf{g})$. По индуктивному предположению $\|\tilde{\mathbf{a}}x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}\|_D \geqslant \|\tilde{\mathbf{a}}\|_D$, значит, $\|\mathbf{g}\|_D \geqslant \|\mathbf{g}_1\|_D + \|\tilde{\mathbf{a}}\|_D$, а эта сумма не меньше чем $\|\hat{\mathbf{g}}\|_D$ в силу леммы 2.3.

2.2. $\mathbf{g} \equiv y^{\varepsilon}\tilde{\mathbf{g}}x^{-\varepsilon}$ **и** $\|\mathbf{g}\|_D = B_D(\mathbf{g})$. Тогда для некоторого $\tilde{\mathbf{a}} \in S^*(X)$ $\mathbf{a} \equiv y^{\varepsilon}\tilde{\mathbf{a}}$, $\mathbf{g} \equiv y^{\varepsilon}\tilde{\mathbf{a}}x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}$, $\hat{\mathbf{g}} \equiv y^{\varepsilon}\tilde{\mathbf{a}}$. Имеем

$$B_D(\mathbf{g}) = \inf\{2^k\|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D_y^k} + 1/2^k : {}^{k}d(x,y) = 0\}.$$

Зафиксируем произвольное k, для которого $^{k}d(x,y) = 0$, и рассмотрим $\|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D_y^k}$. По лемме 2.7 существуют такие $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S^*(X)$, что $\mathbf{v} \not\equiv \mathbf{e}$, $\mathbf{u}\mathbf{v} \equiv \tilde{\mathbf{g}}$ и $\|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D_y^k} = \|\mathbf{u}\|_{D_y^k} + B_{D_y^k}(\mathbf{v})$. Поскольку $\tilde{\mathbf{g}} \equiv \tilde{\mathbf{a}}x^{\varepsilon}$, слово $\mathbf{v}$ имеет вид $z^{-\varepsilon}\tilde{\mathbf{v}}x^{\varepsilon}$, и $\tilde{\mathbf{g}} \equiv \mathbf{u}z^{-\varepsilon}\tilde{\mathbf{v}}x^{\varepsilon}$, $\hat{\mathbf{g}} \equiv y^{\varepsilon}\mathbf{u}z^{-\varepsilon}\tilde{\mathbf{v}}$.

2.2.1. $\boldsymbol{^{k}d(y,z) > 0}$, т. е. $^{k}d(y,z) = 1$. Тогда из $^{k}d(x,y) = 0$ вытекает, что $^{k}d(x,z) = 1$. По лемме 2.6 $B_{D_y^k}(\mathbf{v}) = 2^m\|\tilde{\mathbf{v}}\|_{D_{yz}^{km}} + 1/2^m$, где m таково, что $^{m}d_y^k(x,z) = 0$. По свойству 2°б) из определения $\mathcal{D}$ $^{m}d(x,z) \leqslant {}^{m}d_y^k(x,z)$; значит, $^{m}d(x,z) = 0$. Из условия 2°а) из определения $\mathcal{D}$ вытекает, что $m < k$. Число k было выбрано таким образом, чтобы выполнялось условие $^{k}d(x,y) = 0$; свойство 2°а) семейства $\mathcal{D}$ влечёт, что ${}^m d(x,y)=0$. Отсюда и из того, что ${}^m d(x,z)=0$, получаем ${}^m d(y,z)=0$. Значит,

$$\|y^\varepsilon \mathbf{u} z^{-\varepsilon}\|_D \leqslant B_D(y^\varepsilon \mathbf{u} z^{-\varepsilon}) = \\ = \inf\{2^l\|\mathbf{u}\|_{D_y^l} + 1/2^l : {}^l d(y,z)=0\} \leqslant 2^m\|\mathbf{u}\|_{D_y^m} + 1/2^m,$$

и по лемме 2.3

$$\|\hat{\mathbf{g}}\|_D \leqslant \|y^\varepsilon \mathbf{u} z^{-\varepsilon}\|_D + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_D \leqslant 2^m\|\mathbf{u}\|_{D_y^m} + 1/2^m + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_D. \qquad (**)$$

По лемме 2.5б) $\|\mathbf{u}\|_{D_y^m} \leqslant \|\mathbf{u}\|_{D_y^k}$, и по лемме 2.5а) $\|\tilde{\mathbf{v}}\|_D \leqslant \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{D_{yz}^{km}}$. Значит,

$$(**) \leqslant 2^k\|\mathbf{u}\|_{D_y^k} + 1/2^m + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{D_{yz}^{km}} \leqslant \\ \leqslant 2^k\|\mathbf{u}\|_{D_y^k} + 2^k\cdot(2^m\cdot\|\tilde{\mathbf{v}}\|_{D_{yz}^{km}} + 1/2^m) + 1/2^k = \\ = 2^k\big(\|\mathbf{u}\|_{D_y^k} + B_{D_y^k}(\tilde{\mathbf{v}})\big) + 1/2^k = 2^k\cdot\|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D_y^k} + 1/2^k.$$

Мы получили $\|\hat{\mathbf{g}}\|_D \leqslant 2^k\cdot\|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D_y^k} + 1/2^k$.

2.2.2. $\boldsymbol{{}^k d(y,z)=0}$. В этом случае по лемме 2.3

$$\|\hat{\mathbf{g}}\|_D \leqslant \|y^\varepsilon \mathbf{u} z^{-\varepsilon}\|_D + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_D \leqslant B_D(y^\varepsilon \mathbf{u} z^{-\varepsilon}) + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_D = \\ = \inf\{2^l\cdot\|\mathbf{u}\|_{D_y^l} + 1/2^l : {}^l d(y,z)=0\} + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_D \leqslant \\ \leqslant 2^k\cdot\|\mathbf{u}\|_{D_y^k} + 1/2^k + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_D. \qquad (***)$$

Покажем, что $\|\tilde{\mathbf{v}}\|_D \leqslant B_{D_y^k}(\mathbf{v})$. Действительно,

$$B_{D_y^k}(\mathbf{v}) = \inf\{2^l\cdot\|\mathbf{u}\|_{D_{yz}^{kl}} + 1/2^l : {}^l d_y^k(z,x)=0\}.$$

Для всех l имеем $2^l \geqslant 1$, $1/2^l > 0$ и, по лемме 2.5а), $\|\tilde{\mathbf{v}}\|_{D_{yz}^{kl}} \geqslant \|\tilde{\mathbf{v}}\|_D$, значит, $\|\tilde{\mathbf{v}}\|_D \leqslant B_{D_y^k}(\mathbf{v})$. Следовательно,

$$(***) \leqslant 2^k\cdot\big(\|\mathbf{u}\|_{D_y^k} + B_{D_y^k}(\mathbf{v})\big) + 1/2^k = 2^k\cdot\|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D_y^k} + 1/2^k.$$

Мы получили, что если ${}^k d(x,y)=0$, то $\|\hat{\mathbf{g}}\|_D \leqslant 2^k\cdot\|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D_y^k} + 1/2^k$; значит,

$$\|\hat{\mathbf{g}}\|_D \leqslant \inf\{2^k\cdot\|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D_y^k} + 1/2^k : {}^k d(x,y)=0\} = B_D(\mathbf{g}) = \|\mathbf{g}\|_D.$$

3. $\mathbf{a} \equiv \mathbf{e}$**,** $\mathbf{g} \equiv \boldsymbol{x^\varepsilon x^{-\varepsilon}}\mathbf{b}$**,** $\hat{\mathbf{g}} \equiv \mathbf{b}$**.** По лемме 2.8 $\|\hat{\mathbf{g}}\|_D = \|\hat{\mathbf{g}}^{-1}\|_D = \|\mathbf{b}^{-1}\|_D$, $\|\mathbf{g}\|_D = \|\mathbf{g}^{-1}\|_D = \|\mathbf{b}^{-1}x^\varepsilon x^{-\varepsilon}\|_D$. Из п. 2 вытекает, что $\|\hat{\mathbf{g}}\|_D \leqslant \|\mathbf{g}\|_D$. □

Утверждение 2.2. *Пусть $D \in \mathcal{D}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, $x_1,\ldots,x_n \in X$, $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n = \pm 1$. Тогда существуют такое $D' \in \mathcal{D}$ и такое $b > 0$, что для всех $\mathbf{g} \in S^*(X)$, для которых $\|\mathbf{g}\|_{D'} < b$, выполняется неравенство*

$$\|x_1^{\varepsilon_1}\ldots x_n^{\varepsilon_n}\mathbf{g}x_n^{-\varepsilon_n}\ldots x_1^{-\varepsilon_1}\|_D < a.$$

Доказательство. Индукция по n. Если $n = 0$, то годятся $D' = D$ и $b = a$. Пусть $n \geqslant 1$ и для меньших n утверждение доказано. Выберем такое $k \in \mathbb{N}_0$, что $1/2^k < a$. По индуктивному предположению существуют такое $D' \in \mathcal{D}$ и такое $b > 0$, что для всех $\mathbf{g}$, для которых $\|\mathbf{g}\|_{D'} < b$, выполнено неравенство $\|x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n} \mathbf{g} x_n^{-\varepsilon_n} \dots x_2^{-\varepsilon_2}\|_{D_{x_1}^{k+1}} < 1/2^{2k+2}$. Для всех $\mathbf{g}$, удовлетворяющих условию $\|\mathbf{g}\|_{D'} < b$, имеем

$$\begin{aligned}\|x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} \mathbf{g} x_n^{-\varepsilon_n} \dots x_1^{-\varepsilon_1}\|_D &\leqslant B_D(x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} \mathbf{g} x_n^{-\varepsilon_n} \dots x_1^{-\varepsilon_1}) \leqslant \\ &\leqslant 2^{k+1} \cdot \|x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n} \mathbf{g} x_n^{-\varepsilon_n} \dots x_2^{-\varepsilon_2}\|_{D_{x_1}^{k+1}} + 1/2^{k+1} < \\ &< 2^{k+1} \cdot 1/2^{2k+2} + 1/2^{k+1} = 1/2^k \leqslant a. \quad \square\end{aligned}$$

Утверждение 2.3. *Пусть $D \in \mathcal{D}$, $a > 0$, $\varepsilon = \pm 1$ и $x \in X$. Тогда множество $U = \{y \in X \colon \|x^\varepsilon y^{-\varepsilon}\|_D < a\}$ открыто в X.*

Доказательство. Для всякого $y \in X$ $\|x^\varepsilon y^{-\varepsilon}\|_D = B_D(x^\varepsilon y^{-\varepsilon}) = \inf\{1/2^k \colon {}^k d(x, y) = 0\}$. Пусть $y_0 \in U$. Тогда $\|x^\varepsilon y_0^{-\varepsilon}\|_D < a$. Возможны два варианта.

1. $\|x^\varepsilon y_0^{-\varepsilon}\|_D = \inf\{1/2^k \colon {}^k d(x, y_0) = 0\} = 0$ и ${}^k d(x, y_0)$ для всех k;
2. $\|x^\varepsilon y_0^{-\varepsilon}\|_D = 1/2^{k_0}$, где k_0 таково, что ${}^{k_0} d(x, y_0) = 0$, ${}^{k_0+1} d(x, y_0) = 1$.

В любом случае найдётся k_0, для которого $\|x^\varepsilon y_0^{-\varepsilon}\|_D \leqslant 1/2^{k_0} < a$ и ${}^{k_0} d(x, y_0) = 0$. Ясно, что для всех $y \in X$, удовлетворяющих условию ${}^{k_0} d(y, y_0) = 0$, также выполняется неравенство $\|y^\varepsilon y_0^{-\varepsilon}\|_D \leqslant 1/2^{k_0} < a$. Из непрерывности псевдометрики ${}^{k_0} d$ на X вытекает, что множество $V = \{y \in X \colon {}^{k_0} d(y, y_0) = 0\}$ представляет собой открытую окрестность точки y_0, содержащуюся в U. $\square$

Утверждение 2.4. *Для любого $D \in \mathcal{D}$ функция $\|\cdot\|$ принимает только рациональные значения.*

Доказательство. Достаточно использовать лемму 2.6 с применением индукции по длине слова $\mathbf{g}$. $\square$

Утверждение 2.5. *Для любого $D \in \mathcal{D}$*

а) *сужение $\|\cdot\| \restriction F^*(X)$ является полунормой на $F^*(X)$;*
б) *семейство $\mathcal{U} = \big\{\{\mathbf{g} \in F^*(X) \colon \|\mathbf{g}\|_D < a\} \colon D \in \mathcal{D},\ a > 0\big\}$ представляет собой базу в единице некоторой групповой топологии $\mathcal{T}$ на $F^*(X)$ и, следовательно, на $F(X)$ (поскольку $F^*(X)$ — нормальная подгруппа $F(X)$), причём*
в) *эта топология не сильнее свободной топологии и*
г) $\operatorname{ind}(F(X), \mathcal{T}) = 0$.

Доказательство. Пункт а) вытекает из лемм 2.3 и 2.8.

Докажем б). В [19] установлено, что если $\mathcal{D}$ — произвольное семейство полунорм на группе G, удовлетворяющих условиям утверждения 2.2, то семейство $\mathcal{U}$ образует базу некоторой групповой топологии на G.

Пункт в) следует из утверждения 2.3, а г) — из утверждения 2.4. $\square$

Основное утверждение 2.1. *Семейство* $\big\{\{\mathbf{g} \in F^*(X)\colon \|\mathbf{g}\|_D < a\}\colon D \in \mathcal{D}, a > 0\big\}$ *представляет собой базу в единице топологии свободной группы* $F(X)$.

Доказательство. Достаточно проверить, что для любой непрерывной ограниченной числом $1/4$ полунормы $\|\cdot\|$ на $F(X)$ найдётся такое $D \in \mathcal{D}$, что $\|\mathbf{g}\| \leqslant \|\mathbf{g}\|_D$ для всех $\mathbf{g}$ из $F(X)$.

Итак, пусть $\|\cdot\|$ — непрерывная полунорма на $F(X)$, ограниченная числом $1/4$.

Для всякого $\mathbf{g} \equiv x_1 \ldots x_n \in S^*(X)$ выберем непрерывную неархимедову псевдометрику $p_{\mathbf{g}}$ на X со значениями в множестве $\{0\} \cup \{1/2^n\colon n \in \mathbb{N}_0\}$ так, что если $x, y \in X$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon = \pm 1$ и $\bar{\mathbf{g}} = x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$, то $p_{\mathbf{g}}(x, y) \geqslant 2 \cdot \|\bar{\mathbf{g}} x^{\varepsilon} y^{-\varepsilon} \bar{\mathbf{g}}^{-1}\|$. Для любого $k \in \mathbb{N}_0$ положим ${}^k p_{\mathbf{g}} = \min([2^k \cdot p_{\mathbf{g}}], \mathbf{1})$, где $[\,\cdot\,]$ — операция взятия целой части и $\mathbf{1}$ — функция, тождественно равная единице на X^2.

Для каждого непустого открытого множества U в X зафиксируем точку $x_U \in U$.

Сейчас мы построим семейства

$$D = \{{}^k d^{k_1 \ldots k_n}_{x_1 \ldots x_n}\colon k, n, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0,\ x_1, \ldots, x_n \in X\}$$

и

$$F = \{{}^k f^{k_1 \ldots k_n}_{x_1 \ldots x_n}\colon k, n, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0,\ x_1, \ldots, x_n \in X\},$$

где ${}^k d^{k_1 \ldots k_n}_{x_1 \ldots x_n}$ — непрерывные псевдометрики на X со значениями 0 и 1, а ${}^k f^{k_1 \ldots k_n}_{x_1 \ldots x_n}$ — отображения множества X в себя.

Построение будем проводить индукцией по наборам $(k_1, \ldots, k_n, k)$ чисел, составляющих верхние индексы при элементах семейств D и F, которые упорядочены с помощью частичного порядка $\preccurlyeq$, определяемого следующим образом: $(k_1, \ldots, k_n, k) \preccurlyeq (m_1, \ldots, m_l, m)$, если

1) $n \leqslant l$;
2) существует такой набор $(r_1, \ldots, r_l, r) \in \mathbb{N}_0^{l+1}$, что
   а) $r_i \leqslant m_i$ для $i \leqslant l$ и $r \leqslant m$;
   б) либо набор $(k_1, \ldots, k_n, k)$ совпадает с $(r_1, \ldots, r_l, r)$ (если $n = l$), либо он получается из этого набора путём вычеркивания некоторых элементов.

Мы будем писать $(k_1, \ldots, k_n, k) \prec (m_1, \ldots, m_k, m)$, если $(k_1, \ldots, k_n, k) \preccurlyeq$ $\preccurlyeq (m_1, \ldots, m_l, m)$ и $(k_1, \ldots, k_n, k) \neq (m_1, \ldots, m_l, m)$. Ясно, что построенное нами упорядоченное множество наборов имеет минимальный элемент (0).

Положим ${}^0 d \equiv 0$ на X^2 и ${}^0 f \equiv x_X$ на X.

Пусть $(0) \prec (k_1, \ldots, k_n, k)$ и для всех $(m_1, \ldots, m_l, m) \prec (k_1, \ldots, k_n, k)$ и $x_1, \ldots, x_l \in X$ уже построены ${}^m d^{m_1 \ldots m_l}_{x_1 \ldots x_l}$ и ${}^m f^{m_1 \ldots m_l}_{x_1 \ldots x_l}$, удовлетворяющие следующим условиям.

$0^{\circ\circ}$. ${}^m d^{m_1 \ldots m_l}_{x_1 \ldots x_l}$ — непрерывная псевдометрика на X со значениями 0 и 1, ${}^m f^{m_1 \ldots m_l}_{x_1 \ldots x_l}\colon X \to X$ — отображение, причём для каждого единичного шара U относительно псевдометрики ${}^m d^{m_1 \ldots m_l}_{x_1 \ldots x_l}$ ${}^m f^{m_1 \ldots m_l}_{x_1 \ldots x_l} \restriction U \equiv x_U$ (множество всех таких шаров составляет дизъюнктное покрытие пространства X открыто-замкнутыми множествами).

$1^{\circ\circ}$. Если $m=0$, то ${}^{m}d^{m_1\dots m_l}_{x_1\dots x_l}=0$ на X^2, ${}^{m}f^{m_1\dots m_l}_{x_1\dots x_l}\equiv x_X$.

$2^{\circ\circ}$. а) Для $m'\leqslant m$ и $m_i'\leqslant m_i$ ${}^{m'}d^{m_1'\dots m_l'}_{x_1\dots x_l}(x,y)\leqslant {}^{m}d^{m_1\dots m_l}_{x_1\dots x_l}(x,y)$ при $x,y\in X$;

б) ${}^{m}d^{m_1\dots \hat{m}_i\dots m_l}_{x_1\dots \hat{x}_i\dots x_l}(x,y)\leqslant {}^{m}d^{m_1\dots m_l}_{x_1\dots x_l}(x,y)$ при $1\leqslant i\leqslant l$ (если $l>0$), $x,y\in X$.

$3^{\circ\circ}$. Если $1\leqslant i\leqslant l$ и ${}^{m_i}d^{m_1\dots m_{i-1}}_{x_1\dots x_{i-1}}(x_i,x_i')=0$ (это число определено, поскольку $(m_1,\dots,m_i)\prec(m_1,\dots,m_l,m)\prec(k_1,\dots,k_n,k)$), то

$$
{}^{m}d^{m_1\dots m_{i-1}m_im_{i+1}\dots m_l}_{x_1\dots x_{i-1}x_ix_{i+1}\dots x_l}\equiv {}^{m}d^{m_1\dots m_{i-1}m_im_{i+1}\dots m_l}_{x_1\dots x_{i-1}x_i'x_{i+1}\dots x_l},
$$
$$
{}^{m}f^{m_1\dots m_{i-1}m_im_{i+1}\dots m_l}_{x_1\dots x_{i-1}x_ix_{i+1}\dots x_l}\equiv {}^{m}f^{m_1\dots m_{i-1}m_im_{i+1}\dots m_l}_{x_1\dots x_{i-1}x_i'x_{i+1}\dots x_l}.
$$

$4^{\circ\circ}$. ${}^{m}d^{m_1\dots m_l}_{x_1\dots x_l}(x,y)\geqslant {}^{m}p_{{}^{m_1}f(x_1)\,{}^{m_2}f^{m_1}_{x_1}(x_2)\dots{}^{m_l}f^{m_1\dots m_{l-1}}_{x_1\dots x_{l-1}}(x_l)}(x,y)$ при $x,y\in X$.

Определим ${}^{k}d^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}$ и ${}^{k}f^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}$.

Для $x_1,\dots,x_n\in X$ положим

$$
\begin{aligned}
{}^{k}d^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}=\max\Bigl({}^{k}p_{{}^{k_1}f(x_1)\,{}^{k_2}f^{k_1}_{x_1}(x_2)\dots{}^{k_n}f^{k_1\dots k_{n-1}}_{x_1\dots x_{n-1}}(x_n)},&\\
\max\bigl({}^{k'}d^{k_1'\dots k_n'}_{x_1\dots x_n}:(k_1',\dots,k_n',k')\prec(k_1,\dots,k_n,k)\bigr),&\\
\max\bigl({}^{k}d^{k_1\dots\hat{k}_i\dots k_n}_{x_1\dots\hat{x}_i\dots x_n}:1\leqslant i\leqslant n\bigr)\Bigr).&
\end{aligned}
$$

Для каждого единичного шара U относительно псевдометрики ${}^{k}d^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}$ положим ${}^{k}f^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}\restriction U\equiv x_U$.

Проверим, что для $(m_1,\dots,m_l,m)=(k_1,\dots,k_n,k)$ выполняются условия $0^{\circ\circ}$—$3^{\circ\circ}$. Заметим, что для $1\leqslant i\leqslant n$ $(k_1,\dots,\check{k}_i,\dots,k_n,k)\prec(k_1,\dots,k_n,k)$.

$0^{\circ\circ}$. Очевидно.

$1^{\circ\circ}$. Пусть $k=0$. Поскольку для всякого $\mathbf{g}$ и любых $x,y\in X$ $p_{\mathbf{g}}(x,y)\leqslant 1/4$, всегда $[p_{\mathbf{g}}]=[2^0\cdot p_{\mathbf{g}}]\equiv 0$, значит, ${}^{0}p_{\mathbf{g}}\equiv 0$. По индуктивному предположению ${}^{k'}d^{k_1'\dots k_n'}_{x_1\dots x_n}\equiv 0$ для $(k_1',\dots,k_n',k')\prec(k_1,\dots,k_n,k)$, ибо в этом случае из-за того, что длины данных наборов равны, имеем $k'\leqslant k=0$. Кроме того, ${}^{k}d^{k_1\dots\check{k}_i\dots k_n}_{x_1\dots\check{x}_i\dots x_n}\equiv 0$. По построению ${}^{k}d^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}\equiv 0$.

$2^{\circ\circ}$. а) вытекает из определения псевдометрики ${}^{k}d^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}$ и того факта, что если $k'\leqslant k$ и $k_i'\leqslant k_i$ для $i\leqslant n$, то $(k_1',\dots,k_n',k')\preccurlyeq(k_1,\dots,k_n,k)$;

б) очевидно.

$3^{\circ\circ}$. Пусть $1\leqslant i\leqslant n$ и ${}^{k_i}d^{k_1\dots k_{i-1}}_{x_1\dots x_{i-1}}(x_i,x_i')=0$. Поскольку $(k_1,\dots,k_i)\prec\,\prec(k_1,\dots,k_n,k)$, по индуктивному предположению условие $0^{\circ\circ}$ влечёт, что

$$
{}^{k_i}f^{k_1\dots k_{i-1}}_{x_1\dots x_{i-1}}(x_i)={}^{k_i}f^{k_1\dots k_{i-1}}_{x_1\dots x_{i-1}}(x_i')=x_U,
$$

где U — единичный шар относительно псевдометрики ${}^{k_i}d^{k_1\dots k_{i-1}}_{x_1\dots x_{i-1}}$, содержащий точки x_i и x_i'. По индуктивному предположению из того, что для $j\leqslant n$ $(k_1,\dots,k_j)\prec(k_1,\dots,k_n,k)$, и из условия $3^{\circ\circ}$ вытекает, что для $j\leqslant n$, $j>i$

$$
{}^{k_j}f^{k_1\dots k_i\dots k_{j-1}}_{x_1\dots x_i\dots x_{j-1}}(x_j)={}^{k_j}f^{k_1\dots k_i\dots k_{j-1}}_{x_1\dots x_i'\dots x_{j-1}}(x_j).
$$

Таким образом, индекс $\mathbf{g} \equiv {}^{k_1}f(x_1)\,{}^{k_2}f^{k_1}_{x_1}(x_2)\ldots{}^{k_n}f^{k_1\ldots k_{n-1}}_{x_1\ldots x_{n-1}}(x_n)$ при псевдометрике ${}^kp_{\mathbf{g}}$, стоящий под знаком $\max$ в определении псевдометрики ${}^kd^{k_1\ldots k_n}_{x_1\ldots x_n}$, не меняется при замене x_i на x'_i, значит, не меняется и сама псевдометрика ${}^kp_{\mathbf{g}}$. Покажем, что не меняются и остальные псевдометрики под знаком $\max$.

Пусть $(k'_1,\ldots,k'_n,k') \prec (k_1,\ldots,k_n,k)$. Ясно, что тогда $(k'_1,\ldots,k'_i) \preccurlyeq (k_1,\ldots,k_i)$, т. е. $k'_j \leqslant k_j$ при $j \leqslant i$. Поскольку

$$(k_1,\ldots,k_i) \prec (k_1,\ldots,k_n,k),$$

применимо индуктивное предположение. По условию $2^{\circ\circ}$а) имеем

$${}^{k'_i}d^{k'_1\ldots k'_{i-1}}_{x_1\ldots x_{i-1}}(x_i,x'_i) \leqslant {}^{k_i}d^{k_1\ldots k_{i-1}}_{x_1\ldots x_{i-1}}(x_i,x'_i) = 0.$$

Из условия $3^{\circ\circ}$ вытекает, что

$${}^{k'_i}d^{k'_1\ldots k'_i\ldots k'_n}_{x_1\ldots x_i\ldots x_n} \equiv {}^{k'_i}d^{k'_1\ldots k'_i\ldots k'_n}_{x_1\ldots x'_i\ldots x_n}.$$

Значит, псевдометрика $\max\bigl({}^{k'}d^{k'_1\ldots k'_n}_{x_1\ldots x_n} : (k'_1,\ldots,k'_n,k') \prec (k_1,\ldots,k_n,k)\bigr)$ не меняется при замене x_i на x'_i. Покажем, что псевдометрика

$$\max\bigl({}^kd^{k_1\ldots\check{k}_j\ldots k_n}_{x_1\ldots\check{x}_j\ldots x_n} : 1 \leqslant j \leqslant n\bigr)$$

тоже не меняется при замене x_i на x'_i; более того, мы покажем, что не меняются сами псевдометрики ${}^kd^{k_1\ldots\check{k}_j\ldots k_n}_{x_1\ldots\check{x}_j\ldots x_n}$.

Если $i = j$, то это утверждение очевидно.

Если $i < j$, то, поскольку

$$(k_1,\ldots,\check{k}_j,\ldots,k_n) \prec (k_1,\ldots,k_n) \prec (k_1,\ldots,k_n,k),$$

достаточно применить индуктивное предположение и условие $3^{\circ\circ}$.

Пусть $j < i$. Тогда $(k_1,\ldots,\check{k}_j,\ldots,k_i) \prec (k_1,\ldots,k_i) \prec (k_1,\ldots,k_n,k)$. По индуктивному предположению из условия $2^{\circ\circ}$б) вытекает, что

$${}^{k_i}d^{k_1\ldots\check{k}_j\ldots k_{i-1}}_{x_1\ldots\check{x}_j\ldots x_{i-1}}(x_i,x'_i) \leqslant {}^{k_i}d^{k_1\ldots k_{i-1}}_{x_1\ldots x_{i-1}}(x_i,x'_i) = 0.$$

По условию $3^{\circ\circ}$ и индуктивному предположению имеем

$${}^{k_i}d^{k_1\ldots\check{k}_j\ldots k_i\ldots k_n}_{x_1\ldots\check{x}_j\ldots x_i\ldots x_n} \equiv {}^{k_i}d^{k_1\ldots\check{k}_j\ldots k_i\ldots k_n}_{x_1\ldots\check{x}_j\ldots x'_i\ldots x_n}.$$

Таким образом, псевдометрика $\max\bigl({}^kd^{k_1\ldots\check{k}_j\ldots k_n}_{x_1\ldots\check{x}_j\ldots x_n} : 1 \leqslant j \leqslant n\bigr)$ не меняется при замене x_i на x'_i. Окончательно получаем

$${}^kd^{k_1\ldots k_i\ldots k_n}_{x_1\ldots x_i\ldots x_n} \equiv {}^kd^{k_1\ldots k_i\ldots k_n}_{x_1\ldots x'_i\ldots x_n}.$$

Поскольку определение функций ${}^kf^{k_1\ldots k_i\ldots k_n}_{x_1\ldots x_i\ldots x_n}$ и ${}^kf^{k_1\ldots k_i\ldots k_n}_{x_1\ldots x'_i\ldots x_n}$ зависит только от множеств единичных шаров соответствующих псевдометрик, имеем также

$${}^kf^{k_1\ldots k_i\ldots k_n}_{x_1\ldots x_i\ldots x_n} \equiv {}^kf^{k_1\ldots k_i\ldots k_n}_{x_1\ldots x'_i\ldots x_n}.$$

$4^{\circ\circ}$. Очевидно.

Индуктивное построение завершено.

Мы получили семейство $D = \big\{{}^k d^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n} : k, n, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0,\ x_1, \dots, x_n \in X\big\}$. Из условий $0^{\circ\circ}$—$3^{\circ\circ}$ немедленно вытекает, что для D выполнены условия 0°—3° из определения семейства $\mathcal{D}$, следовательно, $D \in \mathcal{D}$.

Для завершения доказательства основного утверждения нужна следующая лемма.

Лемма. *Пусть $n, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$, $x_1, \dots, x_n \in X$ и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$. Положим $z_1 = {}^{k_1}f(x_1)$, $z_2 = {}^{k_2}f^{k_1}_{x_1}(x_2), \dots, z_n = {}^{k_n}f^{k_1\dots k_{n-1}}_{x_1\dots x_{n-1}}(x_n)$. Тогда для всякого $\mathbf{g} \in F^*(X)$*

$$\|z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \dots z_n^{\varepsilon_n} \mathbf{g} z_n^{-\varepsilon_n} \dots z_2^{-\varepsilon_2} z_1^{-\varepsilon_1}\| \leqslant \|\mathbf{g}\|_{D^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}}.$$

Доказательство. Индукция по длине слова $\mathbf{g}$. Для $\mathbf{g} = \mathbf{e}$ утверждение очевидно. Пусть $l(\mathbf{g}) > 0$ и для слов меньшей длины лемма доказана. Возможны два варианта.

А. $\mathbf{g} \equiv \mathbf{g}_1\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in S^*(X)\setminus\{\mathbf{e}\}$ и $\|\mathbf{g}\|_{D^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}} = A_{D^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}}(\mathbf{g}) = \|\mathbf{g}_1\|_{D^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}} + \|\mathbf{g}_2\|_{D^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}}$. Тогда $l(\mathbf{g}_i) < l(\mathbf{g})$ для $i = 1, 2$ и, поскольку слово $\mathbf{g}$ несократимо и $\mathbf{g} \equiv \mathbf{g}_1\mathbf{g}_2$, слова $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ тоже несократимы, т. е. $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in F^*(X)$. По определению полунормы и индуктивному предположению

$$\begin{aligned}
&\|z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \dots z_n^{\varepsilon_n} \mathbf{g} z_n^{-\varepsilon_n} \dots z_2^{-\varepsilon_2} z_1^{-\varepsilon_1}\| \leqslant \\
&\quad \leqslant \|z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \dots z_n^{\varepsilon_n} \mathbf{g}_1 z_n^{-\varepsilon_n} \dots z_2^{-\varepsilon_2} z_1^{-\varepsilon_1}\| + \|z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \dots z_n^{\varepsilon_n} \mathbf{g}_2 z_n^{-\varepsilon_n} \dots z_2^{-\varepsilon_2} z_1^{-\varepsilon_1}\| \leqslant \\
&\quad \leqslant \|\mathbf{g}_1\|_{D^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}} + \|\mathbf{g}_2\|_{D^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}} = \|\mathbf{g}\|_{D^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}}.
\end{aligned}$$

Б. $\mathbf{g} \equiv x^\varepsilon \tilde{\mathbf{g}} y^{-\varepsilon}$ и

$$\|\mathbf{g}\|_{D^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}} = B_{D^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}}(\mathbf{g}) = \inf\{2^k \cdot \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D^{k_1\dots k_n k}_{x_1\dots x_n x}} + 1/2^k \colon {}^k d^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}(x, y) = 0\}.$$

Ясно, что $l(\tilde{\mathbf{g}}) < l(\mathbf{g})$ и $\tilde{\mathbf{g}} \in F^*(X)$.

Пусть $k \in \mathbb{N}_0$ и ${}^k d^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}(x, y) = 0$. Покажем, что тогда

$$2^k \cdot \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D^{k_1\dots k_n k}_{x_1\dots x_n x}} + 1/2^k \geqslant \|z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \dots z_n^{\varepsilon_n} \mathbf{g} z_n^{-\varepsilon_n} \dots z_2^{-\varepsilon_2} z_1^{-\varepsilon_1}\|.$$

Положим $z = {}^k f^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}(x)$. Поскольку ${}^k d^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}(x, y) = 0$, точки x и y содержатся в одном единичном шаре U относительно псевдометрики ${}^k d^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}$; по построению $z \in U$, т. е. ${}^k d^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}(x, z) = {}^k d^{k_1\dots k_n}_{x_1\dots x_n}(z, y) = 0$. По условию $4^{\circ\circ}$

$$\begin{aligned}
&{}^k p_{z_1 z_2 \dots z_n}(x, z) = {}^k p_{z_1 z_2 \dots z_n}(z, y) = \\
&\qquad = \min([2^k \cdot p_{z_1 z_2 \dots z_n}], \mathbf{1})(x, z) = \min([2^k \cdot p_{z_1 z_2 \dots z_n}], \mathbf{1})(z, y) = 0,
\end{aligned}$$

значит,

$$[2^k \cdot p_{z_1 z_2 \dots z_n}(x, z)] = [2^k \cdot p_{z_1 z_2 \dots z_n}(z, y)] = 0,$$

откуда

$$p_{z_1 z_2 \dots z_n}(x, z) < 1/2^k$$

и

$$p_{z_1 z_2 \dots z_n}(z, y) < 1/2^k.$$

По определению

$$\|z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \dots z_n^{\varepsilon_n} x^{\varepsilon} z^{-\varepsilon} z_n^{-\varepsilon_n} \dots z_2^{-\varepsilon_2} z_1^{-\varepsilon_1}\| \leqslant p_{z_1 z_2 \dots z_n}(x, z) < 1/2^k$$

и

$$\|z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \dots z_n^{\varepsilon_n} z^{\varepsilon} y^{-\varepsilon} z_n^{-\varepsilon_n} \dots z_2^{-\varepsilon_2} z_1^{-\varepsilon_1}\| \leqslant p_{z_1 z_2 \dots z_n}(z, y) < 1/2^k.$$

По определению полунормы и индуктивному предположению

$$\begin{aligned}
&\|z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \dots z_n^{\varepsilon_n} \mathbf{g} z_n^{-\varepsilon_n} \dots z_2^{-\varepsilon_2} z_1^{-\varepsilon_1}\| = \|z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \dots z_n^{\varepsilon_n} x^{\varepsilon} \tilde{\mathbf{g}} y^{-\varepsilon} z_n^{-\varepsilon_n} \dots z_2^{-\varepsilon_2} z_1^{-\varepsilon_1}\| \leqslant \\
&\quad \leqslant \|z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \dots z_n^{\varepsilon_n} x^{\varepsilon} z^{-\varepsilon} z_n^{-\varepsilon_n} \dots z_2^{-\varepsilon_2} z_1^{-\varepsilon_1}\| + \\
&\quad + \|z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \dots z_n^{\varepsilon_n} z^{\varepsilon} \tilde{\mathbf{g}} z^{-\varepsilon} z_n^{-\varepsilon_n} \dots z_2^{-\varepsilon_2} z_1^{-\varepsilon_1}\| + \\
&\quad + \|z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \dots z_n^{\varepsilon_n} z^{\varepsilon} y^{-\varepsilon} z_n^{-\varepsilon_n} \dots z_2^{-\varepsilon_2} z_1^{-\varepsilon_1}\| < 1/2^{k+1} + 1/2^{k+1} + \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D^{k_1 \dots k_n k}_{x_1 \dots x_n x}}.
\end{aligned}$$

Тем более

$$\|z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \dots z_n^{\varepsilon_n} \mathbf{g} z_n^{-\varepsilon_n} \dots z_2^{-\varepsilon_2} z_1^{-\varepsilon_1}\| \leqslant 2^k \cdot \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{D^{k_1 \dots k_n k}_{x_1 \dots x_n x}} + 1/2^k.$$

Это неравенство выполняется для всякого k, для которого ${}^k d^{k_1 \dots k_n}_{x_1 \dots x_n}(x, y) = 0$. Значит,

$$\|z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \dots z_n^{\varepsilon_n} \mathbf{g} z_n^{-\varepsilon_n} \dots z_2^{-\varepsilon_2} z_1^{-\varepsilon_1}\| \leqslant B_{D^{k_1 \dots k_n k}_{x_1 \dots x_n x}}(\mathbf{g}),$$

что и требовалось. □

В частном случае $n = 0$ формулировка доказанной леммы выглядит так: *для всякого* $\mathbf{g} \in F^*(X)$ $\|\mathbf{g}\| \leqslant \|\mathbf{g}\|_D$. Это завершает доказательство основного утверждения. □

Из основного утверждения и утверждения 2.5 немедленно вытекает доказываемая теорема.

3. Два свойства окрестностей единицы в свободной топологической группе

Первое свойство более или менее очевидно, и им обладает всякая открытая окрестность U единицы в свободной топологической группе произвольного недискретного тихоновского пространства X: для любого n окрестность U содержит слова длины $2n$. Действительно, возьмём любое натуральное n. Раз X недискретно, найдётся такая точка $x_0 \in X$, что любая её открытая окрестность (в X) бесконечна. Рассмотрим запись $\mathbf{e} = \underbrace{x_0^{-1} x_0 \dots x_0^{-1} x_0}_{n \text{ раз}}$ пустого слова (единицы группы $F(X)$). Из непрерывности умножения и инверсии в $F(X)$

вытекает существование открытой окрестности V точки x_0 в $F(X)$, для которой $\underbrace{V^{-1} \cdot V \cdot \ldots \cdot V^{-1} \cdot V}_{n \text{ раз}} \subseteq U$. Поскольку пересечение $V \cap X$ представляет собой открытую окрестность точки x_0 в X, оно содержит $2n$ различных точек $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$. Ясно, что слово $x_1^{-1} x_2 \ldots x_{2n-1}^{-1} x_{2n}$ несократимо, имеет длину $2n$ и принадлежит множеству U. Слов нечётной длины окрестность единицы может не содержать совсем — множество всех слов чётной длины образует в $F(X)$ открыто-замкнутую подгруппу, поскольку является ядром непрерывного гомоморфизма $F(X)$ в дискретную группу $\{0, 1\}$, представляющего собой продолжение непрерывного отображения $f \colon X \to \{0, 1\}$, тождественно равного единице.

Из этого простого свойства немедленно вытекает, например, что свободная топологического группа недискретного пространства не бывает локально компактной — компакт в свободной группе не может содержать слов неограниченной длины (см. [60]).

Второе свойство — это свойство содержать нетривиальную подгруппу. Этим свойством обладают все достаточно маленькие окрестности единицы в свободных группах метризуемых пространств (и, следовательно, всех пространств, на которых существует непрерывная метрика, т. е. топология которых может быть ослаблена до метризуемой). Группы, в которых есть окрестности единицы с таким свойством, называются *группами без малых подгрупп* или *NSS-группами*. Понятие NSS-группы возникло в связи с проблемой топологической характеризации групп Ли. По теореме Глисона—Ямабе группы Ли — это в точности локально компактные NSS-группы (см. [72]). Таким образом, фактор-группы локально компактных NSS-групп являются NSS-группами. Свойства фактор-групп NSS-групп в общем случае изучались рядом авторов в течение многих лет, пока В. Г. Пестов не доказал, что всякая топологическая группа является фактор-группой некоторой NSS-группы [20]. В доказательстве Пестов использовал утверждение, сформулированное в начале этого абзаца, что свободная топологическая группа метризуемого пространства является NSS-группой. К этому моменту разные доказательства этого утверждения были опубликованы в двух статьях [79, 102]. Однако, как заметил В. В. Успенский, оба доказательства были неверны (см. [29]). Окончательно теорема о том, что свободная группа метризуемого пространства не имеет малых подгрупп, была доказана ещё через несколько лет в совместной работе О. В. Сипачёвой и В. В. Успенского [29].

Предложенное в [29] доказательство опирается на приведённую в разделе 1.6 формулу (2) для вычисления граевской полунормы. В нём используется остроумная идея В. В. Успенского, который предложил рассматривать схемы сокращения как деревья и оценивать нормы слов путём подсчёта числа элементов в специальных подмножествах этих деревьях. Эта идея производит впечатление весьма полезной; не исключено, что её удастся применить и к другим проблемам теории свободных групп. Суть доказательства такова. Напомним, что схема слова — это система дужек, нарисованных над словом и соединяющих буквы этого слова. Дужки естественным образом упорядочены: каждая дужка больше всех тех дужек, под которыми она находится. Схема слова с таким порядком является деревом. Скажем, что элемент дерева *разветвлён*, если за ним непосредственно следуют по крайней мере два элемента. Назовём звеном конечного дерева T любое линейно упорядоченное множество $\{r_1, \ldots, r_s\} \subseteq T$, удовлетворяющее трем условиям: (а) ни один из элементов $r_1, \ldots, r_{s-1}$ не разветвлён; (б) элемент r_s либо максимален в T, либо разветвлён; (в) либо элемент r_1 минимален в T, либо элемент r_0, за которым он непосредственно следует, разветвлён. Доказательство теоремы основано на двух леммах.

Лемма 3.1. *Пусть T — конечное дерево, $D \subseteq T$ и $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что*

(i) *все максимальные элементы из T принадлежат D;*
(ii) *если $\{r_1, \ldots, r_s\}$ — произвольное звено в T и $1 \leqslant i \leqslant s-n+1$, то среди идущих подряд n элементов $r_i, \ldots, r_{i+n-1}$ по меньшей мере один принадлежит D.*

Тогда $|T| \leqslant 2n|D|$.

Лемма 3.2. *Пусть $\mathbf{g} = x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_{2n}^{\varepsilon_{2n}}$ — произвольное слово из $F(X)$ длины $2n$, в котором $x_1^{\varepsilon_1} \neq -x_{2n}^{\varepsilon_{2n}}$. Если $\mathbf{h} \in F(X)$ таково, что при некотором натуральном k слово $\mathbf{g}^k$ содержит в качестве подслова как $\mathbf{h}$, так и $\mathbf{h}^{-1}$, то длина слова $\mathbf{h}$ меньше n.*

Пусть d — метрика на множестве X. Покажем, что окрестность единицы $\{\mathbf{g}\colon \|\mathbf{g}\|_d < 1\}$ в $F(X)$ не содержит нетривиальных подгрупп. Пусть $\mathbf{g} \equiv \equiv x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_{2n}^{\varepsilon_{2n}}$ — произвольное непустое слово из $F^*(X)$. Обозначим через α наименьшее из ненулевых чисел вида $d(x_i, x_j)$, где $1 \leqslant i, j \leqslant 2n$. Достаточно установить, что $\|\mathbf{g}^k\|_d \geqslant \alpha k/2$ при всех натуральных k. Возьмём $k \in \mathbb{N}$. Мы будем считать, что $x_1^{\varepsilon_1} \neq x_{2n}^{-\varepsilon_{2n}}$ (иначе заменим слово $\mathbf{g}$ на его самое короткое подслово $\mathbf{h}$, сопряжённое с $\mathbf{g}$ в $F(X)$, и воспользуемся равенством $\|\mathbf{g}^k\|_d = \|\mathbf{h}^k\|_d$), так что слово $\mathbf{g}^k$ имеет длину $2nk$. Пусть $\mathbf{g}^k \equiv y_1^{\delta_1} \ldots y_{2nk}^{\delta_{2nk}}$. Пусть σ — схема слова $\mathbf{g}^k$, для которой $\|\mathbf{g}^k\|_d = \sum\limits_{\langle i,j\rangle \in \sigma} d(y_i, y_j)$. Напомним, что схема σ представляет собой дерево. Назовём элемент $\langle i, j\rangle \in \sigma$ *отмеченным*, если $y_i \neq y_j$. Покажем, что множество D всех отмеченных элементов и число n удовлетворяют условиям леммы 3.1. Максимальные элементы в σ имеют вид $\langle i, i+1\rangle$, поэтому условие (i) леммы 3.1 выполнено в силу несократимости слова $y_1^{\delta_1} \ldots y_{2nk}^{\delta_{2nk}}$. Если $\{r_1, \ldots, r_s\}$ — звено в σ, то при некоторых i и j, удовлетворяющих неравенствам $1 \leqslant i < i+2s-1 \leqslant j \leqslant 2nk$, имеем

$$r_1 = \langle i, j\rangle, \quad r_2 = \langle i+1, j-1\rangle, \ldots, \quad r_s = \langle i+s-1, j-s+1\rangle.$$

Допустим, что условие (ii) леммы 3.1 нарушается; пусть, например, среди элементов $r_1, \ldots, r_n$ нет отмеченных. Тогда

$$y_i = y_j, \quad y_{i+1} = y_{j-1}, \ldots, \quad y_{i+n-1} = y_{j-n+1}.$$

Так как при этом

$$\delta_i = -\delta_j, \quad \delta_{i+1} = -\delta_{j-1}, \ldots, \quad \delta_{i+n-1} = -\delta_{j-n+1},$$

получаем противоречие с леммой 3.2. Мы доказали, что к σ, D и n применима лемма 3.1. Имеем $nk = |\sigma| \leqslant 2n|D|$, откуда $|D| \geqslant k/2$. Следовательно,

$$\|\mathbf{g}^k\|_d = \sum_{\langle i,j\rangle\in\sigma} d(y_i, y_j) = \sum_{\langle i,j\rangle\in D} d(y_i, y_j) \geqslant \alpha|D| \geqslant \alpha k/2,$$

что и требовалось.

Итак, если X — метризуемое пространство, то в его свободной группе с топологией, порождённой граевским продолжением метрики, найдётся открытая окрестность единицы, не содержащая нетривиальных подгрупп. Эта окрестность единицы открыта и в более сильной свободной топологии; значит, свободная топологическая группа метризуемого пространства является NSS-группой. Если X неметризуемо, но на нём есть непрерывная метрика d (т. е. более слабая метризуемая топология), то топология его свободной топологической группы сильнее топологии свободной топологической группы метрического пространства (X, d); в этой более слабой топологии найдётся окрестность единицы, не содержащая нетривиальных подгрупп, значит, такая (та же самая) окрестность единицы найдётся и в группе $F(X)$.

Наличие непрерывной метрики не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы свободная топологическая группа была NSS-группой: всякая NSS-группа обладает счётным псевдохарактером [79], а для групп счётность псевдохарактера равносильна существованию непрерывной метрики [4].

4. Свойства типа локальной инвариантности в свободных топологических группах

Описание 1.8 оказывается удобным и для исследования свойств типа локальной инвариантности в свободных топологических группах.

Как уже упоминалось, граевская топология (определяемая граевскими продолжениями псевдометрик), вообще говоря, не является свободной, потому что она локально инвариантна. Однако иногда эта топология всё же совпадает со свободной; ниже описаны все такие случаи.

По-видимому, локально инвариантные топологические группы (в зарубежной литературе они чаще именуются SIN-группами; это группы, имеющие базу в единице, чьи элементы инвариантны относительно внутренних автоморфизмов) были впервые введены в 1950 г. М. И. Граевым [11], который назвал их группами с инвариантным базисом и доказал, что топологическая группа локально инвариантна тогда и только тогда, когда она топологически изоморфна подгруппе тихоновского произведения[5] топологических групп, метризуемых двусторонне инвариантными метриками. Подгруппы произведений метрических

[5]Под произведением групп мы всегда подразумеваем декартово (полное) произведение, т. е. мы не предполагаем, что лишь конечное число координат отлично от единицы. Произведение топологических групп всегда рассматривается с тихоновской топологией.

групп с неинвариантными метриками могут не быть локально инвариантными, но они тоже обладают свойством типа инвариантности: Г. И. Кац [14] доказал в 1953 г., что топологическая группа G топологически изоморфна подгруппе произведения групп с первой аксиомой счётности (т. е. метризуемых) тогда и только тогда, когда для каждой открытой окрестности U единицы существует такое семейство $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ открытых окрестностей единицы, что для любого $g \in G$ $g^{-1}V_n g \subseteq U$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. В [14] такие группы названы группами с квазиинвариантным базисом.

А. В. Архангельский [5] распространил определение Г. И. Каца на бо́льшие кардиналы, введя понятие *τ-уравновешенных* групп. В [99] введено формально новое (а по сути то же, что у Архангельского) понятие *τ-локально инвариантных* групп, которое совпадает с локальной инвариантностью для $\tau = \aleph_0$, и дана характеристика всех пространств, для которых свободная топологическая группа τ-локально инвариантна, в терминах свойств типа ограниченности этих пространств. Грубо говоря, τ-локальная инвариантность получается из локальной инвариантности заменой одной окрестности единицы U на меньше τ окрестностей: требуется, чтобы в каждой окрестности единицы U содержалось такое семейство окрестностей единицы $\{V_\alpha\}_{\alpha<\tau'}$, где $\tau' < \tau$, что для всякого $g \in G$ $g^{-1}V_\alpha g \subseteq U$ при некотором $\alpha < \tau'$. Кроме того, представляет интерес в некотором роде двойственный объект — τ-тонкие подмножества свободной топологической группы, т. е. такие подмножества, сопряжение элементами которых не сильно увеличивает достаточно малые окрестности единицы (например, подмножество A тонко в топологической группе G, если для любой окрестности единицы U найдётся такая окрестность единицы V, что $a^{-1}Va \subseteq U$ для всех $a \in A$).

Определение, данное ниже, представляет собой небольшую модификацию определения А. В. Архангельского τ-уравновешенных групп [5]; во избежание путаницы мы используем иной термин.

Определение 4.1 ([99]; см. также [5]). Пусть τ — кардинал. Топологическая группа G называется *τ-локально инвариантной*, если для любой открытой окрестности U единицы существуют такие кардинал $\tau' < \tau$ и семейство $\{V_\alpha\colon \alpha < \tau'\}$ открытых окрестностей единицы, что для любого $g \in G$ $g^{-1}V_\alpha g \subseteq U$ при некотором $\alpha < \tau'$.

Класс τ-уравновешенных групп А. В. Архангельского совпадает с классом τ^+-локально инвариантных групп, а $\aleph_1$-локально инвариантные группы — это группы с квазиинвариантным базисом, введённые Г. И. Кацем [14]. Наконец, $\aleph_0$-локально инвариантные группы совпадают с локально инвариантными (т. е. с группами, обладающими инвариантным базисом в терминологии М. И. Граева [11]). Действительно, для любой открытой окрестности U единицы в $\aleph_0$-локально инвариантной группе G найдётся такой конечный набор открытых окрестностей единицы $\{V_1, \ldots, U_n\}$, что для всякого $g \in G$ $g^{-1}V_i g \subseteq U$ при некотором $i \leqslant k$. Положим $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i$. Ясно, что $\bigcup\limits_{g\in G} g^{-1}Vg$ — инвариантная открытая окрестность единицы, которая содержится в U. Таким образом, семейство всех инвариантных открытых окрестностей единицы образует базу топологии группы G в единице.

М. Г. Ткаченко назвал подмножество X топологической группы G *тонким* в G [34], если для любой открытой окрестности U единицы найдётся такая открытая окрестность V единицы, что $x^{-1}Vx \subseteq U$ для всех $x \in X$.

Определение 4.2. Пусть τ — кардинал. Подмножество X топологической группы G называется *τ-тонким* в G, если для любой открытой окрестности U единицы существуют такие кардинал $\tau' < \tau$ и семейство $\{V_\alpha\colon \alpha < \tau'\}$ открытых окрестностей единицы, что для любого $x \in X$ $x^{-1}V_\alpha x \subseteq U$ при некотором $\alpha < \tau'$.

Таким образом, топологическая группа τ-локально инвариантна, если и только если она τ-тонка в себе.

Как заметил В. Г. Пестов [20], С. А. Моррис и Г. Томпсон фактически доказали в [78], что если X не является P-пространством, то его свободная топологическая группа $F(X)$ не локально инвариантна. Это вытекает также из следующей характеризации тонких множеств в $F(X)$, полученной О. В. Сипачёвой совместно с М. Г. Ткаченко и представляющей самостоятельный интерес.

Теорема ([100]). *Если X не P-пространство, то для каждого подмножества $B \subseteq F(X)$ следующие условия эквивалентны:*

1) *B тонко в $F(X)$;*
2) *B (функционально) ограничено в $F(X)$;*
3) *$B \subseteq F_n(X)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, и множество всех таких $x \in X$, что x^ε входит в несократимую запись слова из B при некотором $\varepsilon = \pm 1$, ограничено в X.*

Для пространства X мы полагаем

$$b(X) = \min\{\tau\colon X \text{ не содержит дискретного семейства } \tau \text{ открытых подмножеств}\}$$

и называем этот кардинал *степенью ограниченности* пространства X.

М. Г. Ткаченко доказал в [38], что свободная топологическая группа $F(X)$ локально инвариантна тогда и только тогда, когда существует такой кардинал τ, что все подмножества типа G_λ для $\lambda < \tau$ открыты в X и $b(X) \leqslant \tau$ (см. также замечание 4.3 в конце этого раздела).

И. И. Гуран [12] доказал, что для произвольного кардинала τ топологическая группа G τ-уравновешена (т. е. τ^+-локально инвариантна), если и только если она топологически изоморфна подгруппе произведения топологических групп характера τ. Теорема 4.1, сформулированная ниже, представляет собой простое обобщение этого результата.

Теорема 4.1 ([99]; см. также [12]). *Пусть τ — регулярный кардинал. Топологическая группа G τ-локально инвариантна тогда и только тогда, когда G*

топологически изоморфна подгруппе произведения топологических групп характера меньше τ.

А. А. Борубаев и А. А. Чекеев [9] доказали, что топологическая группа топологически изоморфна замкнутой подгруппе произведения групп характера не больше τ, если и только если она τ-уравновешена и каждый τ-центрированный фильтр на этой группе, являющийся фильтром Коши относительно левой равномерности, сходится. Этот результат легко переносится на τ-локально инвариантные группы для регулярных τ.

Следующие две теоремы (4.2 и 4.3) дают характеристику τ-локальной инвариантности свободной группы. Они были доказаны О. В. Сипачёвой [99] с помощью явных описаний топологии свободной группы, причём в их доказательствах используются разные описания. Теорема 4.2 (необходимое условие τ-локальной инвариантности) была доказана с использованием описания 1.8 топологии свободной группы в терминах продолжения псевдометрик, применение которого было продемонстрировано во втором разделе.

Теорема 4.2 ([99]). *Пусть X — тихоновское пространство, для которого $b(X) > \lambda$. Если X τ-тонко в свободной топологической группе $F(X)$ (в частности, если $F(X)$ τ-локально инвариантна), то любое семейство $\{W_\alpha\colon \alpha < \lambda\}$ окружений диагонали пространства $X \times X$ (в универсальной равномерности) имеет базу мощности $< \tau$, т. е. найдется такое семейство $\{W'_\beta\colon \beta < \tau'\}$ окружений диагонали пространства $X \times X$, что каждое окружение W_α содержит некоторое W'_β и $\tau' < \tau$.*

В терминах псевдометрик теорема 4.2 звучит так.

Теорема 4.2′. *Пусть X — тихоновское пространство, для которого $b(X) > \lambda$. Если X τ-тонко в свободной топологической группе $F(X)$ (в частности, если $F(X)$ τ-локально инвариантна), то для любого семейства $\{\rho_\alpha\colon \alpha < \lambda\}$ непрерывных псевдометрик на X существуют такие $\tau' < \tau$ и семейство $\{\rho'_\beta\colon \beta < \tau'\}$ непрерывных псевдометрик на X, что для каждого $\alpha < \lambda$ найдётся $\beta < \tau'$, для которого множество всех открытых единичных шаров относительно ρ'_β вписано во множество всех открытых единичных шаров относительно ρ_α.*

В доказательстве теоремы 4.3 (которая даёт достаточное условие локальной τ-инвариантности свободной группы) используется другое — принадлежащее М. Г. Ткаченко — явное описание топологии свободной группы, в терминах равномерных окружений диагонали (см. раздел 1.1). Мы приводим доказательство, чтобы продемонстрировать применение описаний такого сорта.

Теорема 4.3. *Пусть X — тихоновское пространство и τ — кардинал. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим универсальную равномерность пространства X^n через $\mathcal{U}^{(n)}$. Предположим, что для всякого семейства $\{\Xi_\alpha\colon \alpha < \lambda\}$, где $\lambda < b(X)$ и $\Xi_\alpha = \{W_\alpha^{(k)} \in \mathcal{U}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, существует такое семейство $\{\Xi'_\beta\colon \beta < \tau'\}$, где $\Xi'_\beta = \{{W'}_\beta^{(k)} \in \mathcal{U}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, что $\tau' < \tau$ и для любого $\alpha < \lambda$ найдётся $\beta < \tau'$, для которого ${W'}_\beta^{(n)} \subseteq W_\alpha^{(n)}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда X τ-тонко в $F(X)$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы 4.3 мы используем описание 1.1 топологии свободной топологической группы $F(X)$. Ясно, что все множества $U(\Xi)$ в этом описании симметричны, т. е. $U(\Xi) = U(\Xi)^{-1}$.

Пусть U — произвольная окрестность единицы в группе $F(X)$. Возьмём такую окрестность $U(\Xi)$, где $\Xi = \{W^{(k)} \in \mathcal{U}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, что $U(\Xi)^5 \subseteq U$. Семейство $\{xU(\Xi) \cap X \colon x \in X\}$ образует равномерное покрытие пространства X (с универсальной равномерностью); в него можно вписать покрытие γ, открытое и локально конечное относительно некоторой непрерывной псевдометрики на X.

Лемма 4.1. *Для произвольного тихоновского пространства X мощность любого покрытия этого пространства, открытого и локально конечного относительно некоторой непрерывной псевдометрики, меньше $b(X)$.*

Доказательство. Если $b(X) = \aleph_0$, то X счётно компактно (тем более псевдокомпактно), и утверждение леммы справедливо (см. [50, теорема 3.10.22]). Предположим, что $b(X) > \aleph_0$. Пусть ρ — произвольная непрерывная псевдометрика на X. Рассмотрим метрическое пространство $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$, которое получается из (X, ρ) отождествлением точек, лежащих на нулевом расстоянии (относительно ρ) друг от друга. Пространство $\tilde{X}$ является непрерывным образом пространства X (с исходной топологией); значит, $b(\tilde{X}) \leqslant b(X)$. Покажем, что $e(\tilde{X}) < b(X)$ ($e(X)$ — экстент X). Предположим противное, что $e(\tilde{X}) \geqslant b(X)$, т. е. $\tilde{X}$ имеет замкнутое дискретное подмножество Y мощности $b(X)$. Тогда для каждого $y \in Y$ мы можем найти такое натуральное число n_y, что открытый шар радиуса $1/n_y$ с центром в точке y (относительно псевдометрики $\tilde{\rho}$) пересекает Y в единственной точке y. Пусть Y' — такое подмножество множества Y, что n_y совпадают для всех $y \in Y'$ и $|Y'| \geqslant b(X)$ (оно существует, потому что, по предположению, $b(X) > \aleph_0$). Тогда расстояние между любыми двумя точками в Y' не меньше $1/n_y$. Пусть $\mathcal{B}$ — множество всех открытых $1/4n_y$-шаров с центрами в точках из Y'. Легко видеть, что $1/4n_y$-окрестность произвольной точки $x \in \tilde{X}$ может пересекаться лишь с одним шаром из $\mathcal{B}$; таким образом, $\mathcal{B}$ — дискретное семейство открытых множеств в пространстве $\tilde{X}$ и $|\mathcal{B}| = |Y'| \geqslant b(X)$, а это противоречит тому, что $b(\tilde{X}) \leqslant b(X)$. Итак, $e(\tilde{X}) < b(X)$. Поскольку $\tilde{X}$ — метрическое пространство, его вес не превосходит экстента (см. [50, теорема 4.1.15]), так что $w(\tilde{X}) < b(X)$. Значит, $w(X, \rho) < b(X)$, и мощность любого открытого локально конечного покрытия пространства (X, ρ) (т. е. любого покрытия пространства X, открытого и локально конечного относительно псевдометрики ρ) меньше $b(X)$. □

Итак, $|\gamma| = \lambda < b(X)$; предположим, что $\gamma = \{V_\alpha \colon \alpha < \lambda\}$. Для каждого $\alpha < \lambda$ зафиксируем $x_\alpha \in V_\alpha$.

Замечание 4.1. Если $x \in V_\alpha$, то $x^{-1}x_\alpha \in U(\Xi)^2$ (и $x_\alpha^{-1}x \in (U(\Xi)^{-1})^2 = U(\Xi)^2$). Действительно, γ вписано в покрытие $\{yU(\Xi) \cap X \colon y \in X\}$; значит, найдётся точка $z \in X$, для которой $V_\alpha \subseteq zU(\Xi)$, и найдутся $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in U(\Xi)$, для которых $x = z\mathbf{g}_1$ и $x_\alpha = z\mathbf{g}_2$. Имеем $x^{-1}x_\alpha = \mathbf{g}_1^{-1}z^{-1}z\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_1^{-1}\mathbf{g}_2 \in U(\Xi)^{-1} \cdot U(\Xi) = U(\Xi)^2$.

Для $\alpha < \lambda$ и $n \in \mathbb{N}$ пусть $W_\alpha^{(n)}$ — равномерное окружение диагонали пространства $X^n \times X^n$, представляющее собой естественную проекцию множества $(X^n \times \{x_\alpha\})^2 \cap W^{(n+1)}$ на X^{2n}, т. е.

$$W_\alpha^{(n)} = \{((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) \colon \\ ((x_1, x_2, \dots, x_n, x_\alpha), (y_1, y_2, \dots, y_n, x_\alpha)) \in W^{(n+1)}\}.$$

Имеем λ последовательностей $\{W_\alpha^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} = \Xi_\alpha$ окружений диагоналей пространств $X^k \times X^k$. Пусть $\{\Xi'_\beta = \{W'^{(k)}_\beta \in \mathcal{U}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \colon \beta < \tau'\}$, где $\tau' < \tau$, — семейство, существование которого предполагается в формулировке теоремы 4.3. Возьмём произвольную точку $x \in X$. Выберем $\alpha < \lambda$, для которого $x \in V_\alpha$, и найдём такое $\beta < \tau'$, что $W'^{(n)}_\beta \subseteq W_\alpha^{(n)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Каждое слово $\mathbf{g} \in U(\Xi'_\beta)$ принадлежит множеству $U_{\pi(1)}(\Xi'_\beta) \cdot U_{\pi(2)}(\Xi'_\beta) \cdot \ldots \cdot U_{\pi(n)}(\Xi'_\beta)$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $\pi \in S_n$ и, следовательно, может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{g} = {}& x_{1\pi(1)}^{-\varepsilon_{1\pi(1)}} \dots x_{12}^{-\varepsilon_{12}} x_{11}^{-\varepsilon_{11}} y_{11}^{\varepsilon_{11}} y_{12}^{\varepsilon_{12}} \dots y_{1\pi(1)}^{\varepsilon_{1\pi(1)}} \times \\ &\times x_{2\pi(2)}^{-\varepsilon_{2\pi(2)}} \dots x_{22}^{-\varepsilon_{22}} x_{21}^{-\varepsilon_{21}} y_{21}^{\varepsilon_{21}} y_{22}^{\varepsilon_{22}} \dots y_{2\pi(2)}^{\varepsilon_{2\pi(2)}} \times \\ &\times \ldots \times \\ &\times x_{n\pi(n)}^{-\varepsilon_{n\pi(n)}} \dots x_{n2}^{-\varepsilon_{n2}} x_{n1}^{-\varepsilon_{n1}} y_{n1}^{\varepsilon_{n1}} y_{n2}^{\varepsilon_{n2}} \dots y_{n\pi(n)}^{\varepsilon_{n\pi(n)}}, \end{aligned}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\pi \in S_n$, $\varepsilon_{ij} = \pm 1$ и $\big((x_{i1}^{i1}, x_{i2}^{i2}, \dots, x_{i\pi(i)}^{i\pi(i)}), (y_{i1}^{i1}, y_{i2}^{i2}, \dots, y_{i\pi(i)}^{i\pi(i)})\big) \in W'^{\pi(i)}_\beta$. Имеем

$$\begin{aligned} x^{-1}\mathbf{g}x = {}& x^{-1} x_\alpha x_\alpha^{-1} x_{1\pi(1)}^{-\varepsilon_{1\pi(1)}} \dots x_{12}^{-\varepsilon_{12}} x_{11}^{-\varepsilon_{11}} y_{11}^{\varepsilon_{11}} y_{12}^{\varepsilon_{12}} \dots y_{1\pi(1)}^{\varepsilon_{1\pi(1)}} x_\alpha \times \\ &\times x_\alpha^{-1} x_{2\pi(2)}^{-\varepsilon_{2\pi(2)}} \dots x_{22}^{-\varepsilon_{22}} x_{21}^{-\varepsilon_{21}} y_{21}^{\varepsilon_{21}} y_{22}^{\varepsilon_{22}} \dots y_{2\pi(2)}^{\varepsilon_{2\pi(2)}} x_\alpha \times \\ &\times \ldots \times \\ &\times x_\alpha^{-1} x_{n\pi(n)}^{-\varepsilon_{n\pi(n)}} \dots x_{n2}^{-\varepsilon_{n2}} x_{n1}^{-\varepsilon_{n1}} y_{n1}^{\varepsilon_{n1}} y_{n2}^{\varepsilon_{n2}} \dots y_{n\pi(n)}^{\varepsilon_{n\pi(n)}} x_\alpha x_\alpha^{-1} x \in \\ &\in x^{-1} x_\alpha x_\alpha^{-1} U_{\pi(1)}(\Xi_\alpha) \cdot U_{\pi(2)}(\Xi_\alpha) \cdot \ldots \cdot U_{\pi(n)}(\Xi_\alpha) x_\alpha^{-1} x_\alpha x \subseteq \\ &\subseteq x^{-1} x_\alpha U_{\pi(1)+1}(\Xi) \cdot U_{\pi(2)+1}(\Xi) \cdot \ldots \cdot U_{\pi(n)+1}(\Xi) x_\alpha^{-1} x \subseteq \\ &\subseteq x^{-1} x_\alpha U_{\sigma(1)}(\Xi) \cdot U_{\sigma(2)}(\Xi) \cdot \ldots \cdot U_{\sigma(n+1)}(\Xi_\alpha) x_\alpha^{-1} x, \end{aligned}$$

где перестановка $\sigma \in S_{n+1}$ определена правилом $\sigma(i) = \pi(i) + 1$ для $i \leqslant n$ и $\sigma(n+1) = 1$. Таким образом, $x^{-1}\mathbf{g}x \in x^{-1} x_\alpha U(\Xi) x_\alpha^{-1} x$. Согласно замечанию 4.1 $x^{-1}\mathbf{g}x \in U(\Xi)^5 \subseteq U$. □

Следствие 4.1. *Если пространство X и кардинал τ удовлетворяют условиям теоремы 4.3 и $\mathrm{cf}(\tau) > \aleph_0$, то свободная топологическая группа $F(X)$ τ-локально инвариантна.*

Это утверждение доказывается очевидной индукцией по длине сопрягающих слов.

Замечание 4.2. При замене свободной топологической группы $F(X)$ топологической группой, алгебраически порождённой пространством X и содержащей X в качестве подпространства, теорема 4.2 перестаёт быть верной: свободная абелева топологическая группа произвольного пространства X локально инвариантна и, следовательно, τ-локально инвариантна для любого τ. Теорема 4.3 тоже становится неверной, потому что группа $S(\tau^+)$ перестановок с конечным носителем на дискретном пространстве Y мощности τ^+ с топологией, индуцированной из тихоновского произведения Y^Y, порождена замкнутым дискретным подпространством X, состоящим из всех транспозиций некоторой фиксированной точки множества Y со всеми другими точками. Все равномерные окружения диагонали пространства X^n содержат окружение $\{((x,x,\dots,x),(x,x,\dots,x))\colon x\in X\}$, и кардинал τ^+ регулярен; следовательно, $S(\tau^+)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.3 и её следствия (за исключением того, что она не свободна), однако её нельзя вложить в качестве подгруппы даже в произведение групп псевдохарактера не больше τ [63].

Замечание 4.3. Если τ — несчётный кардинал и любое G_λ-подмножество пространства X открыто для $\lambda < \tau$, то следующие условия эквивалентны:

(i) свободная топологическая группа $F(X)$ τ-локально инвариантна;
(ii) свободная топологическая группа $F(X)$ локально инвариантна;
(iii) свободная топологическая группа $F(X)$ топологически изоморфна подгруппе произведения групп псевдохарактера меньше τ;
(iv) свободная топологическая группа $F(X)$ топологически изоморфна подгруппе произведения дискретных групп.

В самом деле, согласно результату М. И. Граева, цитированному в начале этого раздела, из (iv) вытекает (ii); ясно, что из (ii) вытекает (i); по теореме 4.1 из (i) вытекает (iii). Остаётся показать, что из (iii) вытекает (iv). Поскольку все G_λ-подмножества пространства X открыты в X при $\lambda<\tau$, все G_λ-подмножества свободной топологической группы $F(X)$ открыты в $F(X)$ при $\lambda<\tau$ (в противном случае мы могли бы объявить их открытыми и получить групповую топологию на $F(X)$, которая индуцирует исходную топологию на X и сильнее свободной топологии группы $F(X)$, что противоречит определению свободной топологии). Предположим, что группа $F(X)$ изоморфна подгруппе произведения $\prod\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$, где A — множество и G_α — топологическая группа с $\psi(G_\alpha)<\tau$ для каждого $\alpha\in A$. Объявим открытыми все $G_{\psi(G_\alpha)}$-подмножества группы G_α для каждого $\alpha\in A$. Мы получим новые групповые топологии на G_α; очевидно, все они дискретны, и группа $F(X)$ остаётся изоморфной подгруппе произведения групп G_α с новыми топологиями.

5. Описание топологии свободной группы с помощью факторных отображений

Явное конструктивное описание элементов базы окрестностей единицы — лишь один из возможных подходов к описанию топологии свободной топологической группы. Можно также попытаться описать её топологию с помощью факторных отображений; именно этого подхода придерживался А. И. Мальцев в цитированной выше статье [17]. Трансфинитная конструкция, с помощью которой Мальцев описывал свободные топологии универсальных алгебр, состоит в следующем (для простоты мы будем рассматривать только свободную группу $F(X)$). Пусть X^{-1} — гомеоморфная копия пространства X (каждой точке $x \in X$ соответствует точка $x^{-1} \in X^{-1}$), и пусть $X \oplus X^{-1}$ — дискретное объединение пространств X и X^{-1}. Умножение в свободной топологической группе должно быть непрерывным, а топология этой группы должна индуцировать на X (и на $X \oplus X^{-1}$) исходную топологию, поэтому в качестве первого шага (первой топологии $\mathcal{T}_0$ на $F(X)$) естественно рассмотреть самую сильную топологию с тем свойством, что для произвольной окрестности $U \in \mathcal{T}_0$ любого слова $x_1 \dots x_n$, где $n \in \mathbb{N}$ и $x_i \in X \oplus X^{-1}$, найдутся открытые окрестности букв x_i в $X \oplus X^{-1}$, групповое произведение которых (как подмножеств свободной группы) содержится в U, т. е. естественное отображение умножения $\bar{\mathbf{i}}\colon \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}}(X \oplus X^{-1})^n \to F(X)$ из дискретного объединения пространств $(X \oplus X^{-1})^n$ в $F(X)$, сопоставляющее набору букв $(x_1, \dots, x_n)$ произведение этих букв в $F(X)$ (т. е. слово $x_1 \dots x_n$), непрерывно. Таким образом, $\mathcal{T}_0$ — это фактор-топология, определяемая естественным отображением умножения $\bar{\mathbf{i}}$, т. е. та единственная топология, относительно которой отображение $\bar{\mathbf{i}}$ факторно. Топология $\mathcal{T}_0$ может не быть групповой; тогда мы берём самую сильную топологию $\mathcal{T}_1$ на $F(X)$, относительно которой естественное отображение умножения $\bigoplus(F(X), \mathcal{T}_0)^n \to (F(X), \mathcal{T}_1)$ непрерывно, и т. д. В результате получается убывающая трансфинитная последовательность топологий, которая из мощностных соображений должна в некоторый момент стабилизироваться. Эта стабилизированная топология и есть топология свободной топологической группы.

Следует признать, что такой подход к построению свободной топологии выглядит очень естественно. Однако проследить за тем, как меняются топологии на каждом следующем шаге, или хотя бы понять, в какой момент топологии стабилизируются, — задача необычайно трудная. Все известные результаты относятся только к случаю, когда мальцевский трансфинитный процесс стабилизируется уже на первом шаге, т. е. $\mathcal{T}_0$ совпадает со свободной топологией группы $F(X)$ и естественное отображение умножения $\bar{\mathbf{i}}$ факторно относительно свободной топологии (см. ниже). Подобная ситуация складывается довольно редко.

Тем не менее кажется естественным попытаться описать свободную топологию в терминах факторных отображений из степеней пространства X или пространств, получающихся из них каким-нибудь явным способом. Такое описание в самом деле существует; оно было получено В. Г. Пестовым совместно с О. В. Сипачёвой и приводится ниже.

Подход Мальцева основан на простом наблюдении, что слова — элементы свободной группы — очень мало отличаются от конечных упорядоченных наборов элементов пространства $\tilde{X} = X \oplus \{\mathbf{e}\} \oplus X^{-1}$, где X^{-1} — дизъюнктная копия пространства X и единица свободной группы $F(X)$ $\mathbf{e}$ является изолированной точкой в пространстве $\tilde{X}$; слова получаются из таких наборов в результате применения операции отождествления наборов друг с другом (факторизации). Множество конечных упорядоченных наборов элементов $\tilde{X}$ — не что иное, как σ-произведение[6]

$$\sigma_{\Box}\,\tilde{X}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \colon x_n \in \tilde{X},\ |\{x_n \neq \mathbf{e}\}| < \omega\}$$

(мы рассматриваем это произведение с ящичной топологией и в знак этого ставим индекс $\Box$), а операция отождествления — это естественное отображение умножения

$$\mathbf{i}\colon \sigma\,\tilde{X}^{\mathbb{N}} \to F(X), \quad \mathbf{i}((x_1,\dots,x_n,\mathbf{e},\mathbf{e},\mathbf{e},\dots)) = x_1\dots x_n,$$

которое каждой точке ставит в соответствие произведение её координат (мы считаем, что произведение бесконечного числа единиц равно единице). Отметим, что дискретная сумма пространств $(X\oplus X^{-1})^n$ [7] естественно вкладывается в $\sigma_{\Box}(\tilde{X})^{\mathbb{N}}$ и отображение умножения $\mathbf{i}$ представляет собой естественное продолжение отображения $\bar{\mathbf{i}}$.

Поскольку $\mathbf{i}$ — это композиция факторного отображения

$$\mathbf{j}\colon \sigma_{\Box}(X\oplus\{\mathbf{e}\}\oplus X^{-1})^{\mathbb{N}} \to \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}(X\oplus X^{-1})^n,$$

которое каждой точке ставит в соответствие набор её неединичных координат, и отображения $\bar{\mathbf{i}}$, факторность отображения $\mathbf{i}$ равносильна факторности $\bar{\mathbf{i}}$. В литературе обычно рассматривают именно $\mathbf{i}$ (чаще даже сужения $\mathbf{i}_n\colon (X\oplus\{\mathbf{e}\}\oplus X^{-1})^n \to F_n(X)$ этого отображения на конечные степени дискретной суммы $X\oplus\{\mathbf{e}\}\oplus X^{-1}$, естественно вложенные в $\sigma_{\Box}(X\oplus\{\mathbf{e}\}\oplus X^{-1})^{\mathbb{N}}$). Мы также придерживаемся этой традиции.

Итак, отображение $\mathbf{i}$ осуществляет естественную факторизацию множества $\sigma\,\tilde{X}^{\mathbb{N}}$, в результате которой получается группа $F(X)$. Это отображение непрерывно, потому что умножение в свободной топологической группе непрерывно и топология этой группы индуцирует исходную топологию на пространстве X. Было бы очень удобно, если бы оно было ещё и факторным, т. е. если бы свободная топологическая группа $F(X)$ была топологическим фактор-пространством пространства $\sigma_{\Box}\,\tilde{X}^{\mathbb{N}}$. К сожалению, отображение $\mathbf{i}$ бывает факторным далеко не всегда; чуть ниже мы покажем (в несколько более общей ситуации; см. утверждение 5.1), что факторность $\mathbf{i}$ равносильна тому, что все сужения $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}\restriction \tilde{X}^n$ факторны и свободная топологическая группа $F(X)$ является индуктивным пределом своих подпространств $F_n(X)$ слов длины, не превосходящей n, при $n\in\mathbb{N}$,

[6] На самом деле это не совсем то же самое: одному и тому же элементу

$$(x_1,\dots,x_n,\mathbf{e},\mathbf{e},\mathbf{e},\dots)\in\sigma\,\tilde{X}^{\mathbb{N}}$$

соответствует бесконечное число конечных наборов, а именно $(x_1,\dots,x_n)$, $(x_1,\dots,x_n,\mathbf{e})$, $(x_1,\dots,x_n,\mathbf{e},\mathbf{e}),\dots$, но для наших рассуждений это несущественно.

[7] Это не что иное, как свободная топологическая полугруппа над алфавитом $X\oplus X^{-1}$.

что случается довольно редко (как показывают, в частности, утверждения из разделов 6 и 8). Иногда отображение $\mathbf{i}$ всё же бывает факторным: например, для компактных X (это заметил ещё Мальцев [17]).

В этом разделе мы покажем, что существует простая модификация произведения $\sigma_\Box \tilde{X}^{\mathbb{N}}$, на которой все ещё определено естественное отображение умножения в свободную топологическую группу $F(X)$, причём оно непрерывно и открыто (тем более факторно). Модификация состоит в изменении нумерации сомножителей — они индексируются рациональными, а не натуральными числами — и в замене сомножителей $\tilde{X}$ на их чётные степени (точнее, на чётные степени пространства $X \oplus X^{-1}$), профакторизованные по диагонали. Таким образом, $F(X)$ всё-таки можно представить как фактор-пространство некоторого пространства, которое получается из X с помощью простых операций.

Необходимость изменения нумерации сомножителей на самом поверхностном, чисто интуитивном, уровне можно объяснить так. Рассмотрим слово uv, где $u, v \in X$. Из того, что $uv = u\mathbf{e}v$, операция умножения непрерывна и топология группы $F(X)$ индуцирует исходную топологию на пространстве X, вытекает, что любая открытая окрестность этого слова в свободной топологической группе содержит произведение вида $U \cdot O \cdot V$, где U и V — открытые окрестности точек u и v соответственно в пространстве X и O — открытая окрестность единицы в группе $F(X)$, а это произведение, в свою очередь, содержит множества вида

$$U \cdot xx'^{-1}V, \quad U \cdot xx'^{-1}yy'^{-1}V, \quad U \cdot xx'^{-1}yy'^{-1}zz'^{-1}V, \ldots,$$

где x, x', y, y', $z, z', \ldots$ — пары точек, близких друг к другу относительно некоторой непрерывной псевдометрики на X (однако эти пары могут быть далеки от других пар и от окрестностей U и V). Таким образом, если отображение $\mathbf{i}$ факторно и W — открытый полный прообраз множества, содержащего слово uv, то W должен содержать произведения вида

$$\begin{aligned}
&U \times V \times \{\mathbf{e}\} \times \{\mathbf{e}\} \times \ldots,\\
&U \times \{x\} \times \{x'^{-1}\} \times V \times \{\mathbf{e}\} \times \{\mathbf{e}\} \times \ldots,\\
&U \times \{x\} \times \{x'^{-1}\} \times \{y\} \times \{y'^{-1}\} \times V \times \{\mathbf{e}\} \times \{\mathbf{e}\} \times \ldots,\\
&U \times \{x\} \times \{x'^{-1}\} \times \{y\} \times \{y'^{-1}\} \times \{z\} \times \{z'^{-1}\} \times V \times \{\mathbf{e}\} \times \{\mathbf{e}\} \times \ldots,\\
&\ldots,
\end{aligned}$$

т. е. мы должны иметь возможность делать вставки между координатами элементов σ-произведения $\sigma_\Box \tilde{X}^{\mathbb{N}}$. Такая возможность отсутствует при нумерации сомножителей натуральными числами, но она обеспечивается «непрерывной» нумерацией (скажем, рациональными числами). По-видимому, руководствуясь примерно такими соображениями, В. Г. Пестов в частной беседе с автором предложил нумеровать сомножители в σ-произведении $\sigma_\Box \tilde{X}^{\mathbb{N}}$ рациональными числами и высказал предположение, что при таком изменении нумерации уже само отображение $\mathbf{i}\colon\ \sigma_\Box \tilde{X}^{\mathbb{Q}} \to F(X)$ может оказаться факторным. Однако одной замены нумерации недостаточно — в этом состоит утверждение 5.1.

Пусть $(\mathcal{I}, \leqslant)$ — произвольное линейно упорядоченное множество. Рассмотрим σ-произведение

$$\sigma_{\Box}\tilde{X}^{\mathcal{I}} = \{(x_\iota)_{\iota\in\mathcal{I}} \colon x_\iota \in \tilde{X},\ |\{x_\iota \ne \mathbf{e}\}| < \omega\}$$

с ящичной топологией (как всегда, мы пишем $<$, когда отношение $\leqslant$ выполняется, а отношение $=$ — нет). Через

$$\mathbf{i} \colon \sigma_{\Box}\tilde{X}^{\mathcal{I}} \to F(X)$$

мы обозначаем естественное отображение умножения (считаем, что произведение бесконечного числа единиц равно единице). Оно непрерывно в силу непрерывности умножения в свободной топологической группе $F(X)$.

Все рассматриваемые подмножества индексного множества $\mathcal{I}$ предполагаются занумерованными в порядке возрастания элементов. Так, если мы рассматриваем конечное подмножество $F = \{\iota_1, \dots, \iota_n\}$ множества $\mathcal{I}$, то мы подразумеваем, что $\iota_1 < \ldots < \iota_n$. Для такого подмножества F мы полагаем

$$\tilde{X}_F = \{(x_\iota)_{\iota\in\mathcal{I}} \colon x_\iota \in \tilde{X},\ \{\iota \colon x_\iota \ne \mathbf{e}\} \subseteq F\}$$

и

$$\mathbf{i}_F = \mathbf{i} \restriction \tilde{X}_F \colon \tilde{X}_F \to F_n(X).$$

Заметим, что

$$\sigma_{\Box}\tilde{X}^{\mathcal{I}} = \bigcup_{F\in[\mathcal{I}]^{<\omega}} \tilde{X}_F$$

(здесь $[\mathcal{I}]^{<\omega}$ — семейство всех конечных подмножеств $\mathcal{I}$).

Все пространства $\tilde{X}_F$ с $F \subseteq \mathcal{I}$ мощности n естественно гомеоморфны друг другу и пространству $\tilde{X}^n$; более того, естественные гомеоморфизмы этих пространств продолжаются до гомеоморфизмов всего пространства $\sigma_{\Box}\tilde{X}^{\mathcal{I}}$ на себя (состоящих в перестановках сомножителей). Отождествление пространств $\tilde{X}_F$, у которых $F \subseteq \mathcal{I}$ имеют одинаковую мощность n, отождествляет отображения $\mathbf{i}_F$ друг с другом и с естественным отображением умножения $\mathbf{i}_n \colon \tilde{X}^n \to F_n(X)$.

Замечание 5.1. Пространство $\sigma_{\Box}\tilde{X}^{\mathcal{I}}$ имеет топологию индуктивного предела относительно разложения

$$\sigma_{\Box}\tilde{X}^{\mathcal{I}} = \bigcup_{F\in[\mathcal{I}]^{<\omega}} \tilde{X}_F,$$

т. е. $A \subseteq \sigma_{\Box}\tilde{X}^{\mathcal{I}}$ открыто в $\sigma_{\Box}\tilde{X}^{\mathcal{I}}$, если и только если $A \cap \tilde{X}_F$ открыто в $\tilde{X}_F$ для каждого конечного $F \subseteq \mathcal{I}$. Это немедленно вытекает из того, что все $\tilde{X}_F$ для конечных $F \subseteq \mathcal{I}$ открыты в $\sigma_{\Box}\tilde{X}^{\mathcal{I}}$.

Замечание 5.2. Если F — конечное подмножество в $\mathcal{I}$ мощности n и $A \subseteq F(X)$, то $\mathbf{i}(\tilde{X}_F) \subseteq F_n(X)$ и, следовательно, $\mathbf{i}^{-1}(A) \cap \tilde{X}_F = \mathbf{i}_F^{-1}(A \cap F_n(X))$. Кроме того, если F_1 и F_2 — конечные подмножества в $\mathcal{I}$ одной и той же мощности n и $A \subseteq F(X)$, то множество $\mathbf{i}^{-1}(A) \cap \tilde{X}_{F_1} = \mathbf{i}_{F_1}^{-1}(A \cap F_n(X))$ совпадает с $\mathbf{i}^{-1}(A) \cap \tilde{X}_{F_2} = \mathbf{i}_{F_2}^{-1}(A \cap F_n(X))$ и с $\mathbf{i}_n^{-1}(A \cap F_n(X))$ по модулю вышеупомянутых естественных гомеоморфизмов. Более того, множества $\mathbf{i}^{-1}(A) \cap \tilde{X}_{F_1}$ и

$\mathbf{i}^{-1}(A)\cap\tilde{X}_{F_2}$ совпадают в этом смысле как подмножества пространства $\sigma_{\square}\tilde{X}^{\mathcal{I}}$, т. е. существует гомеоморфизм этого пространства на себя (он порождается перестановкой на индексном множестве $\mathcal{I}$, меняющей местами F_1 и F_2), который переводит $\mathbf{i}^{-1}(A)\cap\tilde{X}_{F_1}$ в $\mathbf{i}^{-1}(A)\cap\tilde{X}_{F_2}$.

Утверждение 5.1. *Для того чтобы отображение* $\mathbf{i}$ *было факторно, необходимо и достаточно, чтобы свободная топологическая группа* $F(X)$ *была индуктивным пределом своих подпространств* $F_n(X)$ *и все отображения* $\mathbf{i}_n\colon \tilde{X}^n\to F_n(X)$ *были факторны для* $n\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Предположим, что $F(X)$ имеет топологию индуктивного предела, все отображения $\mathbf{i}_n$ факторны, $A\subseteq F(X)$ и прообраз $\mathbf{i}^{-1}(A)$ открыт в $\sigma_{\square}\tilde{X}^{\mathcal{I}}$. Тогда пересечение $\mathbf{i}^{-1}(A)\cap\tilde{X}_F$ открыто в $\tilde{X}_F$ для любого множества $F\subseteq\mathcal{I}$ произвольной конечной мощности n. Следовательно, прообраз $\mathbf{i}_n^{-1}(A\cap F_n(X))$ открыт в $\tilde{X}^n$ (см. замечание 5.2), и факторность отображений $\mathbf{i}_n$ влечёт открытость пересечений $A\cap F_n(X)$ в $F_n(X)$ для всех n. Поскольку $F(X)$ является индуктивным пределом своих подмножеств $F_n(X)$, A открыто в $F(X)$. Это доказывает достаточность.

Докажем необходимость. Предположим, что отображение $\mathbf{i}$ факторно. Во-первых, покажем, что все отображения $\mathbf{i}_n$ факторны. Поскольку факторность отображения определяется прообразами, достаточно доказать, что отображения $\mathbf{i}_F$ факторны для всех конечных $F\subseteq\mathcal{I}$ (см. замечание 5.2). Возьмём конечное множество $F\in\mathcal{I}$ мощности $n\in\omega$ и $A\subseteq F_n(X)$, для которых $B=\mathbf{i}_F^{-1}(A)$ замкнуто в $\tilde{X}_F$. Покажем, что множество $\mathbf{i}_{F'}^{-1}(A)$ замкнуто для любого конечного $F'\subseteq\mathcal{I}$. Если $|F'|\leqslant n$, мы можем считать, что $F'\subseteq F$ (см. замечание 5.2); в этом случае $\mathbf{i}_{F'}=\mathbf{i}_F\restriction\tilde{X}_{F'}$, и множество $\mathbf{i}_{F'}^{-1}(A)=\mathbf{i}_F^{-1}(A)\cap\tilde{X}_{F'}$ замкнуто в $\tilde{X}_{F'}$. Предположим, что $|F'|>n$ и $F'=\{\iota_1,\ldots,\iota_{|F'|}\}$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_{F'}^{-1}(A)=\bigcup_{\{\iota_{k_1},\ldots,\iota_{k_n}\}\subseteq F'}&\{(x_\iota)_{\iota\in\mathcal{I}}\colon x_\iota=\mathbf{e}\text{ для }\iota\notin F'=\{\iota_1,\ldots,\iota_{|F'|}\},\\ &x_{\iota_1}\ldots x_{\iota_{k_1}-1}=x_{\iota_{k_1}+1}\ldots x_{\iota_{k_2}-1}=\ldots=x_{\iota_{k_n}+1}\ldots x_{|F'|}=\mathbf{e},\\ &(x_{\iota_{k_1}},\ldots,x_{\iota_{k_n}})\in B\}.\end{aligned}$$

Это множество, очевидно, замкнуто в $\tilde{X}_{F'}$. Таким образом, пересечение $\mathbf{i}^{-1}(A)\cap\tilde{X}_{F'}=\mathbf{i}_{F'}^{-1}(A)$ замкнуто в $\tilde{X}_{F'}$ для всякого конечного $F'\subseteq\mathcal{I}$; согласно замечанию 5.1 прообраз $\mathbf{i}^{-1}(A)$ замкнут в $\sigma_{\square}\tilde{X}^{\mathcal{I}}$. Поскольку отображение $\mathbf{i}$ факторно, множество A замкнуто в $F(X)$, а значит и в $F_n(X)$. Это доказывает факторность всех отображений $\mathbf{i}_n$.

Покажем, что из факторности отображения $\mathbf{i}$ вытекает, что свободная топологическая группа $F(X)$ является индуктивным пределом последовательности $\{F_n(X)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Предположим, что $A\subseteq F(X)$ и $A\cap F_n(X)$ замкнуто в $F_n(X)$ для всякого $n\in\mathbb{N}$. Тогда для любого $F\subseteq\mathcal{I}$ конечной мощности n множество $\mathbf{i}^{-1}(A)\cap\tilde{X}_F=\mathbf{i}_F^{-1}(A)=\mathbf{i}_F^{-1}(A\cap F_n(X))$ замкнуто в $\tilde{X}_F$, потому что все отображения $\mathbf{i}_F$ непрерывны. Согласно замечанию 5.1 прообраз $\mathbf{i}^{-1}(A)$ замкнут в $\sigma_{\square}\tilde{X}^{\mathcal{I}}$; следовательно, множество A замкнуто в $F(X)$. $\square$

Итак, мы показали, что одним изменением нумерации сомножителей в $\sigma_\square \tilde{X}$ отображение $\mathbf{i}$ нельзя сделать факторным.

Ниже мы модифицируем σ-произведение $\sigma_\square \tilde{X}$ таким образом, что естественное отображение умножения станет факторным и даже открытым. Формальное описание конструкции выглядит довольно громоздко, однако суть её проста — в качестве индексного множества берутся рациональные числа, а сомножители $X \oplus \{\mathbf{e}\} \oplus X^{-1}$ заменяются на чётные степени пространства $X \oplus X^{-1}$, профакторизованные по диагонали, причём на произвольном интервале индексного множества встречаются сколь угодно большие степени.

Для каждого положительного рационального $\frac{p}{q}$ (где p и q — натуральные числа и дробь $\frac{p}{q}$ несократима) положим

$$Y_{\frac{p}{q}} = \big((X \oplus X^{-1})^q\big)^2/\Delta_q,$$

где Δ_q — диагональ в $\big((X \oplus X^{-1})^q\big)^2$. Пространства $Y_{\frac{p}{q}}$ могут оказаться нерегулярными.

Имеем

$$Y_{\frac{p}{q}} = \big((X \oplus X^{-1})^q\big)^2 \setminus \Delta_q \cup \{\Delta_q\};$$

открытые окрестности точек множества $\big((X \oplus X^{-1})^q\big)^2 \setminus \Delta_q$ в $Y_{\frac{p}{q}}$ те же, что и в $\big((X \oplus X^{-1})^q\big)^2$, а открытые окрестности точек $\{\Delta_q\}$ имеют вид $\{\Delta_q\} \cup W \setminus \Delta_q$, где W — произвольная открытая окрестность диагонали Δ_q в $\big((X \oplus X^{-1})^q\big)^2$. Ясно, что для всякой окрестности диагонали W и любой точки $z \in (X \oplus X^{-1})^q$ мы можем найти такую открытую окрестность $U(z)$ точки z, что $U(z) \times U(z) \subseteq W$. Таким образом, множества

$$\{\Delta_q\} \cup \bigcup_{z \in (X \oplus X^{-1})^q} \{(x, y) \colon x, y \in U(z)\},$$

где $U(z)$ — открытые окрестности точек $z \in (X \oplus X^{-1})^q$, образуют базу в точке $\{\Delta_q\}$. Каждая базисная окрестность U точки $\{\Delta_q\}$ определяется открытым покрытием γ пространства $(X \oplus X^{-1})^q$ (и каждое открытое покрытие пространства $(X \oplus X^{-1})^q$ определяет открытую окрестность точки $\{\Delta_q\}$) по правилу

$$U(\gamma) = \{\Delta_q\} \cup \bigcup_{V \in \gamma} \{(x, y) \colon x, y \in V\}.$$

Рассмотрим σ-произведение

$$\sigma_{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+} {}_\square Y_{\frac{p}{q}} = \Big\{ \big(y_{\frac{p}{q}}\big)_{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+} \colon y_{\frac{p}{q}} \in Y_{\frac{p}{q}},\ \big|\big\{ y_{\frac{p}{q}} \neq \{\Delta_q\}\big\}\big| < \omega \Big\}$$

с ящичной топологией. На нём определено естественное отображение умножения $\mathbf{j} \colon \sigma_\square Y_{\frac{p}{q}} \to F(X)$, которое действует следующим образом. Для каждого натурального $q \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathbf{j}_q$ отображение $\big((X \oplus X^{-1})^q\big)^2 \cup \cup \{\{\Delta_q\}\} \to F(X)$, определённое правилом

$$\mathbf{j}_q\big((x_1,x_2,\ldots,x_q),(x'_1,x'_2,\ldots,x'_q)\big)=x_1x_2\ldots x_q{x'}_q^{-1}{x'}_{q-1}^{-1}\ldots{x'}_1^{-1},$$
$$\mathbf{j}_q(\{\Delta_q\})=\mathbf{e},$$

и положим $\mathbf{j}\big((y_{\frac{p}{q}})_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}\big)=\prod\limits_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}\mathbf{j}_q\big(y_{\frac{p}{q}}\big)$ (символом $\prod$ обозначено произведение в группе $F(X)$); это произведение определено корректно, потому что число неединичных сомножителей всегда конечно.

Более формальное определение выглядит так. Для $\big(y_{\frac{p}{q}}\big)_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}\in\sigma_\square Y_{\frac{p}{q}}$ мы полагаем

$$\operatorname{supp}\big(y_{\frac{p}{q}}\big)_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}=\big\{\tfrac{p}{q}\colon y_{\frac{p}{q}}\neq\{\Delta_q\}\big\}=\big\{\tfrac{p_1}{q_1},\ldots,\tfrac{p_n}{q_n}\big\},$$

где $n\in\mathbb{N}$ и $\frac{p_1}{q_1}<\ldots<\frac{p_n}{q_n}$. (Мы всегда предполагаем, что элементы носителей занумерованы в порядке возрастания.) Предположим, что $y_{\frac{p_i}{q_i}}=(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}'_i)$, где $\mathbf{x}_i=(x_{i1},\ldots,x_{iq_i})\in(X\oplus X^{-1})^{q_i}$ и $\mathbf{x}'_i=(x'_{i1},\ldots,x'_{iq_i})\in(X\oplus X^{-1})^{q_i}$ для всех $i=1,\ldots,n$. Тогда

$$\mathbf{j}\big((y_{\frac{p}{q}})_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}\big)=\prod_{i\leqslant n}x_{i1}\ldots x_{iq_i}{x'}_{iq_i}^{-1}\ldots{x'}_{i1}^{-1}.$$

Другими словами, $\mathbf{j}\big((y_{\frac{p}{q}})_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}\big)=\prod\limits_{i\leqslant n}\mathbf{i}(\mathbf{x}_i)(\mathbf{i}(\mathbf{x}'_i))^{-1}$, где $\mathbf{i}\colon\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\tilde{X}^n\to F(X)$ — естественное отображение умножения.

Замечание 5.3. Образ $\mathbf{j}\big(\sigma_\square Y_{\frac{p}{q}}\big)$ совпадает со множеством $F_{\text{чёт}}(X)$ всех слов чётной длины в $F(X)$. В самом деле, включение $\mathbf{j}\big(\sigma_\square Y_{\frac{p}{q}}\big)\subseteq F_{\text{чёт}}(X)$ очевидно, и если $x_1\ldots x_{2k}\in F_{\text{чёт}}(X)$ ($x_i\in X\oplus X^{-1}$), то точка $\big(y_{\frac{p}{q}}\big)_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}$, для которой

$$\operatorname{supp}\big(y_{\frac{p}{q}}\big)_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}=\big\{\tfrac{1}{2k}\big\}$$

и

$$y_{\frac{1}{2k}}=\big((x_1,\ldots,x_{2k}),(\underbrace{x,x^{-1},x,x^{-1},\ldots,x,x^{-1}}_{k\text{ пар}})\big)$$

(x — произвольная точка из $X\oplus X^{-1}$), принадлежит прообразу $\mathbf{j}^{-1}(x_1\ldots x_{2k})$.

Теорема 5.1. *Естественное отображение умножения*

$$\mathbf{j}\colon\underset{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}{\sigma}{}_\square\big((X\oplus X^{-1})^q\big)^2/\Delta_q\to F(X)$$

непрерывно и открыто.

Доказательство. Доказательство теоремы состоит из двух частей.

1. *Отображение* $\mathbf{j}$ *непрерывно.*

Пусть $\mathbf{g}\in F_{\text{чёт}}(X)$, U — произвольная открытая окрестность элемента $\mathbf{g}$ в $F(X)$, $\big(y_{\frac{p}{q}}\big)_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}\in\sigma_\square Y_{\frac{p}{q}}$, $\mathbf{j}\big((y_{\frac{p}{q}})_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}\big)=\mathbf{g}$, $\operatorname{supp}\big(y_{\frac{p}{q}}\big)_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}=\big\{\frac{p_1}{q_1}<\ldots<\frac{p_n}{q_n}\big\}$

и $y_{\frac{p_i}{q_i}} = \big((x_{i1}, \dots, x_{iq_i}), (x'_{i1}, \dots, x'_{iq_i})\big)$ $(x_{ij}, x'_{ij} \in X \oplus X^{-1})$ для $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$\mathbf{g} = \prod_{i \leqslant n} x_{i1} x_{i2} \dots x_{iq_i} {x'}^{-1}_{iq_i} {x'}^{-1}_{i(q_i-1)} \dots {x'}^{-1}_{i1}$$

(символом $\prod$ обозначается групповое произведение в $F(X)$). Нам нужно построить открытую окрестность точки $\big(y_{\frac{p}{q}}\big)_{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+}$ в $\sigma_\square Y_{\frac{p}{q}}$ так, чтобы её образ при отображении $\mathbf{j}$ содержался в U.

Возьмём такую окрестность V единицы в $F(X)$, что

$$\begin{aligned} &V \cdot x_{11} x_{12} \dots x_{1q_1} {x'}^{-1}_{1q_1} {x'}^{-1}_{1(q_1-1)} \dots {x'}^{-1}_{11} \cdot V^2 \times \\ &\quad \times x_{21} x_{22} \dots x_{2q_2} {x'}^{-1}_{2q_2} {x'}^{-1}_{2(q_2-1)} \dots {x'}^{-1}_{21} \cdot V^2 \times \\ &\quad \times \dots \cdot V^2 \cdot x_{n1} x_{n2} \dots x_{nq_n} {x'}^{-1}_{nq_n} {x'}^{-1}_{n(q_n-1)} \dots {x'}^{-1}_{n1} \cdot V^2 \subseteq U. \end{aligned}$$

Для всех $i \leqslant n$ и $j \leqslant q_i$ найдём такие открытые окрестности $O(x_{ij})$ и $O(x'_{ij})$ точек x_{ij} и x'_{ij} соответственно в $X \oplus X^{-1}$, что $O(x_{ij}) \cap O(x'_{ij}) = \varnothing$, если $x_{ij} \neq x'_{ij}$, и

$$\begin{aligned} O(x_{i1}) \cdot O(x_{i2}) \cdot \ldots \cdot O(x_{iq_i}) \cdot O(x'_{iq_i})^{-1} \cdot O(x'_{i(q_i-1)})^{-1} \cdot \ldots \cdot O(x'_{i1})^{-1} \subseteq \\ \subseteq x_{i1} x_{i2} \dots x_{iq_i} {x'}^{-1}_{iq_i} {x'}^{-1}_{i(q_i-1)} \dots {x'}^{-1}_{i1} \cdot V; \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} &V \cdot O(x_{11}) \cdot O(x_{12}) \cdot \ldots \cdot O(x_{1q_1}) \cdot O(x'_{1q_1})^{-1} \cdot \ldots \cdot O(x'_{11})^{-1} \cdot V \times \\ &\quad \times O(x_{21}) \cdot O(x_{22}) \cdot \ldots \cdot O(x_{2q_2}) \cdot O(x'_{2q_2})^{-1} \cdot \ldots \cdot O(x'_{21})^{-1} \cdot V \times \\ &\quad \times \dots \times \\ &\quad \times O(x_{n1}) \cdot O(x_{n2}) \cdot \ldots \cdot O(x_{nq_n}) \cdot O(x'_{nq_n})^{-1} \cdot \ldots \cdot O(x'_{n1})^{-1} \cdot V \subseteq U. \end{aligned}$$

Существует последовательность $\boldsymbol{\gamma}$ открытых покрытий γ_n пространств $(X \oplus X^{-1})^n$, для которой

$$V(\boldsymbol{\gamma}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\sigma \in S_n} \bigcup_{\substack{O_i \in \gamma_i \\ \text{для } i \leqslant n}} \prod_{i \leqslant n} \mathbf{j}_{\sigma(i)}(O_{\sigma(i)} \times O_{\sigma(i)}) \subseteq V$$

(см. теорему 10.2). Другими словами, найдётся последовательность $\mathcal{W}$ открытых окрестностей W_n диагоналей в пространствах $\big((X \oplus X^{-1})^n\big)^2$, для которой

$$V(\mathcal{W}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\sigma \in S_n} \prod_{i \leqslant n} \mathbf{j}_{\sigma(i)}(W_{\sigma(i)}) \subseteq V.$$

Пусть $f \colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}$ — взаимно-однозначное отображение со свойством $f\big(\frac{p}{q}\big) \geqslant q$ для всякого $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$. Возьмём произвольную точку $x_0 \in X \oplus X^{-1}$. Для каждого $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$ пространство $(X \oplus X^{-1})^q$ вложено в $(X \oplus X^{-1})^{f\left(\frac{p}{q}\right)}$ посредством гомеоморфизма

$$(X \oplus X^{-1})^q \cong (X \oplus X^{-1})^q \times \underbrace{\{x_0\} \times \ldots \times \{x_0\}}_{f(\frac{p}{q})-q \text{ раз}} \subseteq (X \oplus X^{-1})^{f(\frac{p}{q})}.$$

Эти вложения определяют открытые окрестности

$$W_{\frac{p}{q}} = \pi_{\{1,\ldots,q\}\cup\{f(\frac{p}{q})+1,\ldots,f(\frac{p}{q})+q\}}\Big(W_{f(\frac{p}{q})} \cap \big((X \oplus X^{-1})^q \times \underbrace{\{x_0\} \times \ldots \times \{x_0\}}_{f(\frac{p}{q})-q \text{ раз}}\big)^2\Big)$$

($\pi_{\{1,\ldots,q\}\cup\{f(\frac{p}{q})+1,\ldots,f(\frac{p}{q})+q\}}$ — проектирование на сомножители с номерами, указанными в индексе) диагоналей в пространствах $\big((X \oplus X^{-1})^q\big)^2$. Заметим, что $\mathbf{j}_q\big(W_{\frac{p}{q}}\big) \subseteq \mathbf{j}_{f(\frac{p}{q})}\big(W_{f(\frac{p}{q})}\big)$ для каждого $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$.

Искомая окрестность точки $\big(y_{\frac{p}{q}}\big)_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}$ в $\sigma_\Box Y_{\frac{p}{q}}$ имеет вид

$$\Big(\prod_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+} Z_{\frac{p}{q}}\Big) \cap \Big(\underset{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}{\sigma}{}_\Box Y_{\frac{p}{q}}\Big)$$

(здесь $\prod$ обозначает декартово произведение), где $Z_{\frac{p}{q}} = \{\Delta_q\} \cup W_{\frac{p}{q}} \setminus \Delta_q$, если $\frac{p}{q} \notin \operatorname{supp}\big(y_{\frac{p}{q}}\big)_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}$ (т. е. если $y_{\frac{p}{q}} = \{\Delta_q\}$), и

$$Z_{\frac{p_i}{q_i}} = \big(O(x_{i1}) \times O(x_{i2}) \times \ldots \times O(x_{iq_i})\big) \times \big(O(x'_{i1}) \times O(x'_{i2}) \times \ldots \times O(x'_{iq_i})\big)$$

для $i = 1, \ldots, n$. Ясно, что множество $\big(\prod Z_{\frac{p}{q}}\big) \cap \big(\sigma_\Box Y_{\frac{p}{q}}\big)$ открыто в $\sigma_\Box Y_{\frac{p}{q}}$ и содержит $\big(y_{\frac{p}{q}}\big)_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}$. Покажем, что $\mathbf{j}\big(\prod Z_{\frac{p}{q}} \cap \sigma_\Box Y_{\frac{p}{q}}\big) \subseteq U$.

Для $\big(z_{\frac{p}{q}}\big)_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+} \in \prod Z_{\frac{p}{q}} \cap \sigma_\Box Y_{\frac{p}{q}}$ имеем

$$\mathbf{j}\big((z_{\frac{p}{q}})_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}\big) = \prod_{\frac{p}{q}<\frac{p_1}{q_1}} \mathbf{j}_q\big(z_{\frac{p}{q}}\big) \cdot \mathbf{j}_{q_1}\big(z_{\frac{p_1}{q_1}}\big) \cdot \prod_{\frac{p_1}{q_1}<\frac{p}{q}<\frac{p_2}{q_2}} \mathbf{j}_q\big(z_{\frac{p}{q}}\big) \cdot \mathbf{j}_{q_2}\big(z_{\frac{p_2}{q_2}}\big) \times$$
$$\times \ldots \cdot \prod_{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}<\frac{p}{q}<\frac{p_n}{q_n}} \mathbf{j}_q\big(z_{\frac{p}{q}}\big) \cdot \mathbf{j}_{q_n}\big(z_{\frac{p_n}{q_n}}\big) \cdot \prod_{\frac{p}{q}>\frac{p_n}{q_n}} \mathbf{j}_q\big(z_{\frac{p}{q}}\big)$$

($\prod$ здесь обозначает групповую операцию умножения в $F(X)$). Предположим, что

$$\operatorname{supp}\big(z_{\frac{p}{q}}\big)_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+} \cap \big\{\tfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+ \colon \tfrac{p}{q} < \tfrac{p_1}{q_1}\big\} = \big\{\tfrac{r_1}{s_1} < \ldots < \tfrac{r_k}{s_k}\big\}.$$

Тогда

$$\prod_{\frac{p}{q}<\frac{p_1}{q_1}} \mathbf{j}_q\big(z_{\frac{p}{q}}\big) = \prod_{i\leqslant k} \mathbf{j}_{s_i}\big(z_{\frac{r_i}{s_i}}\big) \in \prod_{i\leqslant k} \mathbf{j}_{s_i}\big(W_{\frac{r_i}{s_i}}\big) \subseteq \prod_{i\leqslant k} \mathbf{j}_{f(\frac{r_i}{s_i})}\big(W_{f(\frac{r_i}{s_i})}\big).$$

Поскольку все рациональные числа $\frac{r_i}{s_i}$ различны и отображение $f\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}$ взаимно-однозначно, все образы $f\big(\frac{r_i}{s_i}\big)$ тоже различны. Значит, существует такая перестановка $\sigma \in S_{\max_{i\leqslant k}\{f(\frac{r_i}{s_i})\}}$, что $\sigma(i) = f\left(\frac{r_i}{s_i}\right)$ для $i \leqslant k$, и

$$\prod_{i=1}^{k} \mathbf{j}_{f(\frac{r_i}{s_i})}\big(W_{f(\frac{r_i}{s_i})}\big) = \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{j}_{\sigma(i)}(W_{\sigma(i)})\right) \cdot \underbrace{\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}\cdot\ldots\cdot\mathbf{e}}_{\max\limits_{i\leqslant k}\{f(\frac{r_i}{s_i})\}-k \text{ раз}} \subseteq$$

$$\subseteq \prod_{i=1}^{\max\limits_{i\leqslant k}\{f(\frac{r_i}{s_i})\}} \mathbf{j}_{\sigma(i)}(W_{\sigma(i)}) \subseteq V$$

(напомним, что $\mathbf{e}$ обозначает единицу группы $F(X)$). Таким образом,

$$\prod_{\frac{p}{q}<\frac{p_1}{q_1}} \mathbf{j}_q\big(z_{\frac{p}{q}}\big) \in V.$$

Аналогично,

$$\prod_{\frac{p_i}{q_i}<\frac{p}{q}<\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}} \mathbf{j}_q\big(z_{\frac{p}{q}}\big) \in V \quad \text{для} \quad i<n \quad \text{и} \quad \prod_{\frac{p}{q}>\frac{p_n}{q_n}} \mathbf{j}_q\big(z_{\frac{p}{q}}\big) \in V.$$

Мы также имеем

$$\begin{aligned} &\mathbf{j}_{q_i}\big(z_{\frac{p_i}{q_i}}\big) \in \mathbf{j}_{q_i}\big(Z_{\frac{p_i}{q_i}}\big) = \\ &\quad = \mathbf{j}_{q_i}\Big(\big(O(x_{i1})\times\ldots\times O(x_{iq_i})\big)\times\big(O(x'_{i1})\times\ldots\times O(x'_{iq_i})\big)\Big) = \\ &\quad = O(x_{i1})\cdot\ldots\cdot O(x_{iq_i})\cdot O(x'_{iq_i})^{-1}\cdot\ldots\cdot O(x'_{i1})^{-1}. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{j}\big((z_{\frac{p}{q}})_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}\big) &\in V\cdot O(x_{11})\cdot\ldots\cdot O(x_{1q_1})\cdot O(x'_{1q_1})^{-1}\cdot\ldots\cdot O(x'_{11})^{-1}\cdot V\times \\ &\times O(x_{21})\cdot\ldots\cdot O(x_{2q_2})\cdot O(x'_{2q_2})^{-1}\cdot\ldots\cdot O(x'_{21})^{-1}\cdot V\times \\ &\times\ldots\times \\ &\times O(x_{n1})\cdot\ldots\cdot O(x_{nq_n})\cdot O(x'_{nq_n})^{-1}\cdot\ldots\cdot O(x'_{n1})^{-1}\cdot V \subseteq U. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbf{j}\big(\prod Z_{\frac{p}{q}} \cap \sigma_\square Y_{\frac{p}{q}}\big) \subseteq U$, что и доказывает непрерывность отображения $\mathbf{j}$.

2. *Отображение* $\mathbf{j}$ *открыто.*

Возьмём произвольную точку $\big(y_{\frac{p}{q}}\big)_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+} \in \sigma_\square Y_{\frac{p}{q}}$ и какую-нибудь её открытую окрестность U в $\sigma_\square Y_{\frac{p}{q}}$. Нам нужно показать, что образ $\mathbf{j}(U)$ содержит открытую окрестность элемента $\mathbf{j}\big((y_{\frac{p}{q}})_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}\big)$ в группе $F(X)$.

Предположим, что $\operatorname{supp}\big(y_{\frac{p}{q}}\big)_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+} = \big\{\frac{p_1}{q_1} < \ldots < \frac{p_k}{q_k}\big\}$. Возьмём какое-нибудь целое $a \geqslant \frac{p_k}{q_k}+1$ и скажем, что это — число уровня 1.

Пусть n — целое число, большее 2. Множество уровня $\leqslant n$ образовано 2^n-1 точками (числами) вещественной прямой, причем расстояние между соседними точками равно $\frac{1}{2^{n-1}}$ и точка a лежит в геометрическом центре этого множества (и принадлежит ему). Скажем, что точка лежит на уровне n, если она принадлежит множеству уровня $\leqslant n$ и не принадлежит множеству уровня $\leqslant n-1$. Множества уровней $n+1$ и $\leqslant n$ находятся в следующем отношении. Множество уровня $n+1$ включает центральные точек отрезков, соединяющих соседние точки уровня $\leqslant n$, точку на расстоянии $\frac{1}{2^n}$ слева от крайней левой точки уровня $\leqslant n$ и точку на расстоянии $\frac{1}{2^n}$ справа от крайней правой точки уровня $\leqslant n$. Таким образом, число точек уровня $n+1$ всегда на единицу больше числа точек уровня $\leqslant n$ и равно 2^n и прибавление (вычитание) $\frac{1}{2^n}$ к числу (из числа) уровня $\leqslant n$ даёт число уровня $n+1$. Кроме того, все числа, для которых определены уровни, являются рациональными числами, бо́льшими $\frac{p_k}{g_k}$, и каждое рациональное число уровня n имеет числитель 2^{n-1} (точнее, каждое такое рациональное число имеет вид $\frac{2^{n-1}a\pm(2i-1)}{2^{n-1}}$, где $i=1,2,\ldots,2^{n-2}$).

Лемма. *Для любых $n\in\mathbb{N}$ и $\sigma\in S_n$ существуют такие рациональные числа $\frac{r_1}{s_1}$, $\frac{r_2}{s_2}$,..., $\frac{r_n}{s_n}$, что $\frac{r_1}{s_1}<\frac{r_2}{s_2}<\ldots<\frac{r_n}{s_n}$ и каждое число $\frac{r_i}{s_i}$ лежит на уровне $\sigma(i)$.*

Доказательство. Для $n=1$ утверждение леммы очевидно. Предположим, что $n>1$ и утверждение верно для $n-1$. Возьмём подстановку $\sigma\in S_n$. Пусть $n=\sigma(m)$. Рассмотрим такую подстановку $\sigma'\in S_{n-1}$, что $\sigma'(i)=\sigma(i)$ для всех $i<m$ (если такие i существуют) и $\sigma'(m)=\sigma(m+1)$,..., $\sigma'(n-1)=\sigma(n)$. Пользуясь предположением индукции, мы можем найти такие рациональные числа $\frac{r'_1}{s'_1}<\ldots<\frac{r'_{n-1}}{s'_{n-1}}$, что число $\frac{r'_i}{s'_i}$ лежит на уровне $\sigma'(i)$ ($\leqslant n-1$) для каждого $i\leqslant n-1$. Если $m=1$, положим $\frac{r_1}{s_1}=\frac{r'_1}{s'_1}-\frac{1}{2^n}$ и $\frac{r_i}{s_i}=\frac{r'_{i-1}}{s'_{i-1}}$ для $i=2,\ldots,n$. Тогда $\frac{r_1}{s_1}<\ldots<\frac{r_n}{s_n}$, $\frac{r_1}{s_1}$ — число уровня $n=\sigma(m)$ и $\frac{r_i}{s_i}$ — числа уровней $\sigma'(i-1)=\sigma(i)$ для $i=2,\ldots,n$. Если $m>1$, мы полагаем $\frac{r_1}{s_1}=\frac{r'_1}{s'_1},\ldots,$ $\frac{r_{m-1}}{s_{m-1}}=\frac{r'_{m-1}}{s'_{m-1}}$, $\frac{r_m}{s_m}=\frac{r'_{m-1}}{s'_{m-1}}+\frac{1}{2^n}$, $\frac{r_{m+1}}{s_{m+1}}=\frac{r'_m}{s'_m}$, $\frac{r_n}{s_n}=\frac{r'_{n+1}}{s'_{n+1}}$. Тогда $\frac{r_1}{s_1}<\ldots<\frac{r_n}{s_n}$, и уровень числа $\frac{r_i}{s_i}$ равен $\sigma'(i)=\sigma(i)$, если $i<m$, $n=\sigma(m)$, если $i=m$, и $\sigma'(i-1)=\sigma(i)$, если $i>m$. $\square$

Перейдём к доказательству того, что образ $\mathbf{j}(U)$ содержит открытую окрестность элемента $\mathbf{j}\big((y_{\frac{p}{q}})_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}\big)$ в группе $F(X)$. Обозначим через L множество всех рациональных чисел, которым присвоены уровни; тогда $L\cap\operatorname{supp}\big(y_{\frac{p}{q}}\big)_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}=\varnothing$. Для всех $\frac{p}{q}\notin\operatorname{supp}\big(y_{\frac{p}{q}}\big)_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}$ имеем $y_{\frac{p}{q}}=\{\Delta_q\}$; значит, для всех $\frac{p}{q}\in L$ существуют такие открытые окрестности $\hat{W}_{\frac{p}{q}}$ диагонали в $\big((X\oplus X^{-1})^q\big)^2$, что

$$U\supseteq\prod_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}Z_{\frac{p}{q}}\cap\underset{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}{\sigma}\Box Y_{\frac{p}{q}}$$

($\prod$ обозначает декартово произведение), где $Z_{\frac{p}{q}}=\big\{y_{\frac{p}{q}}\big\}$, если $\frac{p}{q}\notin L$, и $Z_{\frac{p}{q}}=$ $=\{\Delta_q\}\cup\hat{W}_{\frac{p}{q}}\setminus\Delta_q$, если $\frac{p}{q}\in L$. Для каждого натурального n положим

$$\hat W'_n = \bigcap_{\frac{p}{q}\ \text{уровня}\ n} \hat W_{\frac{p}{q}}$$

и

$$W_n = \pi_{\{1,\dots,n\}\cup\{2^{n-1}+1,\dots,2^{n-1}+n\}}\Big(\hat W'_n \cap \big((X\oplus X^{-1})^n \times \underbrace{\{x_0\}\times\ldots\times\{x_0\}}_{2^{n-1}-n\ \text{раз}}\big)^2\Big),$$

где x_0 — произвольная точка в $X\oplus X^{-1}$ (напомним, что каждое рациональное число уровня n имеет знаменатель 2^{n-1}; как и выше, $\pi_{\{1,\dots,n\}\cup\{2^{n-1}+1,\dots,2^{n-1}+n\}}$ обозначает проектирование на сомножители с номерами, указанными в индексе). Для каждого n W_n — открытая окрестность диагонали в пространстве $\big((X\oplus X^{-1})^n\big)^2$, и

$$\mathbf{j}_n(W_n) \subseteq \mathbf{j}_{2^{n-1}}(\hat W'_n) \subseteq \mathbf{j}_{q=2^{n-1}}\big(\hat W_{\frac{p}{q}}\big)$$

для любого числа $\frac{p}{q}$ уровня n.

Итак, у нас есть последовательность открытых окрестностей W_n диагоналей в пространствах $\big((X\oplus X^{-1})^n\big)^2$; обозначим эту последовательность через $\mathcal{W}$. Как уже упоминалось (см. раздел 1.1),

$$V(\mathcal{W}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\sigma\in S_n} \prod_{i\leqslant n} \mathbf{j}_{\sigma(i)}(W_{\sigma(i)})$$

($\prod$ обозначает умножение в группе $F(X)$) — открытая окрестность единицы в $F(X)$. Покажем, что открытая окрестность

$$\mathbf{j}\big((y_{\frac{p}{q}})_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}\big)\cdot V(\mathcal{W}) = \mathbf{j}\big((y_{\frac{p}{q}})_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}\big)\cdot \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\sigma\in S_n} \prod_{i\leqslant n} \mathbf{j}_{\sigma(i)}(W_{\sigma(i)})$$

элемента $\mathbf{j}\big((y_{\frac{p}{q}})_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}\big)$ в $F(X)$ содержится в $\mathbf{j}(U)$. Возьмём произвольное слово w в этой окрестности; оно имеет вид

$$w = \mathbf{j}\big((y_{\frac{p}{q}})_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}\big) w_{\sigma(1)} w_{\sigma(2)} \ldots w_{\sigma(n)},$$

где $n\in\mathbb{N}$, $\sigma\in S_n$ и $w_i\in\mathbf{j}_i(W_i)$ для $i\leqslant n$. По доказанной лемме существуют такие рациональные числа $\frac{r_1}{s_1}$, $\frac{r_2}{s_2},\ldots,$ $\frac{r_n}{s_n}$, что $\frac{r_1}{s_1} < \frac{r_2}{s_2} < \ldots < \frac{r_n}{s_n}$ и каждое $\frac{r_i}{s_i}$ — число уровня $\sigma(i)$. Для любого $i\leqslant n$ имеем $\mathbf{j}_{\sigma(i)}(W_{\sigma(i)}) \subseteq \mathbf{j}_{s_i}\big(\hat W_{\frac{r_i}{s_i}}\big)$; следовательно,

$$\mathbf{j}\big((y_{\frac{p}{q}})_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}\big)\cdot \prod_{i\leqslant n} w_{\sigma(i)} = \prod_{i\leqslant k} \mathbf{j}_{q_i}\big(y_{\frac{p_i}{q_i}}\big)\cdot \prod_{\substack{i\leqslant n,\\ w_{\sigma(i)}\neq\mathbf{e}}} \mathbf{j}_{s_i}\big(z_{\frac{r_i}{s_i}}\big),$$

где $z_{\frac{r_i}{s_i}} \in \hat W_{\frac{r_i}{s_i}}$ для всех $i\leqslant n$, для которых $w_{\sigma(i)}\neq\mathbf{e}$. Если $z_{\frac{r_i}{s_i}}\in\Delta_{s_i}$ для некоторого такого i, то $\mathbf{j}_{s_i}\big(z_{\frac{r_i}{s_i}}\big) = w_{\sigma(i)} = \mathbf{e}$ противоречит выбору номера i; значит, для каждого такого i точка $z_{\frac{r_i}{s_i}}$ принадлежит множеству $\hat W_{\frac{r_i}{s_i}}\setminus\Delta_{s_i} \subseteq Z_{\frac{r_i}{s_i}}$. Положим $z_{\frac{p}{q}} = y_{\frac{p}{q}}$, если $\frac{p}{q}\notin L$ (в частности, $z_{\frac{p}{q}} = \{\Delta_q\}$ и, следовательно,

$\mathbf{j}_q\big(z_{\frac{p}{q}}\big) = \mathbf{e}$, если $\frac{p}{q} \notin \operatorname{supp}\big(y_{\frac{p}{q}}\big)_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+} \cup L)$, и $z_{\frac{p}{q}} = \{\Delta_q\}$, если $\frac{p}{q} \in L \setminus \big\{\frac{r_1}{s_1}, \dots, \frac{r_n}{s_n}\big\}$ или $\frac{p}{q} = \frac{r_i}{s_i}$ и $w_{\sigma(i)} = \mathbf{e}$. Тогда

$$\big(z_{\frac{p}{q}}\big)_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+} \in \prod_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+} Z_{\frac{p}{q}} \cap \underset{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}{\sigma} \square Y_{\frac{p}{q}}$$

(произведение декартово) и, поскольку элементы обоих множеств $\big\{\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_k}{q_k}\big\}$ и $\big\{\frac{r_1}{s_1}, \dots, \frac{r_n}{s_n}\big\}$ перенумерованы в порядке возрастания и все $\frac{p_i}{q_i}$ меньше, чем $\frac{r_1}{s_1}$, мы имеем

$$\mathbf{j}\big((z_{\frac{p}{q}})_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}\big) = \prod_{i\leqslant k} \mathbf{j}_{q_i}\big(y_{\frac{p_i}{q_i}}\big) \cdot \prod_{i\leqslant n} \mathbf{j}_{s_i}\big(z_{\frac{r_i}{s_i}}\big) = \mathbf{j}\big((y_{\frac{p}{q}})_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}\big) \cdot \prod_{i\leqslant n} w_{\sigma(i)} = w.$$

Таким образом, произвольный элемент w открытой окрестности

$$\mathbf{j}\big((y_{\frac{p}{q}})_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}\big) \cdot V(\mathcal{W})$$

в $F(X)$ является образом некоторой точки

$$\big(z_{\frac{p}{q}}\big)_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+} \in \prod_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+} Z_{\frac{p}{q}} \cap \underset{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+}{\sigma} \square Y_{\frac{p}{q}} \subseteq U,$$

что и доказывает теорему. □

Итак, отображение $\mathbf{j}$ непрерывно и открыто. Его образ — множество $F_{\text{чёт}}(X)$ всех слов чётной длины в $F(X)$ (см. замечание 5.3) — является открыто-замкнутой подгруппой в свободной топологической группе, будучи ядром непрерывного гомоморфизма $F(X)$ в дискретную группу $\{0, 1\}$, полученного продолжением тождественного отображения пространства X в 1. Значит, $\mathbf{j}$ определяет свободную топологию на открыто-замкнутой подгруппе свободной топологической группы и тем самым на всей свободной группе.

6. Факторные отображения на слова ограниченной длины в свободных топологических группах

Несмотря на то, что предложенная в предыдущем разделе конструкция описывает топологию свободной топологической группы в терминах произведений и факторных отображений, разумеется, несравненно удобнее иметь дело со свободными топологическими группами тех пространств, для которых все отображения $\mathbf{i}_n$ факторны, а сама группа $F(X)$ является прямым пределом своих подпространств $F_n(X)$ (т. е. естественное отображение умножения $\mathbf{i}$ факторно) или выполнено хотя бы одно из этих условий. К сожалению, об условиях факторности отображений $\mathbf{i}_n$ известно чрезвычайно мало: В. Г. Пестов охарактеризовал те пространства, для которых отображение $\mathbf{i}_2$ факторно (а именно, он доказал, что

$\mathbf{i}_2$ факторно тогда и только тогда, когда X строго коллективно нормально, т. е. любая открытая окрестность диагонали в X^2 является равномерным окружением диагонали относительно универсальной равномерности пространства X [22]), а Фэй, Ордман и Томас доказали, что $\mathbf{i}_3$ не факторно даже для пространства рациональных чисел [60]. Кроме того, М. Г. Ткаченко [39] распространил утверждение о факторности отображения $\mathbf{i}$ (а значит, и всех $\mathbf{i}_n$) с класса компактов на класс C_ω-пространств, включающий пространства счётно компактные и нормальные в любой конечной степени. Ткаченко определяет C_ω-пространства по аналогии с k_ω-пространствами как прямые пределы растущей цепи своих замкнутых подпространств, каждое из которых счётно компактно и нормально в любой конечной степени. Для доказательства утверждения о факторности $\mathbf{i}$ для C_ω-пространств Ткаченко применяет упомянутый во введении подход Архангельского и технику Граева (использованную в [11] в доказательстве того же утверждения для компактов). Ткаченко также показал в [39], что если X — линделёфово P-пространство, то все отображения $\mathbf{i}_n$ (и даже $\mathbf{i}$) факторны. А. В. Архангельский доказал, что если X полно по Дьёдонне и $F_n(X)$ — k-пространство, то отображение $\mathbf{i}_n$ факторно [7, § 5]; в той же работе он фактически доказал, что если X полно по Дьёдонне и $F(X)$ — k-пространство, то отображение $\mathbf{i}$ факторно. Доказательство этого факта основано на том, что если M — ограниченное подмножество $F(X)$, то множество всех букв, встречающихся хоть один раз в несократимой записи элементов из M ограничено в X (эта теорема была независимо доказана А. В. Архангельским и М. М. Чобаном; см. [52]) и $M \subseteq F_n(X)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ (см. [100]). Наконец, в совместной работе [24] Е. А. Резниченко и О. В. Сипачёва описали те пространства, для которых отображение $\mathbf{i}_3$ или $\mathbf{i}_4$ факторно, в терминах топологических свойств этих пространств и их отображений. Не исключено, что вопрос о факторности $\mathbf{i}_4$ играет ключевую роль в вопросе о факторности всех отображений $\mathbf{i}_n$. В случае свободной абелевой группы метрического пространства дело обстоит именно так: К. Ямада доказал [108], что для метрического пространства X все естественные отображения сложения $\mathbf{i}_n^+ \colon \tilde{X}^n \to A_n(X)$ факторны тогда и только тогда, когда отображение $\mathbf{i}_4^+$ факторно.

Вопрос о факторности отображений $\mathbf{i}_n$ оказался тесно связанным с вопросом о факторности декартовых произведений простейших факторных отображений пространства X и его квадрата — тождественного отображения $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ и естественного факторного отображения $\delta_X \colon X \times X \to (X \times X)/\Delta_X$ (Δ_X — диагональ в $X \times X$). Вопрос этот вовсе не так прост как кажется; в связи с ним полезно вспомнить теорему Уайтхеда [50, теорема 3.3.17]: если X — локально компактное хаусдорфово пространство и отображение $f \colon Y \to Z$ факторно, то декартово произведение $f \times \mathrm{id}_X \colon Y \times X \to Z \times X$ является факторным отображением. Майкл доказал [71], что верно и обратное утверждение: если декартово произведение произвольного факторного отображения и тождественного отображения регулярного пространства X факторно, то X локально компактно.

В [24] доказан ряд несложных, но полезных общих фактов об отображениях $\mathbf{i}_n$; в частности, там показано, что из факторности отображения $\mathbf{i}_n$ вытекает факторность отображения $\mathbf{i}_{n-1}$. Основные технические утверждения, доказанные в [24], состоят в том, что если X — тихоновское пространство и отображение $\mathbf{i}_3$ ($\mathbf{i}_4$) факторно, то пространство X строго коллективно нормально и отображение $\delta_X \times \mathrm{id}_X\colon (X \times X) \times X \to ((X \times X)/\Delta_X) \times X$ (соответственно $\delta_X \times \delta_X\colon (X \times X) \times (X \times X) \to ((X \times X)/\Delta_X) \times ((X \times X)/\Delta_X)$) факторно. Применяя эти утверждения к стандартным тестовым пространствам, удаётся получить результаты, которые формулируются в более привычных терминах. Тестовые пространства, рассмотренные в [24], довольно часто используются в этой роли при изучении свободных групп (см., например, [87] и цитированную там литературу). Эти пространства таковы (τ — кардинал):

$D(\tau) = \{x_\alpha\colon \alpha < \tau\}$ — дискретное пространство мощности τ;

$A(\tau) = \{a_*\} \cup \{a_\alpha\colon \alpha < \tau\}$ — одноточечная компактификация дискретного пространства мощности τ;

$V(\tau) = \{v_*\} \cup \{v_{\alpha n}\colon \alpha < \tau, n \in \mathbb{N}\}$ — веер Фреше–Урысона мощности τ;

$J(\tau) = \{j_*\} \cup \{j_{\alpha n}\colon \alpha < \tau, n \in \mathbb{N}\}$ — ёж колючести τ (с иголками-последовательностями).

В $V(\tau)$ все точки, кроме v_*, изолированы, а базу топологии в точке v_* образуют множества вида

$$\{v_*\} \cup \{v_{\alpha n}\colon \alpha < \tau,\ n > n_\alpha\},$$

где $(n_\alpha)_{\alpha<\tau} \in \mathbb{N}^\tau$.

В $J(\tau)$ все точки, кроме j_*, изолированы, а базу топологии в точке j_* образуют множества вида

$$\{j_*\} \cup \{j_{\alpha n}\colon \alpha < \tau,\ n > m\},$$

где $m \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $\mathcal{A}$ класс тихоновских пространств X, для которых пространство $(X \times X)/\Delta_X$ является тихоновским пространством; он содержит, в частности, все строго коллективно нормальные пространства.

Пусть $\mathcal{B}$ — класс тех пространств X из $\mathcal{A}$, для которых отображение

$$\delta_X \times \mathrm{id}_X\colon (X \times X) \times X \to ((X \times X)/\Delta_X) \times X$$

факторно, и $\mathcal{C}$ — класс тех пространств X из $\mathcal{A}$, для которых отображение

$$\delta_X \times \delta_X\colon (X \times X) \times (X \times X) \to ((X \times X)/\Delta_X) \times ((X \times X)/\Delta_X)$$

факторно. Упомянутые выше основные технические утверждения работы [24] можно сформулировать следующим образом: если для тихоновского пространства X отображение $\mathbf{i}_3$ ($\mathbf{i}_4$) факторно, то пространство X строго коллективно нормально и $X \in \mathcal{B}$ ($X \in \mathcal{C}$).

Согласно теореме Уайтхеда класс $\mathcal{B}$ включает все локально компактные пространства из $\mathcal{A}$. В [24] показано, что $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ и оба эти класса инвариантны относительно перехода к замкнутым подпространствам. Кроме того, $D(\omega_1) \times A(\omega_0) \notin \mathcal{C}$ и $D(\omega_0) \times A(\omega_0) \oplus MV(\omega_0) \notin \mathcal{B}$ [24]. Отсюда получаются такие утверждения.

Теорема 6.1 ([24]). *Пусть X — тихоновское пространство с первой аксиомой счётности и для X отображение $\mathbf{i}_3$ факторно. Тогда X строго коллективно нормально и, если X не локально счётно компактно, подпространство его неизолированных точек счётно компактно.*

Теорема 6.2 ([24]). *Пусть X — тихоновское пространство с первой аксиомой счётности и для X отображение $\mathbf{i}_4$ факторно. Тогда X строго коллективно нормально, подпространство X' его неизолированных точек имеет счётный экстент и, если X не локально счётно компактно, X' счётно компактно.*

Теорема 6.3 ([24]). *Пусть X — тихоновское пространство и для X отображение $\mathbf{i}_4$ факторно. Тогда X строго коллективно нормально и замыкание множества его не P-точек имеет счётный экстент.*

7. Топология на множествах слов ограниченной длины

Проблема факторности отображений $\mathbf{i}_n$ почти эквивалентна проблеме явного описания топологии пространств $F_n(X)$ (ясно, что при изучении свободной топологической группы полезно знать, как устроены эти пространства, — хотя бы потому, что $F(X) = \bigcup F_n(X)$). Например, полученный В. Г. Пестовым критерий факторности отображения $\mathbf{i}_2$ есть не что иное, как описание топологии пространства $F_2(X)$. В явном виде оно формулируется так.

Утверждение 7.1 ([22]). *Пусть X — тихоновское пространство. Семейство*

$$\{\{x^\varepsilon y^{-\varepsilon}\colon (x,y)\in\mathcal{W},\ \varepsilon=\pm1\}\colon \mathcal{W}\subseteq X\times X - \text{элемент универсальной равномерности пространства } X\}$$

образует базу топологии пространства $F_2(X)$ в точке $\mathbf{e}$.

Утверждение 7.1 можно переформулировать в терминах псевдометрик.

Заметим, что множество схем (см. разделы 1.6 и 1.7) произвольного слова из $S^*(X)$ длины два включает только одну пару — $\langle 1,2\rangle$; значит, для всякого $\mathbf{g} = x^\varepsilon y^\delta \in F_2(X)$, где $x,y\in X$ и $\varepsilon,\delta=\pm1$, и для любой псевдометрики d на X, ограниченной единицей, имеем (см. раздел 1.6)

$$\|\mathbf{g}\|_{\hat d} = \begin{cases} 2 = \tilde d(x,y), & \text{если } \varepsilon=\delta,\\ d(x,y)=\tilde d(x,y), & \text{если } \varepsilon=-\delta. \end{cases}$$

Поэтому в терминах псевдометрик утверждение 7.1 можно переформулировать следующим образом.

Утверждение 7.2. *Пусть X — тихоновское пространство. Семейство*

$$\{\{\mathbf{B}_{\|\cdot\|_{\hat d}}(1)\cap F_2(X)\}\colon d - \text{ограниченная единицей непрерывная псевдометрика на } X\}$$

образует базу топологии пространства $F_2(X)$ в точке $\mathbf{e}$.

Уже пространство $F_3(X)$ устроено гораздо сложнее, не говоря о пространствах $F_n(X)$ с бо́льшими n. Первые, наиболее важные, результаты о строении этих пространств получил А. В. Архангельский [2—4] при помощи его метода, основанного на сведе́нии задачи к рассмотрению стоун-чеховской компактификации βX. В частности, он показал, что все $F_n(X)$ замкнуты в $F(X)$ и все конечные степени пространства X замкнуто вкладываются в свободную топологическую группу $F(X)$, и доказал следующую важную теорему.

Теорема 7.1 ([2—4]). *Пусть X — тихоновское пространство и $n \in \mathbb{N}$. Тогда отображение*

$$\mathbf{i}_n \restriction \tilde{X}^n \setminus \mathbf{i}_n^{-1}(F_{n-1}(X)) \colon \tilde{X}^n \setminus \mathbf{i}_n^{-1}(F_{n-1}(X)) \to F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$$

является гомеоморфизмом.

Иными словами, множество слов длины ровно n гомеоморфно своему прообразу при отображении $\mathbf{i}_n$. Как легко видеть, этот прообраз представляет собой открытое подпространство пространства $\tilde{X}^n$. Конструкция, с помощью которой доказывается теорема 7.1, даёт, в частности, следующее описание окрестностей точек в $F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$; оно было впоследствии переоткрыто[8] Джойнером [67] и упоминается многими авторами как лемма Джойнера.

Следствие 7.1. *Пусть $\mathbf{x} = x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$ — несократимая запись. Тогда открытую базу элемента $\mathbf{x}$ в $F_n(X)$ образуют множества вида $U_1^{\varepsilon_1} \ldots U_n^{\varepsilon_n}$, где U_i — открытая окрестность точки x_i в пространстве X для каждого $i \leqslant n$.*

Таким образом, свободная группа представляет собой, с одной стороны, объединение растущей цепочки замкнутых подмножеств $F_n(X)$, а с другой стороны — дизъюнктное объединение множеств вида $F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$ (слов длины ровно n). При этом каждое $F_n(X)$ является непрерывным образом пространства $\tilde{X}^n$, а $F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$, с одной стороны, открыто и всюду плотно в $F_n(X)$, а с другой — гомеоморфно открытому подпространству пространства $\tilde{X}^k$ (см. [3]).

Замечание 7.1. Уже из одних этих наблюдений вытекают фундаментальные утверждения о свойствах свободных топологических групп. Например, пусть $\mathcal{P}$ — любое топологическое свойство, которое сохраняется при операции дискретного удвоения (т. е. при переходе от X к $X \oplus X$) и при непрерывных отображениях, конечно мультипликативно и счётно аддитивно по замкнутым подмножествам в том смысле, что если $X = \bigcup X_n$ и все X_n замкнуты в X и обладают свойством $\mathcal{P}$, то и X обладает свойством $\mathcal{P}$ (таковы многие свойства, определяемые кардинальными инвариантами, такие как сепарабельность, наличие счётной сети и свойство иметь линделёфовы конечные степени, а также

[8]К сожалению, А. В. Архангельский опубликовал наиболее полное изложение своей теории в труднодоступном ротапринтном издании [3] и вернулся к свободным группам лишь спустя 10 лет [4], так что лемма Джойнера не единственный результат Архангельского, переоткрытый другими авторами за это десятилетие; см., например, [53].

многие другие важные свойства, например свойство быть линделёфовым Σ-пространством). Тогда для всякого пространства X, обладающего свойством $\mathcal{P}$, свободная топологическая группа $F(X)$ обладает свойством $\mathcal{P}$.

Замечание 7.2. Сформулированные выше утверждения о множествах слов данной длины легко переносятся на свободные абелевы группы. Разумеется, утверждение о замкнутом гомеоморфном вложении X^n в $F(X)$ нужно модифицировать; в абелевом случае это утверждение выглядит так. Пусть X — тихоновское пространство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ введём на X^n отношение эквивалентности $\sim_n$, отождествляющее точки, которые получаются друг из друга перестановкой координат. Фактор-пространство $X^n/{\sim_n}$ замкнуто вкладывается в $A(X)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Доказательство проводится по стандартной схеме: пусть bX — какая-нибудь компактификация пространства X. Естественное отображение сложения

$$\mathbf{j}_n\colon (bX)^n \to A(bX),$$

определённое правилом

$$\mathbf{j}_n((x_1, \ldots, x_n)) = x_1 + \ldots + x_n$$

для всех $(x_1, \ldots, x_n)$, непрерывно в силу непрерывности сложения и замкнуто как непрерывное отображение компакта (в частности, его образ $\mathbf{j}_n((bX)^n)$ замкнут в $A(bX)$). Ясно, что

$$\mathbf{j}_n((x_1, \ldots, x_n)) = \mathbf{j}_n((y_1, \ldots, y_n))$$

тогда и только тогда, когда

$$(x_1, \ldots, x_n) \sim_n (y_1, \ldots, y_n),$$

так что образ $\mathbf{j}_n((bX)^n)$ гомеоморфен фактор-пространству $(bX)^n/{\sim_n}$. Как множество свободная абелева группа $A(X)$ содержится в $A(bX)$; будем обозначать эту группу с топологией, индуцированной из $A(bX)$, через $A_b(X)$. Очевидно, $\mathbf{j}_n^{-1}(\mathbf{j}_n((bX)^n) \cap A_b(X)) = X^n$. Поскольку bX — компакт, факторное отображение $\mathbf{j}_n\colon (bX)^n \to \mathbf{j}_n((bX)^n)$ наследственно факторно (см. [50, 2.4.F]), поэтому его сужение $\mathbf{j}_n|_{X^n}\colon X^n \to \mathbf{j}_n((bX)^n) \cap A_b(X)$ факторно, и его образом является фактор-пространство $X^n/{\sim_n}$. Поскольку отображение $\mathbf{j}_n|_{X^n}$ непрерывно относительно свободной топологии на $A(X)$ и свободная топология сильнее топологии, индуцированной из $A(bX)$, это отображение является факторным относительно свободной топологии. Осталось заметить, что множество $\mathbf{j}_n(X^n) = \mathbf{j}_n(bX^n) \cap A_b(X)$ замкнуто в $A_b(X)$, а значит, оно замкнуто и в более сильной свободной топологии.

В работе [24] продолжено изучение строения множеств $F_n(X)$; каждое из них представлено в виде объединения подмножеств свободной группы, элементы которых записываются в виде слов не только определённой длины, но и с определённым набором степеней. Оказалось, что свойства сужений отображений $\mathbf{i}_n$ на прообразы этих подмножеств гораздо лучше свойств отображений $\mathbf{i}_n$, а сами эти прообразы образуют открыто-замкнутые разбиения пространств $\tilde{X}^k$ с $k \leqslant n$, так что полученные результаты позволяют описать структуру свободной группы «по кусочкам», как мозаику (другое дело, что кусочки этой мозаики связаны друг с другом весьма сложным образом). Ниже мы приводим эти результаты.

Пусть X — тихоновское пространство. Для натурального числа n и набора $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 0, 1\}^n$ мы полагаем

$$X^{\boldsymbol{\varepsilon}} = X^{\varepsilon_1} \times X^{\varepsilon_2} \times \ldots \times X^{\varepsilon_n} \subseteq \tilde{X}^n;$$

мы считаем, что $X^0 = \{\mathbf{e}\}$. Ясно, что семейство $\{X^{\boldsymbol{\varepsilon}} \colon \boldsymbol{\varepsilon} \in \{-1, 0, 1\}\}$ образует открыто-замкнутое разбиение пространства $\tilde{X}^n$.

Через π_i обозначается естественное проектирование пространства $\tilde{X}^n$ на i-й сомножитель: $\pi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$.

Естественное отображение умножения переводит элементы $\tilde{X}^n$ (упорядоченные наборы точек из $\tilde{X}$) в слова, которые тоже являются упорядоченными наборами точек из $\tilde{X}$. При этом происходят две вещи:

- исчезают точки $\mathbf{e}$;
- исчезают пары соседних точек вида xx^{-1} и $x^{-1}x$.

Наборы, в которых нет ни точек $\mathbf{e}$, ни пар xx^{-1} и $x^{-1}x$, не меняются. Таким образом, при отображениях $\mathbf{i}_n$ что-то происходит только на множествах

$$Z_i^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \tilde{X}^n \colon x_i = \mathbf{e}\},$$

где $i \leqslant n$, и

$$\Delta_i^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \tilde{X}^n \colon x_i x_{i+1} = \mathbf{e}\},$$

где $i \leqslant n-1$. На этих множествах действуют отображения $\varphi_{n,i} \colon Z_i^n \to \tilde{X}^{n-1}$ и $\psi_{n,i} \colon \Delta_i^n \to Z_i^{n-1}$, определённые правилами

$$\varphi_{n,i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$
$$\psi_{n,i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \mathbf{e}, x_{i+2}, \ldots, x_n),$$

они выполняют работу отображений $\mathbf{i}_n$ по частям: непосредственно из определений вытекает, что

$$\mathbf{i}_n \restriction Z_i^n = \mathbf{i}_{n-1} \circ \varphi_{n,i} \quad \text{для} \quad i \leqslant n$$

и

$$\mathbf{i}_n \restriction \Delta_i^n = \mathbf{i}_{n-1} \circ \psi_{n,i} \quad \text{для} \quad i \leqslant n-1.$$

Свойства отображений $\varphi_{n,i}$ и $\psi_{n,i}$ (во всяком случае их сужений на элементы $X^{\boldsymbol{\varepsilon}}$ открыто-замкнутого разбиения пространства $\tilde{X}^n$) намного лучше свойств отображений $\mathbf{i}_i$: в [24] показано, что

а) для $i \leqslant n$ и такого $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{-1, 0, 1\}^n$, что $\varepsilon_i = 0$, сужение $\varphi_{n,i} \restriction X^{\boldsymbol{\varepsilon}}$ — гомеоморфизм и

б) для $i \leqslant n-1$ и такого $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{-1, 0, 1\}^n$, что $\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} = 0$, сужение $\psi_{n,i} \restriction X^{\boldsymbol{\varepsilon}} \cap \Delta_i^n$ непрерывно и открыто.

Кроме того, свободная группа $F(X)$ состоит из образов множеств Z_i^n и Δ_i^n при отображениях $\mathbf{i}_n$, а именно

$$\mathbf{i}_n^{-1}(F_{n-1}(X)) = \bigcup_{i=1}^{n} Z_i^n \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \Delta_i^n$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

Вспомним, что пространство $\tilde{X}^n$ разбивается на открыто-замкнутые куски $X^{\boldsymbol{\varepsilon}}$, определяемые наборами степеней $\boldsymbol{\varepsilon}$. Их удобно использовать в качестве элементарных множеств и рассматривать отображения $\mathbf{i}_n$ на этих кусках по отдельности. Во-первых, для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{-1, 0, 1\}^n$ множество $\mathbf{i}_n(X^{\boldsymbol{\varepsilon}})$ замкнуто в $F(X)$. Во-вторых, отображение $\mathbf{i}_n$ факторно тогда и только тогда, когда для любого $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{-1, 0, 1\}^n$ сужение $\mathbf{i}_n \restriction X^{\boldsymbol{\varepsilon}}$ факторно [24].

В некоторых частных случаях действие отображения $\mathbf{i}_n$ на $X^{\boldsymbol{\varepsilon}}$ удаётся проследить во всех деталях. Так, из результата Пестова [22] (см. утверждение 7.1) вытекает такое утверждение.

Утверждение. *Если X — строго коллективно нормальное пространство, то отображения $\mathbf{i}_2 \restriction X^{(-1,1)} \times \mathbf{i}_2 \restriction X^{(1,-1)}$ и $\delta_X \times \delta_X$ гомеоморфны, т. е. диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
X^{(-1,1)} \times X^{(1,-1)} & \xrightarrow{\mathbf{i}_2\restriction X^{(-1,1)}\times \mathbf{i}_2\restriction X^{(1,-1)}} & \mathbf{i}_2(X^{(-1,1)}) \times \mathbf{i}_2(X^{(1,-1)}) \\
{\scriptstyle f_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_2} \\
(X \times X) \times (X \times X) & \xrightarrow[\delta_X \times \delta_X]{} & ((X \times X)/\Delta_X) \times ((X \times X)/\Delta_X)
\end{array}$$

коммутативна и отображения f_1 и f_2 (естественные биекции между соответствующими пространствами) являются гомеоморфизмами.

Следствие. *Если X — строго коллективно нормальное пространство, то отображения $\mathbf{i}_2 \restriction X^{(-1,1)} \times \mathbf{i}_1 \restriction X$ и $\delta_X \times \mathrm{id}_X$ гомеоморфны.*

В [24] доказаны также следующие утверждения.

Утверждение. *Для тихоновского пространства X следующие условия эквивалентны:*

а) *отображение $\mathbf{i}_4 \restriction X^{(-1,1,1,-1)}$ факторно;*

б) *отображение*

$$\mathbf{i}_2 \restriction X^{(-1,1)} \times \mathbf{i}_2 \restriction X^{(1,-1)} \colon X^{(-1,1)} \times X^{(1,-1)} \to \mathbf{i}_2(X^{(-1,1)}) \times \mathbf{i}_2(X^{(1,-1)})$$

факторно;

в) *пространство X строго коллективно нормально и отображение*

$$\delta_X \times \delta_X \colon (X \times X) \times (X \times X) \to ((X \times X)/\Delta_X) \times ((X \times X)/\Delta_X)$$

факторно.

Утверждение. *Для тихоновского пространства X следующие условия эквивалентны:*

а) *отображение $\mathbf{i}_3 \restriction X^{(-1,1,1)}$ факторно;*

б) *отображение*

$$\mathbf{i}_2 \restriction X^{(-1,1)} \times \mathbf{i}_1 \restriction X \colon X^{(-1,1)} \times X \to \mathbf{i}_2(X^{(-1,1)}) \times \mathbf{i}_1(X)$$

факторно;

в) *пространство X строго коллективно нормально и отображение*

$$\delta_X \times \mathrm{id}_X \colon (X \times X) \times X \to ((X \times X)/\Delta_X) \times X$$

факторно.

8. Свободные топологические группы с топологией индуктивного предела

Этот раздел посвящён исследованию вопроса о том, когда $F(X)$ является индуктивным пределом своих подпространств $F_n(X)$ (напомним, что это свойство является второй составляющей факторности естественного отображения умножения $\mathbf{i}$). Этот вопрос изучен лучше, чем факторность отображений $\mathbf{i}_n$. Первый результат (положительный ответ для компактов) получил ещё Граев в 1948 г. [10]. Затем Мак, Моррис и Ордман (1973 г., [70]) распространили результат Граева на k_ω-пространства (индуктивные пределы возрастающей счётной последовательности компактов). По-видимому, самый сильный результат принадлежит М. Г. Ткаченко [39], который доказал, что если X — P-пространство или C_ω-пространство (т. е. индуктивный предел возрастающей последовательности своих подпространств X_n, каждое из которых счётно компактно и строго коллективно нормально в любой конечной степени), то $F(X)$ является индуктивным пределом своих подпространств $F_n(X)$. Кроме того, Ткаченко охарактеризовал псевдокомпактные пространства X с тем же свойством, а именно, он доказал, что свободная топологическая группа $F(X)$ псевдокомпактного пространства X является индуктивным пределом своих подпространств $F_n(X)$ тогда и только тогда, когда все конечные степени пространства X нормальны и счётно компактны [104]. Пестов и Ямада [87] дали полное описание метризуемых X, для которых $F(X)$ является индуктивным пределом подпространств $F_n(X)$, и тех метризуемых X, для которых $A(X)$ является индуктивным пределом своих подпространств $A_n(X)$. О. В. Сипачёвой принадлежит характеризация счётных пространств X с единственной неизолированной точкой, для которых $F(X)$ ($A(X)$) — индуктивный предел подпространств $F_n(X)$ ($A_n(X)$) [97]. Характеризация простая: пространство X (точнее, фильтр окрестностей единственной неизолированной точки) должно быть P-фильтром. Для ультрафильтров это условие означает, что ультрафильтр является P-точкой в $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Полученный результат позволил привести пример такого пространства X, что

1) $F(X)$ и $A(X)$ — индуктивные пределы подпространств $F_n(X)$ и $A_n(X)$ соответственно;
2) X — счётное пространство с единственной неизолированной точкой;

3) все (псевдо)компактные подпространства в X конечны, так что X не k_ω- (и даже не k-) пространство и не C_ω-пространство.

Таким образом, ни одно из перечисленных выше достаточных условий того, что $F(X)$ — индуктивный предел $F_n(X)$ (в общем — неметризуемом — случае), не является необходимым. Первые необходимые условия были получены Сипачёвой в [97]. Пестов и Ямада [87] использовали эти условия в доказательстве критерия для метризуемого случая.

Ниже приводится доказательство критерия того, что свободная группа имеет топологию индуктивного предела, для счётных пространств с единственной неизолированной точкой; оно иллюстрирует применение явного описания топологии свободной абелевой группы. Кроме того, приводятся условия, необходимые для того, чтобы свободная группа имела топологию индуктивного предела; одно — общее — условие содержится в [97] и приводится здесь без доказательства (оно использует то же описание топологии и основано на тех же идеях, что и доказательство критерия для счётных пространств с одной неизолированной точкой, хотя выглядит намного сложнее); другие условия получаются из этого общего условия или из критерия для счётных пространств и не опубликованы, так что приводятся с доказательствами (тем более что доказываются они просто).

Мы будем рассматривать в основном абелевы группы. Все необходимые условия, полученные для свободных абелевых групп, остаются верными и в неабелевом случая благодаря следующему простому факту.

Предложение 8.1 ([97]). *Пусть X — тихоновское пространство. Если $F(X)$ является индуктивным пределом последовательности своих подпространств $F_n(X)$, то $A(X)$ является индуктивным пределом последовательности своих подпространств $A_n(X)$ $(n \in \mathbb{N})$.*

Теорема 8.1. *Пусть X — счётное пространство и любая непрерывная метрика ρ на X мажорируется такой непрерывной метрикой d, что свободная топологическая группа $F(X,d)$ (свободная абелева топологическая группа $A(X,d)$) метрического пространства (X,d) является индуктивным пределом своих подпространств $F_n(X,d)$ (соответственно $A_n(X,d)$). Тогда $F(X)$ $(A(X))$ является индуктивным пределом своих подпространств $F_n(X)$ $(A_n(X))$*[9].

Доказательство. Пусть множество $S \subseteq F(X)$ таково, что для всех n пересечения $S_n = S \cap F_n(X)$ открыты в $F_n(X)$. Мы должны доказать, что S открыто. Возьмём произвольное слово $\mathbf{g} \in S$. Из открытости всех пересечений S_n в $F_n(X)$ вытекает, что для всякого n найдётся такая открытая окрестность U_n единицы в группе $F(X)$, что $\mathbf{g} \cdot U_n \cap F_n(X) \subseteq S_n$ (если $\mathbf{g} \notin S_k$, т. е. длина слова $\mathbf{g}$ больше k, то в качестве U_k можно взять любую открытую окрестность единицы, удовлетворяющую условию $\mathbf{g} \cdot U_k \cap F_k(X) = \varnothing$ — такая окрестность

[9] В [97, Theorem 1] эта теорема сформулирована неверно: нет требования счётности пространства (вместо него налагается более слабое условие, которого не достаточно для справедливости утверждения) и в доказательстве содержится пробел. Эта неточность не влияет на справедливость остальных результатов из [97], кроме следствия из теоремы 1 — оно неверно.

существует, потому что все $F_k(X)$ замкнуты в $F(X)$ [19]). Для каждого n найдутся такие непрерывная метрика d_n на X и окрестность единицы $V_n \subseteq U_n$, что V_n открыта в топологии свободной топологической группы пространства (X, d_n). В самом деле, поскольку X счётно (и тем более линделёфово), $F(X)$ вкладывается как подгруппа в тихоновское произведение $\prod\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$ метризуемых групп [8] (см. также [5]). Множество U_n является пересечением некоторой открытой окрестности единицы в этом произведении с $F(X)$; значит, найдутся такие $r \in \mathbb{N}$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in A$, что $\prod V_\alpha \cap F(X) \subseteq U_n$, где V_α — некоторые окрестности единицы в G_α для $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ и $V_\alpha = G_\alpha$ для всех прочих $\alpha \in A$. Обозначим через $\mathcal{T}_\alpha$ топологию группы G_α для $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ и антидискретную топологию на группе G_α для $\alpha \in A \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$. Топология тихоновского произведения $\prod(G_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ слабее топологии исходного произведения $\prod G_\alpha$, и она порождается некоторой псевдометрикой p, потому что лишь конечное число сомножителей имеет неантидискретные топологии, и все эти топологии метризуемы. Тем не менее множество $\prod V_\alpha$, очевидно, открыто и в произведении $\prod(G_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$. Множество X содержится (как подмножество) в произведении $\prod G_\alpha$ вместе со своей свободной группой, и на X есть непрерывная метрика d (потому что сетевой вес X счётен и, следовательно, его топология ослабляется до топологии, удовлетворяющей второй аксиоме счётности; см. [50, лемма 3.1.18]). Максимум $\max(d, p \restriction X)$ — искомая метрика d_n, а множество $\prod V_\alpha \cap F(X)$ — искомая окрестность единицы V_n: топология группы $F(X)$, порождённая сужением $p \restriction F(X)$, — это групповая топология, и топология, которую она индуцирует на X, не сильнее топологии, порождённой метрикой d_n; значит, она не сильнее свободной топологии группы $F(X, d_n)$, и, поскольку множество V_n открыто в этой топологии, оно тем более открыто в свободной топологии группы $F(X, d_n)$.

Итак, для каждого $\mathbf{g} \in S$ найдётся счётное семейство таких непрерывных метрик $d_n(\mathbf{g})$ на X и открытых окрестностей $V_n(\mathbf{g})$ единицы в свободных топологических группах $F(X, d_n)$, что $(\mathbf{g} \cdot V_n(\mathbf{g})) \cap F_n(X) \subseteq S$. Поскольку пространство X счётно, свободная группа $F(X)$ тоже счётна, как и семейство $\{d_n(\mathbf{g})\colon \mathbf{g} \in F(X),\ n \in \mathbb{N}\}$. Значит, найдётся непрерывная метрика d на X, относительно которой непрерывны все метрики d_n; понятно, что все множества $V_n(\mathbf{g})$ открыты в свободной топологической группе $F(X, d)$. По условию можно считать, что $F(X, d)$ имеет топологию индуктивного предела. Итак, для любого $\mathbf{g} \in F(X)$ и любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся открытая окрестность слова $\mathbf{g}$ в $F(X, d)$ (а именно, $\mathbf{g} \cdot V_n(\mathbf{g})$), пересечение которой с $F_n(X)$ содержится в S_n. Это означает, что все S_n открыты в $F_n(X, d)$. Поскольку $F(X, d)$ — индуктивный предел своих подпространств $F_n(X, d)$, множество S открыто в $F(X, d)$ и, следовательно, в $F(X)$. □

Теорема 8.2. *Пусть X — счётное пространство с единственной неизолированной точкой $*$. Свободная топологическая группа $F(X)$ ($A(X)$) является индуктивным пределом своих подпространств $F_n(X)$ (соответственно подпространств $A_n(X)$) тогда и только тогда, когда для любой последовательности*

$\{U_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ открытых окрестностей точки $*$ найдётся открытая окрестность V точки $*$, пересечения которой с $U_n \setminus U_{n+1}$ конечны для всех n.

Лемма 8.1. *Пусть X — счётное пространство с единственной неизолированной точкой $*$. Предположим, что найдётся такая последовательность $\{U_n\colon n \in \mathbb{N}_0\}$ открытых окрестностей точки $*$, что $U_{n+1} \subseteq U_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ и для любой открытой окрестности V точки $*$ существует $n \in \mathbb{N}_0$, для которого $|V \cap (U_n \setminus U_{n+1})| = \aleph_0$. Тогда $A(X)$ не является индуктивным пределом своих подпространств $A_n(X)$.*

Доказательство. Мы можем предполагать без потери общности, что $U_0 = X$ и дополнение $U_n \setminus U_{n+1}$ бесконечно для каждого n. Как-нибудь перенумеруем точки в этом дополнении:

$$U_n \setminus U_{n+1} = \{x_{ni}\colon i \in \mathbb{N}\};$$

для всякого $n \in \mathbb{N}_0$ положим

$$F_n = \{(x_{nm} - *) + n(x_{ij} - *)\colon i, j, m \in \mathbb{N},\ n < i < j < m\}.$$

Покажем, что каждое F_n является замкнутым дискретным подмножеством в $A(X)$. Пусть $Y = \{*\} \cup \{x_{nm}\colon m \in \mathbb{N}\}$, и пусть $r\colon X \to Y$ — ретракция, которая отображает $X \setminus Y$ в $\{*\}$. Ясно, что Y дискретно и отображение r непрерывно. Пусть $\hat{r}\colon A(X) \to A(Y)$ — гомоморфное продолжение отображения r; тогда $\hat{r}$ непрерывно отображает $A(X)$ на дискретную топологическую группу $A(Y)$. Для каждого $\mathbf{g} \in A(Y)$ множество $\hat{r}^{-1}(\mathbf{g}) \cap F_n$ конечно. Действительно, если $\hat{r}^{-1}(\mathbf{g}) \cap F_n$ непусто, то $\mathbf{g} = \hat{r}((x_{nm_0} - *) + n(x_{i_0 j_0} - *))$ для некоторых $m_0, i_0, j_0 \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих неравенствам $n < i_0 < j_0 < m_0$; значит, $\mathbf{g} = x_{nm_0} - *$ и

$$\hat{r}^{-1}(\mathbf{g}) \cap F_n = \{(x_{nm_0} - *) + n(x_{ij} - *)\colon i, j \in \mathbb{N},\ n < i < j < m_0\},$$

а это множество конечно. Отсюда вытекает, что F_n — замкнутое дискретное подпространство в $A(X)$.

Поскольку $F_n \subseteq A_{2n+2}(X) \setminus A_{2n+1}(X)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, множество $F = \bigcup\limits_n F_n$ замкнуто в топологии индуктивного предела на $A(X) = \bigcup A_n(X)$. Чтобы доказать лемму, достаточно проверить, что $\mathbf{0} \in \bar{F}$, т. е. что для любой непрерывной псевдометрики d на X пересечение $U(d) \cap F$ непусто.

Возьмём произвольную непрерывную псевдометрику d на X. Поскольку шар $B_d(*, 1/2)$ — открытая окрестность точки $*$, из условий леммы вытекает, что множество $M = \{m \in \mathbb{N}\colon d(*, x_{nm}) < 1/2)\}$ бесконечно для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $B_d(*, 1/2n) \cap U_{n+1}$ — тоже открытая окрестность точки $*$, из условий леммы вытекает, что множество $J = \{j \in \mathbb{N}\colon d(*, x_{ij}) < 1/2n\}$ бесконечно для некоторого $i > n$. Возьмём такое $j \in J$, что $j > i$, и такое $m \in M$, что $m > j$. Тогда $\mathbf{g} = (x_{nm} - *) + n(x_{ij} - *) \in F_n$. Кроме того, $\mathbf{g} \in U(d)$, потому что

$$d(*, x_{nm}) + n \cdot d(*, x_{ij}) < \frac{1}{2} + n\frac{1}{2n} = 1.$$

Следовательно, $\mathbf{g} \in F_n \cap U(d)$. $\square$

Лемма 8.2. *Пусть X — счётное пространство с единственной неизолированной точкой $*$. Предположим, что для любой последовательности $\{U_n\colon n \in \mathbb{N}_0\}$ открытых окрестностей точки $*$ найдётся открытая окрестность V точки $*$, пересечения которой с $U_n \setminus U_{n+1}$ конечны для всех $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда свободная топологическая группа $F(X)$ является индуктивным пределом своих подпространств $F_n(X)$.*

Доказательство. Каждая последовательность $\{U_n\colon n \in \mathbb{N}_0\}$ открытых окрестностей точки $*$ (считаем, что $U_0 = X$) определяет непрерывную псевдометрику ρ на X: шары $B_\rho(*, 1/2^n)$ — это множества U_n и $\rho(x,y) = \inf\{1/2^n\colon x, y \in U_n\}$ (таким образом, все попарные расстояния между точками из пересечения $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ равны нулю; прочие попарные расстояния ненулевые). Поэтому условие леммы можно переформулировать следующим образом: для любой непрерывной псевдометрики ρ на X существует такая окрестность V точки $*$, что псевдометрическое пространство $(V, \rho \restriction V)$ компактно (его фактор-пространство, полученное стягиванием в точку пересечения $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$, представляет собой сходящуюся последовательность). Отсюда вытекает, что для любой непрерывной псевдометрики ρ на X найдётся такая непрерывная метрика $d \geqslant \rho$ на X, что пространство (X, d) локально компактно. База открытых окрестностей единственной неизолированной точки $*$ в этой метрике выглядит так: пусть $\{x_i\colon i \in I\}$ — множество всех изолированных точек в пересечении $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$, занумерованное в произвольном порядке (индексное множество I может быть счётным, конечным или пустым множеством идущих подряд неотрицательных целых чисел начиная с нуля). Базу окрестностей точки $*$ в метрическом пространстве (X, d) образует семейство $\{V_n\colon n \in \mathbb{N}\}$, где $V_n = U_n \setminus \{x_i\colon i < n,\ i \in I\}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Помимо того, что пространство (X, d) локально компактно, оно ещё и σ-компактно, будучи счётным; значит, оно является k_ω-пространством, и $F(X, d)$ имеет топологию индуктивного предела [70]. Применение теоремы 8.1 завершает доказательство. □

Доказательство теоремы 8.2. Утверждение теоремы немедленно следует из доказанных лемм и предложения 8.1. □

Ниже мы рассматриваем фильтры на множестве неотрицательных целых чисел; мы используем для этого множества в такой роли обозначение ω, а не $\mathbb{N}_0$, чтобы не путать его с индексным множеством.

Каждому фильтру $\mathcal{F}$ на множестве ω соответствует пространство $\omega_\mathcal{F} = \omega \cup \{\mathcal{F}\}$: ω является его дискретным подпространством, а окрестности единственной неизолированной точки $\mathcal{F}$ — элементы фильтра. Всякое счётное пространство с единственной неизолированной точкой можно представить как $\omega_\mathcal{F}$ для некоторого фильтра $\mathcal{F}$ на ω. В терминах фильтров теорема 8.2 выглядит так.

Теорема 8.2′. *Пусть $\mathcal{F}$ — фильтр на множестве ω. Свободная топологическая группа $F(\omega_\mathcal{F})$ (свободная абелева топологическая группа $A(\omega_\mathcal{F})$) яв-*

ляется индуктивным пределом своих подпространств $F_n(\omega_\mathcal{F})$ (соответственно подпространств $A_n(\omega_\mathcal{F})$), если и только если для любой последовательности $\{M_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$ найдётся такой элемент фильтра $M \in \mathcal{F}$, что дополнения $M \setminus M_n$ конечны для всех n.

Фильтры, удовлетворяющие условию теоремы $8.2'$, называются P-фильтрами. Ультрафильтр $\mathcal{F}$ на ω является P-фильтром тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ — P-точка в $\beta\omega \setminus \omega$ (см. [92]), т. е. когда она содержится во внутренности пересечения произвольного счётного семейства своих открытых окрестностей. Таким образом, мы получаем следующее утверждение.

Следствие 8.1. *Пусть $\mathcal{F}$ — ультрафильтр на ω. Свободная топологическая группа $F(\omega_\mathcal{F})$ (свободная абелева топологическая группа $A(\omega_\mathcal{F})$) является индуктивным пределом своих подпространств $F_n(\omega_\mathcal{F})$ (соответственно своих подпространств $A_n(\omega_\mathcal{F})$), если и только если $\mathcal{F}$ является P-точкой в $\beta\omega \setminus \omega$.*

Следующий пример был любезно предоставлен автору В. Юстом.

Пример 8.1. Существует P-такой фильтр $\mathcal{F}$ на ω, что все компактные подмножества пространства $\omega_\mathcal{F}$ конечны.

Доказательство. Положим

$$\mathcal{F} = \left\{a \subseteq \omega \colon \sum_{n\in\omega\setminus a} \frac{1}{n+1} < \infty\right\}.$$

Рассмотрим произвольное бесконечное подмножество b в ω. Существует бесконечное $c \subseteq b$, для которого ряд $\sum\limits_{n\in c} \frac{1}{n+1}$ сходится. Имеем $a = \omega \setminus c \in \mathcal{F}$; поскольку $b \setminus a$ бесконечно, множество $b \cup \{\mathcal{F}\}$ (а значит, и b) не может быть компактно.

Покажем, что $\mathcal{F}$ является P-фильтром. Пусть $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ — убывающая последовательность элементов фильтра $\mathcal{F}$; тогда $\{b_n = \omega \setminus a_n : n \in \mathbb{N}\}$ — возрастающая последовательность подмножеств в ω, для которой $\sum\limits_{n\in b_n} \frac{1}{n+1} < \infty$. Для каждого n выберем такое множество $c_n \subseteq b_n$, что дополнение $b_n \setminus c_n$ конечно и $\sum\limits_{n\in c_n} \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Положим $c = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n$. Тогда $\sum\limits_{n\in c} \frac{1}{n+1} \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} < \infty$ и, значит, $a = \omega \setminus c \in \mathcal{F}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$a \setminus a_n = (\omega \setminus c) \setminus (\omega \setminus b_n) = b_n \setminus c \subseteq b_n \setminus c_n,$$

а это множество конечно. □

Замечание 8.1. Заметим, что пространство $X = \omega_\mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — фильтр из примера 8.1, обладает следующими свойствами:

а) $F(X)$ и $A(X)$ — индуктивные пределы семейств $\{F_n(X)\}$ и $\{A_n(X)\}$ соответственно;

б) X — счётное пространство с единственной неизолированной точкой;

в) все (псевдо)компактные подпространства пространства X конечны, так что X не является ни k-пространством, ни C_ω-пространством;

г) X неметризуемо.

Таким образом, X не удовлетворяет ни одному из известных достаточных условий того, что $F(X)$ $(A(X))$ — индуктивный предел семейства $\{F_n(X)\}$ $(\{A_n(X)\})$, включая условия, которые входят в критерии Ткаченко [39] (для класса псевдокомпактных пространств) и Пестова—Ямады [87] (для класса метризуемых пространств), так что пример 8.1 показывает, что ни одно из известных достаточных условий не является необходимым в классе тихоновских пространств.

Теорема 8.2 не только даёт этот пример, но и являет собой источник необходимых условий того, что свободная топологическая группа будет индуктивным пределом множеств слов ограниченной длины, которые получаются из следующего общего утверждения.

Следствие 8.2. *Если $\mathcal{F}$ — фильтр на ω, пространство X содержит $\omega_{\mathcal{F}}$ в качестве замкнутого P-вложенного подпространства и $\mathcal{F}$ не является P-фильтром, то $A(X)$ $(F(X))$ не является индуктивным пределом семейства $\{A_n(X)\}$ $(\{F_n(X)\})$.*

Доказательство. Ясно, что если F — замкнутое подмножество в $A(X)$ и $A(X)$ является индуктивным пределом семейства $\{A_n(X)\}$, то F будет индуктивным пределом семейства $\{F \cap A_n(X)\}$. По лемме 4 из [32] $A(\omega_{\mathcal{F}})$ является топологической подгруппой в $A(X)$; осталось воспользоваться тем фактом, что подгруппа, порождённая замкнутым подмножеством пространства X, замкнута в $A(X)$ [19]. $\square$

Конкретные примеры применения этого утверждения даны в конце раздела.

Ещё одно необходимое условие того, что свободная топологическая группа является индуктивным пределом множеств слов ограниченной длины, уже не сводится к критерию для счётных пространств с единственной неизолированной точкой.

Теорема 8.3 ([97]). *Пусть X — коллективно нормальное пространство и свободная абелева топологическая группа $A(X)$ (свободная топологическая группа $F(X)$) является индуктивным пределом своих подпространств $A_n(X)$ (соответственно $F_n(X)$). Тогда любое замкнутое дискретное подпространство в X, не содержащее P-точек, не более чем счётно.*

Основную роль в доказательстве этой теоремы играет следующая лемма.

Лемма 8.3. *Пусть X — тихоновское пространство, $Y = \{*_\alpha \colon \alpha \in \omega_1\}$ — подпространство в X и для каждого $\alpha \in \omega_1$ найдётся такое убывающее семейство $\{U_{\alpha,n} \colon n \in \mathbb{N}\}$ открыто-замкнутых окрестностей точки $*_\alpha$, что*

$$\operatorname{Int} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{\alpha,n} \not\ni *_\alpha, \quad U_{\alpha,0} \cap U_{\beta,0} = \varnothing \ \text{ для } \ \beta \neq \alpha$$

и

$$X = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} U_{\alpha,0}.$$

Тогда свободная абелева топологическая группа $A(X)$ не является индуктивным пределом своих подпространств $A_n(X)$.

Теорему 8.3 можно сформулировать слегка иначе.

Теорема 8.3′. *Пусть X — коллективно нормальное пространство и свободная абелева топологическая группа $A(X)$ (свободная топологическая группа $F(X)$) является индуктивным пределом своих подпространств $A_n(X)$ (соответственно $F_n(X)$). Тогда замыкание множества не P-точек в X имеет счётный экстент.*

Действительно, если в замыкании множества не P-точек найдётся замкнутое дискретное подмножество большой мощности, то, воспользовавшись коллективной нормальностью пространства X, мы сможем построить дискретное семейство открытых подмножеств X той же мощности, причём каждое из этих открытых множеств будет содержать не P-точки. Выбрав в каждом из них по не P-точке, мы получим замкнутое дискретное множество не P-точек в X.

Перейдём к обещанным конкретным примерам применения следствия 8.2. Начнём со следующего замечания.

Замечание 8.2. Рассмотрим пространства $D(\tau)$, $A(\tau)$, $V(\tau)$ и $J(\tau)$, определённые в разделе 6 на с. 163. Очевидно, фильтр окрестностей точки j_* в пространстве $J(\omega_0)$ не является P-фильтром, поэтому свободная группа $A(J(\omega_0))$ $(F(J(\omega_0)))$ не является индуктивным пределом семейства $\{A_n(J(\omega_0))\}$ $(\{F_n(J(\omega_0))\})$. Как заметили В. Г. Пестов и К. Ямада [87], из леммы 8.3 немедленно вытекает, что свободная абелева (а значит, и свободная) топологическая группа пространства $D(\omega_1)\times A(\omega_0)$ тоже не является индуктивным пределом соответствующих подпространств. Пестов и Ямада использовали это наблюдение (а также утверждение, касающееся ежа $J(\omega_0)$) для получения полного описания метризуемых пространств, для которых свободные и свободные абелевы топологические группы имеют топологию индуктивного предела. Любопытно, что описания получились разными из-за того, что свободная абелева топологическая группа $A(D(\omega_1)\oplus A(\omega_0))$ имеет топологию индуктивного предела, а свободная топологическая группа $F(D(\omega_1)\oplus A(\omega_0))$ — нет. Этот интересный и весьма нетривиальный факт также доказан в статье [87].

Поскольку в любом коллективно нормальном пространстве все замкнутые подмножества P-вложены [89], из общего следствия 8.2 вытекает, например, следующее утверждение.

Следствие 8.3. *Если X — коллективно нормальное пространство, содержащее метрического ежа бесконечной колючести в качестве замкнутого подпространства, то $A(X)$ (и $F(X)$) не является индуктивным пределом семейства $\{A_n(X)\}$ $(\{F_n(X)\})$.*

Следующее утверждение было фактически доказано в статье [52] при доказательстве предложения 2.11.

Лемма 8.4. *Всякое не локально счётно компактное пространство с первой аксиомой счётности содержит $J(\omega_0)$ в качестве замкнутого подпространства.*

Напомним, что подмножество Y топологического пространства X $\aleph_0$-ограничено в X, если для любого дискретного семейства $\mathcal{U}$ открытых подмножеств в X семейство $\{U \in \mathcal{U} \colon U \cap Y \neq \varnothing\}$ не более чем счётно.

Следствие 8.4. *Если X — коллективно нормальное пространство с первой аксиомой счётности и свободная абелева топологическая группа $A(X)$ является индуктивным пределом своих подпространств $A_n(X)$ (или $F(X)$ является индуктивным пределом своих подпространств $F_n(X)$), то X локально счётно компактно и множество X' неизолированных точек $\aleph_0$-ограничено в X и, следовательно, имеет счётный экстент.*

Доказательство. Локальная счётная компактность X вытекает из леммы 8.4. Очевидно, если X' не $\aleph_0$-ограничено, то X содержит пространство $D(\omega_1) \times A(\omega_0)$ в качестве замкнутого подпространства, а это невозможно согласно замечанию 8.2. Значит, X' $\aleph_0$-ограничено. Из коллективной нормальности пространства X и замкнутости X' в X вытекает, что $e(X') \leqslant \aleph_0$. $\square$

Следствие 8.5. *Если X — коллективно нормальное пространство с первой аксиомой счётности и свободная топологическая группа $F(X)$ является индуктивным пределом своих подпространств $F_n(X)$, то X локально счётно компактно и либо дискретно, либо имеет счётный экстент.*

Доказательство. Локальная счётная компактность пространства X доказывается так же, как при доказательстве предыдущего следствия. Осталось заметить, что если $e(X) > \aleph_0$ и в X есть хоть одна неизолированная точка, то X содержит $D(\omega_1) \oplus A(\omega_0)$ в качестве замкнутого подпространства, и применить результат Пестова и Ямады, цитированный в замечании 8.2. $\square$

Полученные выше условия факторности отображений умножения $\mathbf{i}_n$ на слова ограниченной длины и того, что свободная топологическая группа имеет топологию индуктивного предела, очень похожи (ср., например, следствие 6.2 со следствием 8.4 или следствие 6.3 с теоремой 8). Это не случайно.

Согласно утверждению 5.1 оба свойства вытекают из факторности отображения умножения $\mathbf{i}$ на всю группу $F(X)$. Оказывается, для метризуемых пространств факторность отображения $\mathbf{i}$ эквивалентна тому, что $F(X)$ является индуктивным пределом своих подпространств $F_n(X)$. Это вытекает из критерия А. В. Архангельского, О. Г. Окунева и В. Г. Пестова (он будет процитирован чуть ниже) и следующего утверждения, фактически доказанного в [7, § 5].

Теорема 8.4. *Пусть X — μ-пространство*[10]. *Тогда*

а) *если $n \in N$ и $F_n(X)$ является k-пространством, то отображение $\mathbf{i}_n$ факторно;*

б) *если $F(X)$ является k-пространством, то отображение $\mathbf{i}$ факторно.*

[10] Пространство X называется μ-пространством, если замыкание всякого ограниченного подмножества в X компактно; все полные по Дьёдонне (тем более метризуемые) пространства являются μ-пространствами.

Отметим, что для недискретного паракомпактного пространства X с первой аксиомой счётности свободная топологическая группа $F(X)$ является k-пространством в том и только том случае, если X локально компактно и σ-компактно [24].

Вышеупомянутый критерий А. В. Архангельского, О. Г. Окунева и В. Г. Пестова состоит в следующем.

Теорема 8.5 ([52]). *Для метризуемого пространства X следующие условия эквивалентны:*

а) *свободная топологическая группа $F(X)$ является k-пространством;*
б) *$F(X)$ либо является k_ω-пространством, либо дискретна;*
в) *пространство X локально компактно и либо сепарабельно, либо дискретно.*

Из утверждения 5.1, следствия 8.5 и теорем 8.4 и 8.5 немедленно получается следующий результат.

Теорема 8.6. *Если X — метризуемое пространство, то естественное отображение умножения*

$$\mathbf{i}\colon \sigma_\square \tilde{X}^{\mathbb{N}} \to F(X)$$

факторно тогда и только тогда, когда $F(X)$ является индуктивным пределом своих подпространств $F_n(X)$.

В общем случае из того, что $F(X)$ является индуктивным пределом своих подпространств $F_n(X)$, не следует даже факторность отображения $\mathbf{i}_2$. Действительно, нетрудно понять, что если X является P-пространством, то $F(X)$ тоже является P-пространством [20, лемма 5.6] и, следовательно, представляет собой индуктивный предел своих подпространств $F_n(X)$ [39, теорема 8б)]. Значит, если X — ненормальное P-пространство, то $F(X)$ имеет топологию индуктивного предела, однако отображение $\mathbf{i}_2$ не может быть факторным по теореме Пестова [22]. Пример ненормального P-пространства можно найти в [107, p. 179].

9. Свободные топологические группы и число Суслина

Знание строения топологии свободной группы (и даже не всей свободной группы, а её специальных подмножеств, таких как $F_n(X)$) оказывается чрезвычайно полезным при исследовании числа Суслина свободных топологических групп.

М. Г. Ткаченко [33] обнаружил замечательный факт: число Суслина свободной топологической группы произвольного компакта счётно. Для доказательства этой теоремы Ткаченко пришлось понять, как выглядят окрестности точек в $F_n(X)$ для компактных X и применить чисто комбинаторные соображения. Доказательство теоремы представляет собой образец изящества: оно весьма нетривиально, но выглядит простым (этим достоинством как комбинаторные рассуждения, так и рассуждения, связанные со строением топологии свободных групп, обладают очень редко); ниже мы приводим идею его доказательства. Из теоремы Ткаченко немедленно вытекает, что если топологическая группа G содержит всюду плотное σ-компактное подпространство, то G обладает свойством Суслина (т. е. счётным числом Суслина). Действительно, всякая топологическая группа G является фактор-группой своей свободной группы $F(G)$, свойство Суслина (счётность числа Суслина) сохраняется счётными объединениями и число Суслина всюду плотного подпространства топологического пространства равно числу Суслина этого пространства. Теорема Ткаченко была значительно обобщена В. В. Успенским [40] (Ткаченко доказал свою теорему раньше Успенского, но процесс её публикации занял больше времени, так что в печати она появилась позже): если в топологической группе G есть всюду плотное подпространство, которое можно представить как всюду плотное подпространство топологического произведения линделёфовых пространств, то число Суслина пространства G счётно. В частности, если X всюду плотно в произведении линделёфовых пространств, то $c(F(X)) \leqslant \aleph_0$. Д. Б. Шахматов [49] показал, что в теореме Ткаченко утверждение о счётности числа Суслина нельзя усилить; а именно, он доказал, что с аксиомами ZFC теории множеств совместимо существование такого компакта X, что кардинал $\aleph_1$ не является прекалибром свободной топологической группы $F(X)$. «Наивно» это утверждение доказать нельзя: в аксиоме Мартина при отрицании континуум-гипотезы все пространства со свойством Суслина имеют прекалибр $\aleph_1$. Шахматов получил свой результат с использованием метода форсинга. Компакт X в теореме Шахматова — это одноточечная компактификация дискретного пространства мощности ω_1, и Шахматов доказывает, что $\aleph_1$ не является прекалибром свободной абелевой группы $A(X)$ (а значит, и свободной группы $F(X)$). Топология свободной абелевой группы пространства X устроена просто, так что, хотя Шахматову и пришлось использовать её явное описание, основная сложность его доказательства заключается в применении форсинга.

Разумеется, число Суслина интересно не только когда оно счётно. В. В. Успенский доказал, что число Суслина линделёфовой группы (и даже линделёфова пространства Мальцева; определение пространств Мальцева дано ниже) не превосходит мощности континуума, и предположил, что эту оценку можно улучшить до $\aleph_1$ [40]. Намного позже, в совместной работе [62] П. Гартсайда, Е. А. Резниченко и О. В. Сипачёвой, был построен пример пространства, свободная группа которого линделёфова и имеет число Суслина, равное мощности континуума. В этой работе получены также дальнейшие результаты о числе Суслина свободных групп.

Мы начнём с изложения основных идей доказательства теоремы Ткаченко, а потом обсудим некоторые результаты из [62].

Теорема 9.1 (М. Г. Ткаченко [33]). *Если X — компакт, то свободная топологическая группа $F(X)$ обладает свойством Суслина.*

В доказательстве этой теоремы используются три комбинаторные леммы.

Первые две (хотя и интересны сами по себе) носят вспомогательный характер, а третья лемма — основная (она сформулирована ниже). Пусть n — некоторое натуральное число, A — множество и τ — несчётный регулярный кардинал. Пусть $\{(x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha, \gamma_\alpha)\colon \alpha < \tau\}$ — семейство упорядоченных наборов, где $x^i_\alpha \in A$ при $i \leqslant n$ и γ_α — конечное разбиение множества A для каждого $\alpha < \tau$.

Лемма 9.1 ([33]). *Существует такое подмножество $T \subseteq \tau$ мощности τ, что*

$$\mathrm{St}_{\gamma_\beta} x^i_\alpha \cap \mathrm{St}_{\gamma_\alpha} x^i_\beta \neq \varnothing$$

для каждого $i \leqslant n$ и любых различных $\alpha, \beta \in T$.

Помимо трёх комбинаторных лемм, Ткаченко использует ещё одну — четвёртую — лемму, в которой по существу описана топология $F_n(X)$. В этой лемме используются обозначения $Y = X \oplus X^{-1}$ и $\bar{\mathbf{i}}_m = \mathbf{i}_m \restriction Y^m$.

Лемма 9.2 ([33]). *Пусть $\mathbf{g} = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$, $m = 3n$, $F = \bar{\mathbf{i}}_m^{-1}(\mathbf{g})$ и V — открытое в Y^m множество, содержащее F. Тогда существуют открытые в X множества $U_i \ni x_i$ $(i \leqslant n)$ и конечное открытое покрытие γ компакта X, для которых*

$$V^1 = U_1^{\varepsilon_1} \times G_\gamma \times U_2^{\varepsilon_2} \times G_\gamma \times \dots \times U_n^{\varepsilon_n} \times G_\gamma \subseteq V \tag{5}$$

и

$$V^2 = G_\gamma \times U_1^{\varepsilon_1} \times G_\gamma \times U_2^{\varepsilon_2} \times \dots \times G_\gamma \times U_n^{\varepsilon_n} \subseteq V, \tag{6}$$

где

$$G_\gamma = \bigcup \{U^\varepsilon \times U^{-\varepsilon}\colon U \in \gamma,\ \varepsilon = \pm 1\} \subseteq Y^2.$$

С помощью этих двух лемм теорема доказывается так. Пусть τ — несчётный регулярный кардинал и $\{O_\alpha\colon \alpha < \tau\}$ — семейство непустых открытых в $F(X)$ множеств. Для каждого $\alpha < \tau$ выберем точку $\mathbf{g}_\alpha \in O_\alpha$ и через l_α обозначим длину слова $\mathbf{g}_\alpha$. Без ограничения общности можно считать, что $|l_\alpha| = |l_\beta| = n$ для любых различных $\alpha, \beta < \tau$ и

$$\mathbf{g}_\alpha = x_\alpha^{\varepsilon_1} y_\alpha^{\varepsilon_2} \dots z_\alpha^{\varepsilon_n},$$

где $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha \in X$ и $\varepsilon_i = \pm 1$ для каждого $i \leqslant n$. В частности, набор $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — один и тот же для всех слов $\mathbf{g}_\alpha$.

Пусть $m = 3n$. Для каждого $\alpha < \tau$ положим $\tilde{O}_\alpha = O_\alpha \cap F_m(X)$. Тогда $\{\tilde{O}_\alpha\colon \alpha < \tau\}$ — семейство непустых открытых в $F_m(X)$ множеств и $\mathbf{g}_\alpha \in \tilde{O}_\alpha$ для любого $\alpha < \tau$. Ввиду непрерывности отображения $\bar{\mathbf{i}}_m$ все множества $V_\alpha = \bar{\mathbf{i}}_m^{-1} \tilde{O}_\alpha$ открыты в Y_m.

Пользуясь леммой 9.2, для каждого $\alpha < \tau$ зафиксируем открытые в X множества $U^1_\alpha \ni x_\alpha$, $U^2_\alpha \ni y_\alpha, \dots,$ $U^n_\alpha \ni z_\alpha$ и конечное открытое покрытие γ_α компакта X так, чтобы соответствующие этому набору два открытых в Y^m множества V^1_α и V^2_α содержались в $V_\alpha = \bar{\mathbf{i}}_m^{-1}(\tilde{O}_\alpha)$ (см. (5) и (6)).

Поскольку всякий компакт является непрерывным образом стоун-чеховского расширения дискретного пространства, а свойство Суслина сохраняется при непрерывных отображениях, можно считать, что $X = \beta A$, где A — дискретное пространство.

В любое открытое покрытие компакта βA можно вписать открытое покрытие вида $\{A_1^*, A_2^*, \ldots, A_p^*\}$, где $A = \bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i < j \leqslant p$ и A_i^* — замыкание A_i в βA для $i \leqslant p$. Без потери общности можно считать, что для каждого $\alpha < \tau$ $(U_\alpha^1, \ldots, U_\alpha^n) = (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$, где $x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n \in A$, а покрытие γ_α компакта $X = \beta A$ имеет описанный выше вид.

Применяя лемму 9.1 к семейству $\{(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n, \gamma_\alpha) \colon \alpha < \tau\}$, заключаем, что существует такое подмножество $T \subseteq \tau$ мощности τ, что $\mathrm{St}_{\gamma_\beta} x_\alpha^i \cap \mathrm{St}_{\gamma_\alpha} x_\beta^i \neq \varnothing$ для каждого $i \leqslant n$ и любых различных $\alpha, \beta \in T$. Как несложно убедиться, отсюда вытекает, что $V_\alpha^1 \cap V_\beta^2 \neq \varnothing$ для различных $\alpha, \beta \in T$. Тем более $V_\alpha \cap V_\beta \neq \varnothing$ для различных $\alpha, \beta \in T$. Поскольку $V_\alpha = \bar{\mathbf{i}}_m^{-1}(\tilde{O}_\alpha)$ для каждого $\alpha < \tau$, заключаем, что $\tilde{O}_\alpha \cap \tilde{O}_\beta \neq \varnothing$ и потому $O_\alpha \cap O_\beta \neq \varnothing$ для любых различных $\alpha, \beta \in T$. Теорема доказана.

Как уже отмечалось, В. В. Успенский значительно обобщил теорему Ткаченко в [40]. Там же он доказал, что число Суслина линделёфовой группы не превосходит $2^{\aleph_0}$. В [42] Успенский получил дальнейшие результаты о числе Суслина линделёфовых групп, а именно доказал, что число Суслина линделёфовой группы при некоторых дополнительных условиях не превосходит $\aleph_1$[11]. Долгое время оставался открытым следующий вопрос [40, 56, 57]: верно ли, что число Суслина линделёфовой группы не превосходит $\aleph_1$? Чтобы ответить на этот вопрос, достаточно построить «наивный» пример линделёфовой группы, число Суслина которой равно континууму.

Пусть X — пространство типа прямой Майкла (а именно, обычный отрезок прямой, в котором все точки из некоторого подмножества объявлены изолированными), обладающее тем свойством, что все конечные степени X^n линделёфовы, но число Суслина X (т. е. мощность множества изолированных точек) равно континууму; существование такого пространства доказано в [84]. В соответствии с замечанием 7.1 из седьмого раздела свободная топологическая группа $F(X)$ линделёфова. Однако её число Суслина равно континууму в силу следующей теоремы (в [62] это утверждение доказано другими методами).

Предложение 9.1 (см. [62]). *Пусть $\mathcal{F}$ — семейство непустых открытых подмножеств пространства X. Предположим, что существует такая непрерывная метрика d на X, что каждое $F \in \mathcal{F}$ замкнуто относительно d. Тогда $c(F(X)) \geqslant c(A(X)) \geqslant |\mathcal{F}|$.*

Доказательство. Пусть $\{N_i \colon i \in \omega\}$ — такое разбиение множества ω, что $|N_i| = \omega$ для всех $i \in \omega$. Для $F \in \mathcal{F}$, $x \in X \setminus F$ и $m \in \omega$ положим

$$n(F, x, m) = \min\{i \in N_m \colon 8 \cdot 2^{-i} < d(x, F)\}.$$

Рассмотрим

$$\gamma_m(F) = \{F\} \cup \{B(x, 2^{-n(F,x,m)}) \colon x \in X \setminus F\},$$

[11] На самом деле результаты, полученные в [40,42] относятся не только к топологическим группам, но и к более широкому классу мальцевских пространств; эти пространства рассматриваются ниже.

где $B(x,\varepsilon)=\{y\in X\colon d(x,y)<\varepsilon\}$ для $\varepsilon>0$. Семейство $\gamma_m(F)$ образует открытое покрытие пространства X. Положим

$$U(F)=\bigcup_{k\in\omega}\biggl\{\sum_{i=0}^{k}(x_i-y_i)\in A(X)\colon x_i,y_i\in U_i \text{ для некоторого } U_i\in\gamma_i(F)\biggr\}.$$

Множество $U(F)$ является открытой окрестностью нуля в свободной абелевой топологической группе $A(X)$ (см. раздел 1.9).

Для того чтобы доказать требуемое утверждение, достаточно показать, что $(F+U(F))\cap(G+U(G))=\varnothing$ для разных $F,G\in\mathcal{F}$. Предположим противное. Тогда существуют $n\in\omega$, $x_*\in F$, $x_i,y_i\in U_i\in\gamma_i(F)$, $u_*\in G$ и $u_i,v_i\in V_i\in\gamma_i(G)$ $(i\leqslant n)$, для которых

$$x_*+\sum_{i=0}^{n}(x_i-y_i)=u_*+\sum_{j=0}^{n}(u_j-v_j).$$

Найдутся $s\leqslant n$, $\{i_0,\dots,i_s\}\subseteq\{0,\dots,n\}$ и $\{j_0,\dots,j_s\}\subseteq\{0,\dots,n\}$, для которых

$$V_{j_0}\cap F\ne\varnothing,\quad U_{i_s}\cap G\ne\varnothing\quad\text{и}\quad V_{j_t}\cap U_{i_t}\ne\varnothing$$

при всех $t\leqslant s$, и если $t_1,t_2\leqslant s$ различны, то $i_{t_1}\ne i_{t_2}$ и $j_{t_1}\ne j_{t_2}$. Для каждого $t\leqslant s$ зафиксируем $z_{2t}\in X\setminus G$, $z_{2t+1}\in X\setminus F$ и такие неотрицательные целые числа $l(2t)$ и $l(2t+1)$, что

$$l(2t)=n(G,z_{2t},j_t),\quad V_{j_t}=B(z_{2t},2^{-l(2t)}),$$
$$l(2t+1)=n(F,z_{2t+1},i_t)\quad\text{и}\quad V_{i_t}=B(z_{2t+1},2^{-l(2t+1)}).$$

Заметим, что $|\{p\leqslant 2s+1\colon l(z_p)=n\}|\leqslant 2$ для любого $n\in\omega$. Имеем также

$$F\cap B(z_0,2^{-l(z_0)})\ne\varnothing,\quad B(z_{2s+1},2^{-l(z_{2s+1})})\cap G\ne\varnothing\quad\text{и}$$
$$B(z_r,2^{-l(z_r)})\cap B(z_{r+1},2^{-l(z_{r+1})})\ne\varnothing$$

для $r<2s+1$. Выберем такое $m\leqslant 2s+1$, что z_m — точка минимума функции $p\mapsto l(p)$.

Предположим, что m нечётно. Тогда $z_m\notin F$ и

$$d(z_m,F)\leqslant 2\sum_{p=0}^{2s}2^{-l(z_p)}\leqslant 8\cdot 2^{-l(z_m)}=8\cdot 2^{-n(F,z_m,i_*)},$$

где $i_*=i_{(m-1)/2}$, что противоречит определению числа $n(F,z_m,i_*)$. Чётное m рассматривается аналогично. □

Для того чтобы двигаться дальше, нам понадобится понятие мальцевского пространства, т. е. тихоновского топологического пространства с непрерывной операцией Мальцева. Операция Мальцева была введена А. И. Мальцевым в [16]; она определяется на произвольном множестве X как отображение $f\colon X^3\to X$, обладающее тем свойством, что для любых x и y из X

$$f(x,y,y)=f(y,y,x)=x.$$

Легко видеть, что любая отделимая топологическая группа G является мальцевским пространством: достаточно положить $f(x, y, z) = x \cdot y^{-1} \cdot z$ для $x, y, z \in X$. Впервые пространства Мальцева были рассмотрены В. В. Успенским в [40] — выяснилось, что для этих пространств оказываются верными многие утверждения о числе Суслина топологических групп. Впоследствии Успенский показал, что пространства Мальцева похожи на топологические группы и в некоторых других отношениях (см. [40, 42, 106]).

Помимо топологических групп класс пространств Мальцева включает все их ретракты. В самом деле, если $r\colon G \to X$ — ретракция топологической группы G на пространство X, то операцию Мальцева f на X можно определить как $f(x, y, z) = r(x \cdot y^{-1} \cdot z)$ для всех $x, y, z \in X$. Более того, оказалось, что для некоторых классов пространств наличие непрерывной операции Мальцева эквивалентно свойству быть ретрактом группы. Первый результат такого сорта был получен О. В. Сипачёвой [27] для компактных (и даже счётно компактных) пространств. Впоследствии Е. А. Резниченко и В. В. Успенский [91] обобщили его на псевдокомпактные пространства. Однако основной вопрос — всякое ли пространство Мальцева является ретрактом группы — долго оставался без ответа.

Всякий ретракт группы является ретрактом своей свободной топологической группы. В самом деле, пусть X — ретракт топологической группы G. Тождественное вложение $X \to G$ продолжается до непрерывного гомоморфизма $F(X) \to G$. Ясно, что композиция этого гомоморфизма с ретракцией $G \to X$ — ретракция. Таким образом, сформулированный выше вопрос можно поставить иначе: верно ли, что всякое пространство Мальцева является ретрактом своей свободной топологической группы?

Главный результат работы [62] — отрицательный ответ на этот вопрос. Основная идея заключается в том, что если пространство X имеет несчётное число Суслина, а число Суслина его свободной группы $F(X)$ счётно, то X не может быть ретрактом (и вообще непрерывным образом) группы $F(X)$. Поэтому исследования работы [62] связаны главным образом с числом Суслина свободной группы. В работе строится также теория мальцевских пространств специального вида (которые названы 2-мальцевскими пространствами), которая даёт множество примеров пространств Мальцева. Так, например, все пространства, на которых имеется более слабая метризуемая $\dim$-нульмерная топология (и даже все пространства, на которых есть более слабая неархимедова топология), оказываются мальцевскими. Если при этом потребовать, чтобы исходная топология пространства обладала базой, состоящей из множеств, замкнутых в этой более слабой топологии, то пространство оказывается ретрактом топологической группы. В частности, стрелка Зоргенфрея, прямая Майкла, прямая Суслина и многие другие хорошо известные пространства являются ретрактами групп, хотя они сильно отличаются от групп по своим свойствам.

Как уже отмечалось, для получения мальцевского пространства, не являющегося ретрактом группы, достаточно построить мальцевское пространство с несчётным числом Суслина, свободная группа которого имеет счётное число Суслина. Для этой цели используется следующее утверждение.

Теорема 9.2 ([62]). *Скажем, что X обладает свойством* (A), *если для любого несчётного семейства $\mathcal{O}$ открытых подмножеств X найдутся несчётное семейство $\mathcal{O}_* \subset \mathcal{O}$ и точка из X, любая окрестность которой пересекается со всеми элементами семейства O_* кроме, возможно, конечного их числа.*

Пусть X — пространство со свойством (A). *Тогда*

а) *любой непрерывный образ пространства X обладает свойством* (A);
б) *если Y обладает свойством* (A), *то $X \times Y$ тоже обладает свойством* (A);
в) *если $Y = \bigcup\{X_i\colon i < \omega\}$ и X_i обладает свойством* (A) *для каждого $i < \omega$, то Y обладает свойством* (A);
г) *$F(X)$ обладает свойством* (A);
д) *если X является топологической группой, то $c(X) \leqslant \omega$;*
е) *$c(F(X)) \leqslant \omega$.*

В доказательстве этой теоремы используется явное описание топологии группы $F(X)$, точнее, «мальцевской оболочки» $M(X) = \{xy^{-1}z \in F(X)\colon x, y, z \in X\}$ пространства X в этой группе (это то же самое, что $\mathbf{i}_3(X^{(1,-1,1)})$ в терминологии седьмого раздела). С топологией пространства $M(X)$ значительно удобнее иметь дело, чем с топологией группы $F(X)$: базу точки $x \in X$ в этой топологии образуют множества вида $W(O, U) = \mathbf{i}_3((O \times U) \cup (U \times O))$, где O — открытая окрестность точки x в X и $U \subseteq X^2$ — элемент универсальной равномерности пространства X. Ясно, что если X — ретракт топологической группы, то X — ретракт $M(X)$, и если X — ретракт пространства Y, то число Суслина X равно относительному числу Суслина $c(X, Y)$ пространства X в Y (т. е. наименьшей верхней грани мощностей дизъюнктных семейств открытых подмножеств Y, каждое из которых пересекается с X). Поэтому если X — ретракт группы, то должно выполняться равенство $c(X) = c(X, M(X))$. С другой стороны, условие $c(X, M(X)) \leqslant \aleph_0$ равносильно следующему свойству пространства X:

для произвольных семейств $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}$ непустых открытых подмножеств и $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}$ открытых нормальных покрытий пространства X найдутся различные $\alpha, \beta \in \omega_1$, для которых $\operatorname{st}_{\gamma_\beta} O_\alpha \cap \operatorname{st}_{\gamma_\alpha} O_\beta \neq \varnothing$. (TG)

Следствие 9.1. *Ретракт топологической группы обладает свойством Суслина, если и только если он имеет свойство* (TG).

10. Конструктивный метод топологизации свободных групп

В этом разделе предлагается общий метод топологизации свободных групп, который позволяет строить в явном виде разные групповые топологии на свободной группе: как свободную, так и несвободные (более слабые). Топологизации свободных групп рассматривались многими авторами. Ещё Граев [11] строил инвариантную (граевскую) топологию, которая определялась граевскими продолжениями псевдометрик (см. раздел 1.6). М. Г. Ткаченко [34, 35] предложил более тонкую конструкцию продолжения псевдометрик, которая даёт ρ-топологию, обладающую рядом интересных свойств (см. раздел 1.5). Рассматривались равномерные аналоги свободных топологических групп [22, 80, 81], топологические группы, являющиеся свободными объектами в многообразиях групп [73—75, 77, 88], и свободные топологические группы относительно классов (см. [57]). С. А. Моррис [76] определил и изучил свободную компактную абелеву группу $F_c(X)$ тихоновского пространства X (это компактная абелева группа, которая содержит X в качестве подпространства, причём алгебраическая оболочка X в $F_c(X)$ плотна в $F_c(X)$ и представляет собой свободную абелеву группу множества X); см. также [57, 64, 65]. Фактически главную роль в доказательстве того, что для каждой связной компактной абелевой группы G фундаментальная группа $\pi_1(G)$ изоморфна группе $\mathrm{Hom}(\hat{G}, \mathbb{Z})$ гомеоморфизмов группы характеров $\hat{G}$ в группу $\mathbb{Z}$ (см. [59]), играют именно свободные абелевы компактные группы. Д. Б. Шахматов рассмотрел свободные (абелевы и неабелевы) предкомпактные группы, которые тесно связаны со свободными компактными группами, и получил ряд интересных результатов о нульмерных предкомпактных группах [96]. Наконец, в работах разных авторов на разные темы встречаются свободные булевы группы. Элементы свободной булевой группы $B(X)$ — формальные линейные комбинации элементов порождающего пространства X над полем $\{0, 1\}$; таким образом, это просто конечные подмножества множества X (с операцией симметрической разности). На $B(X)$ чаще всего рассматривается топология, в которой единица обладает базой из подгрупп (группа $B(x)$ с этой топологией является свободной в многообразии булевых топологических групп с этим свойством). Так устроена, например, счётная неметризуемая группа Фреше—Урысона, построенная П. Никошем [82] (этот во многих отношениях замечательный, хотя и не «наивный», пример использовался и модифицировался разными авторами). Топологии, которые даёт предлагаемый здесь подход, включают в себя все указанные выше топологии свободных групп (в частности, те, в которых единица имеет базу, состоящую из подгрупп; хотя формально мы и не рассматриваем булевы группы, конструкцию можно применить и к ним) и позволяет рассматривать их с одной точки зрения. Кроме того, с её помощью можно вкладывать пространства в группы с определёнными свойствами.

Начнём с обозначений.

Пусть X — множество, $k, n \in \mathbb{N}$ и γ — семейство подмножеств в X^n. Для $\mathbf{x} \in X^k$ мы полагаем

$$\mathbf{x} \times \gamma = \{\{\mathbf{x}\} \times U \subseteq X^{k+n} \colon U \in \gamma\};$$

если γ — покрытие, то семейство $\mathbf{x} \times \gamma$ представляет собой покрытие множества $\{\mathbf{x}\} \times X^n \subseteq X^{k+n}$. Аналогично,

$$\gamma \times \mathbf{x} = \{U \times \{\mathbf{x}\} \subseteq X^{n+k} \colon U \in \gamma\}.$$

Для $A \subseteq X^n$ мы пишем
$$\gamma \upharpoonright A = \{U \cap A \colon U \in \gamma\}.$$
Если $k < n$ и $\mathbf{x} \in X^k$, то
$$\mathbf{x}\|\gamma = \pi_{X^{n-k}}(\gamma \upharpoonright \{\mathbf{x}\} \times X^{n-k}) = \{\pi_{X^{n-k}}(U \cap \{\mathbf{x}\} \times X^{n-k}) \colon U \in \gamma\}$$
(здесь $\pi_{X^{n-k}} \colon X^n \to X^{n-k}$ — проектирование на последние $n-k$ координат) и
$$\gamma\|\mathbf{x} = \pi_{X^{n-k}}(\gamma \upharpoonright X^{n-k} \times \{\mathbf{x}\}) = \{\pi_{X^{n-k}}(U \cap X^{n-k} \times \{\mathbf{x}\}) \colon U \in \gamma\}$$
(здесь $\pi_{X^{n-k}} \colon X^n \to X^{n-k}$ — проектирование на первые $n-k$ координат). Таким образом, $\mathbf{x}\|(\mathbf{x}\times\gamma) = (\gamma\times\mathbf{x})\|\mathbf{x} = \gamma$, и если γ — покрытие множества X^n, то $\mathbf{x}\|\gamma$ и $\gamma\|\mathbf{x}$ — покрытия множества X^{n-k}.

Напомним, что если γ и γ' — два семейства подмножеств одного и того же множества, то
$$\gamma \wedge \gamma' = \{A \cap B \colon A \in \gamma,\ B \in \gamma',\ A \cap B \neq \varnothing\} -$$
максимальное семейство, вписанное в γ и γ' одновременно.

Пусть X — множество, X^{-1} — его дизъюнктная копия, γ_n — покрытие множества $(X \cup X^{-1})^n$ для каждого натурального n и $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_n\}$. Для $n \in \mathbb{N}$ положим
$$\begin{aligned} U_n(\boldsymbol{\gamma}) = \{&y_n^{-1}\dots y_1^{-1}x_1\dots x_n \colon \\ &(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \in U \text{ для некоторого } U \in \gamma_n\}, \end{aligned} \tag{7}$$
$$\tilde{U}_n(\boldsymbol{\gamma}) = \bigcup\{U_{\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot U_{\sigma(n)} \colon \sigma \in S_n\} \tag{8}$$
и
$$U(\boldsymbol{\gamma}) = \bigcup\{\tilde{U}_n(\boldsymbol{\gamma}) \colon n \in \mathbb{N}\}. \tag{9}$$

Теорема 10.1. *Пусть X — произвольное множество и Γ — семейство последовательностей $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ покрытий множеств $(X \cup X^{-1})^n$ (γ_n — покрытие $(X \cup X^{-1})^n$) со следующими свойствами:*

(i) *если $\boldsymbol{\gamma}' = \{\gamma'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$ и $\boldsymbol{\gamma}'' = \{\gamma''_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$, то найдётся такая последовательность $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$, что $\gamma_n \succ \gamma'_n \wedge \gamma''_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$;*

(ii) *для любой последовательности $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$ найдётся такая точка $(p_1, p_2, \dots) \in (X \cup X^{-1})^{\mathbb{N}}$, что если*
$$\gamma'_n = (p_1, p_2, \dots, p_n)\|\gamma_{2n} \wedge (p_2, p_3, \dots, p_n)\|\gamma_{2n-1}$$
для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\boldsymbol{\gamma}' = \{\gamma'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$;

(iii) *если $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} \in (X \cup X^{-1})^k$ и*
$$\gamma'_n = \mathbf{x}\|\gamma_{n+k}$$
для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\boldsymbol{\gamma}' = \{\gamma'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$;

(iv) *если $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} \in (X \cup X^{-1})^k$ и*
$$\gamma'_n = \gamma_{n+k}\|\mathbf{x}$$
для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\boldsymbol{\gamma}' = \{\gamma'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$.

Тогда семейство

$$\mathcal{U} = \{U(\boldsymbol{\gamma})\colon \boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ \gamma_n \in \Gamma_n \text{ для } n \in \mathbb{N}\}$$

является базой в единице некоторой групповой топологии $\mathcal{T}_\Gamma$ на свободной группе $F(X)$, порождённой множеством X.

Доказательство. Нам нужно показать, что семейство $\mathcal{U}$ удовлетворяет следующим условиям [45]:

1) для всех $U \in \mathcal{U}$ $\mathbf{e} \in U$;
2) для любого $U \in \mathcal{U}$ существует такое $V \in \mathcal{U}$, что $V^2 \subseteq U$;
3) для любого $U \in \mathcal{U}$ существует такое $V \in \mathcal{U}$, что $V^{-1} \subseteq U$;
4) для любых $U \in \mathcal{U}$ и $\mathbf{g} \in U$ существует такое $V \in \mathcal{U}$, что $V\mathbf{g} \subseteq U$;
5) для любых $U \in \mathcal{U}$ и $\mathbf{g} \in F(X)$ существует такое $V \in \mathcal{U}$, что $\mathbf{g}^{-1}V\mathbf{g} \subseteq U$;
6) для любых $U, V \in \mathcal{U}$ существует такое $W \in \mathcal{U}$, что $W \subseteq U \cap V$.

Выполнение условия 1) очевидно; 6) вытекает из условия (i) теоремы. Покажем, что $\mathcal{U}$ удовлетворяет условию 2).

Пусть $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$. Зафиксируем точку $(p_1, p_2, \ldots) \in (X \cup X^{-1})^{\mathbb{N}}$ из условия (ii). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\gamma'_n = (p_1, p_2, \ldots, p_n)\|\gamma_{2n} \wedge (p_2, p_3, \ldots, p_n)\|\gamma_{2n-1}.$$

Согласно условию (ii) теоремы $\boldsymbol{\gamma}' = \{\gamma'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$. Покажем, что $U(\boldsymbol{\gamma}') \subseteq U(\boldsymbol{\gamma})$.

Возьмём $n \in \mathbb{N}$. Любой элемент множества $U_n(\boldsymbol{\gamma}')$ представляется в виде

$$\begin{aligned} y_n^{-1} \ldots y_1^{-1} x_1 \ldots x_n = y_n^{-1} \ldots y_1^{-1} p_n^{-1} \ldots p_1^{-1} p_1 \ldots p_n x_1 \ldots x_n = \\ = y_n^{-1} \ldots y_1^{-1} p_n^{-1} \ldots p_2^{-1} p_2 \ldots p_n x_1 \ldots x_n, \end{aligned}$$

где $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in W$ для некоторого $W \in \gamma'_n$. По определению покрытие γ'_n вписано в $(p_1, \ldots, p_n)\|\gamma_{2n}$; значит, $(p_1, \ldots, p_n) \times \gamma'_n \succ \gamma_{2n}$ и $\{(p_1, \ldots, p_n)\} \times W \subseteq W'$ для некоторого $W' \in \gamma_{2n}$. Кроме того, покрытие γ'_n вписано в $(p_2, \ldots, p_n)\|\gamma_{2n-1}$; значит, $(p_2, \ldots, p_n) \times \gamma'_n \succ \gamma_{2n-1}$ и $\{(p_2, \ldots, p_n)\} \times W \subseteq W''$ для некоторого $W'' \in \gamma_{2n-1}$. Из произвольности выбора элемента $y_n^{-1} \ldots y_1^{-1} x_1 \ldots x_n$ множества $U_n(\boldsymbol{\gamma}')$ вытекает, что $U_n(\boldsymbol{\gamma}') \subseteq \subseteq U_{2n}(\boldsymbol{\gamma}) \cap U_{2n-1}(\boldsymbol{\gamma})$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{x} \in \tilde{U}_n(\boldsymbol{\gamma}')^2$. Это означает, что найдутся перестановки $\sigma, \sigma' \in S_n$, для которых

$$\mathbf{x} \in U_{\sigma(1)}(\boldsymbol{\gamma}') \cdot \ldots \cdot U_{\sigma(n)}(\boldsymbol{\gamma}') \cdot U_{\sigma'(1)}(\boldsymbol{\gamma}') \cdot \ldots \cdot U_{\sigma'(n)}(\boldsymbol{\gamma}').$$

По доказанному $U_{\sigma(i)}(\boldsymbol{\gamma}') \subseteq U_{2\sigma(i)}(\boldsymbol{\gamma})$ и $U_{\sigma'(i)}(\boldsymbol{\gamma}') \subseteq U_{2\sigma'(i)-1}(\boldsymbol{\gamma})$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. Положим

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n & n+1 & \ldots & 2n \\ 2\sigma(1) & \ldots & 2\sigma(n) & 2\sigma'(1)-1 & \ldots & 2\sigma'(n)-1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\delta \in S_{2n}$ и $\mathbf{x} \in U_{\delta(1)}(\boldsymbol{\gamma}) U_{\delta(2)}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot \ldots \cdot U_{\delta(2n)}(\boldsymbol{\gamma})$.

Мы показали, что $\tilde{U}_n(\boldsymbol{\gamma}')^2 \subseteq \tilde{U}_n(\boldsymbol{\gamma})$ для всех натуральных n. Из того, что, очевидно, $\mathbf{e} \in U_k(\boldsymbol{\gamma}')$ для всех $k \in \mathbb{N}$, и из определения (8) вытекает, что $\tilde{U}_m(\boldsymbol{\gamma}') \subseteq \tilde{U}_n(\boldsymbol{\gamma}')$, так что $\tilde{U}_m(\boldsymbol{\gamma}') \cdot \tilde{U}_n(\boldsymbol{\gamma}') \subseteq \tilde{U}_{\max\{m,n\}}(\boldsymbol{\gamma})$ для любых натуральных m и n. Отсюда и из определения (9) вытекает 2).

Выполнение условий 4) и 5) доказывается сходным образом с использованием (iii) и (iv) соответственно. Покажем, например, что $\mathcal{U}$ удовлетворяет условию 5).

Пусть $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$, и пусть $\mathbf{g} = g_1 \dots g_k$, где k — некоторое натуральное число и $g_i \in X \cup X^{-1}$. Для каждого натурального n положим $\gamma'_n = \gamma_{n+k} \| (g_1, \dots, g_n)$; согласно (iv) $\boldsymbol{\gamma}' = \{\gamma'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$. Покажем, что $\mathbf{g}^{-1} U(\boldsymbol{\gamma}')\mathbf{g} \subseteq U(\boldsymbol{\gamma})$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, и пусть $\mathbf{x} \in U_n(\boldsymbol{\gamma}')$. Тогда существует такое $W \in \gamma'_n$, что $\mathbf{x} = y_n^{-1} \dots y_1^{-1} x_1 \dots x_n$ и $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in W$. По определению покрытия γ'_n найдётся $W' \in \gamma_{n+k}$, для которого $W \times \{(g_1, \dots, g_k)\} \subseteq W'$. Имеем

$$(x_1, \dots, x_n, g_1, \dots, g_k) \in W' \quad \text{и} \quad (y_1, \dots, y_n, g_1, \dots, g_k) \in W';$$

значит,

$$g_k^{-1} \dots g_1^{-1} y_n^{-1} \dots y_1^{-1} x_1 \dots x_n g_1 \dots g_k = \mathbf{g}^{-1}\mathbf{x}\mathbf{g} \in U_{n+k}(\boldsymbol{\gamma}).$$

Из произвольности выбора $\mathbf{x} \in U_n(\boldsymbol{\gamma}')$ вытекает, что $\mathbf{g}^{-1} \cdot U_n(\boldsymbol{\gamma}')\mathbf{g} \in U_{n+k}(\boldsymbol{\gamma})$.

Пусть $\sigma \in S_n$ для некоторого натурального n. Тогда

$$\begin{aligned} &\mathbf{g}^{-1} \cdot U_{\sigma(1)}(\boldsymbol{\gamma}') \cdot \ldots \cdot U_{\sigma(n)}(\boldsymbol{\gamma}') \cdot \mathbf{g} = \\ &= \mathbf{g}^{-1} \cdot U_{\sigma(1)}(\boldsymbol{\gamma}') \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^{-1} \cdot U_{\sigma(2)}(\boldsymbol{\gamma}') \cdot \mathbf{g} \cdot \ldots \cdot \mathbf{g}^{-1} \cdot U_{\sigma(n)}(\boldsymbol{\gamma}') \cdot \mathbf{g} \subseteq \\ &\subseteq U_{\sigma(1)+k}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot \ldots \cdot U_{\sigma(n)+k}(\boldsymbol{\gamma}). \end{aligned}$$

Поскольку $\mathbf{e} \in U_i(\boldsymbol{\gamma})$ при всех $i \in \mathbb{N}$, имеем

$$U_{\sigma(1)+k}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot \ldots \cdot U_{\sigma(n)+k}(\boldsymbol{\gamma}) \subseteq U_{\sigma(1)+k}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot \ldots \cdot U_{\sigma(n)+k}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot U_1(\boldsymbol{\gamma}) \cdot \ldots \cdot U_k(\boldsymbol{\gamma}).$$

Положим

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n & n+1 & \dots & n+k \\ \sigma(1)+k & \dots & \sigma(n)+k & 1 & \dots & k \end{pmatrix}.$$

Тогда $\delta \in S_{n+k}$ и

$$\begin{aligned} U_{\sigma(1)+k}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot \ldots \cdot U_{\sigma(n)+k}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot U_1(\boldsymbol{\gamma}) \cdot \ldots \cdot U_k(\boldsymbol{\gamma}) &= \\ = U_{\delta(1)}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot U_{\delta(2)}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot \ldots \cdot U_{\delta(n+k)}(\boldsymbol{\gamma}).& \end{aligned}$$

Таким образом, для всякой перестановки $\sigma \in S_n$ найдётся такая перестановка $\delta \in S_{n+k}$, что

$$\mathbf{g}^{-1} \cdot U_{\sigma(1)}(\boldsymbol{\gamma}') \cdot \ldots \cdot U_{\sigma(n)}(\boldsymbol{\gamma}') \cdot \mathbf{g} \subseteq U_{\delta(1)}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot U_{\delta(2)}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot \ldots \cdot U_{\delta(n+k)}(\boldsymbol{\gamma}).$$

Из произвольности выбора $n \in \mathbf{N}$ вытекает, что $\mathbf{g}^{-1} U(\boldsymbol{\gamma}')\mathbf{g} \subseteq U(\boldsymbol{\gamma})$.

Для того чтобы показать, что $\mathcal{U}$ обладает свойством 3), достаточно заметить, что $U_n(\boldsymbol{\gamma})^{-1} = U_n(\boldsymbol{\gamma})$ и

$$\bigl(U_{\sigma(1)}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot U_{\sigma(2)}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot \ldots \cdot U_{\sigma(n)}(\boldsymbol{\gamma})\bigr)^{-1} = U_{\sigma'(1)}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot U_{\sigma'(2)}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot \ldots \cdot U_{\sigma'(n)}(\boldsymbol{\gamma}),$$

где

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(n) & \sigma(n-1) & \dots & \sigma(1) \end{pmatrix},$$

для любых $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma$, $n \in \mathbb{N}$ и $\sigma \in S_n$. □

Теорема 10.2. *Если X — тихоновское пространство, X^{-1} — его дизъюнктная гомеоморфная копия и Γ — семейство всех последовательностей открытых покрытий пространств $(X \oplus X^{-1})^n$, то $\mathcal{T}_\Gamma$ является топологией свободной топологической группы $F(X)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}(X \oplus X^{-1})$ — топология пространства $X \oplus X^{-1}$. Покажем, что $\mathcal{T}_\Gamma \restriction X \oplus X^{-1} \subseteq \mathcal{T}(X \oplus X^{-1})$.

Возьмём произвольное $U \in \mathcal{T}_\Gamma$. Предположим, что $x \in U \cap X \oplus X^{-1}$. Тогда существует такая последовательность $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$, что $x \cdot U(\boldsymbol{\gamma}) \subseteq U$. Пусть $O(x)$ — (открытая) окрестность точки x из покрытия γ_1. Из определения (7) вытекает, что $\{x^{-1}y \colon y \in O(x)\} \subseteq U_1(\boldsymbol{\gamma})$. Следовательно, $O(x) \subseteq x \cdot U_1(\boldsymbol{\gamma}) \subseteq U$. Таким образом, $\mathcal{T}_\Gamma \restriction X \oplus X^{-1} \subseteq \mathcal{T}(X \oplus X^{-1})$.

Пусть $\mathcal{T}$ — свободная топология группы $F(X)$. Покажем, что $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\Gamma$.

Пусть $U_0 \in \mathcal{T}_{\mathbf{e}}$, где $\mathcal{T}_{\mathbf{e}}$ — семейство открытых окрестностей единицы в топологии $\mathcal{T}$. Найдём последовательность $\{U_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, для которой $U_n \in \mathcal{T}_{\mathbf{e}}$ и $U_n^3 \subseteq U_{n-1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть n — произвольное натуральное число и $x_1, \dots, x_n$ – любые точки из $X \oplus X^{-1}$. Имеем $\mathbf{e} = x_n^{-1} \dots x_1^{-1} x_1 \dots x_n \in U_n$, поэтому для всех $i = 1, \dots, n$ и $\varepsilon = \pm 1$ найдутся такие $O(x_i^\varepsilon)$, что $x_i^\varepsilon \in O(x_i^\varepsilon) \in \mathcal{T}$ и

$$O(x_n^{-1}) \cdot \ldots \cdot O(x_1^{-1}) \cdot O(x_1) \cdot \ldots \cdot O(x_n) \subseteq U_n.$$

Тем более

$$\begin{aligned} &\big(O(x_n^{-1}) \cap (X \oplus X^{-1})\big) \cdot \ldots \cdot \big(O(x_1^{-1}) \cap (X \oplus X^{-1})\big) \times \\ &\qquad \times \big(O(x_1) \cap (X \oplus X^{-1})\big) \cdot \ldots \cdot \big(O(x_n) \cap (X \oplus X^{-1})\big) \subseteq U_n. \end{aligned}$$

Положим $\tilde{O}(x_i) = O(x_i) \cap (O(x_i^{-1}))^{-1}$ для всех $i = 1, \dots, n$. Очевидно, $x_i \in \tilde{O}(x_i) \in \mathcal{T}(X \oplus X^{-1})$ для $i = 1, \dots, n$, поэтому $\tilde{O}(x_1) \times \ldots \times \tilde{O}(x_n)$ — открытая окрестность точки $(x_1, \dots, x_n)$ в $(X \oplus X^{-1})^n$. Такие окрестности найдём для всех точек из $(X \oplus X^{-1})^n$ и положим

$$\gamma_n = \{\tilde{O}(x_1) \times \ldots \times \tilde{O}(x_n) \colon (x_1, \dots, x_n) \in (X \oplus X^{-1})^n\},$$
$$\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_n \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Тогда $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma$ и $U_n(\boldsymbol{\gamma}) \subseteq U_n$ для всех натуральных n.

Лемма ([103]). *Пусть G — группа, и пусть $\{U_n \colon n \in \mathbb{N}_0\}$ — такая последовательность подмножеств G, что единица группы G принадлежит каждому U_n и $U_n^3 \subseteq U_{n-1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$U_{\sigma(1)} \cdot U_{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot U_{\sigma(k)} \subseteq U_0$$

для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\sigma \in S_k$.

Из этой леммы вытекает, что $U_{\sigma(1)} \cdot U_{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot U_{\sigma(n)} \subseteq U_0$ для всех $n \in N$ и $\sigma \in S_n$; значит, $U(\boldsymbol{\gamma}) \subseteq U_0$. Таким образом, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\Gamma$.

Свободная топология $\mathcal{T}$ сильнейшая из всех групповых топологий на $F(X)$, индуцирующих исходную топологию на X, поэтому $\mathcal{T}_\Gamma = \mathcal{T}$. □

Замечание. На самом деле доказано нечто большее, чем утверждение теоремы 10.2, а именно

а) если покрытия γ_1 для всех $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$ открыты, то $\mathcal{T}_\Gamma \restriction X \oplus X^{-1} \subseteq \mathcal{T}(X \oplus X^{-1})$[12] и, значит, топология $\mathcal{T}_\Gamma$ не сильнее свободной топологии группы $F(X)$;

б) если Γ содержит все последовательности открытых покрытий пространств $(X \oplus X^{-1})^n$, то топология $\mathcal{T}_\Gamma$ не слабее свободной топологии группы $F(X)$.

Предложенная выше конструкция (в несколько упрощенном виде) применима и к свободным абелевым группам. Пусть X — множество, $-X$ — его дизъюнктная копия, γ_n — покрытие множества $X \cup -X$ для каждого натурального n и $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_n\}$. Положим

$$U(\boldsymbol{\gamma}) = \{x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \ldots x_n - y_n\colon \\ n \in \mathbb{N},\ x_i, y_i \in U_i \text{ для некоторого } U_i \in \gamma_i \text{ при всех } i = 1, \ldots, n\}.$$

Теорема 10.3. *Пусть X — произвольное множество и Γ — семейство последовательностей $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ покрытий множества $X \cup -X$ со следующими свойствами:*

(i) *если $\boldsymbol{\gamma}' = \{\gamma'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$ и $\boldsymbol{\gamma}'' = \{\gamma''_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$, то найдётся такая последовательность $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$, что $\gamma_n \succ \gamma'_n \wedge \gamma''_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$;*

(ii) *если $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$ и $\gamma'_n = \gamma_{2n} \wedge \gamma_{2n-1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\boldsymbol{\gamma}' = \{\gamma'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$;*

(iii) *если $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$, $k \in \mathbb{N}$ и $\gamma'_n = \gamma_{n+k}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\boldsymbol{\gamma}' = \{\gamma'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$.*

Тогда семейство

$$\mathcal{U} = \{U(\boldsymbol{\gamma})\colon \boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ \gamma_n \in \Gamma_n \text{ для } n \in \mathbb{N}\}$$

является базой в нуле некоторой групповой топологии $\mathcal{T}_\Gamma$ на свободной абелевой группе $A(X)$, порождённой множеством X.

Теорема 10.4. *Пусть X — тихоновское пространство и $-X$ — его дизъюнктная гомеоморфная копия.*

а) *Если каждая последовательность $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$ содержит открытое покрытие пространства $X \oplus -X$, то $\mathcal{T}_\Gamma \restriction X \oplus -X \subseteq \mathcal{T}(X \oplus -X)$[13] и, значит, $\mathcal{T}_\Gamma$ не сильнее свободной топологии группы $A(X)$;*

б) *если X — тихоновское пространство и Γ содержит все последовательности открытых покрытий пространства $X \oplus -X$, то топология $\mathcal{T}_\Gamma$ не слабее свободной топологии группы $A(X)$.*

[12] Здесь предположение об отделимости пространства X не нужно.
[13] Здесь предположение об отделимости пространства X не нужно.

Эти утверждения доказываются аналогично теоремам 10.1 и 10.2.

Следующая теорема может служить примером применения описанной выше общей схемы построения топологий на свободных группах.

Теорема 10.5. *Пусть X — тихоновское пространство с топологией $\mathcal{T}(X)$, нульмерное в смысле* ind. *Тогда на свободной группе, порождённой множеством X, существует групповая топология $\mathcal{T}_0$ со следующими свойствами:*

1) *группа $(F(X), \mathcal{T}_0)$ отделима;*
2) $\mathcal{T}_0 \restriction X = \mathcal{T}(X)$;
3) *для каждого натурального n множество $F_n(X)$ всех слов длины, не превосходящей n, замкнуто в $(F(X), \mathcal{T}_0)$;*
4) *для каждого натурального n пространство X^n замкнуто вкладывается в $(F(X), \mathcal{T}_0)$;*
5) $nw(F(X), \mathcal{T}_0) = nw(X)$;
6) $d(F(X), \mathcal{T}_0) = d(X)$;
7) $w(F(X), \mathcal{T}_0) = w(X)$;
8) $\mathrm{ind}(F(X), \mathcal{T}_0) = 0$;
9) *топология $\mathcal{T}_0$ имеет базу в единице, состоящую из (открыто-замкнутых) нормальных подгрупп.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ — база топологии пространства X, состоящая из открыто-замкнутых множеств и имеющая мощность, равную весу X, и пусть Ξ — семейство всех конечных дизъюнктных покрытий пространства X элементами $\mathcal{B}$ и дополнениями к их конечным объединениям. Для $\xi \in \Xi$ и $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\hat{\xi}^n = \{U_1^{\varepsilon_1} \times \ldots \times U_n^{\varepsilon_n} \colon U_i \in \xi,\ \varepsilon_i = \pm 1 \text{ для } i = 1, \ldots, m\}$$

(напомним, что X^{-1} — гомеоморфная копия пространства X; для $A \subseteq X$ под A^{-1} мы подразумеваем образ множества A при фиксированном гомеоморфизме ${}^{-1} \colon X \to X^{-1}$). Тогда $\hat{\xi}^n$ — конечное дизъюнктное открытое покрытие пространства $(X \oplus X^{-1})^n$. Искомая топология $\mathcal{T}_0$ — это $\mathcal{T}_\Gamma$ для

$$\Gamma = \{\boldsymbol{\gamma}^\xi = \{\hat{\xi}^n\}_{n\in\mathbb{N}} \colon \xi \in \Xi\}.$$

Нужно доказать, что она обладает требуемыми свойствами.

Заметим, что для всякого $\xi \in \Xi$ $U(\boldsymbol{\gamma}^\xi)$ — нормальная подгруппа группы $F(X)$, порождённая множеством $\bigcup\{U_n(\boldsymbol{\gamma}^\xi) \colon n \in \mathbb{N}\}$. Действительно, любое слово из $U_n(\boldsymbol{\gamma}^\xi)$, где $n \in \mathbb{N}$, имеет вид

$$y_n^{-1} \ldots y_1^{-1} x_1 \ldots x_n,$$

$$\text{где } y_i, x_i \in U_i^{\varepsilon_i} \text{ для некоторых } U_i \in \xi \text{ и } \varepsilon_i = \pm 1 \text{ при } i \leqslant n. \qquad (\star)$$

Пусть $m \leqslant n$ и $y_m^{-1} \ldots y_1^{-1} x_1 \ldots x_m \in U_m(\boldsymbol{\gamma}^\xi)$. Возьмём произвольную точку $x \in X$; имеем

$$y_m^{-1} \ldots y_1^{-1} x_1 \ldots x_m = y_m^{-1} \ldots y_1^{-1} \underbrace{x^{-1} \ldots x^{-1}}_{n-m \text{ раз}}\ \underbrace{x \ldots x}_{n-m \text{ раз}}\ x_1 \ldots x_m \in U_n(\boldsymbol{\gamma}^\xi).$$

Значит, $U_m(\boldsymbol{\gamma}^\xi) \subseteq U_n(\boldsymbol{\gamma}^\xi)$ для $m \leqslant n$. Из тех же соображений, если $\mathbf{g}$ — произвольное слово из $F(X)$ длины k, то $\mathbf{g}^{-1}U_n(\boldsymbol{\gamma}^\xi)\mathbf{g} \subseteq U_{n+k}(\boldsymbol{\gamma}^\xi)$. Следовательно, если $\mathbf{x}_i \in U_{n_i}(\boldsymbol{\gamma}^\xi)$ для $i = 1, \ldots, m$, $N \geqslant n_i$ для всех $i \leqslant m$ и $\mathbf{g} \in F(X)$ — слово длины k, то

$$\mathbf{g}^{-1}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_m\mathbf{g} = \mathbf{g}^{-1}\mathbf{x}_1\mathbf{g} \ldots \mathbf{g}^{-1}\mathbf{x}_m\mathbf{g} \in U_{N+k+1}(\boldsymbol{\gamma}^\xi) \cdot \ldots \cdot U_{N+k+m}(\boldsymbol{\gamma}^\xi).$$

Наконец, из того, что $\mathbf{e} \in U_n(\boldsymbol{\gamma}^\xi)$ для всех n, вытекает, что

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^{-1}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_m\mathbf{g} \in U_1(\boldsymbol{\gamma}^\xi) \cdot \ldots \cdot U_{N+k}(\boldsymbol{\gamma}^\xi)U_{N+k+1}(\boldsymbol{\gamma}^\xi) \cdot \ldots \cdot U_{N+k+m}(\boldsymbol{\gamma}^\xi) \subseteq \\ \subseteq \tilde{U}_{N+k}(\boldsymbol{\gamma}^\xi) \subseteq U(\boldsymbol{\gamma}^\xi).\end{aligned}$$

Таким образом, нормальная подгруппа группы $F(X)$, порождённая множеством $\bigcup\{U_n(\boldsymbol{\gamma}^\xi)\colon n \in \mathbb{N}\}$, содержится в $U(\boldsymbol{\gamma}^\xi)$; обратное включение очевидно.

Лемма. *Пусть $\xi \in \Xi$, $\mathbf{g} \in U(\boldsymbol{\gamma}^\xi)$ и слово $\mathbf{g}$ несократимо и непусто. Тогда это слово имеет вид*

$$\begin{aligned}\mathbf{g} \equiv\ & h^{(1)}_{1=i_0} \ldots h^{(1)}_{k_1} g^{(1)}_{k_1} \ldots g^{(1)}_{i_1} \times \\ & \times h^{(2)}_{i_1} \ldots h^{(2)}_{k_2} \cdot g^{(2)}_{k_2} \ldots g^{(2)}_{i_2} \times \\ & \times \ldots \times \\ & \times h^{(n)}_{i_{n-1}} \ldots h^{(n)}_{k_n} g^{(n)}_{k_n} \ldots g^{(n)}_{1=i_n},\end{aligned} \qquad (\star\star)$$

где $n, k_1, \ldots, k_n, i_1, \ldots, i_{n-1}$ — натуральные числа, $i_j \leqslant \min\{k_j, k_{j+1}\}$ для всех $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ и h и g с индексами — буквы из алфавита $X \oplus X^{-1}$; наконец, для всех $u \in \xi$, $\varepsilon = \pm 1$ и $j \leqslant n$ выполняется условие: если $i \in \{i_{j-1}, \ldots, k_j\}$, то $h^{(j)}_i \in U^\varepsilon$ тогда и только тогда, когда ближайшая к $h^{(j)}_i$ справа буква вида $g^{(r)}_i$ (с тем же i) принадлежит $U^{-\varepsilon}$, и если $i \in \{i_j, \ldots, k_j\}$, то $g^{(j)}_i \in U^\varepsilon$ тогда и только тогда, когда ближайшая к $g^{(j)}_i$ слева буква вида $h^{(r)}_i$ принадлежит $U^{-\varepsilon}$ (напомним, что символом $\equiv$ мы условились обозначать равенство слов как элементов моноида $S(X)$).

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Любое слово $\mathbf{x} \in U_n(\boldsymbol{\gamma}^\xi)$ имеет вид $(\star)$. Назовём пару букв x_i, x_{i+1} (y_i, y_{i+1}) в слове $\mathbf{x}$ неправильной, если $x_i = x^{-1}_{i+1}$, но $y_i \neq y^{-1}_{i+1}$ (если $y_i = y^{-1}_{i+1}$, но $x_i \neq x^{-1}_{i+1}$). Сейчас мы индукцией по n покажем, что произвольное непустое слово вида $(\star)$ представимо в виде произведения *несократимых* слов вида $(\star)$.

Если $n = 1$, то утверждение, очевидно, справедливо. Пусть $n = n_0 > 1$ и для $n < n_0$ утверждение доказано. Будем считать, что $x_1 \neq y_1$: иначе $\mathbf{x} \in U_{n-1}(\boldsymbol{\gamma}^\xi)$ и применимо индуктивное предположение. Рассмотрим три возможных случая.

I. В слове $\mathbf{x}$ нет неправильных пар. В этом случае либо слово $\mathbf{x}$ несократимо, что нас вполне устраивает, либо найдётся такое $i < n$, что $x_i = x^{-1}_{i+1}$ и $y_i = y^{-1}_{i+1}$. В последнем случае слово

$$y_n^{-1} \ldots y^{-1}_{i+2} y^{-1}_{i-1} \ldots y_1^{-1} x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+2} \ldots x_n$$

имеет вид $(\star)$ и к нему применимо индуктивное предположение.

II. В слове $\mathbf{x}$ есть неправильная пара x_i, x_{i+1} или y_i, y_{i+1}, где $i > 1$. Для определённости будем считать, что это пара x_i, x_{i+1}. Имеем

$$\mathbf{x} = y_n^{-1} \dots y_{i+2}^{-1} y_{i+1}^{-1} y_i^{-1} y_{i-1}^{-1} \dots y_1^{-1} x_1 \dots x_{i-1} x_i x_{i+1} x_{i+2} \dots x_n = \\ = y_n^{-1} \dots y_{i+2}^{-1} y_{i+1}^{-1} y_i^{-1} y_{i+2} \dots y_n y_n^{-1} y_{i+2}^{-1} y_{i-1}^{-1} \dots y_1^{-1} x_1 \dots x_{i-1} x_{i+2} \dots x_n.$$

Слово $y_n^{-1} y_{i+2}^{-1} y_{i-1}^{-1} \dots y_1^{-1} x_1 \dots x_{i-1} x_{i+2} \dots x_n$ имеет вид ($\star$), и к нему применимо индуктивное предположение. Значит, это слово представимо в виде произведения несократимых слов вида ($\star$). Пусть $x_i \in U^{\varepsilon}$, где $U \in \xi$ и $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Тогда $x_{i+1} \in U^{-\varepsilon}$. По построению и в силу дизъюнктности покрытия ξ $y_{i+1} \in U{-\varepsilon}$ и $y_i \in U^{\varepsilon}$. Значит, слово $y_n^{-1} \dots y_{i+2}^{-1} y_{i+1}^{-1} y_i^{-1} y_{i+2} \dots y_n$ имеет вид ($\star$), и к нему применимо индуктивное предположение, т. е. оно представимо в виде произведения несократимых слов вида ($\star$). Следовательно, всё слово $\mathbf{x}$ тоже представимо в виде произведения несократимых слов вида ($\star$).

III. В слове $\mathbf{x}$ имеется единственная неправильная пара x_1, x_2 или y_1, y_2. Для определённости будем считать, что это пара x_1, x_2. Пусть $x_1 \in U^{\varepsilon}$, где $U \in \xi$ и $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Тогда $x_2 \in U^{-\varepsilon}$. По определению множества $U_n(\boldsymbol{\gamma}^{\xi})$ $y_1 \in U^{\varepsilon}$ и $y_2 \in U^{-\varepsilon}$. Поскольку $x_1 = x_2^{-1}$, имеем $\mathbf{x} = y_n^{-1} \dots y_3^{-1} y_2^{-1} y_1^{-1} x_3 \dots x_n$. Это слово непусто и имеет вид ($\star$), и к нему применимо индуктивное предположение.

Мы показали, что произвольный элемент множества $\bigcup\{U_n(\boldsymbol{\gamma}^{\xi})\colon n \in \mathbb{N}\}$ представляется как произведение несократимых слов вида ($\star$). Пусть $\mathbf{e} \neq \mathbf{g} \in U(\boldsymbol{\gamma}^{\xi})$. Множество $U(\boldsymbol{\gamma}^{\xi})$ является подгруппой, порождённой множеством $\bigcup\{U_n(\boldsymbol{\gamma}^{\xi})\colon n \in \mathbb{N}\}$, поэтому слово $\mathbf{g}$ представимо как произведение несократимых слов вида ($\star$). Сейчас мы покажем индукцией по числу сомножителей, что приведённое слово $\mathbf{g}$ имеет вид ($\star\star$) с n, не превосходящим числа несократимых сомножителей вида ($\star$).

Если $\mathbf{g}$ само есть несократимое слово вида ($\star$), то утверждение справедливо. Пусть $\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \dots \mathbf{g}_{n_0} \mathbf{g}_{n_0+1}$, где $\mathbf{g}_i$ — несократимые слова вида ($\star$). Предположим, что для меньшего числа сомножителей утверждение справедливо. Пусть $\mathbf{g}_{n_0+1} = h_1 \dots h_s g_s \dots g_1$, где $h_i, g_i \in X \oplus X^{-1}$.

A. Предположим, что при сокращении слова $\mathbf{g}$ слово $\mathbf{g}_{n_0+1}$ сокращается меньше чем наполовину, т. е. для некоторого $i \in \{0, \dots, s-1\}$ слово $h_{i+1} \dots h_s g_s \dots g_1$ не сокращается в $\mathbf{g}$. Положим $\mathbf{h} = \mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \dots \mathbf{g}_{n_0}$. По индуктивному предположению слово $\mathbf{h}$ имеет вид ($\star\star$), т. е.

$$\mathbf{h} \equiv h_1^{(1)} \dots h_{k_1}^{(1)} g_{k_1}^{(1)} \dots g_{i_1}^{(1)} \dots h_{i_{n-1}}^{(n)} \dots h_{k_n}^{(n)} g_{k_n}^{(n)} \dots g_1^{(n)},$$

причём $n \leqslant n_0$. Покажем, что слово $\mathbf{h} \cdot \mathbf{g}_{n_0+1}$ имеет вид ($\star\star$).

Если $g_1^{(n)} \neq h_1^{-1}$, то это утверждение очевидно. Предположим, что найдётся такое $i \in \{1, \dots, s-1\}$, что

$$h_i^{-1} \dots h_1^{-1} = h_{l+1}^{(m)} \dots h_{k_m}^{(m)} g_{k_m}^{(m)} \dots g_{i_m}^{(m)} \dots h_{i_{n-1}}^{(n)} \dots h_{k_n}^{(n)} g_{k_n}^{(n)} \dots g_1^{(n)}$$

для некоторых $m \in \{1, \dots, n\}$ и $l \in \{i_{m-1} - 1, \dots, k_m - 1\}$ (мы считаем, что $h_{i_{m-1}-1}^{(m)} = g_{i_m-1}^{(m-1)}$, если $m > 1$, и $h_0^{(1)} = \mathbf{e}$) и $h_{i+1}^{-1} \neq h_l^{(m)}$. Поскольку слово

$h_1\dots h_s g_s\dots g_1$ несократимо и имеет вид ($\star$), мы в этом случае можем записать

$$g_i\dots g_1 \equiv {h'}^{(m)}_{l+1}\dots {h'}^{(m)}_{k_m}{g'}^{(m)}_{k_m}\dots {g'}^{(m)}_{i_m}\dots {h'}^{(n)}_{i_{n-1}}\dots {h'}^{(n)}_{k_n}{g'}^{(n)}_{k_n}\dots {g'}^{(n)}_{1},$$

где, в силу дизъюнктности покрытия ξ, $h^{(j)}_r \in U^\varepsilon$ тогда и только тогда, когда ${h'}^{(j)}_r \in U^\varepsilon$, и $g^{(j)}_r \in U^\varepsilon$ тогда и только тогда, когда ${g'}^{(j)}_r \in U^\varepsilon$ для всех $U\in\xi$, $\varepsilon=\pm1$ и для всех r и j, для которых определено ${h'}^{(j)}_r$ или ${g'}^{(j)}_r$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbf{g} &= \mathbf{h}\cdot h_1\dots h_s g_s\dots g_1 = \\
&= h^{(1)}_1\dots h^{(1)}_{k_1}g^{(1)}_{k_1}\dots g^{(1)}_{i_1}\dots h^{(m)}_{i_m}\dots h^{(m)}_{l}h_{i+1}\dots h_s g_s\dots g_{i+1}\times \\
&\quad\times g_i\dots g_1 = \\
&= h^{(1)}_1\dots h^{(1)}_{k_1}g^{(1)}_{k_1}\dots g^{(1)}_{i_1}\dots h^{(m)}_{i_m}\dots h^{(m)}_{l}h_{i+1}\dots h_s g_s\dots g_{i+1}\times \\
&\quad\times {h'}^{(m)}_{l+1}\dots {h'}^{(m)}_{k_m}{g'}^{(m)}_{k_m}\dots {g'}^{(m)}_{i_m}\dots {h'}^{(n)}_{i_{n-1}}\dots {h'}^{(n)}_{k_n}{g'}^{(n)}_{k_n}\dots {g'}^{(n)}_{1}. \qquad (\star\star\star)
\end{aligned}$$

Слово $h_1\dots h_s g_s\dots g_1$ несократимо, поэтому слово ($\star\star\star$) тоже несократимо и имеет вид ($\star\star$).

Случай, когда для некоторых $i\in\{1,\dots,s-1\}$, $m\in\{1,\dots,n\}$ и $l\in\in\{i_m+1,\dots,k_m+1\}$ имеет место соотношение

$$h_i^{-1}\dots h_1^{-1} \equiv g^{(m)}_{l-1}\dots g^{(m)}_{i_m}\dots h^{(n)}_{i_{n-1}}\dots h^{(n)}_{k_n}g^{(n)}_{k_n}\dots g^{(n)}_1$$

и $h^{-1}_{i+1}\ne g^{(m)}_l$, рассматривается аналогично.

Б. Предположим, что слово $\mathbf{g}_{n_0+1}$ сокращается не меньше чем наполовину. Пусть

$$\mathbf{g}_i \equiv h^{(i)}_1\dots h^{(i)}_{k_i}g^{(i)}_{k_i}\dots g^{(i)}_1$$

для каждого $i\in\{1,\dots,n_0\}$, где g и h с индексами — буквы из алфавита $X\oplus X^{-1}$. Предположим, что

$$h_s^{-1}\dots h_1^{-1} = g^{(m)}_{l-1}\dots g^{(m)}_1\dots h^{(n_0)}_1\dots h^{(n_0)}_{k_{n_0}}g^{(n_0)}_{k_{n_0}}\dots g^{(n_0)}_1$$

для некоторых $m\in\{1,\dots,n_0\}$ и $l\in\{2,\dots,k_m+1\}$ (считаем, что $g^{(m)}_{k_m+1}=h^{(m)}_{k_m}$). Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbf{g} &= \mathbf{g}_1\cdot\ldots\cdot\mathbf{g}_{n_0}\cdot h_1\dots h_s g_s\dots g_1 = \\
&= h^{(1)}_1\dots h^{(1)}_{k_1}g^{(1)}_{k_1}\dots g^{(1)}_1\dots h^{(m)}_1\dots h^{(m)}_{k_m}g^{(m)}_{k_m}\dots g^{(m)}_l\times \\
&\quad\times g_s\dots g_1 = \\
&= h^{(1)}_1\dots h^{(1)}_{k_1}g^{(1)}_{k_1}\dots g^{(1)}_1\dots h^{(m)}_1\dots h^{(m)}_{k_m}g^{(m)}_{k_m}\dots g^{(m)}_l\times \\
&\quad\times {g'}^{(m)}_{l-1}\dots {g'}^{(m)}_1\dots {h'}^{(n_0)}_1\dots {h'}^{(n_0)}_{k_{n_0}}{g'}^{(n_0)}_{k_{n_0}}\dots {g'}^{(n_0)}_1,
\end{aligned}$$

где для всех j и r $h^{(j)}_r\in U^\varepsilon$ тогда и только тогда, когда ${h'}^{(j)}_r\in U^\varepsilon$, и $g^{(j)}_r\in U^\varepsilon$ тогда и только тогда, когда ${g'}^{(j)}_r\in U^\varepsilon$ для $U\in\xi$, $\varepsilon=\pm1$ (это вытекает из дизъюнктности покрытия ξ и того, что слово $h_1\dots h_s g_s\dots g_1$ имеет вид ($\star$)). По определению ${g'}^{(m)}_{l-1}=g_s$, $g^{(m)}_{l-1}=h_s^{-1}$ и $g_s\ne h_s^{-1}$. Кроме того, для всех $i=1,\dots,n_0+1$ $\mathbf{g}_i$ — несократимое слово вида ($\star$). Поэтому слово

$(g_1^{(m)})^{-1}\ldots(g_{l-1}^{(m)})^{-1}{g'}_{l-1}^{(m)}\ldots{g'}_1^{(m)}$ несократимо и имеет вид $(\star)$, так же как и слова ${h'}_1^{(p)}\ldots{h'}_{k_p}^{(p)}{g'}_{k_p}^{(p)}\ldots{g'}_1^{(p)}$ при $p=m+1,\ldots,n_0$. Имеем

$$\mathbf{g}=\underbrace{h_1^{(1)}\ldots h_{k_1}^{(1)}g_{k_1}^{(1)}\ldots g_1^{(1)}}_{\mathbf{g}'_1}\ldots\underbrace{h_1^{(m)}\ldots h_{k_m}^{(m)}g_{k_m}^{(m)}\ldots g_l^{(m)}g_{l-1}^{(m)}\ldots g_1^{(m)}}_{\mathbf{g}'_m}\times$$
$$\times\underbrace{(g_1^{(m)})^{-1}\ldots(g_{l-1}^{(m)})^{-1}{g'}_{l-1}^{(m)}\ldots{g'}_1^{(m)}}_{\mathbf{g}'_{m+1}}\ldots\underbrace{{h'}_1^{(n_0)}\ldots{h'}_{k_{n_0}}^{(n_0)}{g'}_{k_{n_0}}^{(n_0)}\ldots{g'}_1^{(n_0)}}_{\mathbf{g}'_{n_0+1}}=$$
$$=\mathbf{g}'_1\cdot\ldots\cdot\mathbf{g}'_{n_0+1},$$

где $\mathbf{g}'_i$ — несократимые слова вида $(\star)$.

Мы представили $\mathbf{g}$ как произведение n_0+1 несократимых сомножителей вида $(\star)$, причём длина последнего сомножителя меньше, чем длина $\mathbf{g}_{n_0+1}$. Будем повторять проведённую выше процедуру до тех пор, пока не придём к случаю А или длина последнего сомножителя не станет равной нулю. В последнем случае применим индуктивное предположение.

Если

$$h_s^{-1}\ldots h_1^{-1}=h_{l+1}^{(m)}\ldots h_{k_m}^{(m)}g_{k_m}^{(m)}\ldots g_1^{(m)}\ldots h_1^{(n_0)}\ldots h_{k_{n_0}}^{(n_0)}g_{k_{n_0}}^{(n_0)}\ldots g_1^{(n_0)}$$

для некоторых $m\in\{1,\ldots,n_0\}$ и $l\in\{0,\ldots,k_m-1\}$, поступим аналогичным образом. □

Перейдём непосредственно к доказательству теоремы.

1) Нужно показать, что $(F(X),\mathcal{T}_0)$ — T_1-пространство, т. е.

$$\bigcap\{U(\boldsymbol{\gamma}^\xi)\colon \xi\in\Xi\}=\{\mathbf{e}\}.$$

Предположим, что $\mathbf{x}\equiv x_1^{\varepsilon_1}\ldots x_n^{\varepsilon_n}\in F(X)$, где $n\in\mathbb{N}$, $x_i\in X$ и $\varepsilon_i\in\{-1,1\}$ для каждого $i\in\{1,\ldots,n\}$ и слово $\mathbf{x}$ несократимо и непусто. Пусть множество $K\subseteq\{1,\ldots,n\}$ таково, что для всякого $i\in\{1,\ldots,n\}$ найдётся $j\in K$, для которого $x_j=x_i$, и если $i,j\in K$, $i\neq j$, то $x_i\neq x_j$.

Рассмотрим множество $\{x_i\colon i\in K\}$. Для точек из этого множества найдём непересекающиеся окрестности из $\mathcal{B}$ (напомним, что это база топологии пространства X, состоящая из открыто-замкнутых множеств, с помощью которой строятся покрытия $\xi\in\Xi$). Для каждого $i\in K$ обозначим выбранную окрестность точки x_i через U_i. Положим

$$\xi=\{U_i\colon i\in K\}\cup\Bigl(X\setminus\bigcup_{i\in K}U_i\Bigr).$$

Тогда $\xi\in\Xi$.

Предположим, что $\mathbf{x}\in U(\boldsymbol{\gamma}^\xi)$. Слово $\mathbf{x}$ непусто, поэтому в силу доказанной леммы существует $i\in\{1,\ldots,n\}$, для которого x_i и x_{i+1} содержатся в одном элементе покрытия ξ и $\varepsilon_i\neq\varepsilon_{i+1}$. Поскольку для любого $i\in\{1,\ldots,n\}$ найдётся такое $j\in K$, что $x_i=x_j$, имеем $x_i^{\varepsilon_i}\in U_j^{\varepsilon_i}$ и $x_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}\in U_j^{-\varepsilon_i}$ для некоторого $j\in K$; кроме того, $x_i\neq x_{i+1}$, потому что рассматриваемая запись слова $\mathbf{x}$ несократима. По построению покрытия ξ из $x_i\in U_j$ и $x_i\neq x_{i+1}$ вытекает, что $x_{i+1}\neq U_j$ для $j\in K$. Это противоречие показывает, что $\mathbf{x}\notin U(\boldsymbol{\gamma}^\xi)$.

Таким образом, для любого непустого слова $\mathbf{x}$ найдётся $\xi \in \Xi$, для которого $\mathbf{x} \notin U(\boldsymbol{\gamma}^\xi)$, что и доказывает отделимость группы $(F(X), \mathcal{T}_0)$.

2) Включение $\mathcal{T}_0 \restriction X \subseteq \mathcal{T}(X)$ вытекает из пункта а) замечания после теоремы 10.2. Покажем, что $\mathcal{T}(X) \subseteq \mathcal{T}_0 \restriction X$.

Пусть $x_0 \in X$, и пусть U — произвольный элемент базы $\mathcal{B}$, содержащий точку x_0. Положим $\xi = \{U, X \setminus U\}$. Очевидно,

$$U(\boldsymbol{\gamma}^\xi) \cdot x_0 \cap X = (F_2(X) \cap U(\boldsymbol{\gamma}^\xi)) \cdot x_0 \cap X.$$

Из леммы вытекает, что

$$F_2(X) \cap U(\boldsymbol{\gamma}^\xi) = \{xy\colon x \in U^\varepsilon,\ y \in U^{-\varepsilon},\ \varepsilon \in \{-1,1\}\} \cup \\ \cup \{xy\colon x \in X \setminus U^\varepsilon,\ y \in X \setminus U^{-\varepsilon},\ \varepsilon \in \{-1,1\}\}.$$

Легко видеть, что

$$(F_2(X) \cap U(\boldsymbol{\gamma}^\xi)) \cdot x_0 \cap X = UU^{-1}x_0 \cap X = U.$$

Таким образом, для любого $U \in \mathcal{B}$ и любого $x \in U$ найдётся $\xi \in \Xi$, для которого $U(\boldsymbol{\gamma}^\xi)x \cap X \subseteq U$, поэтому $\mathcal{T}(X) \subseteq \mathcal{T}_0 \restriction X$.

3) Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{x} \notin F_m(X)$, т. е. $\mathbf{x}$ имеет несократимую запись $x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$, где $n > m$ и $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Выберем такое же множество K, как и при доказательстве пункта 1). Определим покрытие ξ так же, как в 1). Пусть $\mathbf{y} \in U(\boldsymbol{\gamma}^\xi)$. В силу леммы приведённое слово $\mathbf{y}$ имеет вид ($\star\star$), т. е.

$$\mathbf{y} \equiv y_1^{(1)} \ldots y_{k_1}^{(1)} x_{k_1}^{(1)} \ldots x_{i_1}^{(1)} \ldots y_{i_{r-1}}^{(r)} \ldots y_{k_r}^{(t)} x_{k_r}^{(r)} \ldots r_1^{(r)}.$$

Найдутся такие $W \in \xi$ и $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, что $y_{k_1}^{(1)} \in W^\varepsilon$ и $x_{k_1}^{(1)} \in W^{-\varepsilon}$; между тем при доказательстве 1) было показано, что ни при каких $W \in \xi$ и $\varepsilon \in \{-1,1\}$ не существует индекса i, для которого $x_i^{\varepsilon_i} \in W^\varepsilon$ и $x_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} \in W^{-\varepsilon}$. Значит, в произведении $\mathbf{xy}$ слово $\mathbf{y}$ не может сократиться со словом $\mathbf{x}$ больше, чем на буквы $y_1^{(1)} \ldots y_{k_1}^{(1)}$. Поэтому если $\mathbf{xy} = \mathbf{x}'\mathbf{z}\mathbf{z}^{-1}\mathbf{y}'$, где $\mathbf{x}'\mathbf{z} \equiv \mathbf{x}$, $\mathbf{z}^{-1}\mathbf{y}' \equiv \mathbf{y}$ и последняя буква слова $\mathbf{x}'$ не сокращается с первой буквой слова $\mathbf{y}'$, то длина слова $\mathbf{y}'$ не меньше длины слова $\mathbf{z}^{-1}$; следовательно, длина слова $\mathbf{xy}$ не меньше длины слова $\mathbf{x}$. (Заметим, что если длина слова $\mathbf{xy}$ равна длине $\mathbf{x}$, то $\mathbf{y} = y_1^{(1)} \ldots y_{k_1}^{(1)} x_{k_1}^{(1)} \ldots x_{i_1}^{(1)}$, т. е. слово $\mathbf{y}$ имеет вид ($\star$); это наблюдение понадобится нам при доказательстве следующих двух пунктов.) Значит, $\mathbf{x}U(\boldsymbol{\gamma}^\xi) \subseteq F(X) \setminus F_m(X)$, т. е. $\mathbf{x}U(\boldsymbol{\gamma}^\xi) \cap F_m(X) = \varnothing$.

Таким образом, у каждой точки из $F(X) \setminus F_m(X)$ есть $\mathcal{T}_0$-открытая окрестность, содержащаяся в $F(X) \setminus F_m(X)$, т. е. множество $F_m(X)$ замкнуто в $(F(X), \mathcal{T}_0)$.

4) Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{i}_n\colon (X \oplus \{\mathbf{e}\} \oplus X^{-1})^n \to F_n(X)$ — естественное отображение умножения ($\mathbf{i}_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n$ для $(x_1, \ldots, x_n) \in (X \oplus \{\mathbf{e}\} \oplus X^{-1})^n$). Рассмотрим

$$\bar{\mathbf{i}}_n = \mathbf{i}_n \restriction X^n\colon X^n \to F_n(X).$$

Ясно, что отображение $\bar{\mathbf{i}}_n$ инъективно; оно непрерывно относительно топологии $\mathcal{T}_0 \restriction F_n(X)$ в силу непрерывности умножения в группе $(F(X), \mathcal{T}_0)$. Покажем, что $\bar{\mathbf{i}}_n$ открыто относительно $\mathcal{T}_0 \restriction F_n(X)$ как отображение на свой образ, каковым является множество $F_n^+(X)$ слов длины n, в которых все буквы имеют положительные степени.

Пусть $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$, и пусть U — открытая окрестность точки $(x_1, \ldots, x_n)$ в X^n. Нам нужно показать, что у слова

$$\mathbf{x} = x_1 \ldots x_n = \bar{\mathbf{i}}_n((x_1, \ldots, x_n))$$

найдётся $\mathcal{T}_0$-открытая окрестность V, для которой $\bar{\mathbf{i}}_n(U) \supseteq V \cap F_n^+(X)$. Для всех $i = 1, \ldots, n$ найдём такие множества $U_i \in \mathcal{B}$, что $x_i \in U_i$, $U_1 \times \ldots \times U_n \subseteq U$ и если $x_i \neq x_j$, то $U_i \cap U_j = \varnothing$, а если $x_i = x_j$, то $U_i = U_j$. Положим

$$\xi = \{U_i \colon i \leqslant n\} \cup \left(X \setminus \bigcup_{i \leqslant n} U_i\right).$$

Тогда $\xi \in \Xi$. Рассуждая точно так же, как при доказательстве пункта 3), мы придём к заключению, что если $\mathbf{y} \in U(\boldsymbol{\gamma}^\xi)$ и $\mathbf{xy} \in F_n(X)$ (т. е. длина слова $\mathbf{xy}$ не превосходит, и следовательно равна, n), то $\mathbf{y}$ имеет вид ($\star$), т. е.

$$\mathbf{y} = {y'}_n^{-1} \ldots {y'}_1^{-1} y_1 \ldots y_n,$$
$$\text{где } y'_i, y_i \in U_i^{\varepsilon_i} \text{ для некоторых } U_i \in \xi \text{ и } \varepsilon_i = \pm 1 \text{ при } i \leqslant n,$$

причём первая половина этого слова целиком сокращается с $\mathbf{x}$ в произведении $\mathbf{xy}$, т. е.

$$x_1 \ldots x_n {y'}_n^{-1} \ldots {y'}_1^{-1} = \mathbf{e} \quad \text{и} \quad \mathbf{xy} = y_1 \ldots y_n.$$

Это означает, что $x_i = y'_i$ и, значит, $y_i \in U_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. Таким образом,

$$x \cdot U(\boldsymbol{\gamma}^\xi) \cap F_n^+(X) \subseteq U_1 \cdot \ldots \cdot U_n = \bar{\mathbf{i}}_n(U_1 \times \ldots \times U_n) \subseteq \bar{\mathbf{i}}_n(U),$$

и в качестве требуемой окрестности V слова $\mathbf{x}$ можно взять $\mathbf{x} \cdot U(\boldsymbol{\gamma}^\xi)$.

Итак, отображение $\bar{\mathbf{i}}_n \colon X^n \to F_n(X)$ является гомеоморфным вложением. Покажем, что $\bar{\mathbf{i}}_n(X^n)$ замкнуто в $F_n(X)$ относительно топологии $\mathcal{T}_0 \restriction F_n(X)$. Пусть $\mathbf{x} \in F_n(X) \setminus \bar{\mathbf{i}}_n(X^n)$. Есть две возможности:

А. $\mathbf{x} \in F_m(X)$ для некоторого $m < n$.

Б. Слово $\mathbf{x}$ имеет несократимую запись $x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$, где $x_i \in X$ и $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и $\varepsilon_i = -1$ по крайней мере для одного $i \in \{1, \ldots, n\}$.

А. Пусть ξ — произвольное покрытие из Ξ. Легко видеть, что если $\mathbf{y} \in U(\boldsymbol{\gamma}^\xi)$ и длина слова $\mathbf{xy}$ равна n, т. е. больше длины слова $\mathbf{x}$, то в слове $\mathbf{xy}$ непременно встретятся две буквы, одна из которых принадлежит множеству X, а другая — множеству X^{-1} (это следует из того, что каждый элемент множества $U(\boldsymbol{\gamma}^\xi)$ имеет вид ($\star\star$); требуемые буквы — это последняя пара букв вида $h_{k_r}^{(r)} g_{k_r}^{(r)}$ в записи ($\star\star$)). Поэтому никакая окрестность точки $\mathbf{x}$ вида $\mathbf{x} \cdot U(\boldsymbol{\gamma}^\xi)$ не пересекается с $\bar{\mathbf{i}}_n(X^n)$.

Б. Выбирая покрытие ξ и рассуждая так же, как при доказательстве пункта 3), мы придём к заключению, что если $\mathbf{y} \in U(\boldsymbol{\gamma}^{\xi})$ и $\mathbf{xy} \in F_n(X)$ (т. е. длина слова $\mathbf{xy}$ не превосходит, и следовательно равна, n), то $\mathbf{y}$ имеет вид ($\star$), т. е.

$$\mathbf{y} = {y'}_n^{-1} \dots {y'}_1^{-1} y_1 \dots y_n,$$
$$\text{где } y'_i, y_i \in U_i^{\varepsilon_i} \text{ для некоторых } U_i \in \xi \text{ и } \varepsilon_i = \pm 1 \text{ при } i \leqslant n,$$

причём первая половина этого слова целиком сокращается с $\mathbf{x}$ в произведении $\mathbf{xy}$, т. е.

$$x_1 \dots x_n {y'}_n^{-1} \dots {y'}_1^{-1} = \mathbf{e} \quad \text{и} \quad \mathbf{xy} = y_1 \dots y_n.$$

Это означает, что $x_i = y'_i$, и $y_i \in X$ тогда и только тогда, когда $x_i \in X$ ($i \in \{1, \dots, n\}$). Значит, в произведении $\mathbf{xy}$ непременно найдётся буква из X^{-1}, так что $\mathbf{xy} \notin \bar{\mathbf{i}}_n(X^n)$. Таким образом, открытая окрестность $\mathbf{x} \cdot U(\boldsymbol{\gamma}^{\xi}) \cap F_n(X)$ точки $\mathbf{x}$ в $(F_n(X), \mathcal{T}_0 \restriction F_n(X))$ не пересекается с $\bar{\mathbf{i}}_n(X^n)$.

Итак, все $\bar{\mathbf{i}}_n(X^n)$ замкнуты в $(F_n(X), \mathcal{T}_0 \restriction F_n(X))$; согласно 3) они замкнуты и в $(F(X), \mathcal{T}_0)$.

5) Пусть $nw(X) = \tau$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ $nw((X \oplus X^{-1})^n) = \tau$. При непрерывных отображениях умножения $\mathbf{i}_n$ сеть пространства $(X \oplus X^{-1})^n$ переходит в сеть пространства $(F_n(X), \mathcal{T}_0 \restriction F_n(X))$, поэтому $nw(F_n(X), \mathcal{T}_0 \restriction F_n(X)) \leqslant \tau$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Из того, что $F(X) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n(X)$, вытекает неравенство $nw(F(X), \mathcal{T}_0) \leqslant \tau$. Неравенство $nw(F(X), \mathcal{T}_0) \geqslant \tau$ следует из того, что $\mathcal{T}_0 \restriction X = \mathcal{T}(X)$.

6) Из тех же соображений, что и при доказательстве пункта 5), получаем $d(F(X), \mathcal{T}_0) \leqslant \tau$. Покажем, что $d(F(X), \mathcal{T}_0) \geqslant \tau$.

Предположим, что $d(F(X), \mathcal{T}_0) < d(X)$ и S — всюду плотное множество в $(F(X), \mathcal{T}_0)$ мощности меньше $d(X)$. Положим $Y = \bigcup\{\operatorname{supp} \mathbf{x} \colon \mathbf{x} \in S\}$ (под носителем $\operatorname{supp} \mathbf{x}$ слова $\mathbf{x}$ мы подразумеваем множество букв в несократимой записи этого слова, лишённых отрицательных степеней; так, если $\mathbf{x} = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ — несократимая запись, где $x_i \in X$ и $\varepsilon_i = \pm 1$, то $\operatorname{supp} \mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$). Имеем $|Y| = |S|$; значит, в $\mathcal{B}$ найдётся элемент, не пересекающийся с Y. Обозначим его через U и положим $\xi = \{U, X \setminus U\}$. Если $x \in U$, то любой элемент открытого в $(F(X), \mathcal{T}_0)$ множества $x \cdot U(\boldsymbol{\gamma}^{\xi})$ обязательно содержит букву из U. В самом деле, пусть $\mathbf{y} \in U(\boldsymbol{\gamma}^{\xi})$; если x не сокращается с первой буквой слова $\mathbf{y}$, то сама буква x (которая принадлежит множеству U) входит в произведение $x \cdot \mathbf{y}$, а если x сокращается с первой буквой слова $\mathbf{y}$, то ближайшая к $h_1^{(1)}$ справа буква вида $g_1^{(r)}$ в представлении слова $\mathbf{y}$ в виде ($\star\star$) принадлежит U, потому что в этом случае $h_1^{(1)} = x^{-1} \in U^{-1}$. Таким образом, $x \cdot U(\boldsymbol{\gamma}^{\xi}) \cap S = \varnothing$ — противоречие.

7) Пусть $w(X) = \tau$. Тогда мощность базы $\mathcal{B}$ равна τ, и следовательно, $|\Xi| = \tau$. Значит, характер группы $(F(X), \mathcal{T}_0)$ не превосходит τ. С другой стороны, по доказанному в пункте 6) $d(F(X), \mathcal{T}_0) = d(X) \leqslant w(X) = \tau$. Поскольку вес любой топологической группы равен произведению её характера на плотность (см. [4]), имеем $w(F(X), \mathcal{T}_0) \leqslant \tau$. Из того, что $\mathcal{T}_0 \restriction X = \mathcal{T}(X)$, следует равенство $w(F(X), \mathcal{T}_0) = \tau$.

8) и 9) вытекают из того, что базу окрестностей единицы в $(F(X), \mathcal{T}_0)$ составляют нормальные подгруппы. $\square$

Следствие. *Если тихоновское пространство* X *уплотняется* (*т. е. отображается взаимно-однозначно и непрерывно*) *на нульмерное в смысле* ind *хаусдорфово пространство, то свободная топологическая группа* $F(X)$ *изоморфно уплотняется на отделимую нульмерную в смысле* ind *топологическую группу.*

Замечание. Пусть X — нульмерное пространство, содержащее точку x_0, к которой сходится последовательность $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Тогда в группе $(F(X), \mathcal{T}_0)$ найдётся такой компакт K, что $K \cap F_n(X) \neq K$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ (таким компактом является множество $\{\underbrace{x_n^{-1} \dots x_n^{-1}}_{n \text{ раз}} \underbrace{x_0 \dots x_0}_{n \text{ раз}} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbf{e}\}$). Поскольку любой компакт в свободной топологической группе $F(X)$ содержится в $F_n(X)$ для некоторого n [11], отсюда следует, что топология $\mathcal{T}_0$ строго слабее свободной топологии. Этот же вывод можно сделать на основании того, что свободная топологическая группа бывает метризуемой только для дискретных пространств [4, (4.14)].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 03-01-00706.

Литература

[1] Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности. — М.: Наука, 1973.

[2] Архангельский А. В. Об отображениях, связанных с топологическими группами. — ДАН СССР. — 1968. — Т. 181, № 6. — С. 1303—1306.

[3] Архангельский А. В. Топологические пространства и непрерывные отображения. Замечания о топологических группах. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969.

[4] Архангельский А. В. О соотношениях между инвариантами топологических групп и их подпространств // Успехи мат. наук. — 1980. — Т. 35, вып. 3. — С. 3—22.

[5] Архангельский А. В. Классы топологических групп // Успехи мат. наук. — 1981. — Т. 36, вып. 3. — С. 127—146.

[6] Архангельский А. В. Любая топологическая группа является фактор-группой нульмерной топологической группы // ДАН СССР. — 1981. — Т. 258, № 5. — С. 1037—1040.

[7] Архангельский А. В. Алгебраические объекты, порожденные топологической структурой // Алгебра. Топология. Геометрия (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). Т. 25. — М.: ВИНИТИ, 1987. — С. 141—198.

[8] Бельнов В. К. О размерности свободных топологических групп // Тезисы IV Тираспольского симпозиума по общей топологии и ее приложениям. — Кишинев: Штиинца, 1979. — С. 14—15.

[9] Борубаев А. А., Чекеев А. А. О τ-полноте топологических групп // Зап. науч. сем. Санкт-Петербург. отдел. Мат. Ин-та им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ). — 1997. — Т. 208. Исслед. по топол. 7. — С. 103—114, 220—221.

[10] Граев М. И. Свободные топологические группы // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1948. — Т. 12. — С. 279—324.

[11] Граев М. И. Теория топологических групп. I // Успехи мат. наук. — 1950. — Т. 5, № 2. — С. 3—56.

[12] Гуран И. И. О вложениях топологических групп. — М.: Моск. ун-т. — Деп. в ВИНИТИ. 1981. № 1483-81.

[13] Думитрашку С. С., Чобан М. М. О свободных топологических алгебрах с непрерывной сигнатурой // Алгебраические и топологические системы. — Кишинев: Штиинца, 1982. — С. 27—53.

[14] Кац Г. И. Изоморфное отображение топологических групп в прямое произведение групп, удовлетворяющих первой аксиоме счетности // Успехи мат. наук. — 1953. — Т. 8, № 6. — С. 107—113.

[15] Кирияк Л. Л., Чобан М. М. Применение равномерных структур в исследовании свободных топологических алгебр // Сиб. мат. журн. — 1992. — Т. 33, № 5. — С. 891—904.

[16] Мальцев А. И. К общей теории алгебраических систем // Мат. сб. — 1954. — Вып. 35. — С. 3—20.

[17] Мальцев А. И. Свободные топологические алгебры // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1957. — Вып. 21. — С. 171—198.

[18] Марков А. А. О свободных топологических группах // ДАН СССР. — 1941. — Т. 31, № 4. — С. 299—301.

[19] Марков А. А. О свободных топологических группах // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1945. — Вып. 9, № 1. — С. 3—64.

[20] Пестов В. Г. О строении и вложении топологических групп. — Томск: Томский ун-т, 1981. — Деп. в ВИНИТИ. 03.04.81. № 1495-81.

[21] Пестов В. Г. Некоторые свойства свободных топологических групп // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1982. — № 1. — С. 35—37.

[22] Пестов В. Г. Окрестности единицы в свободных топологических группах // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1985. — № 3. — С. 8—10.

[23] Пестов В. Г. Свободные топологические абелевы группы и двойственность Понтрягина // Вестник Моск. Ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1986. — № 1. — С. 3—5.

[24] Резниченко Е. А., Сипачева О. В. Факторные отображения на слова ограниченной длины в свободных топологических группах // Общая топология. Отображения, произведения и размерность пространств. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1995. — С. 98—119.

[25] Сипачева О. В. Топологии на свободных группах // V Тирасп. симп. по общей топологии и ее прил. — Кишинев: Штиинца, 1985. — С. 220—222.

[26] Сипачева О. В. Описание топологии свободных топологических групп без использования универсальных равномерных структур // Общая топология. Отображения топологических пространств. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — С. 122—130.

[27] Сипачева О. В. Компакты с непрерывной операцией Мальцева и ретракты топологических групп // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1991. — № 1. — С. 33—36.

[28] Сипачева О. В. Об одном классе свободных локально выпуклых пространств // Мат. сб. — 2003. — Т. 194, № 3. — С. 25—52.

[29] Сипачева О. В., Успенский В. В. Свободные топологические группы без малых подгрупп // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1987. — № 4. — С. 21—24.

[30] Ткаченко М. Г. О топологии свободных по Маркову групп // Proc. V Symp. on General Topology. — Prague, 1982.

[31] Ткаченко М. Г. О нульмерных топологических группах // Труды Ленинградской международной конф. по топологии и ее приложениям. — Л.: Наука, 1982. — С. 113—118.

[32] Ткаченко М. Г. О полноте свободных абелевых топологических групп // ДАН СССР. — 1983. — Т. 269. — С. 299—303.

[33] Ткаченко М. Г. О свойстве Суслина в свободных топологических группах над бикомпактами // Мат. заметки. — 1983. — Т. 34, вып. 4. — С. 601—607.

[34] Ткаченко М. Г. О полноте топологических групп // Сиб. мат. журн. — 1984. — Т. 25, № 1. — С. 146—158.

[35] Ткаченко М. Г. О топологии свободных групп над бикомпактами // Отображения и функторы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. — С. 122—137.

[36] Ткаченко М. Г. О спектральном разложении свободных топологических групп // Успехи мат. наук. — 1984. — Т. 39, вып. 2 (236). — С. 191—192.

[37] Ткаченко М. Г. О нульмерности свободных топологических групп // Докл. Болгарской акад. наук. — 1985. — Т. 38, № 2. — С. 173—174.

[38] Ткаченко М. Г. О некоторых свойствах свободных топологических групп // Мат. заметки. — 1985. — Т. 37, вып. 1.

[39] Ткаченко М. Г. Строгая коллективная нормальность и счетная компактность в свободных топологических группах // Сиб. мат. журн. — 1987. — Т. 28, № 5. — С. 167—177.

[40] Успенский В. В. Топологическая группа, порожденная линделёфовым Σ-пространством, обладает свойством Суслина // ДАН СССР. — 1982. — Т. 265, № 4. — С. 823—826.

[41] Успенский В. В. О подгруппах свободных топологических групп // ДАН СССР. — 1985. — Т. 285, № 5. — С. 1070—1072.

[42] Успенский В. В. О непрерывных образах линделёфовых топологических групп // ДАН СССР. — 1985. — Т. 285, № 4. — С. 824—827.

[43] Успенский В. В. Топологические группы и компакты Дугунджи // Мат. сб. — 1989. — № 8. — С. 1092—1118.

[44] Успенский В. В. Свободные топологические группы метризуемых пространств // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1990. — Т. 54, № 6. — С. 1295—1319.

[45] Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. — М.: Наука, 1975.

[46] Чобан М. М. О некоторых вопросах теории топологических групп // Общая алгебра и дискретная геометрия. Математические науки. — Кишинев: Штиинца, 1980. — С. 120—135.

[47] Чобан М. М. К теории топологических алгебраических систем // Труды ММО. — 1985. — Т. 48. — С. 106—149.

[48] Чобан М. М. Общие условия существования свободных объектов // Acta Comment. Univ. Tartuensis. — 1989. — Vol. 836. — P. 157—171.

[49] Шахматов Д. Б. Прекалибры σ-компактных топологических групп // Мат. заметки. — 1986. — Т. 39, № 6. — С. 859—868.

[50] Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.

[51] Arhangel'skii A. V. Topological invariants in algebraic environment // Recent Progress in General Topology. 2. — Amsterdam: North-Holland, 2002. — P. 1—57.

[52] Arhangel'skii A. V., Okunev O. G., and Pestov V. G. Free topological groups over metrizable spaces // Topol. and Its Appl. — 1989. — Vol. 33, no. 1. — P. 63—76.

[53] Borges C. R. Free topological groups // J. Austral. Math. Soc. — 1977. — Vol. 23 (Ser. A). — P. 360—365.

[54] Choban M. M. Some topics in topological algebra // Topol. Appl. — 1993. — Vol. 54, no. 1—3. — P. 183—202.

[55] Choban M. M. Algebraical equivalences of topological spaces // Matematica. — 2001. — No. 1 (35). — P. 12—36.

[56] Comfort W. W. Problems on topological groups and other homogeneous spaces // Open Problems in Topology / Eds. J. van Mill and G. M. Reed. — Amsterdam: North-Holland, 1990. — P. 313—347.

[57] Comfort W. W., Hoffman K.-H., and Remus D. Topological groups and semigroups // Recent Progress in General Topology. — Amsterdam: North-Holland, 1992. — P. 57—144.

[58] Eda K., Ohta H., and Yamada K. Prime subspaces in free topological groups // Topol. and Its Appl. — 1995. — Vol. 62. — P. 163—171.

[59] Enochs E. E. Homotopy groups of compact Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1964. — Vol. 15, no. 6. — P. 878—881.

[60] Fay T., Ordman E., and Thomas B. V. S. The free topological group over rationals // Gen. Topol. and Appl. — 1979. — Vol. 10, no. 1. — P. 33—47.

[61] Galindo J. and Hernández S. Pontryagin—van Kampen reflexifity for free abelian topological groups // Forum Math. — 1999. — Vol. 11. — P. 399—415.

[62] Gartside P. M., Reznichenko E. A., and Sipacheva O. V. Maltsev and Retral Spaces // Topol. and Its Appl. — 1997. — Vol. 80. — P. 115—129.

[63] Guran I. I. Topology on an infinite symmetric group and condensations // Comment. Math. Univ. Carolin. — 1981. — Vol. 22, no. 2. — P. 311—316.

[64] Hofmann K. H. An essay on free compact groups // Lect. Notes Math. Vol. 915. — 1982. — P. 171—197.

[65] Hofmann K. H. and Morris S. A. Free compact groups. I: Free compact Abelian groups // Topol. and Its Appl. — 1986. — Vol. 23, no. 1. — P. 41—64.

[66] Hunt D. C. and Morris S. A. Free subgroups of free topological groups // Proc. Second Internat. Conf. on the Theory of Groups / M. F. Newman, ed. — Lecture Notes in Mathematics. Vol. 372. — Berlin: Springer, 1974. — P. 377—387.

[67] Joiner C. Free topological groups and dimension // Trans. Amer. Math. Soc. — 1976. — Vol. 220. — P. 401—418.

[68] Kakutani S. Free topological groups and infinite direct product of topological groups // Proc. Imp. Acad. Tokyo. — 1944. — Vol. 20. — P. 595—598.

[69] Leiderman A., Morris S. A., and Pestov V. The free Abelian topological group and the free locally convex space on the unit interval // J. London Math. Soc. — 1997. — Vol. 56. — P. 529—538.

[70] Mack J., Morris S. A., and Ordman E. T. Free topological groups and the projective dimension of locally compact Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1973. — Vol. 40. — P. 303—308.

[71] Michael E. Local compactness and Cartesian product of quotient maps and k-spaces // Ann. Inst. Fourier. — 1968. — Vol. 18. — P. 281—286.

[72] Montgomery D. and Zippin L. Topological Transformation Groups. — New York, 1955.

[73] Morris S. A. Varieties of topological groups // Bull. Austral. Math. Soc. — 1969. — Vol. 1, no. 2. — P. 145—160.

[74] Morris S. A. Varieties of topological groups. II // Bull. Austral. Math. Soc. — 1970. — Vol. 2, no. 1. — P. 1—13.

[75] Morris S. A. Varieties of topological groups. III // Bull. Austral. Math. Soc. — 1970. — Vol. 2, no. 2. — P. 165—178.

[76] Morris S. A. Free compact Abelian groups // Mat. Čas. — 1972. — Vol. 22, no. 2. — P. 141—147.

[77] Morris S. A. Varieties of topological groups: A survey // Colloq. Math. — 1982. — Vol. 46, no. 2. — P. 147—165.

[78] Morris S. A. and Thompson H. B. Invariant metrics on free topological groups // Bull. Austral. Math. Soc. — 1973. — Vol. 9, no. 1. — P. 83—88.

[79] Morris S. A. and Thompson H. B. Free topological groups with no small subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1974. — Vol. 46, no. 3. — P. 431—437.

[80] Nakayama T. Note on free topological groups // Proc. Imp. Acad. Tokyo. — 1943. — Vol. 19. — P. 471—475.

[81] Nummela E. C. Uniform free topological groups and Samuel compactifications // Topol. and Its Appl. — 1982. — Vol. 13, no. 1. — P. 77—83.

[82] Nyikos P. J. Subsets of ${}^{\omega}\omega$ and the Fréchet—Urysohn and α_i-properties // Topol. and Its Appl. — 1992. — Vol. 48. — P. 91—116.

[83] Okunev O. G. A method for constructing examples of M-equivalent spaces // Topol. and Its Appl. — 1990. — Vol. 36, no. 2. — P. 157—171. Исправление: A method for constructing examples of M-equivalent spaces // Topology Appl. — 1993. — Vol. 49, no. 2. — P. 191—192.

[84] Okunev O. and Tamano K. Lindelöf powers and products of function spaces // Proc. Amer. Math. Soc. — 1996. — Vol. 124, no. 9. — P. 2905—2916.

[85] Pestov V. G. Universal arrows to forgetful functors from categories of topological algebra // Bull. Austral. Math. Soc. — 1993. — Vol. 48. — P. 209—249.

[86] Pestov V. Topological groups: Where to from here? // Topol. Proc. — 1999. — Vol. 24. — P. 421—502.

[87] Pestov V. and Yamada K. Free topological groups on metrizable spaces and inductive limits // Topol. and Its Appl. — 1999. — Vol. 98. — P. 291—301.

[88] Porst H. E. Zur Struktur freier topologischer Gruppen // Rostock. Math. Kolloq. — 1991. — No. 44. — P. 5—20.

[89] Przymusiński T. Collectionwise normality and extensions of continuous functions // Fundam. Math. — 1978. — Vol. 98, no. 1. — P. 75—81.

[90] Rachev S. T. and Rüschendorf L. Mass Transportation Problems. Vol. I: Theory. Vol. II: Applications. — New York, Berlin, Heidelberg: Springer, 1998.

[91] Reznichenko E. A. and Uspenskii V. V. Pseudocompact Mal'tsev spaces // Topol. and Its Appl. — 1998. — Vol. 86. — P. 83—104.

[92] Rudin M. E. Lectures on Set Theoretic Topology. — Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1975.

[93] Samuel P. On universal mappings and free topological groups // Bull. Amer. Math. Soc. — 1948. — Vol. 54, no. 6. — P. 591—598.

[94] Shakhmatov D. B. Zerodimensionality of free topological groups and topological groups with noncoinciding dimensions // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. — 1989. — Vol. 37, no. 7—12. — P. 497—506.

[95] Shakhmatov D. B. A survey of current research and open problems in the dimension theory of topological groups // Q& A in General Topology. — 1990. — Vol. 8. — P. 101—128.

[96] Shakhmatov D. B. Imbeddings into topological groups preserving dimensions // Topol. and Its Appl. — 1990. — Vol. 36. — P.181—204.

[97] Sipacheva O. V. On free topological groups with the inductive limit topologies // Annals of the New York Acad. Sci. Vol. 788. — New York: The New York Acad. Sci., 1996. — P. 188—196.

[98] Sipacheva O. V. Free topological groups of spaces and their subspaces // Topol. and Its Appl. — 2000. — Vol. 101. — P. 181—212.

[99] Sipacheva O. V. τ-Locally invariant groups // Topol. and Its Appl. — 2000. — Vol. 107. — P. 169—182.

[100] Sipacheva O. V. and Tkachenko M. G. Thin and bounded subsets of free topological groups // Topol. and Its Appl. — 1990. — Vol. 36. — P. 143—156.

[101] Swierczkowski S. Topologies in free algebras // Proc. London Math. Soc. — 1964. — Vol. 14, no. 55. — P. 566—576.

[102] Thompson H. B. A remark on free topological groups with no small subgroups // J. Austral. Math. Soc. — 1974. — Vol. 18, no. 4. — P. 482—484.

[103] Tkačenko M. G. On topologies of free groups // Czechoslovak Math. J. — 1984. — Vol. 34, no. 4. — P. 541—551.

[104] Tkačenko M. G. Free topological groups and inductive limits // Topol. and Its Appl. — 1994. — Vol. 60. — P. 1—12.

[105] Tkačenko M. G. Topological groups for topologists: Parts I, II // Bol. Soc. Mat. Mexicana. — 1999. — Vol. 5. — P. 735—753; 2000. — Vol. 6. — P. 1—45.

[106] Uspenskii V. V. The Mal'tsev operation on countably compact spaces // Comment. Math. Univ. Carol. — 1989. — Vol. 30, no. 2. — P. 395—402.

[107] Williams S. W. Box products // Handbook of Set-Theoretic Topology / K. Kunen, J. E. Vaughan, Eds. — Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo: North-Holland, 1984. — P. 169—200.

[108] Yamada K. Characterizations of a metrizable space X such that every $A_n(X)$ is a k-space // Topol. and Its Appl. — 1993. — Vol. 49. — P. 75—94.

[109] Yamada K. Tightness of free Abelian topological groups and of finite products of sequential fans // Topol. Proc. — 1997. — Vol. 22. — P. 363—381.