Обратимость линейных отображений, сохраняющих f-порядки*

А. А. АЛИЕВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ali@isa.ru

УДК 512.643

Ключевые слова: монотонные отображения, частичные порядки на матрицах, f-порядки.

Аннотация

В статье исследуются f-аналоги $*$-порядка Дрэйзина, левого и правого $*$-порядков, бриллиантового порядка, σ- и σ_1-порядков. Доказывается, что линейные отображения, монотонные относительно порядков $\overset{*}{<}_f$, $*{<}_f$, $<{*}_f$, $\overset{\diamond}{<}_f$, $\overset{\sigma}{<}_f$ и $\overset{\sigma_1}{<}_f$, обратимы.

Abstract

A. A. Alieva, Invertibility of linear f-order preservers, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 3, pp. 3—11.

In this paper, we prove that monotonic linear transformations with respect to partial orders $\overset{*}{<}_f$, $*{<}_f$, $<{*}_f$, $\overset{\diamond}{<}_f$, $\overset{\sigma}{<}_f$ and $\overset{\sigma_1}{<}_f$ are invertible.

В настоящей работе исследуется вопрос о биективности линейных отображений, сохраняющих частичные порядки на матричной алгебре. Как было показано в [1], линейные отображения, сохраняющие порядка $\overset{*}{<}$, $*{<}$, $<{*}$, $\overset{\diamond}{<}$, $\overset{\sigma}{<}$ и $\overset{\sigma_1}{<}$, являются биективными. Применяя ту же технику, мы обобщаем этот результат на соответсвующие f-порядки: доказывается, что линейные отображения, монотонные относительно порядков $\overset{*}{<}_f$, $*{<}_f$, $<{*}_f$, $\overset{\diamond}{<}_f$, $\overset{\sigma}{<}_f$ и $\overset{\sigma_1}{<}_f$, обратимы.

Обозначим $M_{mn}(\mathbf{F})$ множество всех $(m \times n)$-матриц над полем $\mathbf{F}$, $M_n(\mathbf{F}) = M_{nn}(\mathbf{F})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F})$ — полная линейная группа порядка n, $\Lambda_{mn}(\mathbf{F})$ — множество всех матриц максимального ранга, $\Omega_{mn}(\mathbf{F})$ — множество матриц, чей ранг не превосходит $\min\{m, n\}$, $\mathrm{O}_n(\mathbf{F})$ и $\mathrm{U}_n(\mathbf{F})$ — группы ортогональных и унитарных матриц порядка n соответственно. Символами A^{t}, A^*, $\operatorname{rk} A$, $\operatorname{Im}(A)$ и $\mathcal{M}(A)$ мы будем обозначать транспонированную матрицу, сопряжённую матрицу, ранг, образ и линейную оболочку столбцов матрицы $A \in M_{mn}(\mathbf{F})$ соответственно. Далее, $\sigma_1(A)$ и $\sigma(A)$ обозначают максимальное сингулярное значение и множество всех ненулевых сингулярных значений для вещественных и комплексных матриц. $\mathbb{R}$ — это поле действительных чисел, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел.

Напомним определения нескольких матричных частичных порядков.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта МК-1265.2003.01.

Определение 1. Пусть $\mathbf{F}$ — произвольное поле, $A, B \in M_{mn}(\mathbf{F})$. Говорят, что $A \overset{-}{<} B$, если

$$\operatorname{rk}(B - A) = \operatorname{rk} B - \operatorname{rk} A.$$

Данное отношение называется *минус-порядком*.

Следующий порядок был введён Дрэйзином [6].

Определение 2. Пусть $A, B \in M_{mn}(\mathbb{C})$. Говорят, что $A \overset{*}{<} B$, если

$$A^*A = A^*B \quad \text{и} \quad AA^* = BA^*.$$

Отношение $\overset{*}{<}$ называется *$*$-порядком Дрэйзина*.

Левый и правый $*$-порядки $*<$ и $<*$ на $M_{mn}(\mathbb{C})$, введённые в [4], определяются следующим образом.

Определение 3. Пусть $A, B \in M_{mn}(\mathbb{C})$. Говорят, что $A *< B$, если

$$A^*A = A^*B \quad \text{и} \quad \mathcal{M}(A) \subseteq \mathcal{M}(B).$$

Определение 4. Пусть $A, B \in M_{mn}(\mathbb{C})$. Говорят, что $A <* B$, если

$$AA^* = BA^* \quad \text{и} \quad \mathcal{M}(A^*) \subseteq \mathcal{M}(B^*).$$

Определение 5 ([3]). Пусть $A, B \in M_{m\,n}(\mathbb{C})$. Говорят, что $A \overset{\diamond}{<} B$, если $\operatorname{Im}(A) \subseteq \operatorname{Im}(B)$, $\operatorname{Im}(A^*) \subseteq \operatorname{Im}(B^*)$ и $AA^*A = AB^*A$.

Последние два порядка, которые мы определим, связаны с сингулярными значениями.

Определение 6 ([2]). Пусть $A, B \in M_{mn}(\mathbb{C})$. Говорят, что $A \overset{\sigma}{<} B$, если

$$A \overset{-}{<} B \quad \text{и} \quad \sigma(A) \subseteq \sigma(B).$$

Определение 7 ([7]). Пусть $A, B \in M_{mn}(\mathbb{C})$. Говорят, что $A \overset{\sigma_1}{<} B$, если

$$A \overset{-}{<} B \quad \text{и} \quad \sigma_1(A) \leqslant \sigma_1(B).$$

Определение 8. Говорят, что частичный порядок $\prec_1$ слабее, чем частичный порядок $\prec_2$, если для любых матриц $A, B \in M_{mn}(\mathbf{F})$, удовлетворяющих неравенству $A \prec_2 B$, справедливо $A \prec_1 B$.

Напомним теперь понятие f-порядков, введённых в [9]. Пусть функция $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ биективна и справедливо $f(0) = 0$. Кроме того, пусть $A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)V$ — это сингулярное разложение произвольной матрицы $A \in M_{mn}(\mathbb{C})$. Положим $f(A) = U \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))V$.

Определение 9. Пусть $\prec$ — произвольный частичный порядок на $M_{mn}(\mathbb{C})$ и $A, B \in M_{mn}(\mathbb{C})$. Говорят, что $A \prec_f B$, если $f(A) \prec f(B)$.

Предложение 10. *Отношение $\prec_f$ задаёт частичный порядок на матричной алгебре $M_{mn}(\mathbb{C})$.*

Доказательство. Нам нужно проверить, что отношение $\prec_f$ рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

Рефлексивность и транзитивность очевидны из определения.

Пусть теперь $A \prec_f B$ и $B \prec_f A$. Так как $\prec$ является частичным порядком, то $f(A) = f(B)$. Следовательно, $A = B$, так как функция f биективна. $\square$

Определение 11 ([1]). Пусть $\prec$ — произвольный частичный порядок на матричной алгебре. Для фиксированной матрицы $X \in M_{mn}(\mathbf{F})$ определим следующее множество:

$$P(X, \prec) = \{Y \in M_{mn}(\mathbf{F}) \mid X \prec Y\}.$$

Напомним определение регулярности частичного порядка.

Определение 12 ([1]). Пусть $(S, \prec)$ — частично упорядоченное множество, $\varnothing \neq S \subseteq M_{mn}(\mathbf{F})$. Отношение порядка $\prec$ называется регулярным на множестве S (или просто регулярным, если из контекста ясно, о каком множестве S идёт речь), если выполнены следующие условия:

(i) $\Lambda_{mn}(\mathbf{F}) \subseteq S$;
(ii) если $A \prec B$, то $\operatorname{rk} A \leqslant \operatorname{rk} B$;
(iii) если $A \prec B$ и $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$, то $A = B$;
(iv) если $A \in S \setminus \Lambda_{mn}(\mathbf{F})$, то $P(A, \prec) \setminus \{A\} \neq \varnothing$.

Предложение 13. *Пусть частичный порядок $\prec$ является регулярным на всей матричной алгебре. Тогда $\prec_f$ также является регулярным на $M_{mn}(\mathbb{C})$.*

Доказательство. Справедливость условия (i) очевидна из определения.

Пусть $A \prec_f B$. Это означает, что $f(A) \prec f(B)$. Так как порядок $\prec$ регулярен, имеем $\operatorname{rk} f(A) \leqslant \operatorname{rk} f(B)$. Из биективности f и условия $f(0) = 0$ следует, что $\operatorname{rk} A \leqslant \operatorname{rk} B$. Таким образом, выполнено (ii).

Предположим теперь, что $A \prec_f B$ и $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$. Следовательно, $f(A) \prec f(B)$ и $\operatorname{rk} f(A) = \operatorname{rk} f(B)$; из регулярности $\prec$ получаем $f(A) = f(B)$. Так как f биективна, имеем $A = B$, т. е. выполнено условие (iii).

Наконец, пусть $A \in \Omega_{mn}(\mathbb{C})$. Так как $f(0) = 0$, то $f(A) \in \Omega_{mn}(\mathbb{C})$. Следовательно, существует такая матрица $X \in M_{mn}(\mathbb{C})$, что $f(A) \prec X$ и $X \neq f(A)$. Вследствие биективности f получаем $B = f^{-1}(X) \in P(A, \prec_f) \setminus \{A\}$. $\square$

Назовём частичный порядок $\prec$ *унитарно инвариантным*, если для произвольных матриц $A, B \in M_{mn}(\mathbb{C})$ неравенство $A \prec B$ справедливо тогда и только тогда, когда $UAV \prec UBV$ для произвольных $U, V \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$.

Предложение 14. *Пусть частичный порядок $\prec$ является унитарно инвариантным. Тогда $\prec_f$ также унитарно инвариантен.*

Доказательство. Пусть $A \prec_f B$. Запишем сингулярные разложения матриц A и B: $A = U_1 \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) V_1$, $B = U_2 \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) V_2$. Рассмотрим произвольные матрицы $U, V \in U_n(\mathbb{C})$. Заметим, что сингулярное разложение матрицы

UAV следующее: $UAV = (UU_1)\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)(V_1V)$. Следовательно,

$$f(UAV) = (UU_1)\operatorname{diag}(f(\lambda_1),\dots,f(\lambda_n))(V_1V) = Uf(A)V,$$
$$f(UBV) = (UU_2)\operatorname{diag}(f(\mu_1),\dots,f(\mu_n))(V_2V) = Uf(B)V.$$

Так как порядок $\prec$ унитарно инвариантен, то $f(UAV) \prec f(UBV)$. Таким образом, $UAV \prec_f UBV$. $\square$

Предложение 15. *Пусть частичный порядок $\prec$ слабее, чем $*$-порядок Дрэйзина. Тогда частичный порядок $\prec_f$ также слабее, чем $*$-порядок Дрэйзина.*

Доказательство. Пусть $A \overset{*}{<} B$. Из [9, лемма 6] следует, что $A \overset{*}{<}_f B$. По определению это означает, что $f(A) \overset{*}{<} f(B)$. Следовательно, $f(A) \prec f(B)$ и, значит, $A \prec_f B$. $\square$

Теорема 16 ([1, предложение 3.11]). *Пусть частичный порядок $\prec$ регулярен, унитарно инвариантен и является более слабым, чем $*$-порядок Дрэйзина, и пусть линейное отображение $T\colon M_{mn}(\mathbb{C}) \to M_{mn}(\mathbb{C})$ монотонно относительно него (т. е. T сохраняет отношение $\prec$), $m, n > 1$. Тогда либо $T \equiv 0$, либо существует такое отображение T', задаваемое либо как $T'(X) = UXV$ для всех $X \in M_{mn}(\mathbb{C})$, либо, в случае $m = n$, как $T'(X) = UX^{\mathrm{t}}V$ для всех $X \in M_{mn}(\mathbb{C})$, где $U = \operatorname{diag}(1, u_2, \dots, u_m) \in M_m(\mathbb{R})$, $1 \geqslant u_2 \geqslant \dots \geqslant u_m \geqslant 0$, $V = \operatorname{diag}(1, v_2, \dots, v_n) \in M_n(\mathbb{R})$, $1 \geqslant v_2 \geqslant \dots \geqslant v_n \geqslant 0$, что, во-первых, T' монотонно относительно порядка $\prec$ и, во-вторых, обратимость отображения T' влечёт обратимость исходного отображения T.*

Теперь мы можем доказать обратимость линейных отображений, монотонных относительно одного из следующих порядков: $\overset{*}{<}_f$, $*\!<_f$, $<\!*_f$, $\overset{\diamond}{<}_f$, $\overset{\sigma}{<}_f$ и $\overset{\sigma_1}{<}_f$.

Предложение 17. *Пусть $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — биективная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$, и линейное отображение $T\colon M_{mn}(\mathbb{C}) \to M_{mn}(\mathbb{C})$ монотонно относительно $\overset{*}{<}_f$-порядка, $m, n > 1$. Тогда либо $T \equiv 0$, либо отображение T обратимо.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из [1, предложение 5.2], так как $A \overset{*}{<}_f B \iff A \overset{*}{<} B$ (см. [9, лемма 6]). $\square$

Предложение 18. *Пусть $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — биективная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$, $T\colon M_{mn}(\mathbb{C}) \to M_{mn}(\mathbb{C})$ — линейное отображение, монотонное относительно $*\!<_f$-порядка, $m, n > 1$. Тогда либо $T \equiv 0$, либо отображение T обратимо.*

Доказательство. Так как $*\!<$-порядок является регулярным, унитарно инвариантным и слабее $*$-порядка Дрэйзина [1, предложение 6.1], то из предложений 13, 15 и 14 следует, что $*\!<_f$-порядок регулярен, унитарно инвариантен и является более слабым, чем $*$-порядок Дрэйзина. Следовательно, можно применить теорему 16.

Предположим, что отображение T не есть тождественный нуль. Согласно теореме 16 нам нужно показать, что отображение T' обратимо. Для произвольных i, j, $1 \leqslant i \leqslant m-1$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, рассмотрим следующие матрицы:

$$\begin{aligned} A &= E_{ij} + E_{i\,j+1} + E_{i+1\,j} + E_{i+1\,j+1}, \\ B &= 2E_{ij} + 2E_{i+1\,j+1}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что $A \overset{*}{<} B$. Следовательно, $A *\!<_f B$. Так как отображение T' монотонно относительно $*\!<_f$-порядка, имеем

$$\begin{aligned} C &= T'(A) = \\ &= (u_i v_j E_{ij} + u_i v_{j+1} E_{i\,j+1} + u_{i+1} v_j E_{i+1\,j} + u_{i+1} v_{j+1} E_{i+1\,j+1}) *\!<_f \\ &*\!<_f (2u_i v_j E_{ij} + 2u_{i+1} v_{j+1} E_{i+1\,j+1}) = T'(B) = D. \end{aligned}$$

Выпишем сингулярное разложение матрицы C:

$$C = P\Big(\sqrt{u_i^2 + u_{i+1}^2}\sqrt{v_j^2 + v_{j+1}^2} E_{ii}\Big) Q,$$

где

$$\begin{aligned} P &= E_{11} + \ldots + E_{i-1\,i-1} + \frac{u_i}{\sqrt{u_i^2 + u_{i+1}^2}} E_{ii} - \frac{u_{i+1}}{\sqrt{u_i^2 + u_{i+1}^2}} E_{i\,i+1} + \\ &+ \frac{u_{i+1}}{\sqrt{u_i^2 + u_{i+1}^2}} E_{i+1\,i} + \frac{u_i}{\sqrt{u_i^2 + u_{i+1}^2}} E_{i+1\,i+1} + E_{i+2\,i+2} + \ldots + E_{mm}, \\ Q &= E_{11} + \ldots + E_{j-1\,j-1} + \frac{v_j}{\sqrt{v_j^2 + v_{j+1}^2}} E_{jj} + \frac{v_{j+1}}{\sqrt{v_j^2 + v_{j+1}^2}} E_{j\,j+1} - \\ &- \frac{v_{j+1}}{\sqrt{v_j^2 + v_{j+1}^2}} E_{j+1\,j} + \frac{v_j}{\sqrt{v_j^2 + v_{j+1}^2}} E_{j+1\,j+1} + E_{j+2\,j+2} + \ldots + E_{nn}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(C) &= P\Big(f\Big(\sqrt{u_i^2 + u_{i+1}^2}\sqrt{v_j^2 + v_{j+1}^2}\Big) E_{ii}\Big) Q = \frac{f\left(\sqrt{u_i^2 + u_{i+1}^2}\sqrt{v_j^2 + v_{j+1}^2}\right)}{\sqrt{u_i^2 + u_{i+1}^2}\sqrt{v_j^2 + v_{j+1}^2}} \times \\ &\times (u_i v_j E_{ij} + u_i v_{j+1} E_{i\,j+1} + u_{i+1} v_j E_{i+1\,j} + u_{i+1} v_{j+1} E_{i+1\,j+1}), \\ f(D) &= f(2u_i v_j) E_{ij} + f(2u_{i+1} v_{j+1}) E_{i+1\,j+1}. \end{aligned}$$

По определению 3 из $C *\!<_f D$ мы получаем

$$\begin{aligned} f(C)^* f(C) &= \frac{f^2\left(\sqrt{u_i^2 + u_{i+1}^2}\sqrt{v_j^2 + v_{j+1}^2}\right)}{v_j^2 + v_{j+1}^2} \times \\ &\times (v_j^2 E_{jj} + v_j v_{j+1} E_{j\,j+1} + v_j v_{j+1} E_{j+1\,j} + v_{j+1}^2 E_{j+1\,j+1}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{f\left(\sqrt{u_i^2+u_{i+1}^2}\sqrt{v_j^2+v_{j+1}^2}\right)}{\sqrt{u_i^2+u_{i+1}^2}\sqrt{v_j^2+v_{j+1}^2}}(f(2u_iv_j)u_iv_jE_{jj}+f(2u_{i+1}v_{j+1})u_{i+1}v_jE_{j\,j+1}+$$
$$+f(2u_iv_j)u_iv_{j+1}E_{j+1\,j}+f(2u_{i+1}v_{j+1})u_{i+1}v_{j+1}E_{j+1\,j+1}) = f(C)^*f(D).$$

Предположим, что $u_iv_j \neq 0$. Если $v_{j+1} = 0$, то из $\mathcal{M}(f(C)) \subseteq \mathcal{M}(f(D))$ следует, что $u_{i+1} = 0$. Тогда из $f(C)^*f(C) = f(C)^*f(D)$ мы получаем, что $f(u_iv_j) = f(2u_iv_j)$, что противоречит биективности f. Таким образом, $v_{j+1} \neq 0$, и из $f(C)^*f(C) = f(C)^*f(D)$ мы получаем, что $u_{i+1} \neq 0$. Следовательно, матрицы U и V обратимы, так как $u_1 = v_1 = 1$. Значит, отображение T' биективно. □

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Предложение 19. *Пусть $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — биективная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$, $T\colon M_{mn}(\mathbb{C}) \to M_{mn}(\mathbb{C})$ — линейное отображение, монотонное относительно $<*_f$-порядка, $m,n > 1$. Тогда либо $T \equiv 0$, либо отображение T обратимо.*

Предложение 20. *Пусть $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — биективная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$, $T\colon M_{mn}(\mathbb{C}) \to M_{mn}(\mathbb{C})$ — линейное отображение, монотонное относительно $\overset{\diamond}{<}_f$-порядка, $m,n > 1$. Тогда либо $T \equiv 0$, либо отображение T обратимо.*

Доказательство. Так как $\overset{\diamond}{<}$-порядок является регулярным [1, предложение 7.1], унитарно инвариантным и слабее $*$-порядка Дрэйзина [3], то из предложений 13, 15 и 14 следует, что $\overset{\diamond}{<}_f$-порядок регулярен, унитарно инвариантен и является более слабым, чем $*$-порядок Дрэйзина. Следовательно, можно применить теорему 16.

Предположим, что отображение T не есть тождественный нуль. Согласно теореме 16 нам нужно показать, что отображение T' обратимо. Рассмотрим те же матрицы A и B, что в предложении 18. По определению 5 из $C = T'(A) \overset{\diamond}{<}_f T'(B) = D$ мы получаем следующее:

$$f(C)f(C)^*f(C) = \frac{f^3\left(\sqrt{u_i^2+u_{i+1}^2}\sqrt{v_j^2+v_{j+1}^2}\right)}{\sqrt{u_i^2+u_{i+1}^2}\sqrt{v_j^2+v_{j+1}^2}} \times$$
$$\times (u_iv_jE_{ij}+u_iv_{j+1}E_{i\,j+1}+u_{i+1}v_jE_{i+1\,j}+u_{i+1}v_{j+1}E_{i+1\,j+1}) =$$
$$= \frac{f^2\left(\sqrt{u_i^2+u_{i+1}^2}\sqrt{v_j^2+v_{j+1}^2}\right)}{(u_i^2+u_{i+1}^2)(v_j^2+v_{j+1}^2)}(u_iv_j(f(2u_iv_j)u_iv_j+f(2u_{i+1}v_{j+1})u_{i+1}v_{j+1})E_{ij}+$$
$$+u_iv_{j+1}(f(2u_iv_j)u_iv_j+f(2u_{i+1}v_{j+1})u_{i+1}v_{j+1})E_{i\,j+1}+$$
$$+u_{i+1}v_j(f(2u_iv_j)u_iv_j+f(2u_{i+1}v_{j+1})u_{i+1}v_{j+1})E_{i+1\,j}+$$
$$+u_{i+1}v_{j+1}(f(2u_iv_j)u_iv_j+f(2u_{i+1}v_{j+1})u_{i+1}v_{j+1})E_{i+1\,j+1}) = f(C)f(D)^*f(C).$$

Предположим, что $u_i v_j \neq 0$. Если $v_{j+1} = 0$, то из $\mathrm{Im}(f(C)) \subseteq \mathrm{Im}(f(D))$ следует, что $u_{i+1} = 0$. Аналогично, если $u_{i+1} = 0$, то и $v_{j+1} = 0$ из $\mathrm{Im}(f(C)^*) \subseteq$ $\subseteq \mathrm{Im}(f(D)^*)$. Таким образом, $u_{i+1} = 0$ тогда и только тогда, когда $v_{j+1} = 0$. Однако если $u_{i+1} = v_{j+1} = 0$, то из $f(C)f(C)^*f(C) = f(C)f(D)^*f(C)$ мы получаем, что $f(u_i v_j) = f(2u_i v_j)$, что противоречит биективности f. Следовательно, матрицы U и V обратимы, так как $u_1 = v_1 = 1$. Значит, отображение T' биективно. □

Предложение 21. *Пусть $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — биективная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$, $T\colon M_{mn}(\mathbb{C}) \to M_{mn}(\mathbb{C})$ — линейное отображение, монотонное относительно $\overset{\sigma}{<}_f$-порядка, $m, n > 1$. Тогда либо $T \equiv 0$, либо отображение T обратимо.*

Доказательство. Так как $\overset{\sigma}{<}$-порядок является регулярным [1, предложение 8.1], унитарно инвариантным и слабее $*$-порядка Дрэйзина [2], то из предложений 13, 15 и 14 следует, что $\overset{\sigma}{<}_f$-порядок регулярен, унитарно инвариантен и является более слабым, чем $*$-порядок Дрэйзина. Следовательно, можно применить теорему 16.

Предположим, что отображение T не есть тождественный нуль. Согласно теореме 16 нам нужно показать, что отображение T' обратимо. Рассмотрим те же матрицы A и B, что в предложении 18. Тогда для матриц $C = T'(A)$, $D = T'(B)$ мы имеем

$$\sigma(C) = \left\{ f\left(\sqrt{u_i^2 + u_{i+1}^2} \sqrt{v_j^2 + v_{j+1}^2} \right) \right\},$$
$$\sigma(D) = \{ f(2u_i v_j), f(2u_{i+1} v_{j+1}) \}.$$

По определению 5 из $C \overset{\sigma}{<}_f D$ мы получаем, что либо

$$f\left(\sqrt{u_i^2 + u_{i+1}^2} \sqrt{v_j^2 + v_{j+1}^2} \right) = f(2u_i v_j),$$

либо

$$f\left(\sqrt{u_i^2 + u_{i+1}^2} \sqrt{v_j^2 + v_{j+1}^2} \right) = f(2u_{i+1} v_{j+1}).$$

В силу инъективности f отсюда следует, что либо

$$\sqrt{u_i^2 + u_{i+1}^2} \sqrt{v_j^2 + v_{j+1}^2} = 2u_i v_j,$$

либо

$$\sqrt{u_i^2 + u_{i+1}^2} \sqrt{v_j^2 + v_{j+1}^2} = 2u_{i+1} v_{j+1}$$

соответственно. Предположим, что $u_i v_j \neq 0$. Тогда

$$u_i^2 v_{j+1}^2 + u_{i+1}^2 v_j^2 + u_{i+1}^2 v_{j+1}^2 = 3u_i^2 v_j^2 \quad \text{или} \quad u_i^2 v_j^2 + u_i^2 v_{j+1}^2 + u_{i+1}^2 v_j^2 = 3u_{i+1}^2 v_{j+1}^2.$$

В обоих случаях мы получаем $u_{i+1} v_{j+1} \neq 0$. Следовательно, матрицы U и V обратимы, так как $u_1 = v_1 = 1$. Значит, отображение T' биективно. □

Предложение 22. *Пусть* $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — *биективная функция, удовлетворяющая условию* $f(0)=0$, $T\colon M_{mn}(\mathbb{C}) \to M_{mn}(\mathbb{C})$ — *линейное отображение, монотонное относительно* $\overset{\sigma_1}{<}_f$*-порядка,* $m,n>1$. *Тогда либо* $T\equiv 0$, *либо отображение* T *обратимо.*

Доказательство. Так как $\overset{\sigma_1}{<}$-порядок является регулярным [1, предложение 8.1], унитарно инвариантным и слабее $*$-порядка Дрэйзина [2], то из предложений 13, 15 и 14 следует, что $\overset{\sigma_1}{<}_f$-порядок регулярен, унитарно инвариантен и является более слабым, чем $*$-порядок Дрэйзина. Следовательно, можно применить теорему 16.

Предположим, что отображение T не есть тождественный нуль. Согласно теореме 16 нам нужно показать, что отображение T' обратимо. Рассмотрим два случая.

1. $f(x)=\lambda x$, $\lambda>0$. Это означает, что $f(X)=\lambda X$ для любой матрицы X. С учётом этого легко проверить, что для любой пары индексов i, j, $1\leqslant i\leqslant m-1$, $1\leqslant j\leqslant n-1$, справедливо

$$E_{ij} \overset{\sigma_1}{<}_f E_{i\,j+1} - E_{i+1\,j} + E_{i+1\,j+1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} C = T'(E_{ij}) = u_i v_j E_{ij} &\overset{\sigma_1}{<}_f \\ &\overset{\sigma_1}{<}_f u_i v_{j+1} E_{i\,j+1} - u_{i+1} v_j E_{i+1\,j} + u_{i+1} v_{j+1} E_{i+1\,j+1} = \\ &= T'(E_{i\,j+1} - E_{i+1\,j} + E_{i+1\,j+1}) = D \end{aligned}$$

и, значит $\lambda C \overset{-}{<} \lambda D$. Предполагая, что $u_i v_j \neq 0$, мы получаем $u_{i+1} v_{j+1} \neq 0$. Таким образом, матрицы U и V обратимы, так как $u_1 = v_1 = 1$. Следовательно, отображение T' биективно.

2. $f(x)\neq \lambda x$. В этом случае мы можем найти такие α, β, $\alpha\neq\beta$, что $f(\alpha\sqrt{2}) = f(\beta)\sqrt{2}$. Для произвольной пары индексов i, j, $1\leqslant i\leqslant m-1$, $1\leqslant j\leqslant n-1$, рассмотрим следующие матрицы:

$$A = \alpha E_{ij} + \alpha E_{i\,j+1}, \quad B = \beta E_{ij} + \beta E_{i+1\,j+1}.$$

Так как

$$f(A) = \frac{f(\alpha\sqrt{2})}{\sqrt{2}} E_{ij} + \frac{f(\alpha\sqrt{2})}{\sqrt{2}} E_{i\,j+1}, \quad f(B) = f(\beta)E_{ij} + f(\beta)E_{i+1\,j+1},$$

то легко проверить, что $A \overset{\sigma_1}{<}_f B$. Следовательно,

$$T'(A) = \alpha u_i v_j E_{ij} + \alpha u_i v_{j+1} E_{i\,j+1} \overset{\sigma_1}{<}_f \beta u_i v_j E_{ij} + \beta u_{i+1} v_{j+1} E_{i+1\,j+1} = T'(B).$$

По определению 7 имеем

$$f(T'(A)) = f\left(\alpha u_i \sqrt{v_j^2 + v_{j+1}^2}\right) \frac{v_j}{\sqrt{v_j^2+v_{j+1}^2}} E_{ij} +$$

$$+ f\left(\alpha u_i \sqrt{v_j^2 + v_{j+1}^2}\right) \frac{v_{j+1}}{\sqrt{v_j^2 + v_{j+1}^2}} E_{i\,j+1} \,\bar{<}$$

$$\bar{<}\, f(\beta u_i v_j) E_{ij} + f(\beta u_{i+1} v_{j+1}) E_{i+1\,j+1} = f(T'(B)).$$

Предположив, что $v_{j+1} = 0$, мы получим $f(\alpha u_i v_j) = f(\beta u_i v_j)$, что противоречит тому, что функция f биективна и $\alpha \neq \beta$. Таким образом, $v_{j+1} \neq 0$ и, следовательно, $u_{i+1} \neq 0$ (иначе мы получим противоречие с $f(T'(A)) \,\bar{<}\, f(T'(B))$). Так как $u_1 = v_1 = 1$, мы получаем, что отображение T' биективно. $\square$

В заключение отметим, что все результаты верны и над полем действительных чисел при замене унитарных матриц на ортогональные.

Литература

[1] Alieva A., Guterman A. Monotone linear transformations on matrices are invertible // Comm. Algebra. — To appear.

[2] Baksalary J, K., Hauke J. Partial orderings on matrices referring to singular values or eigenvalues // Linear Algebra Appl. — 1987. — Vol. 96. — P. 17—26.

[3] Baksalary J. K., Hauke J. A further algebraic version of Cochran's theorem and matrix partial orderings // Linear Algebra Appl. — 1990. — Vol. 127. — P. 157—169.

[4] Baksalary J. K., Mitra S. K. Left-star and right-star partial orderings // Linear Algebra Appl. — 1991. — Vol. 149. — P. 73—89.

[5] Baksalary J. K., Pukelsheim F., Styan G. P. H. Some properties of matrix partial orderings // Linear Algebra Appl. — 1989. — Vol. 119. — P. 57—85.

[6] Drazin M. P. Natural structures on semigroups with involution // Bull. Amer. Math. Soc. — 1978. — Vol. 84, no. 1. — P. 139—141.

[7] Groß J. A note on rank-subtractivity ordering // Linear Algebra Appl. — 1999. — Vol. 289. — P. 151—160.

[8] Hartwig R. E. How to partially order regular elements // Math. Japonica. — 1980. — Vol. 25, no. 1. — P. 1—13.

[9] Hauke J., Markiewicz A., Szulc T. Inter- and extrapolatory properties of matrix partial orderings // Linear Algebra Appl. — 2001. — Vol. 332—334. — P. 437—445.

[10] Li C.-K., Tsing N.-K. Linear preserver problems: A brief introduction and some special techniques // Linear Algebra Appl. — 1992. — Vol. 162—164. — P. 217—235.

[11] Nambooripad K. S. S. The natural partial order on a regular semigroup // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1980. — Vol. 23. — P. 249—260.

[12] Pierce S. and others. A survey of linear preserver problems // Linear and Multilinear Algebra. — 1992. — Vol. 33. — P. 1—119.