Почти изоморфизм абелевых групп и их определяемость своими подгруппами

С. Я. ГРИНШПОН, А. К. МОРДОВСКОЙ
Томский государственный университет

УДК 512.541

Ключевые слова: почти изоморфные группы, t-изоморфизм, s-изоморфизм, корректная группа, ранг.

Аннотация

Абелева группа A называется корректной, если для любой группы B из того, что $A \cong B'$ и $B \cong A'$, где A' и B' — подгруппы групп A и B соответственно, следует изоморфизм $A \cong B$. Будем говорить, что группа A определяется своими подгруппами (своими собственными подгруппами), если для любой группы B из того, что между множеством всех подгрупп (всех собственных подгрупп) групп A и B можно установить биективное соответствие, при котором соответствующие подгруппы изоморфны, вытекает $A \cong B$. В статье устанавливаются связи между корректностью абелевых групп и их определяемостью своими подгруппами (своими собственными подгруппами). Получены критерии определяемости прямых сумм циклических групп своими подгруппами и своими собственными подгруппами, а также критерий корректности таких групп.

Abstract

S. Ya. Grinshpon, A. K. Mordovskoi, Almost isomorphism of Abelian groups and determinability of Abelian groups by their subgroups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 3, pp. 21—36.

An Abelian group A is called correct if for any Abelian group B isomorphisms $A \cong B'$ and $B \cong A'$, where A' and B' are subgroups of the groups A and B, respectively, imply the isomorphism $A \cong B$. We say that a group A is determined by its subgroups (its proper subgroups) if for any group B the existence of a bijection between the sets of all subgroups (all proper subgroups) of groups A and B such that corresponding subgroups are isomorphic implies $A \cong B$. In this paper, connections between the correctness of Abelian groups and their determinability by their subgroups (their proper subgroups) are established. Certain criteria of determinability of direct sums of cyclic groups by their subgroups and their proper subgroups, as well as a criterion of correctness of such groups, are obtained.

Введение

Две абелевы группы называются *почти изоморфными*, если каждая из них изоморфна некоторой подгруппе другой группы [15]. Две абелевы группы называются *почти изоморфными по подгруппам с некоторым свойством*, если

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 3, с. 21—36.

каждая из них изоморфна некоторой подгруппе другой группы, обладающей этим свойством. Задача об изоморфизме почти изоморфных групп привлекала внимание многих алгебраистов. В одной из тестовых проблем Капланского [16] ставится вопрос об изоморфизме абелевых групп, почти изоморфных по прямым слагаемым. Для счётных редуцированных примарных групп эта проблема имеет положительное решение [16], однако в [11] приведён пример неизоморфных p-групп, каждая из которых изоморфна прямому слагаемому другой группы. В ряде работ исследуется, когда из почти изоморфизма абелевых групп по сервантным или вполне характеристическим подгруппам вытекает их изоморфизм (например, [2, 3, 6, 8, 13]).

Известная теоретико-множественная теорема Кантора—Шрёдера—Бернштейна явилась источником постановки аналогичных задач в алгебре не только для абелевых групп. В [10] изучается теоретико-кольцевой, а в [17] теоретико-категорный аналоги теоремы Кантора—Шрёдера—Бернштейна. Рассматриваются также почти изоморфные модули (например, [5, 9, 14]). Подобные задачи возникают и в других областях математики, в частности в топологии [1, с. 20—21].

Существует также логический аспект задачи о почти изоморфизме, основанный на том, что если модули почти изоморфны по чистым подмодулям, то они элементарно эквивалентны [12].

Для рассмотренных аналогов теоремы Кантора—Шрёдера—Бернштейна характерно, в отличие от самой теоремы, наличие примеров отрицательного решения соответствующих задач, а также изучение классов объектов, для которых эти задачи имеют положительное решение.

Назовём абелеву группу A *корректной*, если для любой группы B из того, что $A \cong B'$ и $B \cong A'$, где A', B' — подгруппы групп A и B соответственно, следует изоморфизм $A \cong B$.

Для абелевой группы A обозначим через $\mathrm{S}(A)$ и $\mathrm{Sub}(A)$ множества её подгрупп и её собственных подгрупп. Будем говорить, что группы A и B *t-изоморфны* (обозначение $A \overset{t}{\cong} B$), если существует биективное отображение множества $\mathrm{S}(A)$ на множество $\mathrm{S}(B)$, при котором соответствующие подгруппы групп A и B изоморфны. Будем говорить, что группы A и B *s-изоморфны* (обозначение $A \overset{s}{\cong} B$), если существует биективное отображение множества $\mathrm{Sub}(A)$ на множество $\mathrm{Sub}(B)$, при котором соответствующие подгруппы групп A и B изоморфны. Естественно возникает вопрос: в каких случаях t-изоморфные (s-изоморфные) группы изоморфны.

Если абелева группа A такова, что для любой абелевой группы B из $A \overset{t}{\cong} B$ ($A \overset{s}{\cong} B$) вытекает $A \cong B$, то будем говорить, что *группа A определяется своими подгруппами* (*своими собственными подгруппами*).

Настоящая статья состоит из трёх параграфов. Результаты первого параграфа носят общий характер. В этом параграфе устанавливаются связи между корректностью абелевых групп и их определяемостью своими подгруппами и своими собственными подгруппами. Во втором параграфе получен критерий корректности прямых сумм циклических групп и их определяемости своими подгруппами. Полный ответ на вопрос, в каких случаях прямая сумма циклических групп определяется своими собственными подгруппами, получен в третьем параграфе.

§ 1. Связь между корректностью абелевых групп и их определяемостью своими подгруппами

Теорема 1.1. *Если абелевы группы A и B почти изоморфны, то они t-изоморфны.*

Доказательство. Пусть группы A и B почти изоморфны. Тогда существует подгруппа A_0 группы A, такая что $B \cong A_0$, и существует подгруппа B_0 группы B, такая что $A \cong B_0$. Пусть $\phi\colon A \to B_0$ и $\psi\colon B \to A_0$ — изоморфизмы. Рассмотрим группу $A_1 = \psi(B_0) < A_0 < A$, т. е. $A_1 < A$ и $A_1 \cong A$. Тогда

$$\mathrm{S}(A_1) \subset \mathrm{S}(A_0) \subset \mathrm{S}(A). \tag{1}$$

Так как $A_1 \cong A$, то между $\mathrm{S}(A)$ и $\mathrm{S}(A_1)$ можно установить биекцию f так, что соответствующие подгруппы будут изоморфны, а именно $f\colon \mathrm{S}(A) \to \mathrm{S}(A_1)$, где $f(A^*) = \psi\phi(A^*)$ для всякой подгруппы A^* группы A. Если разбить множества $\mathrm{S}(A)$, $\mathrm{S}(A_0)$, $\mathrm{S}(A_1)$ на классы эквивалентности по отношению изоморфизма, то получим, что мощности классов эквивалентности множеств $\mathrm{S}(A)$ и $\mathrm{S}(A_1)$, чьи элементы изоморфны одной и той же группе, равны. В силу включений (1) получим, что мощности тех классов эквивалентности множеств $\mathrm{S}(A)$ и $\mathrm{S}(A_0)$, чьи элементы изоморфны одной и той же группе, равны. Следовательно, можно установить биекцию между множествами $\mathrm{S}(A)$ и $\mathrm{S}(A_0)$ так, что соответствующие подгруппы будут изоморфными. В силу того, что существует биекция между множествами $\mathrm{S}(A_0)$ и $\mathrm{S}(B)$ с таким свойством, получаем $A \overset{t}{\cong} B$.

Учитывая, что любые две t-изоморфные группы почти изоморфны, получаем такие следствия из теоремы 1.1.

Следствие 1.2. *Абелевы группы A и B t-изоморфны тогда и только тогда, когда они почти изоморфны.*

Следствие 1.3. *Абелева группа A определяется своими подгруппами тогда и только тогда, когда A — корректная группа.*

Рассмотрим связь между понятиями s-изоморфизма и t-изоморфизма. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1.4. *Пусть A_0 — собственная подгруппа группы A. Если $A_0 \cong A$, то существует бесконечное множество собственных подгрупп группы A, изоморфных самой группе A.*

Доказательство. Пусть A_0 — собственная подгруппа группы A и $\phi\colon A \to A_0$ — изоморфизм. Рассмотрим подгруппу A_1 группы A, где $A_1 = \phi(A_0)$. Тогда A_1 — собственная подгруппа группы A_0 и $A_1 \cong A_0 \cong A$. Если для натурального числа n построена собственная подгруппа A_n группы A, то полагаем $A_{n+1} = \phi(A_n)$. Тогда A_{n+1} — собственная подгруппа группы A_n и $A_{n+1} \cong A$ для любого натурального числа n. Итак, получаем строго убывающую последовательность $A_0 > A_1 > \ldots > A_n > A_{n+1} > \ldots$ подгрупп группы A, каждая из которых изоморфна группе A.

Покажем, что t-изоморфизм абелевых групп влечёт их s-изоморфизм. Если A и B — абелевы группы, то обозначим через $\mathrm{S}_A(B)$ множество всех собственных подгрупп группы B, изоморфных группе A.

Теорема 1.5. *Если абелевы группы A и B t-изоморфны, то они s-изоморфны.*

Доказательство. Пусть $A \overset{t}{\cong} B$. Если $A \cong B$, то понятно, что группы A и B s-изоморфны.

Пусть $A \ncong B$. Существуют подгруппы A_0 и B_0 групп A и B соответственно, что $A \cong B_0$, $B \cong A_0$. Ясно, что $A_0 \neq A$ и $B_0 \neq B$. Пусть $\psi\colon B \to A_0$ и $\phi\colon A \to B_0$ — изоморфизмы. Рассмотрим $A_1 = \psi(B_0) < A_0 < A$. Тогда A_1 — собственная подгруппа группы A, изоморфная этой группе. По лемме 1.4 множество собственных подгрупп группы A, изоморфных самой группе A, бесконечно, т. е. $\mathrm{S}_A(A)$ — бесконечное множество. Так как из $A \overset{t}{\cong} B$ следует биекция между множествами $\mathrm{S}_A(A) \cup \{A\}$ и $\mathrm{S}_A(B)$, то можно установить биекцию f_A между множествами $\mathrm{S}_A(A)$ и $\mathrm{S}_A(B)$. Проведя аналогичные рассуждения для $B_1 = \phi(A_0) < B_0 < B$, получим, что можно установить биекцию f_B между множествами $\mathrm{S}_B(A)$ и $\mathrm{S}_B(B)$.

Теперь между множеством собственных подгрупп группы A и множеством собственных подгрупп группы B можно установить биекцию f следующим образом. Для подгрупп, не изоморфных ни A, ни B, биекция f совпадает с биекцией, осуществляющей t-изоморфизм. Для подгрупп, изоморфных группе A, биекция f совпадает с биекцией f_A. Для подгрупп, изоморфных группе B, биекция f совпадает с биекцией f_B. При такой биекции f соответствующие подгруппы изоморфны. Следовательно, $A \overset{s}{\cong} B$.

Следствие 1.6. *Абелева группа определяется своими подгруппами, если она определяется своими собственными подгруппами.*

Применяя следствие 1.3, получим следующее утверждение.

Следствие 1.7. *Если абелева группа определяется своими собственными подгруппами, то она корректна.*

Теорема 1.8. *Абелевы группы A и B, содержащие собственные подгруппы, изоморфные самим группам, t-изоморфны тогда и только тогда, когда они s-изоморфны.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 1.5. Докажем достаточность. Пусть A и B — группы, содержащие собственные подгруппы, изоморфные самим группам, и $A \overset{s}{\cong} B$. Существует собственная подгруппа A_0 группы A, такая что $A_0 \cong A$. Так как $A \overset{s}{\cong} B$, то существует биективное отображение f множества собственных подгрупп группы A на множество собственных подгрупп группы B, такое что соответствующие подгруппы изоморфны. Тогда $f(A_0) < B$ и $f(A_0) \cong A_0 \cong A$. Аналогичные рассуждения для группы B приводят к тому, что группы A и B почти изоморфны. Применяя теорему 1.1, получаем $A \overset{t}{\cong} B$.

Теорема 1.9. *Пусть A — абелева группа без кручения, не являющаяся делимой. Группа A определяется своими собственными подгруппами тогда и только тогда, когда A — корректная группа.*

Доказательство. Необходимость вытекает из следствия 1.7. Докажем достаточность. Пусть A — корректная абелева группа без кручения, не являющаяся делимой, и B — такая абелева группа, что $A \overset{s}{\cong} B$. Существует такое натуральное число n, что $nA \neq A$, и так как A — группа без кручения, то $nA \cong A$. B также группа без кручения. Действительно, если предположить, что в группе B существует ненулевой элемент b конечного порядка, то $\langle b\rangle$ — конечная подгруппа группы B, а тогда и во множестве подгрупп группы A была бы конечная подгруппа A_1, такая что $|A_1| = |\langle b\rangle| = o(b)$, чего быть не может. Если B не является делимой группой, то существует такое натуральное число m, что $mB \neq B$, и так как B — группа без кручения, то $mB \cong B$. Применяя теорему 1.8, получаем, что $A \overset{t}{\cong} B$, а значит, по следствию 1.2 группы A и B почти изоморфны. Учитывая корректность группы A, имеем $A \cong B$.

Покажем, что группа B не может быть делимой группой. Пусть B — делимая группа конечного ранга и её ранг $\mathrm{r}(B) = n$, где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Запишем группу A в виде $A = D \oplus R$, где D — делимая часть группы A, а R — редуцированная часть этой группы, причём $R \neq 0$. Пусть $\mathrm{r}(D) = m$. Наибольший ранг собственных делимых подгрупп группы B равен $n - 1$. Наибольшая собственная делимая подгруппа группы A совпадает с D, и её ранг равен m. Из s-изоморфизма групп A и B следует, что $n - 1 = m$. Так как в группе A есть единственная собственная делимая подгруппа ранга m, а в группе B есть по крайней мере две собственных делимых подгруппы ранга $n - 1$, то это противоречит s-изоморфизму групп A и B. Если же $\mathrm{r}(B) = 1$, т. е. $B \cong \mathbb{Q}$, то всякая собственная подгруппа группы B имеет ранг 1 и типы собственных подгрупп группы B пробегают множество всевозможных типов, отличных от типа, представляемого характеристикой $(\infty, \infty, \ldots, \infty, \ldots)$. Ясно, что тогда из s-изоморфизма групп A и B вытекает $\mathrm{r}(A) = 1$ и $A \cong B \cong \mathbb{Q}$, чего быть не может, так как редуцированная часть группы A отлична от нуля.

Пусть теперь B — делимая группа без кручения, имеющая бесконечный ранг. $B = \bigoplus\limits_{i\in I} B_i$, где $B_i \cong \mathbb{Q}$ для всякого $i \in I$, $|I| \geqslant \aleph_0$. Пусть $i_0 \in I$ и $B_1 = \bigoplus\limits_{I\setminus\{i_0\}} B_i$.

B_1 — собственная подгруппа группы B, изоморфная самой группе B. Тогда, применяя теорему 1.8 и следствие 1.2, получаем $A \cong B$, чего быть не может, так как группа A не является делимой.

Следствие 1.10. *Пусть A — абелева группа без кручения, не являющаяся делимой. Следующие условия эквивалентны:*

1) *A — корректная группа,*
2) *A определяется своими собственными подгруппами,*
3) *A определяется своими подгруппами.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2) вытекает из теоремы 1.9. Эквивалентность условий 1) и 3) — из следствия 1.3.

Перейдём теперь к рассмотрению делимых групп без кручения.

Теорема 1.11. *Пусть A — делимая группа без кручения. Следующие условия эквивалентны:*

1) *A — корректная группа,*
2) *A определяется своими собственными подгруппами,*
3) *A определяется своими подгруппами,*
4) *A имеет конечный ранг.*

Доказательство. Покажем эквивалентность условий 1) и 4).

1) $\Longrightarrow$ 4). Пусть A — делимая группа без кручения, имеющая бесконечный ранг. $A = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$, где $A_i \cong \mathbb{Q}$ для всякого $i \in I$, $|I| \geqslant \aleph_0$. Зафиксируем индекс $i_0 \in I$ и выберем в группе A_{i_0} бесконечную циклическую группу A'_{i_0} ($A'_{i_0} \cong \mathbb{Z}$). Пусть $A_1 = A'_{i_0} \oplus C$, где $C = \bigoplus\limits_{i \in I \setminus \{i_0\}} A_i$. A_1 — подгруппа группы A, и так как $A \cong C$, то группы A и A_1 почти изоморфны, однако A не изоморфна A_1. Значит, группа A не является корректной.

4) $\Longrightarrow$ 1). Покажем, что делимая группа без кручения A конечного ранга корректна. Пусть B — абелева группа и $A \cong B'$, $B \cong A'$, где A', B' — подгруппы групп A и B соответственно. Так как B' — делимая группа, то имеем $B = B' \oplus B''$. Из почти изоморфизма групп A и B вытекает $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B') \leqslant \mathrm{r}(B)$ и $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A') \leqslant \mathrm{r}(A)$. Значит, $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(B')$, и отсюда $B'' = 0$. Итак, $B = B'$, и поэтому $A \cong B$.

Эквивалентность условий 1) и 3) даёт следствие 1.3.

Покажем эквивалентность условий 2) и 4).

2) $\Longrightarrow$ 4). Пусть делимая группа без кручения A определяется своими собственными подгруппами. Тогда по следствию 1.7 группа A корректна, и значит, в силу уже доказанной эквивалентности условий 1) и 4), группа A имеет конечный ранг.

4) $\Longrightarrow$ 2). Пусть делимая группа без кручения A имеет конечный ранг n, где $n > 1$, B — абелева группа и $A \overset{s}{\cong} B$. Понятно, что группа B также имеет

конечный ранг m и $m > 1$. В группе A максимальный ранг собственных подгрупп равен n, а в группе B такой ранг равен m. Из s-изоморфизма групп A и B вытекает $n = m$. Пусть A_1 — делимая подгруппа ранга $n - 1$ группы A. Тогда в группе B есть подгруппа B_1, изоморфная подгруппе A_1. Имеем $B = B_1 \oplus B_2$, где $\mathrm{r}(B_1) = n - 1$, $\mathrm{r}(B_2) = 1$. Если группа B_2 не является делимой, то в группе B есть единственная собственная делимая подгруппа ранга $n - 1$, а именно подгруппа B_1, а в группе A есть по крайней мере две собственные делимые подгруппы ранга $n - 1$. Это противоречит s-изоморфизму групп A и B. Значит, B_2 — делимая группа, а тогда и B — делимая группа, причём $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A)$. Следовательно, $A \cong B$.

Если же $\mathrm{r}(A) = 1$, то $\mathrm{r}(B) = 1$, и так как A и B s-изоморфны, то $B \cong A \cong \mathbb{Q}$.

Теорема 1.11 и следствие 1.10 показывают, что для абелевых групп без кручения справедлив следующий результат.

Теорема 1.12. *Пусть A — абелева группа без кручения. Следующие условия эквивалентны:*

1) *A — корректная группа,*
2) *A определяется своими собственными подгруппами,*
3) *A определяется своими подгруппами.*

Замечание. Определения почти изоморфизма, t-изоморфизма, s-изоморфизма можно дать аналогичным образом для двух универсальных алгебр A и B одной и той же сигнатуры. Также аналогично могут быть определены понятия корректной универсальной алгебры и алгебры, определяющейся своими подалгебрами (своими собственными подалгебрами). В ряде результатов первого параграфа никак не учитывается специфика абелевых групп (теоремы 1.1, 1.5, 1.8, лемма 1.4, следствия 1.2, 1.3, 1.6, 1.7), и поэтому эти результаты с соответствующей переформулировкой справедливы для произвольных универсальных алгебр.

§ 2. Определяемость прямых сумм циклических групп своими подгруппами

Для абелевой группы A обозначим через A_p (p — простое число) p-компоненту группы A, то есть наибольшую подгруппу в A, являющуюся p-группой. Ранг без кручения группы A, то есть мощность максимальной независимой системы элементов фактор-группы A/T, где T — периодическая часть группы A, будем обозначать $\mathrm{r}_0(A)$.

Лемма 2.1. *Если абелевы группы A и B почти изоморфны, то для любого простого числа p почти изоморфны p-компоненты A_p и B_p этих групп и $\mathrm{r}_0(A) = \mathrm{r}_0(B)$.*

Доказательство. Пусть абелевы группы A и B почти изоморфны. Тогда существуют изоморфные отображения $\phi\colon A \to B'$ и $\psi\colon B \to A'$, где A' и B' — подгруппы групп A и B соответственно. Так как при изоморфизме сохраняются порядки элементов, то $\phi(A_p) = B'_p$ и $\psi(B_p) = A'_p$. Значит, $A_p \cong B'_p$ и $B_p \cong A'_p$, и поэтому для всякого простого числа p p-компоненты групп A и B почти изоморфны.

Так как для произвольной абелевой группы A и её подгруппы C выполняется неравенство $\mathrm{r}_0(C) \leqslant \mathrm{r}_0(A)$ для рангов без кручения этих групп, то получаем $\mathrm{r}_0(A) = \mathrm{r}_0(B') \leqslant \mathrm{r}_0(B)$ и $\mathrm{r}_0(B) = \mathrm{r}_0(A') \leqslant \mathrm{r}_0(A)$. Значит, $\mathrm{r}_0(A) = \mathrm{r}_0(B)$.

Пусть A — прямая сумма циклических групп. Группу A можно записать в виде $A = \bigoplus\limits_p A_p \oplus A_0$, где A_0 — свободная группа, ранг которой совпадает с рангом без кручения $\mathrm{r}_0(A)$ группы A, а всякая p-компонента A_p группы A представима в виде $A_p = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}} A_{ip}$, где каждая группа A_{ip} есть прямая сумма $\mathfrak{M}_{ip}$ циклических групп порядка p^i. Кардинальные числа $\mathrm{r}_0(A)$ и $\mathfrak{M}_{ip}$ являются инвариантами группы A.

Группу A назовём *ступенчатой*, если для всякого простого числа p и для любого $i \in \mathbb{N}$, такого что $\mathfrak{M}_{ip} \geqslant \aleph_0$, выполняется $\mathfrak{M}_{jp} > \mathfrak{M}_{ip}$ для всякого $j < i$.

Предложение 2.2. *Пусть A — прямая сумма циклических групп. Группа A корректна тогда и только тогда, когда для всякого простого числа p группа A_p корректна.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть $A = \bigoplus\limits_p A_p \oplus A_0$ — прямая сумма циклических групп и для каждого простого числа p группа A_p корректна. Покажем, что группа A является корректной. Пусть группа B почти изоморфна группе A. Так как всякая подгруппа прямой суммы циклических групп является прямой суммой циклических групп, то B — прямая сумма циклических групп. $B = \bigoplus\limits_p B_p \oplus B_0$. По лемме 2.1 для каждого простого числа p группы A_p и B_p почти изоморфны и $\mathrm{r}_0(A) = \mathrm{r}_0(B)$. Так как группы A_p корректны для каждого простого числа p, то $A_p \cong B_p$, а равенство рангов $\mathrm{r}_0(A) = \mathrm{r}_0(B)$ позволяет сделать вывод, что свободные группы A_0 и B_0 изоморфны. Значит, $A \cong B$, и поэтому группа A корректна.

Теорема 2.3. *Пусть A — прямая сумма циклических групп. Следующие условия эквивалентны:*

1) *A — корректная группа,*
2) *A определяется своими подгруппами,*
3) *A — ступенчатая группа и любая её p-компонента ограниченная.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2) вытекает из следствия 1.3.

1) $\implies$ 3). Пусть $A = \bigoplus\limits_p A_p \oplus A_0$ — прямая сумма циклических групп и A — корректная группа. Допустим, что A не является ступенчатой группой, то

есть существуют такое простое число q и такие натуральные числа l и k, что $l < k$ и $\mathfrak{M}_{kq} \geqslant \aleph_0$, $\mathfrak{M}_{lq} \leqslant \mathfrak{M}_{kq}$ ($A_q = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{N}} A_{iq}$, где каждая группа A_{iq} есть прямая сумма $\mathfrak{M}_{iq}$ циклических групп порядка q^i). Рассмотрим два случая: а) $\mathfrak{M}_{lq} = 0$, б) $\mathfrak{M}_{lq} \neq 0$.

а) Представим группу A_{kq} в виде $A_{kq} = \langle a \rangle \oplus A'_{kq}$, где $\langle a \rangle$ — циклическая группа порядка q^k, порождённая элементом a, и A'_{kq} — прямая сумма $\mathfrak{M}_{kq}$ циклических групп порядка q^k. Пусть

$$B = \bigoplus_{p \neq q} A_p \oplus \bigoplus_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j \neq k}} A_{jq} \oplus A'_{kq} \oplus \langle q^{k-l} a \rangle \oplus A_0.$$

Тогда B — подгруппа группы A, и так как $A_{kq} \cong A'_{kq}$ (учитываем, что $\mathfrak{M}_{kq} \geqslant \aleph_0$), то

$$A \cong \bigoplus_{p \neq q} A_p \oplus \bigoplus_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j \neq k}} A_{jq} \oplus A'_{kq} \oplus A_0.$$

Значит, группы A и B почти изоморфны. Однако группы A и B не изоморфны, так как в группе B есть циклическое прямое слагаемое $\langle q^{k-l} a \rangle$ порядка q^l, а в группе A нет циклических прямых слагаемых порядка q^l ($\mathfrak{M}_{lq} = 0$).

б) Группу A_q можно записать в виде $A_q = A_{lq} \oplus A_{kq} \oplus A'_q$, где в группе A'_q нет циклических прямых слагаемых порядков q^l и q^k. Рассмотрим следующую подгруппу B группы A:

$$B = \bigoplus_{p \neq q} A_p \oplus A_{kq} \oplus A'_q \oplus A_0.$$

Группы A и B не изоморфны, так как в B нет циклических прямых слагаемых порядка q^l, а в A есть ($\mathfrak{M}_{lq} \neq 0$). Однако группы A и B почти изоморфны. Покажем это. Так как $\mathfrak{M}_{kq} \geqslant \aleph_0$ и $\mathfrak{M}_{lq} \leqslant \mathfrak{M}_{kq}$, то $\mathfrak{M}_{lq} + \mathfrak{M}_{kq} = \mathfrak{M}_{kq}$, и группу A_{kq} можно записать в виде $A_{kq} = A'_{kq} \oplus A''_{kq}$, где A'_{kq} — прямая сумма $\mathfrak{M}_{lq}$ циклических групп порядка q^k, а A''_{kq} — прямая сумма $\mathfrak{M}_{kq}$ циклических групп порядка q^k. Имеем

$$B = \bigoplus_{p \neq q} A_p \oplus A'_{kq} \oplus A''_{kq} \oplus A'_q \oplus A_0$$

и

$$A \cong \bigoplus_{p \neq q} A_p \oplus q^{k-l} A'_{kq} \oplus A''_{kq} \oplus A'_q \oplus A_0.$$

Значит, группы A и B почти изоморфны.

Итак, получили, что всякая корректная прямая сумма циклических групп является ступенчатой группой.

Пусть $A = \bigoplus\limits_{p} A_p \oplus A_0$ — корректная и ступенчатая группа, но существует такое простое число q, что A_q — неограниченная группа. Покажем, что существует такое натуральное число k, что $0 < \mathfrak{M}_{kq} < \aleph_0$. Пусть $I_1 = \{i \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{M}_{iq} \neq 0\}$. Так как группа A_q неограниченная, то множество I_1 бесконечно. Предположим, что $\mathfrak{M}_{iq} \geqslant \aleph_0$ для всякого $i \in I_1$. Так как во всяком множестве кардинальных чисел есть наименьшее число, то существует такое натуральное число $s \in I_1$, что $\mathfrak{M}_{sq} \leqslant \mathfrak{M}_{iq}$ для каждого $i \in I_1$, а это противоречит ступенчатости группы A.

Пусть r — наименьшее из всех таких натуральных чисел k, что $0 < \mathfrak{M}_{kq} < \aleph_0$. Так как группа A ступенчатая, то для всякого натурального числа $l > r$ имеем $\mathfrak{M}_{lq} < \aleph_0$. $A_q = \bigoplus\limits_{i \in I} A_{iq}$, где каждая группа A_{iq} есть прямая сумма $\mathfrak{M}_{iq}$ циклических групп порядка q^i. Тогда $A_q = A_{rq} \oplus A'_q$, где A'_q не имеет циклических прямых слагаемых порядка q^r. Рассмотрим такую подгруппу B группы A:

$$B = \bigoplus_{p \neq q} A_p \oplus A'_q \oplus A_0.$$

Так как $\sum\limits_{l > r} \mathfrak{M}_{lq} = \aleph_0$, а при $i \geqslant r$ все кардинальные числа $\mathfrak{M}_{iq}$ конечны, то в группе A'_q есть подгруппа, изоморфная группе A_q. Итак, получили, что группы A и B почти изоморфны. Однако группы A и B не изоморфны, так как в группе B нет циклических прямых слагаемых порядка q^r, а в группе A есть.

Значит, любая p-компонента группы A ограниченная.

3) $\Longrightarrow$ 1). В силу предложения 2.2 можно ограничиться случаем p-группы. Пусть A — ограниченная ступенчатая p-группа. Покажем, что A — корректная группа. Пусть группа B почти изоморфна группе A, тогда B — p-группа, являющаяся прямой суммой циклических групп. Имеем $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} A_i$, $B = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} B_i$, где каждая группа A_i есть прямая сумма $\mathfrak{M}_i$ циклических групп порядка p^i, а каждая группа B_i есть прямая сумма $\mathfrak{N}_i$ циклических групп порядка p^i.

Учитывая, что группа B изоморфна подгруппе группы A, получаем такую систему неравенств:

$$\begin{cases} m \leqslant n, \\ \mathfrak{N}_m \leqslant \sum\limits_{i=m}^{n} \mathfrak{M}_i, \\ \mathfrak{N}_{m-1} + \mathfrak{N}_m \leqslant \sum\limits_{i=m-1}^{n} \mathfrak{M}_i, \\ \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{N}_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i. \end{cases} \tag{2}$$

Учитывая, что группа A изоморфна подгруппе группы B, получаем такую систему неравенств:

$$
\begin{cases}
n \leqslant m, \\
\mathfrak{M}_n \leqslant \sum\limits_{i=n}^{m} \mathfrak{N}_i, \\
\mathfrak{M}_{n-1} + \mathfrak{M}_n \leqslant \sum\limits_{i=n-1}^{m} \mathfrak{N}_i, \\
\dots \\
\sum\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{N}_i.
\end{cases} \tag{3}
$$

Так как $m \leqslant n$ и $n \leqslant m$, то $m = n$. Системы неравенств (2) и (3) перепишутся так:

$$
\begin{cases}
\mathfrak{N}_n \leqslant \mathfrak{M}_n, \\
\mathfrak{N}_{n-1} + \mathfrak{N}_n \leqslant \mathfrak{M}_{n-1} + \mathfrak{M}_n, \\
\dots \\
\sum\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{N}_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i,
\end{cases} \tag{4}
$$

$$
\begin{cases}
\mathfrak{M}_n \leqslant \mathfrak{N}_n, \\
\mathfrak{M}_{n-1} + \mathfrak{M}_n \leqslant \mathfrak{N}_{n-1} + \mathfrak{N}_n, \\
\dots \\
\sum\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{N}_i.
\end{cases} \tag{5}
$$

Проведя «индукцию вниз», покажем, что $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{N}_i$ для всякого i ($i = 1, \dots, n$). Сравнивая первые неравенства в системах (4) и (5), получаем $\mathfrak{N}_n = \mathfrak{M}_n$. Пусть $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{M}_i$ для всякого i, удовлетворяющего неравенству $k \leqslant i \leqslant n$ ($k \in \mathbb{N}$, $k > 1$). Из $(n+2-k)$-го неравенства системы (4) и из $(n+2-k)$-го неравенства системы (5) получаем

$$\sum_{i=k-1}^{n} \mathfrak{M}_i = \sum_{i=k-1}^{n} \mathfrak{N}_i.$$

Если $\mathfrak{M}_i < \aleph_0$ для всякого $i = k, k+1, \dots, n$, то $\mathfrak{M}_{k-1} = \mathfrak{N}_{k-1}$. Если существует такое $s > k-1$, что $\mathfrak{M}_s \geqslant \aleph_0$, то, учитывая ступенчатость группы A, получаем

$$\mathfrak{M}_{k-1} > \sum_{i=k}^{n} \mathfrak{M}_i \geqslant \aleph_0.$$

Имеем

$$\mathfrak{M}_{k-1} = \sum_{i=k-1}^{n} \mathfrak{M}_i = \sum_{i=k-1}^{n} \mathfrak{N}_i = \mathfrak{N}_{k-1} + \sum_{i=k}^{n} \mathfrak{N}_i,$$

и так как

$$\mathfrak{M}_{k-1} > \sum_{i=k}^{n} \mathfrak{N}_i = \sum_{i=k}^{n} \mathfrak{M}_i,$$

то $\mathfrak{M}_{k-1} = \mathfrak{N}_{k-1}$.

Итак, $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{N}_i$ для всякого i ($i = 1, \ldots, n$). Следовательно, группы A и B изоморфны. Значит, группа A является корректной.

Замечание. В [4] рассматриваются абелевы p-группы, являющиеся прямыми суммами циклических групп. Показано, что из почти изоморфизма таких групп по сервантным подгруппам следует их изоморфизм. Приводятся также условия изоморфизма почти изоморфных абелевых p-групп, разложимых в прямую сумму циклических групп. Отмечается, что эти условия были впервые получены Т. Рецкер (не опубликовано).

§ 3. Определяемость прямых сумм циклических групп своими собственными подгруппами

Докажем вначале несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3.1. *Если A — прямая сумма циклических групп и абелева группа B s-изоморфна группе A, то B также прямая сумма циклических групп.*

Доказательство. Пусть B — группа без кручения. Группа B не является делимой, так как в делимой группе без кручения есть собственные подгруппы ранга 1, неизоморфные $\mathbb{Z}$, а в группе A нет таких собственных подгрупп ранга 1. Значит, существует такое натуральное число n, что $nB \neq B$. Тогда nB — собственная подгруппа группы B, и из s-изоморфизма групп A и B получаем, что nB — прямая сумма циклических групп. Так как B — группа без кручения, то $nB \cong B$, и значит, B — прямая сумма циклических групп.

Пусть B — периодическая или смешанная группа. Тогда существует такое простое число p, что p-компонента B_p группы B отлична от нуля.

Покажем, что существует такой элемент b порядка p группы B, что $h(b) < \infty$ ($h(b)$ — p-высота элемента b). Предположим противное. Пусть все элементы порядка p группы B имеют бесконечную p-высоту. Тогда B_p — делимая группа [7, с. 118]. Группа B_p является прямой суммой $\mathfrak{M}$ квазициклических групп [7, теорема 23.1, с. 124]. Если $\mathfrak{M} > 1$, то в группе B есть собственная подгруппа, изоморфная $\mathbb{Z}(p^\infty)$, а в группе A нет такой собственной подгруппы. Это противоречит s-изоморфизму групп A и B. Если же $\mathfrak{M} = 1$, то есть $B_p \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$, то в группе B для каждого натурального числа n существует одна и только одна собственная циклическая подгруппа порядка p^n. Так как группа A s-изоморфна группе B, то в A для каждого натурального числа n существует одна и только одна собственная циклическая подгруппа порядка p^n. Но это противоречит тому, что A — прямая сумма циклических групп.

Пусть b — такой элемент порядка p группы B, что $h(b) < \infty$. Тогда элемент b можно вложить в конечное циклическое слагаемое группы B [7, следствие 27.2, с. 139], то есть $B = \langle c \rangle \oplus B'$, где $\langle c \rangle$ — конечная циклическая группа и $b \in \langle c \rangle$. Так как группы A и B s-изоморфны, то B' изоморфна некоторой собственной подгруппе группы A. Следовательно, группа B' — прямая сумма циклических групп. Тогда B также является прямой суммой циклических групп.

Лемма 3.2. *Если A — прямая сумма циклических групп, не являющаяся примарной группой, и $A \overset{s}{\cong} B$, то для любого простого числа p группы A_p и B_p t-изоморфны и $\mathrm{r}_0(A) = \mathrm{r}_0(B)$.*

Доказательство. Пусть $A = \bigoplus\limits_p A_p \oplus A_0$ — прямая сумма циклических групп. По лемме 3.1 B — также прямая сумма циклических групп. Если свободная подгруппа A_0 группы A отлична от нуля, то подгруппа $A' = \bigoplus\limits_p A_p \oplus nA_0$, где $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, является собственной подгруппой группы A. $A' \cong A$, и поэтому по теореме 1.8 группы A и B t-изоморфны. Применяя следствие 1.2 и лемму 2.1, получаем, что группы A_p и B_p t-изоморфны и $\mathrm{r}_0(A) = \mathrm{r}_0(B)$.

Если $A_0 = 0$ и p — такое простое число, что $A_p \neq 0$, то A_p — собственная подгруппа группы A. В силу s-изоморфизма групп A и B группа A_p изоморфна некоторой собственной подгруппе B'_p группы B. Понятно, что B'_p — подгруппа группы B_p. Аналогично получаем, что группа B_p изоморфна некоторой подгруппе A'_p группы A_p. Значит, группы A_p и B_p почти изоморфны, и поэтому по следствию 1.2 эти группы t-изоморфны. Что же касается рангов без кручения групп A и B, то для них в этом случае выполняется равенство $\mathrm{r}_0(A) = \mathrm{r}_0(B) = 0$.

Рассмотрим простые абелевы группы. Абелева группа является простой в том и только в том случае, когда она циклическая группа простого порядка. Если A — циклическая группа порядка p, а B — циклическая группа порядка q, где $p \neq q$, то $A \ncong B$. Однако группы A и B s-изоморфны. Значит, имеет место следующая лемма.

Лемма 3.3. *Простая абелева группа не определяется своими собственными подгруппами.*

Докажем основной результат этого параграфа.

Теорема 3.4. *Пусть A — прямая сумма циклических групп. Группа A определяется своими собственными подгруппами тогда и только тогда, когда A — ступенчатая группа с ограниченными p-компонентами и A не является простой группой.*

Доказательство. Необходимость. Пусть группа A определяется своими собственными подгруппами. По лемме 3.3 группа A не является простой. Применяя следствие 1.7, получаем, что A — корректная группа, а тогда в силу теоремы 2.3 A — ступенчатая группа и любая её p-компонента ограниченная.

Достаточность. Рассмотрим вначале случай, когда группа A не является примарной. Пусть $A \overset{s}{\cong} B$. Тогда по лемме 3.1 B — прямая сумма циклических групп, а по лемме 3.2 для всякого простого числа p p-компоненты групп A и B t-изоморфны и $\mathrm{r}_0(A) = \mathrm{r}_0(B)$. Применяя теорему 2.3, получаем, что $A_p \cong B_p$ для всякого простого числа p, и поэтому группы A и B изоморфны. Следовательно, группа A определяется своими собственными подгруппами.

Пусть A — p-группа. Так как по условию теоремы группа A ограниченная, то A можно записать в виде $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} A_i$, где A_i — прямая сумма $\mathfrak{M}_i$ циклических групп порядка p^i. Пусть для некоторого индекса k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ $\mathfrak{M}_k \geqslant \aleph_0$. Тогда в группе A_k есть собственная подгруппа A'_k, изоморфная группе A_k, и поэтому группа A содержит собственную подгруппу, изоморфную A. Пусть группа A s-изоморфна группе B. Тогда B также ограниченная p-группа, содержащая собственную подгруппу, изоморфную B. По теореме 1.8 группы A и B t-изоморфны. Применяя теорему 2.3, получаем $A \cong B$.

Итак, осталось рассмотреть случай, когда A — конечно-порождённая p-группа. Известно, что если

$$p^{r_1} \geqslant \ldots \geqslant p^{r_k} > 1 - \tag{6}$$

порядки циклических групп в разложении группы A в прямую сумму циклических групп, а

$$p^{s_1} \geqslant \ldots \geqslant p^{s_m} > 1 - \tag{7}$$

аналогичные числа для подгруппы C группы A, то $k \geqslant m$ и $r_i \geqslant s_i$, $i = 1, \ldots, m$ [7, теорема 15.6, с. 98]. Будем говорить, что группе A соответствует последовательность (6), а подгруппе C — последовательность (7). Пусть A — конечно-порождённая p-группа, которой соответствует последовательность (6), и пусть $A \overset{s}{\cong} B$. Тогда B также конечно-порождённая p-группа. Пусть группе B соответствует последовательность

$$p^{r'_1} \geqslant \ldots \geqslant p^{r'_l} > 1. \tag{8}$$

Предположим, что $k \neq l$, и пусть для определённости $k > l$. Если $r_1 \geqslant 2$, то в группе A есть собственная подгруппа C, являющаяся прямой суммой k циклических групп порядка p, а в группе B нет таких собственных подгрупп. Пусть $r_1 = 1$. Тогда $r_1 = \ldots = r_k = 1$, то есть группа A — прямая сумма k циклических групп порядка p, причём $k \geqslant 2$, так как группа A не является простой. Если $r'_1 \geqslant 2$ и $l = 1$, то в группе B есть единственная собственная циклическая подгруппа порядка p, а в группе A есть по крайней мере три собственные циклические подгруппы порядка p. Если $r'_1 \geqslant 2$ и $l > 1$, то в группе B есть собственная циклическая подгруппа порядка p^2, а в группе A нет таких собственных циклических подгрупп. Итак, если $r_1 = \ldots = r_k = 1$, то $r'_1 = \ldots = r'_l = 1$, и значит, B — прямая сумма l циклических групп порядка p. В группе A есть собственная подгруппа C, являющаяся прямой суммой $k - 1$ циклических групп порядка p, а в группе B нет таких собственных подгрупп.

Итак, $k = l$, и последовательность, соответствующую группе B, можно записать так:

$$p^{r'_1} \geqslant \ldots \geqslant p^{r'_k} > 1. \tag{9}$$

Покажем, что $r_i = r'_i$ для всякого i ($i = 1, \ldots, k$). Предположим противное. Пусть t — наибольший из индексов, для которых $r_t \neq r'_t$. Положим для определённости $r_t > r'_t$. Если $k > t$, то в группе A есть собственная подгруппа C, которой соответствует последовательность

$$p^{r_1} \geqslant \ldots \geqslant p^{r_t} > 1. \tag{10}$$

В группе B нет собственной подгруппы, которой соответствует такая последовательность. Если $k = t \neq 1$, то рассмотрим в группе A собственную подгруппу C, которой соответствует последовательность

$$p^{r_1} \geqslant \ldots \geqslant p^{r_{t-1}} \geqslant p^{r_t - 1} > 1. \tag{11}$$

В группе B нет собственной подгруппы, которой соответствует такая последовательность. Если же $k = t = 1$, то в группе A есть собственная циклическая подгруппа порядка p^{k-1}, а в группе B нет такой собственной циклической подгруппы.

Итак, $r_i = r'_i$ для всякого i ($i = 1, \ldots, k$), и поэтому $A \cong B$.

Литература

[1] Борсук К. Теория ретрактов. — М.: Мир, 1971.

[2] Гриншпон С. Я. f.i.-корректность абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. — 1989. — Вып. 8. — С. 65—79.

[3] Гриншпон С. Я. f.i.-корректные абелевы группы // Успехи мат. наук. — 1999. — № 6. — С. 155—156.

[4] Приходько И. А. Е-корректные абелевы группы // Абелевы группы и модули. — 1984. — С. 90—99.

[5] Росошек С. К. Чисто корректные модули // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1978. — № 10. — С. 143—150.

[6] Росошек С. К. Строго чисто корректные абелевы группы без кручения // Абелевы группы и модули. — 1979. — С. 143—150.

[7] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М.: Мир, 1974.

[8] Шерстнева А. И. U-последовательности и почти изоморфизм абелевых p-групп по вполне характеристических подгруппам // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2001. — № 5. — С. 72—80.

[9] Bumby R. Modules which isomorphic to submodules of each other // Arch. Math. — 1965. — Vol. 16. — P. 184—185.

[10] Cornel I. Some ring theoretic Schroeder—Bernstein theorems // Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 132. — P. 335—351.

[11] Crawly P. Solution of Kaplansky's test problem for primary Abelian groups // J. Algebra. — 1965. — No. 4. — P. 413—431.

[12] Eklof P., Sabbagh G. Model-completions and modules // Ann. Math. Log. — 1971. — Vol. 2. — P. 251—299.

[13] De Groot J. Equivalent Abelian groups // Canad. J. Math. — 1957. — No. 9. — P. 291—297.

[14] Holzsager R., Hallahan C. Mutual direct summands // Arch. Math. — 1974. — Vol. 25. — P. 591—592.

[15] Jonson B. On direct decomposition of torsion free Abelian groups // Math. Scand. — 1959. — No. 2. — P. 361—371.

[16] Kaplansky I. Infinite Abelian Groups. — Michigan: Univ. of Michigan Press, 1954.

[17] Trnkova V., Koubek V. The Cantor—Bernstein theorem for functors // Comment. Math. Univ. Carolin. — 1973. — Vol. 14. — P. 197—204.