Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли. I. U-алгебры и универсальные классы*

Э. Ю. ДАНИЯРОВА, И. В. КАЗАЧКОВ,
В. Н. РЕМЕСЛЕННИКОВ
Омский филиал Института математики СО РАН
e-mail: evelina_om@mail333.com

УДК 512.554.3

Ключевые слова: метабелева алгебра Ли, радикал Фиттинга, U-алгебра, универсальное замыкание.

Аннотация

Эта статья первая в серии статей, целью которых является построение алгебраической геометрии над свободной метабелевой алгеброй Ли F. Для этой цели в ней введено понятие U-алгебры и установлена связь между U-алгебрами и специальными матричными алгебрами Ли. Также введено понятие Δ-локализации метабелевой U-алгебры Ли A и операция прямого модульного расширения радикала Фиттинга алгебры A, показано, что новые алгебры содержатся в универсальном замыкании алгебры A.

Abstract

E. Yu. Daniyarova, I. V. Kazatchkov, V. N. Remeslennikov, Algebraic geometry over free metabelian Lie algebras. I. U-algebras and universal classes, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 3, pp. 37—63.

This paper is the first in a series of three, the object of which is to lay the foundations of algebraic geometry over the free metabelian Lie algebra F. In the current paper, we introduce the notion of a metabelian U-Lie algebra and establish connections between metabelian U-Lie algebras and special matrix Lie algebras. We define the Δ-localization of a metabelian U-Lie algebra A and the direct module extension of the Fitting radical of A and show that these algebras lie in the universal closure of A.

§ 1. Введение

Эта статья первая в серии статей, целью которых является построение алгебраической геометрии над свободной метабелевой алгеброй Ли F. В работах Г. Баумслага, А. Г. Мясникова, В. Н. Ремесленникова [8] и А. Г. Мясникова,

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 02-01-00192-а и научной программы «Университеты России».

В. Н. Ремесленникова [9] изложены основные понятия и результаты алгебраической геометрии над группами, которые без труда могут быть распространены на произвольную алгебраическую систему.

Главным итогом данной серии статей должно быть создание структурной теории алгебр Ли из квазимногообразия $\mathrm{qvar}(F)$ и универсального класса $\mathrm{ucl}(F)$, порождённых алгеброй F. Такая целевая направленность обусловлена следующим обстоятельством: конечно порождённые алгебры Ли из квазимногообразия $\mathrm{qvar}(F)$ и только они являются координатными алгебрами для алгебраических множеств над F, а из $\mathrm{ucl}(F)$ — для неприводимых алгебраических множеств.

Результаты этой статьи носят подготовительный характер для построения алгебраической геометрии над F. В § 2 мы приводим основные сведения о метабелевых алгебрах Ли. Многие из них известны, но мы приводим их новые доказательства, чтобы иметь возможность ссылки не только на результаты, но и на методы их доказательств.

В работах В. А. Артамонова [1, 7] дано представление свободной метабелевой алгебры Ли в свободном модуле над кольцом многочленов. Отметим, что это представление есть вариация более общей конструкции А. Л. Шмелькина о вложении алгебр Ли специального типа в вербальное сплетение алгебр Ли (см. [6]). В § 3 мы заимствуем идеи этих представлений для построения специальных матричных метабелевых алгебр Ли. В этом же параграфе введено важное для целей алгебраической геометрии над F понятие U-алгебры и установлена связь между U-алгебрами и специальными матричными алгебрами Ли. В частности (теорема 3.2.1), любая конечно порождённая U-алгебра является подалгеброй специальной матричной алгебры.

В § 4 для любой фиксированной алгебры Ли A мы вводим язык первой ступени L_A и изучаем универсальные классы в этом языке (универсальное замыкание, квазимногообразие и т. д.). Там же вводится понятие Δ-локализации метабелевой U-алгебры Ли A и операция прямого модульного расширения радикала Фиттинга алгебры A. Показано (предложение 4.2.2, предложение 4.3.5), что новые алгебры содержатся в универсальном замыкании алгебры A.

Все используемые понятия и результаты об алгебрах Ли могут быть найдены в [2], а о коммутативных кольцах и модулях — в [5] или [3].

Отметим, что часть результатов этой статьи изложена в препринте [4] авторов.

§ 2. Метабелевы алгебры Ли

Результаты этого параграфа носят предварительный характер, и большинство из них известны.

Напомним, что A — метабелева алгебра Ли над полем k, если A — векторное пространство над k и, кроме того, для любых элементов $a, b \in A$ определено умножение $a \circ b$ таким образом, что выполнены следующие универсальные аксиомы:

- $a \circ a = 0$ (отсюда, как известно, следует аксиома антикоммутативности $a \circ b = -b \circ a$),
- тождество Якоби $(a \circ b) \circ c + (b \circ c) \circ a + (c \circ a) \circ b = 0$,
- тождество метабелевости $(a \circ b) \circ (c \circ d) = 0$.

Произведение элементов алгебры, скажем a и b, будем записывать либо с помощью знака $\circ$, $a \circ b$, либо просто ab. Под записью $a_1a_2a_3 \ldots a_n$ будем понимать произведение элементов $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ с левонормированной расстановкой скобок:

$$(\ldots((a_1 \circ a_2) \circ a_3) \circ \ldots) \circ a_n.$$

Такие произведения будем называть левонормированными словами или мономами (длины, или степени, n). Как известно, произвольный моном длины n от букв $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в алгебре Ли может быть представлен в виде линейной комбинации левонормированных мономов длины n от этих же букв.

2.1. Радикал Фиттинга и коммутант

Пусть A — метабелева алгебра Ли над полем k.

В алгебре A есть два идеала, носящие специальные названия: коммутант и радикал Фиттинга.

Определение 1. Идеал, порождённый множеством $\{a \circ b \mid a, b \in A\}$, называется коммутантом алгебры A и обозначается через A^2. Коммутант метабелевой алгебры Ли абелев, что непосредственно следует из тождества метабелевости.

Определение 2. Идеал, порождённый множеством, состоящим из элементов всех нильпотентных идеалов алгебры A, называется радикалом Фиттинга и обозначается через $\mathrm{Fit}(A)$.

Коммутант метабелевой алгебры Ли всегда содержится в её радикале Фиттинга, $A^2 \subseteq \mathrm{Fit}(A)$, поскольку коммутант — абелев идеал.

Замечание 1. Можно привести пример метабелевой алгебры Ли A, радикал Фиттинга которой не является абелевым идеалом, а в частности $A^2 \neq \mathrm{Fit}(A)$.

Замечание 2. Если A — абелева алгебра Ли, то $A = \mathrm{Fit}(A)$, а $A^2 = 0$.

Замечание 3. Если $A \neq 0$, то $\mathrm{Fit}(A) \neq 0$.

Все метабелевы алгебры Ли обладают следующим свойством: в любом левонормированном мономе $abc_1 \ldots c_n$ длины 4 и большей можно, не трогая первых двух букв (a и b), переставлять все остальные ($c_1, \ldots, c_n$) произвольным образом. Для доказательства этого достаточно показать, что утверждение верно, если мы переставляем местами сомножители c_i и c_{i+1}. Итак, переставим c_i и c_{i+1}, а затем рассмотрим разность исходного и вновь полученного левонормированных слов:

$$abc_1 \ldots c_i c_{i+1} \ldots c_k - abc_1 \ldots c_{i+1} c_i \ldots c_k = \\ = (abc_1 \ldots c_i c_{i+1} - abc_1 \ldots c_{i+1} c_i) \ldots c_k.$$

В силу антикоммутативности $abc_1 \ldots c_{i+1}c_i = -c_{i+1}(abc_1 \ldots)c_i$. В силу метабелевости $c_ic_{i+1}(abc_1 \ldots) = 0$. Поэтому исходная разность переписывается так:

$$((abc_1 \ldots)c_ic_{i+1} + c_{i+1}(abc_1 \ldots)c_i + c_ic_{i+1}(abc_1 \ldots)) \ldots c_k,$$

что равно нулю ввиду тождества Якоби.

Приведём несколько лемм, связанных с нильпотентными подалгебрами метабелевых алгебр Ли, к результатам которых в будущем мы будем не раз обращаться.

Лемма 2.1.1. *Пусть A — метабелева алгебра Ли, I_1, I_2 — нильпотентные идеалы A ступеней нильпотентности n_1, n_2 соответственно. Тогда идеал $I = \langle I_1, I_2 \rangle$ также нильпотентен.*

Доказательство. Действительно, нетрудно проверить, что ступень нильпотентности идеала I не превосходит $2n$, где $n = \max\{n_1, n_2\}$. □

Следствие 1. *Утверждение леммы можно обобщить на случай любого конечного числа нильпотентных идеалов.*

Следствие 2. *Радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ метабелевой алгебры Ли A характеризуется следующим образом: элемент $x \in A$ принадлежит $\mathrm{Fit}(A)$ тогда и только тогда, когда идеал $I = \langle x \rangle$ нильпотентен, или тогда и только тогда, когда x принадлежит некоторому нильпотентному идеалу.*

Лемма 2.1.2. *Пусть C — нильпотентная метабелева алгебра Ли ступени нильпотентности $n \geqslant 2$. Тогда в C существует 2-порождённая подалгебра D, ступень нильпотентности которой равна 2.*

Доказательство. Пусть

$$\{0\} = Z_0(C) < Z_1(C) < Z_2(C) < \ldots < Z_{n-1}(C) < Z_n(C) = C \text{ —}$$

верхний центральный ряд для C (см. [2]). Так как алгебра C неабелева, то $Z_2(C) \setminus Z_1(C)$ — непустое множество. Выберем такие $c_1 \in Z_2(C) \setminus Z_1(C)$ и $c_2 \in C$, что $c_1 \circ c_2 \neq 0$. Тогда подалгебра $D = \langle c_1, c_2 \rangle$ является нильпотентной 2-порождённой алгеброй Ли класса нильпотентности 2. □

Лемма 2.1.3. *Если в метабелевой алгебре Ли A любой нильпотентный идеал абелев, то $\mathrm{Fit}(A)$ также абелев.*

Доказательство. Если это не так, то существуют два элемента $c_1, c_2 \in A$, принадлежащие нильпотентным идеалам I_1, I_2 соответственно, такие что $c_1 \circ c_2 \neq 0$. Тогда идеал $I = \langle I_1, I_2 \rangle$ тоже нильпотентен по лемме 2.1.1, но не является абелевым, что исключается. □

Лемма 2.1.4. *Пусть A — метабелева алгебра Ли, и пусть элемент $a \in A$ коммутирует с каждым элементом из A^2. Тогда $a \in \mathrm{Fit}(A)$.*

Доказательство. Как нетрудно проверить, в условиях леммы идеал $I = \langle a \rangle$ является абелевым, а потому $a \in \mathrm{Fit}(A)$. □

Указанные свойства метабелевых алгебр Ли позволяют вводить на их коммутантах, а также на радикалах Фиттинга, когда они абелевы, структуру модуля над кольцом многочленов. Опишем, как это делается. Через I обозначим абелев идеал метабелевой алгебры Ли A, такой что фактор-алгебра A/I также абелева, или, другими словами, $A^2 \subseteq I$. Зафиксируем систему $\{a_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ — максимальную по включению систему элементов алгебры A, линейно независимых по модулю идеала I.

Определим на I структуру модуля над кольцом $R = k[x_\alpha,\ \alpha \in \Lambda]$ — кольцом многочленов от коммутирующих переменных. Операции сложения элементов из I и умножения их на коэффициенты из поля определены, поскольку I есть векторное пространство над k. Произведение элемента $b \in I$ на букву x_α определим так:

$$b \cdot x_\alpha = b \circ a_\alpha, \quad \alpha \in \Lambda.$$

Далее, умножение на произвольный одночлен кольца R определим индукцией по его степени: $b \cdot (f x_\alpha) = (b \cdot f) \cdot x_\alpha$, где $f \in R$ — одночлен. Умножение на произвольные многочлены из R продолжим по линейности.

Вообще говоря, таким образом мы определили умножение на многочлены от некоммутирующих переменных. Покажем, что в действительности введённое умножение останется корректным, если мы считаем кольцо R коммутативным. Для этого достаточно проверить, что $b\cdot(x_\alpha x_\beta) = b\cdot(x_\beta x_\alpha)$, где $b \in I$, а $\alpha, \beta \in \Lambda$ — произвольная пара индексов. Рассмотрим разность

$$b \cdot (x_\alpha x_\beta) - b \cdot (x_\beta x_\alpha) = b \circ a_\alpha \circ a_\beta - b \circ a_\beta \circ a_\alpha = a_\beta \circ a_\alpha \circ b.$$

Поскольку A/I абелева, то $a_\beta \circ a_\alpha \in I$, а так как идеал I абелев, то $a_\beta \circ a_\alpha \circ b = 0$.

Таким образом, на идеале I определена структура модуля над кольцом R.

Замечание 1. Как изменится модульная структура на I при переходе от $\{a_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ к другой максимальной системе $\{a'_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ элементов A, линейно независимых по модулю I? В силу абелевости идеала I такой переход влечёт за собой не более чем k-линейную замену переменных кольца многочленов R.

Замечание 2. Обозначим через V линейную оболочку над k множества $\{a_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$. Тогда алгебра A как векторное пространство равна прямой сумме $v \oplus I$ векторных пространств над k.

Замечание 3. Иногда мы будем использовать запись $b \cdot f$, где $f \in R$, но элемент $b \in A$ не обязательно лежит в идеале I. Объясним, что под этим подразумевается. Многочлен f запишем как сумму одночленов и выделим (зафиксируем) в каждом из них по одному сомножителю (букве из $\{x_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$):

$$f = \gamma + x_{\alpha_1} f_1 + \ldots + x_{\alpha_l} f_l, \quad \gamma \in k, \quad f_i \in R.$$

Положим

$$b \cdot f = \gamma b + (b a_{\alpha_1}) \cdot f_1 + \ldots + (b a_{\alpha_l}) \cdot f_l.$$

Последняя запись является корректной, так как $ba_{\alpha_i} \in I$. Отметим, что такое определение умножения b на f зависит от выбора фиксированных сомножителей $x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l}$ в одночленах многочлена f, но в тех случаях, когда мы будем прибегать к такой записи, это не будет существенно.

2.2. Порождающие элементы и определяющие соотношения метабелевых алгебр Ли и конечно порождённые метабелевы алгебры Ли

В этом пункте мы опишем, как строятся системы порождающих элементов и определяющих соотношений метабелевой алгебры Ли, которые будут удобны для нас в дальнейшем. Попутно будут отмечены некоторые особенности конечно порождённых метабелевых алгебр Ли.

Пусть A — метабелева алгебра Ли над полем k, I — абелев идеал A, такой что фактор-алгебра A/I абелева. Обычно I будет обозначать коммутант A^2 или радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ в случае, если он абелев. Как и в предыдущем пункте, выбираем максимальное множество $\{a_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ элементов из A, линейно независимых по модулю идеала I; линейное пространство над k, натянутое на это множество, обозначим через V. На идеале I есть структура модуля над кольцом многочленов $R = k[x_\alpha,\ \alpha \in \Lambda]$. Пусть множество $\{b_\beta,\ \beta \in \mathcal{B}\}$ элементов идеала I порождает его как модуль над R.

Лемма 2.2.1. *Элементы из объединения двух множеств $\{a_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ и $\{b_\beta,\ \beta \in \mathcal{B}\}$ порождают алгебру A.*

Доказательство. В самом деле, любой элемент $a \in A$ можно представить в виде $a = c + b$, где $c \in V$, $b \in I$. Элемент $b \in I$ записывается в виде

$$b = b_{\beta_1} \cdot f_1 + \ldots + b_{\beta_l} \cdot f_l,$$

где $f_i \in R$. Как элемент алгебры A, $b_{\beta_i} \cdot f_i$ является лиевым многочленом от букв $\{a_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$, b_{β_i}. Поэтому элемент b, а значит и a, — лиевы многочлены от букв множества $\{a_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\} \cup \{b_\beta,\ \beta \in \mathcal{B}\}$. $\square$

Замечание. Систему порождающих элементов, описанную в лемме 2.2.1, назовём *канонической*, в дальнейшем будем ею пользоваться при работе с метабелевыми алгебрами Ли.

Лемма 2.2.2. *Пусть A — конечно порождённая метабелева алгебра Ли. Тогда каноническая система её порождающих конечна.*

Доказательство. Пусть $\{s_1, \ldots, s_n\}$ — конечное множество порождающих элементов алгебры A. Покажем, что каноническая система тоже конечна.

Во-первых, A/I — конечномерное векторное пространство над k. Действительно, произвольный элемент алгебры — это лиев многочлен от букв $\{s_1, \ldots, s_n\}$. В любом таком многочлене можно выделить слагаемые первой степени и слагаемые степеней, строго больших единицы. Последние принадлежат коммутанту, значит, лежат в идеале I. Таким образом, любой элемент $a \in A$ имеет представление

$$a = \alpha_1 s_1 + \ldots + \alpha_n s_n + b,$$

где $\alpha_i \in k$, $b \in I$. Следовательно, $\dim(A/I) = r$ конечна и не превосходит n.

Во-вторых, идеал I как модуль над кольцом $R = k[x_1, \ldots, x_r]$ конечно порождён. Покажем, что это так. Коммутант A^2 как векторное пространство над k порождается левонормированными словами $s_{i_1} \circ s_{i_2} \circ s_{i_3} \circ \ldots \circ s_{i_m}$ длины $\geqslant 2$. Представим s_i, $i = 1, \ldots, n$, в виде суммы $s_i = c_i + b_i$, $c_i \in V$, $b_i \in I$. Выполнив подстановку, получим, что $s_{i_1} \circ s_{i_2} \circ \ldots \circ s_{i_m} = (s_{i_1} \circ s_{i_2}) \cdot f$, где $f \in R$. Таким образом, A^2 как модуль над R порождается своим конечным подмножеством $\{s_i \circ s_j \mid i < j = 1, \ldots, n\}$. Поскольку I/A^2 также является конечномерным векторным пространством над k, то и I как модуль над R конечно порождён.

Таким образом, обе составляющие части канонической системы порождающих конечны. □

В категории всех метабелевых алгебр Ли над полем k любая конечно порождённая k-алгебра A задаётся с помощью конечного числа порождающих элементов и какого-то количества — конечного или бесконечного — определяющих соотношений. Оказывается, что для любой такой алгебры A можно построить конечный набор соотношений, выполненных в A и таких, что алгебра A ими определяется. В следующей теореме мы приведём конкретный вид таких соотношений.

Теорема 2.2.3. *Любая конечно порождённая метабелева k-алгебра Ли A является конечно определённой в категории всех метабелевых k-алгебр Ли.*

Доказательство. Рассмотрим векторное пространство A/A^2. Пусть его размерность равна r. Коммутант A^2 — конечно порождённый модуль над кольцом $R = k[x_1, \ldots, x_r]$. Пусть $b_1, \ldots, b_l$ — его модульные порождающие. Построим каноническую систему порождающих алгебры A: $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_l$.

Так как кольцо R нётерово и A^2 конечно порождён над R, то A^2 является конечно определённым (см. [5] или [3]). Зафиксируем конечное представление модуля A^2, и пусть произвольное определяющее соотношение из него имеет вид

$$b_1 \cdot f_1 + \ldots + b_l \cdot f_l = 0, \quad f_i \in R.$$

Переписывая это соотношение в сигнатуре метабелевых алгебр Ли, получим соотношение на буквах $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_l$, выполненное в алгебре A. Скажем, что такие соотношения составляют первую группу определяющих соотношений алгебры A. Кроме них в алгебре A выполнены соотношения второй и третьей групп.

Во вторую группу включим соотношения, очевидные в силу абелевости коммутанта:

$$b_i \circ b_j = 0, \quad b_i \circ a_s \circ b_j = 0, \quad i < j = 1, \ldots, l, \quad s = 1, \ldots, r.$$

Третья группа соотношений выражает тот факт, что для любой пары индексов (i, j) произведение $a_i \circ a_j$ лежит в коммутанте:

$$a_i \circ a_j = b_1 \cdot g_{ij}^1 + \ldots + b_l \cdot g_{ij}^l, \quad i < j = 1, \ldots, r, \quad g_{ij}^p \in R.$$

Переписав эти равенства в сигнатуре метабелевых алгебр Ли, составляем из них третью группу определяющих соотношений алгебры A.

Теперь нужно показать, что алгебра A полностью определяется соотношениями первой, второй и третьей групп. Пусть F — свободная метабелева алгебра Ли со свободной базой вида $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_l$, и пусть K — идеал F, порождённый выбранными нами соотношениями алгебры A. Обозначим через $\varphi\colon F \to A$ канонический эпиморфизм, действующий по правилу $\varphi(x_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, r$, $\varphi(y_j) = b_j$, $j = 1, \ldots, l$, и покажем, что $\operatorname{Ker}\varphi = K$. Включение $\operatorname{Ker}\varphi \supseteq K$ очевидно. Докажем, что выполняется обратное включение.

Рассмотрим произвольный лиев многочлен u от букв $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_l$. Как многочлен k-алгебры Ли, u переписывается в линейную комбинацию левонормированных слов от тех же букв с коэффициентами из k. Тождество метабелевости добавляет возможность переставлять местами «дальние» буквы в левонормированных словах длины $\geqslant 2$. Посмотрим, как мы можем преобразовывать такие слова по модулю идеала K. Во-первых, используя соотношения третьей группы и антикоммутативность, мы можем записать любое слово длины $\geqslant 2$ в виде линейной комбинации слов, каждое из которых начинается с буквы из набора $y_1, \ldots, y_l$. Во-вторых, если в таком слове встречается ещё хотя бы одна буква из набора $y_1, \ldots, y_l$, по соотношениям из второй группы это слово лежит в K. Таким образом, произвольный элемент $u \in F$ представим в виде

$$u = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_r x_r + y_1 \cdot f_1 + \ldots + y_l \cdot f_l + v,$$

где $v \in K$, $\alpha_i \in k$, $f_j \in R$. Предположим, что $u \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда мы имеем

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_r a_r + b_1 \cdot f_1 + \ldots + b_l \cdot f_l = 0.$$

Следовательно, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$ и $b_1 \cdot f_1 + \ldots + b_l \cdot f_l = 0$. Из последнего равенства и соотношений первой группы следует, что $y_1 \cdot f_1 + \ldots + y_l \cdot f_l \in K$. Следовательно, $u \in K$. $\square$

Замечание 1. Мы надеемся, что результат теоремы 2.2.3 известен, но мы не нашли необходимой ссылки. Кроме того, в дальнейшем будет использоваться конкретный вид соотношений, которые мы приводим в нашем доказательстве.

Следствие (из доказательства теоремы). *Если радикал Фиттинга* $\operatorname{Fit}(A)$ *абелев, то алгебра* A *может быть задана такими же порождающими элементами и определяющими соотношениями, какие описаны в теореме* 2.2.3, *с заменой* A^2 *на* $\operatorname{Fit}(A)$.

Замечание 2. Для бесконечно порождённых метабелевых алгебр Ли существуют такие же три группы определяющих соотношений, как и описанные в теореме 2.2.3, но любая из этих групп может быть бесконечной.

Далее, введём некоторый тип гомоморфизмов метабелевой алгебры Ли на себя, которыми мы в будущем будем пользоваться.

Так же, как и ранее, считаем, что A — метабелева алгебра Ли, I — абелев идеал алгебры A, равный коммутанту или радикалу Фиттинга (если он абелев), на котором определена структура модуля над кольцом $R = k[x_\alpha,\ \alpha \in \Lambda]$; $\{a_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\} \cup \{b_\beta,\ \beta \in \mathcal{B}\}$ — каноническая система порождающих алгебры A, V — линейная оболочка над k множества $\{a_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$.

Возьмём многочлен $f \in R$, свободный член которого равен нулю. Определим гомоморфизм φ умножением всех элементов алгебры A на многочлен $(1+f)$. Напомним, что это умножение однозначно определяется только на элементах из идеала I. Для распространения действия φ на всю алгебру представим многочлен f в виде $f = x_{j_1} f_1 + \ldots + x_{j_l} f_l$. Теперь положим

$$\varphi(b_\beta) = b_\beta \cdot (1+f), \quad \beta \in \mathcal{B};$$

$$\varphi(a_\alpha) = a_\alpha + h_\alpha, \quad h_\alpha \in A^2, \ \ h_\alpha = a_\alpha a_{j_1} f_1 + \ldots + a_\alpha a_{j_l} f_l, \ \ \alpha \in \Lambda.$$

Таким образом, действие φ определено на порождающих элементах алгебры A, на остальные продолжаем по гомоморфности. Следующее предложение говорит, что такое определение φ корректно.

Предложение 2.2.4. *Описанное выше отображение $\varphi\colon A \to A$, заключающееся в умножении на многочлен $(1+f)$, является гомоморфизмом. Причём если идеал I как модуль над кольцом не имеет кручения, то φ — инъективный гомоморфизм.*

Доказательство. Проверим, что при гомоморфном продолжении с порождающего множества на всю алгебру A отображение φ оказывается корректным. Для этого используем представление метабелевой алгебры Ли A, описанное в теореме 2.2.3.

Каждый элемент $b \in I$ имеет представление

$$b = b_{\beta_1} f^1 + \ldots + b_{\beta_l} f^l,$$

где $f^k \in R$. Индукцией по степени многочленов f^k легко убедиться в том, что $\varphi(b) = b \cdot (1+f)$:

$$\varphi(b_\beta a_\alpha) = \varphi(b_\beta)\varphi(a_\alpha) = (b_\beta(1+f))(a_\alpha + h_\alpha) = b_\beta a_\alpha (1+f).$$

Теперь очевидно, что под действием φ сохраняются соотношения первой группы алгебры A, полученные из соотношений идеала I как модуля над R, а также второй, выражающей абелевость I.

Соотношения третьей группы для каждой пары индексов $i, j \in \Lambda$ записываются так:

$$a_i a_j = b_{\beta_1} f_{ij}^1 + \ldots + b_{\beta_l} f_{ij}^l,$$

где $f_{ij}^k \in R$. Чтобы убедиться в том, что φ их сохраняет, необходимо проверить, что $\varphi(a_i)\varphi(a_j) = a_i a_j (1+f)$:

$$\varphi(a_i)\varphi(a_j) = (a_i + a_i a_{j_1} f_1 + \ldots + a_i a_{j_l} f_l)(a_j + a_j a_{j_1} f_1 + \ldots + a_j a_{j_l} f_l) =$$

$$= a_i a_j + (a_i a_{j_1} a_j f_1 + \ldots + a_i a_{j_l} a_j f_l) - (a_j a_{j_1} a_i f_1 + \ldots + a_j a_{j_l} a_i f_l) =$$
$$= a_i a_j + a_i a_j a_{j_1} f_1 + \ldots + a_i a_j a_{j_l} f_l = a_i a_j (1 + f).$$

Поскольку действие φ на идеале I — это умножение элементов модуля на многочлен $(1+f)$, то в случае, когда I как модуль над R не имеет кручения, φ инъективен на I. Произвольный элемент $a \in A$ представи́м в виде $a = c + b$, где $c \in V$, $b \in I$. Если $c \neq 0$, то, очевидно, $\varphi(a) \neq 0$, а если $c = 0$, то $a = b$, т. е. $a \in I$. Таким образом, в данной ситуации гомоморфизм φ инъективен на всей алгебре A. □

2.3. Свободные метабелевы алгебры Ли

Свободную метабелеву алгебру Ли над полем k мы будем обозначать буквой F. В этом пункте приведены некоторые свойства алгебры F и явно выписана система определяющих соотношений $\mathrm{Fit}(F)$ как модуля над кольцом многочленов.

Пусть $\{a_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ — свободная база F. Предположим, что множество индексов Λ является вполне упорядоченным. Тогда левонормированные мономы $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m}$, в которых $i_1 > i_2 \leqslant i_3 \leqslant \ldots \leqslant i_m$, будем называть *нормированными*. В [1] доказан следующий результат о нормированных мономах свободной метабелевой алгебры Ли F.

Теорема 2.3.1. *Нормированные мономы алгебры F образуют её линейный базис над k.*

Из этой теоремы непосредственно следуют такие факты.

1. Образы элементов из свободной базы $\{a_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ алгебры F в фактор-пространстве F/F^2 составляют его базис над полем k.
2. Если $|\Lambda| > 1$, то алгебра F неабелева. (В случае, когда $|\Lambda| = 1$, алгебра F — это одномерное векторное пространство.)
3. Любая система $\{b_\beta,\ \beta \in \mathcal{B}\}$ элементов алгебры F, линейно независимая по модулю F^2, порождает свободную метабелеву алгебру Ли, для которой она является свободной базой. Это непосредственно следует из того, что нормированные слова от букв $\{b_\beta,\ \beta \in \mathcal{B}\}$ линейно независимы над k.

Как и для любой метабелевой алгебры Ли, для F верно, что $F^2 \subseteq \mathrm{Fit}(F)$. Оказывается, что в случае, если алгебра F неабелева, справедлив следующий результат.

Утверждение 2.3.2. *Если F неабелева, то* $\mathrm{Fit}(F) = F^2$.

Доказательство. Возьмём произвольный элемент $a \notin F^2$ и покажем, что $a \notin \mathrm{Fit}(F)$. Распишем a по базису, состоящему из нормированных слов:

$$a = \alpha_1 a_{i_1} + \ldots + \alpha_n a_{i_n} + b,$$

где $b \in F^2$. Поскольку $a \notin F^2$, то и $c = \alpha_1 a_{i_1} + \ldots + \alpha_n a_{i_n} \notin F^2$. Нам достаточно показать, что $c \notin \mathrm{Fit}(F)$. Допустим противное: $c \in \mathrm{Fit}(F)$. Элемент c можно включить в некоторую свободную базу алгебры F, полученную из исходной линейным преобразованием букв. Так как $c \in \mathrm{Fit}(F)$, элемент c лежит в некотором нильпотентном идеале I. Поскольку F неабелева, то найдётся элемент d свободной базы F, такой что $dc \neq 0$. Тогда имеем $dc \in I$, $c \in I$, следовательно, умножая dc на c соответствующее число раз, получим нуль, т. е. $dccc \ldots c = 0$, чего не может быть по теореме 2.3.1. Противоречие. □

Итак, по утверждению 2.3.2 заключаем, что свободная база $\{a_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ свободной неабелевой метабелевой алгебры Ли F является максимальной системой, линейно независимой по модулю $\mathrm{Fit}(F)$. Систему порождающих $\mathrm{Fit}(F)$ как модуля над кольцом $R = k[x_\alpha,\ \alpha \in \Lambda]$ (обозначение $C(F)$) построим следующим образом. Множество $\{a_\alpha a_\beta \mid \alpha, \beta \in \Lambda\}$ порождает $\mathrm{Fit}(F)$ как модуль над R. Для каждой пары индексов (α, β) включим в $C(F)$ только один элемент — $a_\alpha a_\beta$ или $a_\beta a_\alpha$. Таким образом, канонической системой порождающих алгебры F является объединение $\{a_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ и $C(F)$. Согласно тождеству Якоби на порождающих элементах $\mathrm{Fit}(F)$ выполнены соотношения вида

$$a_\alpha a_\beta x_\gamma + a_\beta a_\gamma x_\alpha + a_\gamma a_\alpha x_\beta = 0. \tag{1}$$

Оказывается, что эти соотношения определяют $\mathrm{Fit}(F)$ как модуль над R.

Лемма 2.3.3. *Система порождающих $C(F)$ выше и множество соотношений вида* (1) *определяют представление* $\mathrm{Fit}(F)$ *свободной неабелевой метабелевой алгебры Ли F как модуля над кольцом R.*

Доказательство. Пусть M — модуль над кольцом R, заданный через порождающие и определяющие соотношения, вид которых описан выше. Рассмотрим формальную прямую сумму $V \oplus M$, где V — векторное пространство над k с базой $\{a_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$. На $V \oplus M$ также вводятся естественным образом операции векторного пространства над k. Зададим на $V \oplus M$ умножение:

$$(a_\alpha \oplus m_1) \circ (a_\beta \oplus m_2) = (0 \oplus a_\alpha a_\beta + m_1 x_\beta - m_2 x_\alpha).$$

Легко проверяется, что с введёнными операциями $V \oplus M$ становится метабелевой алгеброй Ли с системой порождающих $\{a_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$. Коммутантом алгебры $V \oplus M$ является в точности модуль M. Так как F — свободная алгебра, то существует канонический эпиморфизм $\varphi\colon F \to V \oplus M$. При этом образ коммутанта алгебры F совпадает с M. Отсюда следует утверждение леммы. □

§ 3. U-алгебры

В этом параграфе мы строим специальные матричные метабелевы алгебры Ли.

Матричная метабелева алгебра Ли строится по кольцу многочленов R и свободному модулю T над кольцом R. В разделе 3.1 описаны такие алгебры и доказано, что свободная метабелева алгебра Ли любого ранга вкладывается в некоторую матричную метабелеву алгебру Ли. Идею этого представления мы заимствуем из работ В. А. Артамонова [1, 7].

В разделе 3.2 введено понятие U-алгебр и установлена связь между метабелевыми U-алгебрами Ли и матричными метабелевыми алгебрами Ли. В частности, любая конечно порождённая подалгебра U-алгебры также вкладывается в некоторую матричную.

Таким образом, с помощью матричных метабелевых алгебр Ли мы получим удобное представление для свободных метабелевых алгебр Ли и U-алгебр, которым в дальнейшем мы будем пользоваться. Удобство заключается в переходе от работы с метабелевыми алгебрами Ли к оперированию коммутативными объектами: кольцами, модулями.

3.1. Матричные метабелевы алгебры Ли

Пусть k — поле, R — кольцо многочленов от коммутирующих переменных $\{x_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ с коэффициентами из поля k, T — свободный модуль над кольцом R с базой $\{u_i,\ i \in I\}$. Опишем, как с помощью кольца R и модуля T строится матричная метабелева алгебра Ли. Через $M_{I,\Lambda}$ обозначим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} f & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $f \in R$, $u \in T$. Определим на $M_{I,\Lambda}$ операции сигнатуры алгебры Ли над полем k:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} f & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot f & \alpha \cdot u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in k,$$

$$\begin{pmatrix} f & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f+g & u+v \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} g & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ug-vf \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Относительно введённых операций множество $M_{I,\Lambda}$ замкнуто и образует метабелеву алгебру Ли. Выполнение на $M_{I,\Lambda}$ аксиом векторного пространства, дистрибутивности и однородности умножения, тождеств антикоммутативности и метабелевости легко проверяется. Покажем, что в $M_{I,\Lambda}$ на любых трёх элементов верно тождество Якоби. Для простоты элементы из $M_{I,\Lambda}$ будем записывать в виде пар $\{(f,u)\}$.

Во-первых, произведение трёх произвольных элементов из $M_{I,\Lambda}$ выражается следующим образом:

$$(f_1,v_1)\circ(f_2,v_2)\circ(f_3,v_3) = (0, v_1f_2 - v_2f_1)\circ(f_3,v_3) = (0, v_1f_2f_3 - v_2f_1f_3).$$

Теперь имеем

$$(f_1,v_1)\circ(f_2,v_2)\circ(f_3,v_3) + (f_2,v_2)\circ(f_3,v_3)\circ(f_1,v_1) + (f_3,v_3)\circ(f_1,v_1)\circ(f_2,v_2) = \\ = (0, v_1f_2f_3 - v_2f_1f_3) + (0, v_2f_3f_1 - v_3f_2f_1) + (0, v_3f_1f_2 - v_1f_3f_2) = (0,0).$$

Таким образом, множество матриц $M_{I,\Lambda}$ с определёнными выше алгебраическими операциями является метабелевой k-алгеброй Ли. Такие алгебры, а также их подалгебры мы будем называть матричными метабелевыми алгебрами Ли.

В вырожденном случае может быть $\Lambda = \varnothing$, т. е. $R = k$, а T — векторное пространство над k.

Вообще говоря, алгебра $M_{I,\Lambda}$ не является абелевой: $(0,u)\circ(f,u) = (0,uf) \neq \neq (0,0)$, если $f \neq 0$ и $u \neq 0$, но в ней присутствуют абелевы подалгебры, например однопорождённые подалгебры или коммутант $M_{I,\Lambda}^2$. Умножение в алгебре $M_{I,\Lambda}$ определено так, что все элементы-матрицы её коммутанта на главной диагонали содержат только нули, т. е. любой элемент коммутанта имеет вид $(0,u)$. Оказывается, что множество всех элементов такого вида составляет $\mathrm{Fit}(M_{I,\Lambda})$. В общем случае верен следующий результат.

Лемма 3.1.1. *Пусть A — неабелева подалгебра матричной метабелевой алгебры Ли $M_{I,\Lambda}$. Тогда радикал Фиттинга алгебры A состоит в точности из тех элементов A, у которых на главой диагонали стоят нули:*

$$\mathrm{Fit}(A) = \{(f,u) \in A,\ f = 0\}.$$

Доказательство. Обозначим множество $\{(f,u) \in A,\ f = 0\}$ через B и покажем, что $B = \mathrm{Fit}(A)$. Возьмём произвольный элемент $(0,u) \in B$, пусть I — идеал алгебры A, порождённый этим элементом. Очевидно, что $I \subset B$, следовательно, I — абелев идеал, значит, $(0,u) \in \mathrm{Fit}(A)$. Обратно, пусть $z = (f,u)$ — произвольный элемент из A, который не лежит в множестве B, т. е. $f \neq 0$. Предположим противное: $z \in \mathrm{Fit}(A)$. Тогда z принадлежит некоторому нильпотентному идеалу I. Так как алгебра A неабелева, то в ней найдутся два элемента, произведение которых не равно нулю. Поскольку произведение любых двух элементов лежит в множестве B, значит, в нём найдётся ненулевой элемент $w = (0,v)$, $v \neq 0$. Тогда $w \circ z = (0,vf) \in I$ и $w \circ z \neq 0$. Но если I — нильпотентный идеал, то для некоторого положительного целого n должно быть верно, что $w \circ z \circ \ldots \circ z = (0,vf^n) = (0,0)$, чего не может быть. □

Замечание. В случае абелевой подалгебры A матричной метабелевой алгебры Ли $M_{I,\Lambda}$ утверждение леммы может и не выполняться. К примеру, для подалгебры A, порождённой одним элементом (f,u), при $f \neq 0$ это неверно, так как $\mathrm{Fit}(A) = A$.

Следствие. *Радикал Фиттинга любой подалгебры матричной метабелевой алгебра Ли абелев.*

Обозначение. Пусть $M_{I,\Lambda}$ — матричная метабелева алгебра Ли. Через $M_{I,\Lambda}^0$ будем обозначать следующее подмножество $M_{I,\Lambda}$:

$$M_{I,\Lambda}^0 = \{(f,u) \mid f = \beta_{\alpha_1}x_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2}x_{\alpha_2} + \ldots + \beta_{\alpha_m}x_{\alpha_m},\ \beta_{\alpha_j} \in k\}.$$

Очевидно, что $M_{I,\Lambda}^0$ является подалгеброй в алгебре $M_{I,\Lambda}$. В дальнейшем нас будет интересовать более узкий класс матричных метабелевых алгебр Ли — класс подалгебр алгебр типа $M_{I,\Lambda}^0$.

Лемма 3.1.2. *Пусть A — подалгебра матричной метабелевой алгебры Ли $M^0_{I,\Lambda}$. Тогда радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ как модуль над кольцом многочленов не имеет кручения.*

Доказательство. По лемме 3.1.1 $\mathrm{Fit}(A)$ абелев, поэтому на нём можно ввести структуру модуля над кольцом многочленов. Пусть $\{e_d,\ d \in \Delta\}$ — базис векторного пространства $A/\mathrm{Fit}(A)$, $\{(f_d, u_d),\ d \in \Delta\}$ — множество прообразов в A для элементов этого базиса. Все многочлены f_d есть линейные комбинации букв $\{x_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ с коэффициентами из k, кроме того, множество всех этих многочленов $\{f_d,\ d \in \Delta\}$ линейно независимо по лемме 3.1.1.

Требуется показать, что $\mathrm{Fit}(A)$ как модуль над кольцом $R = k[x_d,\ d \in \Delta]$ не имеет кручения. Возьмём произвольный элемент $b \in \mathrm{Fit}(A)$ и ненулевой многочлен $g(x_d) \in R$, рассмотрим произведение $b \cdot g$. По лемме 3.1.1 элемент из $\mathrm{Fit}(A)$ имеет вид $b = (0, v)$, значит, $b \cdot g = (0, vg(f_d))$. Многочлен $g(f_d)$ также не равен нулю, следовательно, $b \cdot g \neq 0$. $\square$

Далее, покажем как свободная метабелева алгебра Ли F над полем k вкладывается в матричную. Пусть $\{a_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ — свободная база алгебры F. Тогда F представима в виде подалгебры матричной метабелевой алгебры Ли $M^0_{\Lambda,\Lambda}$. Матричную алгебру $M^0_{\Lambda,\Lambda}$ мы строим по кольцу многочленов $R = k[x_\alpha,\ \alpha \in \Lambda]$ и свободному модулю T, множество свободных порождающих $\{u_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ которого равномощно свободной базе алгебры F. В $M^0_{\Lambda,\Lambda}$ рассмотрим подалгебру L, порождённую элементами

$$\left\{ z_\alpha = \begin{pmatrix} x_\alpha & u_\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \alpha \in \Lambda \right\}.$$

Мощность порождающего множества $\{z_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ метабелевой алгебры Ли L совпадает с мощностью свободной базы $\{a_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ алгебры F. Следовательно, существует канонический гомоморфизм $\gamma\colon F \to M^0_{\Lambda,\Lambda}$, такой что $\gamma(a_\alpha) = z_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$. Следующая теорема показывает, что алгебра L есть реализация свободной алгебры F в матричной.

Теорема 3.1.3. *Гомоморфизм γ выше является вложением свободной метабелевой алгебры Ли F в матричную метабелеву алгебру Ли $M^0_{\Lambda,\Lambda}$.*

Доказательство. Пусть I — ядро гомоморфизма γ. Будем доказывать, что I — нулевой идеал.

По теореме 2.3.1 алгебра L как векторное пространство над k порождается нормированными словами от букв $\{z_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$, т. е. левонормированными словами $z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_m}$, в которых индексы упорядочены следующим образом: $i_1 > i_2 \leqslant i_3 \leqslant \ldots \leqslant i_m$ (предполагаем, что множество индексов Λ вполне упорядоченно). Покажем, что нормированные слова в L линейно независимы. Отсюда будет следовать, что идеал I нулевой.

В матричном представлении нормированное слово $z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_m}$ есть матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & (u_{i_1} x_{i_2} - u_{i_2} x_{i_1}) \cdot x_{i_m} \ldots x_{i_3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица ненулевая, так как $(u_{i_1}x_{i_2} - u_{i_2}x_{i_1}) \cdot x_{i_m} \ldots x_{i_3}$ — ненулевой элемент свободного модуля T. Далее, предположим, что

$$\gamma\Bigg(\sum_{\bar\imath} \alpha_{\bar\imath} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m}\Bigg) = 0, \quad \alpha_{\bar\imath} \in k, \tag{1}$$

и покажем, что для всех мультииндексов $\bar\imath$ коэффициент $a_{\bar\imath}$ равен нулю. Ясно, что можно предполагать, что в записи (1) $m \geqslant 2$ для всех $\bar\imath$. Равенство (1) влечёт выполнение в модуле T равенства

$$\sum_{\bar\imath} \alpha_{\bar\imath}(u_{i_1}x_{i_2} - u_{i_2}x_{i_1}) \cdot x_{i_k} \ldots x_{i_3} = 0. \tag{2}$$

Выберем индекс i_1, максимальный среди первых индексов во всех мультииндексах $\bar\imath$, встречающихся в записи (1). Из определения нормированных слов следует, что коэффициентом при u_{i_1} в левой части равенства (2) будет

$$\sum_{\bar\imath = i_1, \ldots, i_m} \alpha_{\bar\imath} x_{i_m} \ldots x_{i_3} \cdot x_{i_2}.$$

Так как модуль T свободен, а u_{i_1} — базисный элемент T, то этот коэффициент равен нулю в кольце многочленов R. Опять же из определения нормированных слов следует, что все $a_{\bar\imath}$, у которых мультииндекс $\bar\imath$ начинается с i_1, равны нулю. Индукция по первым индексам в мультииндексах $\bar\imath$ даёт требуемое утверждение. □

В заключение этого пункта приведём и докажем несколько простых, но важных свойств, выполненных на элементах матричных метабелевых алгебр Ли.

Лемма 3.1.4. *Пусть $M_{I,\Lambda}$ — произвольная матричная метабелева алгебра Ли, $x = (f_1, u_1)$, $y = (f_2, u_2)$, $z = (f_3, u_3)$ — элементы алгебры $M_{I,\Lambda}$. Тогда*

1) *если $xyx = 0$ и $xyy = 0$, то $xy = 0$,*
2) *если $xy = 0$, $xz = 0$ и $x \neq 0$, то $yz = 0$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы. Переписывая в матричном виде заданные условия, получаем, что $(0, (u_1f_2 - u_2f_1)f_1) = (0, 0)$ и $(0, (u_1f_2 - u_2f_1)f_2) = (0, 0)$, откуда сразу следует требуемое равенство: $xy = (0, u_1f_2 - u_2f_1) = (0, 0)$.

Теперь перейдём к доказательству второго утверждения. Начальные данные обеспечивают нам следующие два равенства:

$$u_1f_2 = u_2f_1, \tag{3}$$

$$u_1f_3 = u_3f_1 \tag{4}$$

и, кроме того, $f_1 \neq 0$ или $u_1 \neq 0$. Нужно показать, что справедливо заключение $yz = 0$, т. е.

$$u_2f_3 = u_3f_2. \tag{5}$$

Если $f_1 \neq 0$, то (5) равносильно равенству $u_2f_3f_1 = u_3f_2f_1$, которое получается после умножения (3) и (4) на многочлены f_3 и f_2 соответственно. Если же $f_1 = 0$, то $f_2 = f_3 = 0$, что также влечёт (5). □

Следствие. *По теореме* 3.1.3 *свойства, описанные в лемме* 3.1.4 *выполнены, в частности, в свободной метабелевой алгебре Ли.*

3.2. U-алгебры

Определение. Метабелеву алгебру Ли A над полем k будем называть U-алгеброй, если:

1) $\mathrm{Fit}(A)$ абелев,
2) $\mathrm{Fit}(A)$ как модуль над кольцом многочленов (со структурой, введённой в разделе 2.1) не имеет кручения.

Поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело только с метабелевыми U-алгебрами Ли, то для краткости будем называть их просто U-алгебрами.

Замечание. Как отмечалось в разделе 2.1, при введении на $\mathrm{Fit}(A)$ структуры модуля над кольцом многочленов $R = k[x_\alpha,\ \alpha \in \Lambda]$ присутствует произвол при выборе системы $\{a_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ элементов A, линейно независимых по модулю $\mathrm{Fit}(A)$. Так как переход от одной такой системы к другой означает k-линейную замену переменных кольца R, то этот выбор не влияет на наличие или отсутствие кручения в $\mathrm{Fit}(A)$ как модуле над R. Таким образом, определение U-алгебры корректно.

Если A — абелева алгебра Ли, то $A = \mathrm{Fit}(A)$, поэтому кольцо, над которым определяется модульная структура $\mathrm{Fit}(A)$, — это просто поле k. Следовательно, любая абелева алгебра Ли является U-алгеброй.

Заявленная выше связь между U-алгебрами и матричными метабелевыми алгебрами Ли выражена в следующей теореме.

Теорема 3.2.1. *Любая конечно порождённая метабелева U-алгебра Ли изоморфна подалгебре некоторой матричной метабелевой алгебры Ли* $M^0_{I,\Lambda}$*, и наоборот, любая подалгебра алгебры* $M^0_{I,\Lambda}$ *является U-алгеброй.*

Доказательство. Непосредственно из лемм 3.1.1 и 3.1.2 заключаем, что всякая подалгебра A матричной метабелевой алгебры Ли $M^0_{I,\Lambda}$ является U-алгеброй.

Докажем первое утверждение теоремы. Пусть A — конечно порождённая U-алгебра. По определению $\mathrm{Fit}(A)$ абелев, значит, на нём можно ввести структуру модуля над кольцом многочленов. Так как алгебра A является конечно порождённой, то по лемме 2.2.2 её каноническая система порождающих $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_l$ конечна. Также по определению $\mathrm{Fit}(A)$ как модуль над кольцом $R = k[x_1, \ldots, x_r]$ не имеет кручения.

Как конечно порождённый модуль без кручения над кольцом многочленов, $\mathrm{Fit}(A)$ вкладывается в свободный модуль T над кольцом R ранга s, $s \leqslant l$ (см. [5] или [3]). Пусть $\varphi\colon \mathrm{Fit}(A) \to T$ — соответствующее вложение модулей. С помощью него построим вложение алгебр $\gamma\colon A \to M^0_{s,r}$.

Определим действие γ на порождающих элементах $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_l$ алгебры A:

$$\gamma(b_i) = \left(0, \varphi(b_i) \cdot \left(\sum_{k=1}^{r} x_k\right)\right), \quad i = 1, \ldots, l,$$

$$\gamma(a_j) = \left(x_j, \sum_{k=1}^{r} \varphi(a_j \circ a_k)\right), \quad j = 1, \ldots, r.$$

На остальные элементы алгебры A действие γ продолжим по гомоморфности. Проверим корректность отображения γ.

Для этого, используя представление конечно порождённой метабелевой алгебры Ли, описанное в теореме 2.2.3, докажем сохранение под действием γ трёх групп определяющих соотношений алгебры A, описанных в этой теореме.

Первый вид соотношений получается из представления $\mathrm{Fit}(A)$ как модуля над R, такое соотношение имеет форму $b_1 \cdot f_1 + \ldots + b_l \cdot f_l = 0$, $f_i \in R$. Для любой пары индексов (i, j), $i = 1, \ldots, l$ и $j = 1, \ldots, r$, мы имеем

$$\gamma(b_i \circ a_j) = \gamma(b_i) \circ \gamma(a_j) = \left(0, \varphi(b_i) \cdot \left(\sum_{k=1}^{r} x_k\right) \cdot x_j\right).$$

Далее, для любого многочлена $f \in R$ индукцией по его степени получаем, что

$$\gamma(b_i \cdot f) = \left(0, \varphi(b_i) \cdot \left(\sum_{k=1}^{r} x_k\right) \cdot f\right) = \left(0, \varphi(b_i \cdot f) \cdot \left(\sum_{k=1}^{r} x_k\right)\right).$$

Отсюда следует требуемое равенство:

$$\gamma(b_1 \cdot f_1 + \ldots + b_l \cdot f_l) = \gamma(b_1 \cdot f_1) + \ldots + \gamma(b_l \cdot f_l) = \\ = \left(0, \varphi(b_1 \cdot f_1 + \ldots + b_l \cdot f_l) \cdot \left(\sum_{k=1}^{r} x_k\right)\right) = (0, 0).$$

Согласно лемме 3.1.1 $\gamma(b_i) \in \mathrm{Fit}(M_{s,r}^0)$, $i = 1, \ldots, l$. Следовательно, соотношения второй группы, выражающие абелевость $\mathrm{Fit}(A)$, под действием γ также сохраняются.

Последняя, третья группа соотношений алгебры A выражает тот факт, что $a_i \circ a_j \in \mathrm{Fit}(A)$ для любой пары индексов (i, j). Эти соотношения записываются следующим образом: $a_i \circ a_j = b_1 \cdot g_{ij}^1 + \ldots + b_l \cdot g_{ij}^l$, $g_{ij}^p \in R$. Как было показано выше,

$$\gamma(b_1 \cdot g_{ij}^1 + \ldots + b_l \cdot g_{ij}^l) = \left(0, \varphi(b_1 \cdot g_{ij}^1 + \ldots + b_l \cdot g_{ij}^l) \cdot \left(\sum_{k=1}^{r} x_k\right)\right).$$

Поэтому осталось показать, что

$$\gamma(a_i \circ a_j) = \left(0, \varphi(a_i \circ a_j) \cdot \left(\sum_{k=1}^{r} x_k\right)\right).$$

Действительно,

$$\gamma(a_i \circ a_j) = \gamma(a_i) \circ \gamma(a_j) = \left(x_i, \sum_{k=1}^{r} \varphi(a_i \circ a_k)\right) \circ \left(x_j, \sum_{k=1}^{r} \varphi(a_j \circ a_k)\right) =$$

$$= \left(0, \sum_{k=1}^{r} (\varphi(a_i \circ a_k) \cdot x_j - \varphi(a_j \circ a_k) \cdot x_i)\right) = \left(0, \varphi(a_i \circ a_j) \cdot \left(\sum_{k=1}^{r} x_k\right)\right).$$

Последнее равенство следует из тождества Якоби.

Для доказательства теоремы осталось проверить только то, что ядро гомоморфизма γ тривиально. Пусть $a \in A$. Покажем, что если $a \neq 0$, то $\gamma(a) \neq (0,0)$. Элемент a однозначно представляется в виде $a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n + b$, где $a_i \in k$, $b \in \mathrm{Fit}(A)$. Если $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n \neq 0$, то $\gamma(a) \neq (0,0)$. Пусть $a = b \in \mathrm{Fit}(A)$ и $b \neq 0$. Элемент b записывается следующим образом: $b = b_1 f^1 + \ldots + b_l f^l$, где $f^k \in R$. Теперь, поскольку φ — вложение и T — модуль без кручения над R, имеем

$$\gamma(b) = \left(0, \varphi(b_1 \cdot f^1 + \ldots + b_l \cdot f^l) \cdot \left(\sum_{k=1}^{r} x_k\right)\right) \neq (0,0).$$

Таким образом, мы показали, что γ — это гомоморфизм, реализующий вложение конечно порождённой U-алгебры A в матричную метабелеву алгебру Ли $M^0_{s,r}$. □

Замечание. В вырожденном случае, когда A является абелевой алгеброй, она вкладывается в $M^0_{l,0}$, где l — размерность A как векторного пространства над k.

Следствие. *Свободная метабелева алгебра Ли F является U-алгеброй.*

Теорема 3.2.1 даёт характеризацию конечно порождённых U-алгебр. Дальнейшие результаты дадут нам описание произвольных U-алгебр.

Лемма 3.2.2. *Пусть A — U-алгебра, B — подалгебра A. Тогда B — U-алгебра.*

Доказательство. Если B — абелева подалгебра, то она U-алгебра по замечанию выше. Поэтому будем считать, что B неабелева.

Покажем, что $\mathrm{Fit}(B) = B \cap \mathrm{Fit}(A)$. Очевидно включение $\mathrm{Fit}(B) \supseteq B \cap \mathrm{Fit}(A)$. Докажем выполнение обратного включения. Возьмём $b \in B \setminus \mathrm{Fit}(A)$. Поскольку B неабелева, найдутся два элемента $c, d \in B$, такие что $cd \neq 0$. Так как $b \notin \mathrm{Fit}(A)$ и $0 \neq cd \in \mathrm{Fit}(A)$, то сколь угодно длинные мономы вида $cdbb \ldots b$ не равны нулю, откуда следует, что элемент b не содержится ни в одном нильпотентном идеале подалгебры B, а потому $b \notin \mathrm{Fit}(B)$. Этим доказано обратное включение.

Из полученного нами описания $\mathrm{Fit}(B)$ заключаем, что он является абелевым. Далее, если какая-либо система элементов из B линейно независима по модулю $\mathrm{Fit}(B)$, то она линейно независима по модулю $\mathrm{Fit}(A)$, поэтому $\mathrm{Fit}(B)$, как и $\mathrm{Fit}(A)$, не имеет кручения. □

Теорема 3.2.3. *Метабелева алгебра Ли A является U-алгеброй тогда и только тогда, когда любая её конечно порождённая подалгебра — U-алгебра.*

Доказательство. Пусть A — U-алгебра, тогда по лемме 3.2.2 любая подалгебра алгебры A является U-алгеброй. Докажем теперь обратное. Пусть любая конечно порождённая подалгебра алгебры A есть U-алгебра.

Во-первых, покажем, что $\mathrm{Fit}(A)$ абелев. Пусть $c, d \in \mathrm{Fit}(A)$, $D = \langle c, d\rangle$ — алгебра, порождённая c, d. Так как $\mathrm{Fit}(D) \supseteq D \cap \mathrm{Fit}(A)$, значит, $c, d \in \mathrm{Fit}(D)$. По условию алгебра D является U-алгеброй, следовательно, $cd = 0$.

Во-вторых, докажем, что $\mathrm{Fit}(A)$ как модуль над кольцом многочленов не имеет кручения. Пусть $0 \neq b \in \mathrm{Fit}(A)$, $f(a_1, \ldots, a_n)$ — ненулевой многочлен. Положим $B = \langle a_1, \ldots, a_n, b\rangle$. Алгебра B является конечно порождённой подалгеброй A, поэтому U-алгеброй. Очевидно, что $b \in \mathrm{Fit}(B)$. Значит, для справедливости требуемого неравенства $b \cdot f \neq 0$ осталось показать, что элементы $a_1, \ldots, a_n$ линейно независимы по модулю $\mathrm{Fit}(B)$. Предположим противное: $a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$, $\alpha_i \in k$, — нетривиальная линейная комбинация и $a \in \mathrm{Fit}(B)$. Покажем, что в этом случае $a \in \mathrm{Fit}(A)$, что противоречит линейной независимости элементов $a_1, \ldots, a_n$ по модулю $\mathrm{Fit}(A)$. Так как $\mathrm{Fit}(B)$ абелев и $b \in \mathrm{Fit}(B)$, то $ab = 0$. Возьмём произвольный элемент $c \in \mathrm{Fit}(A)$. Пусть $C = \langle a, b, c\rangle$ — конечно порождённая подалгебра A. По условию теоремы C является U-алгеброй. Далее, имеем, что $b \neq 0$, $ab = 0$ и $bc = 0$, так как $b, c \in \mathrm{Fit}(C)$. По теореме 3.2.1 C вкладывается в алгебру типа $M^0_{I,\Lambda}$. По лемме 3.1.4 заключаем, что $ac = 0$. Значит, по лемме 2.1.4 $a \in \mathrm{Fit}(A)$. □

Следствие. *С помощью теорем* 3.2.1 *и* 3.2.3 *можно характеризовать метабелевы U-алгебры Ли следующим образом: метабелева алгебра Ли является U-алгеброй тогда и только тогда, когда любая её конечно порождённая подалгебра вкладывается в специальную матричную метабелеву алгебру Ли типа $M^0_{I,\Lambda}$.*

Теорема 3.2.4. *Пусть A — метабелева U-алгебра Ли. Тогда для любых её элементов $x, y, z \in A$ верно следующее:*

1) *если $xyx = 0$ и $xyy = 0$, то $xy = 0$.*
2) *если $xy = 0$, $xz = 0$ и $x \neq 0$, то $yz = 0$.*

Доказательство. Пусть $C = \langle x, y, z\rangle$ — конечно порождённая подалгебра алгебры A. Тогда по следствию выше C вкладывается в алгебру типа $M^0_{I,\Lambda}$, поэтому в силу леммы 3.1.4 получаем требуемое. □

§ 4. Универсальные классы и расширение радикала Фиттинга U-алгебры

Пусть A — метабелева U-алгебра Ли над полем k. Этот параграф посвящён описанию двух способов расширения алгебры A за счёт пополнения её радикала Фиттинга. Первый способ — это локализация радикала Фиттинга алгебры A

как модуля над кольцом многочленов R по некоторому максимальному идеалу Δ кольца R. Полученную таким путём алгебру мы назовём Δ-локальной. Подробнее конструкция и приложения Δ-локальных алгебр описаны в разделе 4.2. Второй способ расширения радикала Фиттинга U-алгебры — это прямое присоединение к нему некоторого модуля M без кручения над кольцом многочленов R. Такие алгебры мы будем обозначать через $A \oplus M$, им посвящён раздел 4.3. Как Δ-локальные алгебры, так и алгебры типа $A \oplus M$ оказываются полезными при изучении универсального замыкания алгебры A.

Универсальное замыкание играет важную роль при построении алгебраической геометрии над алгебрами Ли (а в действительности, — над произвольными алгебраическими системами). Основные сведения об универсальном замыкании, а также других универсальных классах и языках приведены в разделе 4.1.

4.1. Универсальные классы

Логические основания алгебраической геометрии над группами изложены в [8, 9]. Следуя этим работам, мы вводим аналогичные определения и для категории алгебр Ли над полем k, формулируем некоторые результаты для алгебр Ли, аналоги которых для групп сформулированы и доказаны в [8, 9]. Там, где доказательства для групп и алгебр Ли являются практически одинаковыми, мы не приводим их, отсылая к работам [8, 9].

Стандартный язык первой ступени теории алгебр Ли над фиксированным полем k (обозначим его через L) состоит из символа сложения «$+$», символа вычитания «$-$», символа «0» для обозначения нуля, символа умножения «$\circ$», а также набора символов $\{k_\alpha,\ \alpha \in k\}$ для задания операций умножения на коэффициенты поля k.

Пусть A — фиксированная алгебра Ли над полем k. Для целей алгебраической геометрии над алгеброй A удобно расширить язык L до языка L_A путём добавления в него в качестве констант всех ненулевых элементов из алгебры A:

$$L_A = L \cup \{c_a \mid a \in A,\ a \neq 0\}.$$

Алгебру Ли B над полем k будем называть *A-алгеброй*, если она содержит выделенную подалгебру, изоморфную алгебре A. Очевидно, что все A-алгебры Ли можно рассматривать как модели языка L_A. Гомоморфизм $\varphi\colon B_1 \to B_2$ между A-алгебрами Ли B_1 и B_2 назовём *A-гомоморфизмом*, если $\varphi(a) = a$ для всех $a \in A$. Класс A-алгебр Ли естественным образом образует категорию, морфизмами которой являются A-гомоморфизмы. Через $\mathrm{Hom}_A(B_1, B_2)$ обозначим множество всевозможных A-гомоморфизмов из A-алгебры Ли B_1 в A-алгебру Ли B_2.

Данной A-алгебре Ли B сопоставим несколько теоретико-модельных классов A-алгебр Ли: *многообразие* A-$\mathrm{var}(B)$, состоящие из всех A-алгебр Ли, удовлетворяющих всем тождествам языка L_A, выполненным в B; квазимногообразие

A-qvar(B), состоящее из всех A-алгебр Ли, удовлетворяющих всем квазитождествам языка L_A, выполненным в B; *универсальное замыкание* A-ucl(B), состоящее из всех A-алгебр Ли, на которых выполнены все универсальные предложения языка L_A, верные в B.

Запишем, как выглядят тождества, квазитождества и универсальные предложения в языке L_A.

Универсальное предложение — это формула типа

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \Big(\bigvee_{j=1}^{s} \bigwedge_{i=1}^{t} (u_{ij}(\bar{x}, \bar{a}_{ij}) = 0 \ \wedge \ w_{ij}(\bar{x}, \bar{c}_{ij}) \neq 0) \Big),$$

где $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — n-вектор переменных, $\bar{a}_{ij}$ и $\bar{c}_{ij}$ — векторы постоянных из алгебры A и u_{ij}, w_{ij} — термы.

Тождество в языке L_A — это формула вида

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \Big(\bigwedge_{i=1}^{m} r_i(\bar{x}, \bar{a}_{ij}) = 0 \Big),$$

где $r_i(\bar{x})$ — терм языка L_A от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Квазитождество — формула вида

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \Big(\bigwedge_{i=1}^{m} r_i(\bar{x}, \bar{a}_{ij}) = 0 \to s(\bar{x}, \bar{b}) = 0 \Big),$$

где $r_i(\bar{x})$ и $s(\bar{x})$ — термы языка L_A от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Замечание 1. Помимо классов A-var(B), A-qvar(B) и A-ucl(B) будем также рассматривать классы var(B), qvar(B) и ucl(B), которые являются соответственно многообразием, квазимногообразием и универсальным замыканием алгебры B в языке L.

Замечание 2. Класс qvar(B) содержится в классе var(B) (аналогично, A-qvar$(B) \subseteq A$-var(B)). Это следует из того, что любое тождество эквивалентно конечному числу некоторых квазитождеств. К примеру, тождество $\forall x_1 \ldots \forall x_n \Big(\bigwedge\limits_{i=1}^{m} r_i(\bar{x}) = 0 \Big)$, очевидно, эквивалентно m квазитождествам вида $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y (y = y \to r_i(\bar{x}) = 0)$.

Класс ucl(B) содержится в qvar(B). И, аналогично, A-ucl$(B) \subseteq A$-qvar(B).

Пусть B_1 и B_2 — A-алгебры Ли. Будем говорить, что B_1 *A-дискриминируется алгеброй* B_2, если для любого конечного подмножества $\{b_1, \ldots, b_n\}$ ненулевых элементов алгебры B_1 существует A-гомоморфизм $\varphi \colon B_1 \to B_2$, такой что $\varphi(b_i) \neq 0$ для всех i.

Теорема 4.1.1. *Если B_1 и B_2 — A-алгебры Ли и B_1 A-дискриминируется алгеброй B_2, то $B_1 \in A$-ucl(B_2).*

Доказательство. Напомним: чтобы утверждать, что $B_1 \in A$-ucl(B_2), достаточно показать, что любая конечная подмодель алгебры B_1 A-вкладывается в алгебру B_2, а это в данном случае, очевидно, выполняется ввиду A-дискриминируемости алгебры B_1 алгеброй B_2. $\square$

4.2. Δ-локальные алгебры

Пусть A — метабелева U-алгебра Ли над полем k. Обозначим через $\{z_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ максимальное множество линейно независимых по модулю радикала Фиттинга элементов алгебры A, через V — векторное пространство над полем k, натянутое на элементы этого множества. На радикале Фиттинга алгебры A есть структура модуля без кручения над кольцом $R = k[x_\alpha,\ \alpha \in \Lambda]$.

По алгебре A мы построим Δ-локальную A-алгебру A_Δ с помощью расширения $\mathrm{Fit}(A)$ за счёт пополнения кольца R. Пусть Δ — максимальный идеал кольца R, порождённый всеми многочленами с нулевыми свободными членами:

$$\Delta = \langle x_\alpha,\ \alpha \in \Lambda \rangle.$$

Через R_Δ обозначим локализацию кольца R по идеалу Δ, через $\mathrm{Fit}_\Delta(A)$ — локализацию $\mathrm{Fit}(A)$ по идеалу Δ, т. е. замыкание $\mathrm{Fit}(A)$ относительно умножения на все элементы локального кольца R_Δ (подробнее о локализации колец и модулей см. [5] или [3]).

Теперь рассмотрим прямую сумму векторных пространств над k $V \oplus \mathrm{Fit}_\Delta(A)$ и определим на ней структуру алгебры. Умножение элементов из V между собой наследуем из алгебры A, умножение внутри $\mathrm{Fit}_\Delta(A)$ зададим тривиальным образом. Далее, положим

$$u \circ z_\alpha = u \cdot x_\alpha, \quad u \in \mathrm{Fit}_\Delta(A), \quad z_\alpha \in V, \quad u \cdot x_\alpha \in \mathrm{Fit}_\Delta(A),$$

после чего продолжим умножение элементов $u \in \mathrm{Fit}_\Delta(A)$ на элементы из V по линейности. Легко проверить, что

1) заданное умножение превращает векторное пространство $V \oplus \mathrm{Fit}_\Delta(A)$ в метабелеву алгебру Ли, которую мы будем обозначать через A_Δ,
2) $A_\Delta / \mathrm{Fit}(A_\Delta) \cong V$,
3) на $\mathrm{Fit}(A_\Delta)$ вводится структура модуля над кольцом R,
4) $\mathrm{Fit}(A_\Delta) = \mathrm{Fit}_\Delta(A)$,
5) A_Δ является U-алгеброй. Алгебра A есть подалгебра алгебры A_Δ. Но даже если алгебра A является конечно порождённой, то алгебра A_Δ всё равно является бесконечно порождённой алгеброй.

При переходе от алгебры A к её Δ-локализации A_Δ не меняется универсальное замыкание, что следует из приведённых ниже результатов.

Лемма 4.2.1. *Пусть A — U-алгебра, A_Δ — её Δ-локализация, B — конечно порождённая подалгебра алгебры A_Δ. Тогда алгебра B вкладывается в алгебру A.*

Доказательство. Пусть $K = \{b_1, \ldots, b_n\}$ — множество порождающих элементов подалгебры B. Мы построим инъективный гомоморфизм $\varphi\colon A_\Delta \to A_\Delta$, такой что $\varphi(b_i) \in A$ $(A \subseteq A_\Delta)$ для каждого элемента $b_i \in K$. Тогда, очевидно, ограничение гомоморфизма φ на подалгебре B будет вложением B в алгебру A, $\varphi\colon B \to A$. Гомоморфизм φ определим действием умножения на некоторый многочлен $(1+f)$, корректность и инъективность такого действия доказаны в предложении 2.2.4. Соответствующий многочлен построим следующим образом.

Элементы из множества K разложим в сумму:

$$b_i = c_i + d_i, \quad c_i \in V, \quad d_i \in \mathrm{Fit}(A_\Delta), \quad i = 1, \ldots, n.$$

В свою очередь, каждый d_i представи́м в виде суммы элементов вида

$$d_{ij}\frac{1}{g_{ij}}, \quad d_{ij} \in \mathrm{Fit}(A), \quad g_{ij} \in R \setminus \Delta, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Теперь обозначим через g многочлен, равный произведению всех многочленов g_{ij}. Поскольку все многочлены g_{ij} имеют ненулевые свободные члены, то и многочлен g имеет ненулевой свободный член α. Теперь выберем многочлен $f \in \Delta$, такой что $1 + f = \frac{1}{\alpha}g$, и определим гомоморфизм φ умножением на $(1+f)$.

Выбор многочлена $(1+f)$ обеспечивает то, что $\varphi(d_i) \in \mathrm{Fit}(A)$, а значит, $\varphi(b_i) \in A$, $i = 1, \ldots, n$. Так как $\mathrm{Fit}(A_\Delta)$ — модуль без кручения, то гомоморфизм φ инъективен. □

Предложение 4.2.2. *Пусть A — метабелева U-алгебра Ли, A_Δ — её Δ-локализация. Тогда алгебры A и A_Δ универсально эквивалентны:*

$$\mathrm{ucl}(A) = \mathrm{ucl}(A_\Delta).$$

Доказательство универсальной эквивалентности алгебр эквивалентно доказательству того, что любая конечная подмодель из одной алгебры вкладывается в другую алгебру. В одну сторону доказательство очевидно: любая конечная подмодель алгебры A вкладывается в алгебру A_Δ. Докажем обратное утверждение. Для этого возьмём конечную подмодель $K = \{b_1, \ldots, b_n\}$ алгебры A_Δ. Элементы множества K порождают конечно порождённую подалгебру $B \leqslant A_\Delta$, которая вкладывается в алгебру A согласно лемме 4.2.1, что, в частности, даёт искомое вложение в A конечной подмодели K алгебры A_Δ. □

В случае свободной метабелевой алгебры Ли F конечного ранга r процедура Δ-локализации имеет следующие полезные свойства.

Пусть система элементов $c_1, \ldots, c_r$ алгебры F линейно независима по модулю $\mathrm{Fit}(F)$ и $C = \langle c_1, \ldots, c_r\rangle$ — подалгебра, порождённая этой системой. Тогда по теореме 2.3.1 подалгебра C — свободная метабелева алгебра Ли ранга r, но как множество она может не совпадать с F. Однако при переходе к Δ-локальным алгебрам получаем следующий результат.

Предложение 4.2.3. *Пусть F и C обозначают то же, что и выше. Тогда $C_\Delta = F_\Delta$ и $\mathrm{Fit}(C_\Delta) = \mathrm{Fit}(F_\Delta)$.*

Доказательство. Понятно, что необходимо доказать только второе равенство. Не ограничивая общности рассуждений, можно предполагать, что

$c_i = a_i + d_i$, $i = 1, \ldots, r$, где $a_1, \ldots, a_r$ — свободная база алгебры F, $d_1, \ldots, d_r \in F^2$. Покажем, что $a_i a_j \in C^2_\Delta$ для любой пары индексов (i, j), это и будет означать требуемое. Пусть $R = k[x_1, \ldots, x_r]$. Выписывая всевозможные произведения $c_i c_j$, $i > j = 1, \ldots, r$, в форме

$$c_i c_j = a_i a_j \cdot f_{ij}(x_1, \ldots, x_r) + \sum_{(p,q) \neq (i,j)} a_p a_q \cdot f_{pq}(x_1, \ldots, x_r),$$

где $f_{ij} \in R \setminus \Delta$, $f_{pq} \in \Delta$, мы получим систему C^2_r (число сочетаний из r по 2) уравнений над $\mathrm{Fit}(C)$ относительно переменных $a_i a_j$, $i > j = 1, \ldots, r$. Определитель этой системы — многочлен $h(x_1, \ldots, x_r) \in R \setminus \Delta$. Следовательно, система имеет решение в модуле $\mathrm{Fit}_\Delta(C)$. □

4.3. Расширение радикала Фиттинга U-алгебры с помощью модуля без кручения над кольцом многочленов

В этом пункте приведена ещё одна конструкция пополнения метабелевой U-алгебры Ли, отличная от Δ-локализации. Так же, как и ранее, считаем, что A — метабелева U-алгебра Ли над полем k, $\{z_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ — максимальное множество линейно независимых по модулю $\mathrm{Fit}(A)$ элементов алгебры, V — векторное пространство над k с базисом $\{z_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$, $\mathrm{Fit}(A)$ — модуль над кольцом $R = k[x_\alpha,\ \alpha \in \Lambda]$.

Пусть M — модуль без кручения над кольцом R. С помощью модуля M пополним алгебру A, переходя к A-алгебре $A \oplus M$, которую определим следующим образом: $A \oplus M$ — прямая сумма векторных пространств $V \oplus \mathrm{Fit}(A) \oplus M$ над полем k. Умножение на $A \oplus M$ зададим подобно определению умножения в Δ-локальной алгебре: внутри A сохраним естественное умножение; элементы из модуля M при умножении друг на друга и на элементы из $\mathrm{Fit}(A)$ дают нуль; если $b \in M$ и $z_\alpha \in V$, то положим $b \circ z_\alpha = b \cdot x_\alpha$ и продолжим по линейности умножение b на произвольные элементы из V.

Относительно введённых выше операций $A \oplus M$ становится метабелевой алгеброй Ли над полем k, что проверяется непосредственно. Канонической системой порождающих для $A \oplus M$ будет по определению объединение двух систем: канонической системы порождающих алгебры A и любой системы порождающих модуля M. Нетрудно показать, что радикалом Фиттинга алгебры $A \oplus M$ будет прямая сумма $\mathrm{Fit}(A) \oplus M$ и что алгебра $A \oplus M$ является U-алгеброй.

Следующие результаты показывают, что переход от алгебры A к алгебре типа $A \oplus M$ не изменяет универсального замыкания, как и в случае Δ-локальных алгебр.

Лемма 4.3.1. *Пусть M — модуль без кручения над кольцом многочленов R. Тогда для любого конечного набора $u_1, \ldots, u_n$ элементов модуля M и любого набора ненулевых многочленов $f_1, \ldots, f_n$ кольца R найдётся $u \in M$, такой что $u \cdot f_i \neq u_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Возьмём произвольный ненулевой элемент $u_0 \in M$ и рассмотрим бесконечное множество $K = \{u_0, u_0 \cdot x_\alpha, u_0 \cdot x_\alpha^2, \ldots, u_0 \cdot x_\alpha^m, \ldots\}$, где x_α — произвольная переменная кольца многочленов R. Покажем, что любому из равенств $u \cdot f_i = u_i$ может удовлетворять не более чем один элемент из множества K. Пусть $(u_0 \cdot x_\alpha^m) \cdot f_i = u_i$ и $l \neq m$, тогда $(u_0 \cdot x_\alpha^l) \cdot f_i = (u_0 \cdot x_\alpha^m) \cdot f_i \cdot x_\alpha^{l-m} = u_i \cdot x_\alpha^{l-m} \neq u_i$, что не может равняться u_i, так как M — модуль без кручения над R. Множество неравенств, которым должен удовлетворять элемент u, конечно, а множество K бесконечно, значит, искомый элемент найдётся в K. □

Лемма 4.3.2. *Пусть A — U-алгебра, T_1 — однопорождённый модуль без кручения над кольцом многочленов R. Тогда алгебра $A \oplus T_1$ A-дискриминируется с помощью алгебры A.*

Доказательство. Фиксируем любой конечный набор ненулевых элементов из $A \oplus T_1$ $x_1 + u_1, \ldots, x_n + u_n$, $x_i \in A$, $u_i \in T_1$, $u_i = t \cdot f_i$, где t — порождающий элемент модуля T_1, $f_i \in R$. Построим A-гомоморфизм $\varphi\colon A \oplus T_1 \to A$, такой что $\varphi(x_i + u_i) \neq 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Положим $\varphi(t) = u$ для некоторого $u \in \mathrm{Fit}(A)$ и $\varphi(a) = a$ для всех $a \in A$. Это отображение распространим до A-гомоморфизма $A \oplus T_1$ в A очевидным образом. Для выполнения условия дискриминируемости нужно подобрать $u \in \mathrm{Fit}(A)$ так, чтобы выполнялись неравенства $x_i + u \cdot f_i \neq 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Для тех индексов i, для которых $x_i \notin \mathrm{Fit}(A)$, требуемое неравенство будет выполнено вне зависимости от u. Если $x_i \in \mathrm{Fit}(A)$, но $f_i = 0$, то $\varphi(x_i) = x_i$, т. е. неравенство выполнено. После сделанных замечаний осуществим выбор $u \in \mathrm{Fit}(A)$ по всем оставшимся индексам i, опираясь на лемму 4.3.1. □

Лемма 4.3.3. *Для любого натурального числа s свободный модуль T_s ранга s над кольцом многочленов R дискриминируется однопорождённым модулем T_1 без кручения над R.*

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_s\}$ — свободные порождающие T_s. Будем отображать t_i в $t \cdot f_i$, где t — любой ненулевой элемент из T_1, а f_i — некоторые многочлены из кольца R. Многочлены f_i подбираются, исходя из потребности перевести произвольное конечное подмножество из T_s в ненулевые элементы. Таким образом, многочлены f_i должны удовлетворять конечному числу неравенств, а значит, они всегда найдутся. □

Предложение 4.3.4. *Если A — метабелева U-алгебра Ли, M — конечно порождённый модуль над кольцом многочленов R, то алгебра $A \oplus M$ A-дискриминируется с помощью алгебры A.*

Доказательство. Модуль M вкладывается в свободный модуль T_s ранга s над R (см. [5] или [3]). Тогда алгебра $A \oplus M$ A-вкладывается в алгебру $A \oplus T_s$. По лемме 4.3.3 модуль T_s дискриминируем модулем T_1, значит, алгебра $A \oplus T_s$ A-дискриминируется алгеброй $A \oplus T_1$, которая, в свою очередь, по лемме 4.3.2 A-дискриминируется с помощью алгебры A. Из этой цепочки рассуждений получаем, что алгебра $A \oplus M$ A-дискриминируется алгеброй A. □

Предложение 4.3.5. *Пусть A — метабелева U-алгебра Ли, M — произвольный модуль без кручения над кольцом R. Тогда*

$$A\text{-ucl}(A) = A\text{-ucl}(A \oplus M).$$

Доказательство. Покажем, что любая конечная подмодель $K = \{b_1, \ldots, b_n\}$ алгебры $A \oplus M$ A-вкладывается в алгебру A. Каждый элемент $b_i \in K$ разложи́м в сумму: $b_i = d_i + u_i$, где $d_i \in A$, $u_i \in M$. Набор $u_1, \ldots, u_n$ элементов модуля M порождает в нём конечно порождённый подмодуль M_0. Тогда подмодель K A-вкладывается в алгебру $A \oplus M_0$, которая по предложению 4.3.4 A-дискриминируется алгеброй A. □

Следствие. *Так же, как и выше, доказывается равенство*

$$\text{ucl}(A) = \text{ucl}(A \oplus M).$$

Выше мы ввели два способа пополнения метабелевой U-алгебры Ли за счёт расширения её радикала Фиттинга. Следующая лемма показывает, что эти операции пополнения коммутируют друг с другом.

Лемма 4.3.6. *Пусть A — U-алгебра, M — модуль без кручения над кольцом R. Тогда $(A \oplus M)_\Delta = A_\Delta \oplus M_\Delta$.*

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$(A \oplus M)_\Delta = (V \oplus \text{Fit}(A) \oplus M)_\Delta = V \oplus (\text{Fit}(A) \oplus M)_\Delta = \\ = V \oplus \text{Fit}(A)_\Delta \oplus M_\Delta = A_\Delta \oplus M_\Delta. \quad \square$$

Теперь введём некоторые новые обозначения и докажем простые, но технически полезные в дальнейшем результаты.

Как и ранее, считаем, что A — метабелева U-алгебра Ли, M — модуль без кручения над кольцом R. Через $\text{Hom}_R(M, \text{Fit}(A))$ обозначим множество всевозможных R-гомоморфизмов из модуля M в $\text{Fit}(A)$.

Лемма 4.3.7. *В обозначениях выше существует взаимно-однозначное соответствие*

$$\text{Hom}_R(M, \text{Fit}(A)) \leftrightarrow \text{Hom}_A(A \oplus M, A).$$

Доказательство. Пусть $\{m_\beta,\ \beta \in \mathcal{B}\}$ — фиксированная система порождающих модуля M. Пусть $\varphi \in \text{Hom}_A(A \oplus M, A)$. Тогда A-гомоморфизм φ, очевидно, полностью определяется своими значениями на элементах m_β. Пусть $\varphi(m_\beta) = c_\beta$. Так как $bm_\beta = 0$ для любого $b \in \text{Fit}(A)$, то $\varphi(bm_\beta) = bc_\beta = 0$. Следовательно, по лемме 2.1.4 $c_\beta \in \text{Fit}(A)$. При этом любое модульное соотношение между буквами m_β переписывается в соответствующее модульное соотношение между буквами c_β. Отсюда следует, что $\phi = \varphi|_M$ есть модульный R-гомоморфизм из M в $\text{Fit}(A)$. Верно и обратное, если $\phi \in \text{Hom}_R(M, \text{Fit}(A))$, то ϕ однозначно сопостави́м элемент $\varphi \in \text{Hom}_A(A \oplus M, A)$ по правилу $\varphi(m_\beta) = \phi(m_\beta)$, $\varphi(a) = a$, $a \in A$. □

Лемма 4.3.8. *Пусть M — конечно порождённый модуль без кручения над R. Тогда для любого ненулевого элемента $0 \neq m \in M$ существует $\phi \in \hom_R(M, \mathrm{Fit}(A))$, такой что $\phi(m) \neq 0$. Или, другими словами, модуль M аппроксимируется модулем $\mathrm{Fit}(A)$.*

Доказательство. Во-первых, модуль M вкладывается в свободный модуль T_s ранга s над R. Во-вторых, по лемме 4.3.3 T_s дискриминируется модулем T_1. В-третьих, T_1, очевидно, вкладывается в $\mathrm{Fit}(A)$. □

Так же, как лемма 4.3.7, доказывается следующая лемма.

Лемма 4.3.9. *Пусть M_1 и M_2 — модули без кручения над кольцом R. Тогда существует взаимно-однозначное соответствие*

$$\mathrm{Hom}_R(M_1, M_2) \leftrightarrow \mathrm{Hom}_A(A \oplus M_1, A \oplus M_2),$$

причём соответствующие друг другу R-гомоморфизм $\phi \in \mathrm{Hom}_R(M_1, M_2)$ и A-гомоморфизм $\varphi \in \hom_A(A \oplus M_1, A \oplus M_2)$ инъективны или сюръективны одновременно.

Литература

[1] Артамонов В. А. Проективные метабелевы алгебры Ли конечного ранга // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1972. — Т. 36. — С. 510—522.

[2] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. — М: Наука, 1985.

[3] Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. — М.: Мир, 1971.

[4] Даниярова Э. Ю., Казачков И. В., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли I: U-алгебры и A-модули. — Препринт № 34. — Омск: ОмГАУ, 2001.

[5] Ленг С. Алгебра. — М.: Мир, 1968.

[6] Шмелькин А. Л. Сплетения алгебр Ли и их применение в теории групп // Труды ММО. — 1973. — Т. 29. — С. 247—260.

[7] Artamonov V. A. The categories of free metabelian groups and Lie algebras // Comment. Math. Univ. Carolin. — 1977. — Vol. 18, no. 1. — P. 142—159.

[8] Baumslag G., Myasnikov A. G., Remeslennikov V. N. Algebraic geometry over groups. I. Algebraic sets and ideal theory // J. Algebra. — 1999. — Vol. 219. — P. 16—79.

[9] Myasnikov A. G., Remeslennikov V. N. Algebraic geometry over groups. II. Logical Foundations // J. Algebra. — 2000. — Vol. 234. — P. 225—276.