Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли. II. Случай конечного поля*

Э. Ю. ДАНИЯРОВА, И. В. КАЗАЧКОВ,
В. Н. РЕМЕСЛЕННИКОВ
Омский филиал Института математики СО РАН
e-mail: evelina_om@mail333.com

УДК 512.554.3

Ключевые слова: свободная метабелева алгебра Ли, универсальное замыкание, неприводимое алгебраическое множество, координатная алгебра, разрешимость универсальной теории.

Аннотация

Эта статья является второй из серии статей, цель которых — создание алгебраической геометрии над свободной метабелевой алгеброй Ли. Найдены достаточно удобные системы аксиом Φ_r и Φ_r' для универсального замыкания свободной метабелевой алгебры Ли F_r конечного ранга $r \geqslant 2$ над конечным полем k в языке без констант и с константами. Описаны структура конечно порождённых алгебр из соответствующих универсальных замыканий алгебры F_r и структура неприводимых алгебраических множеств над F_r и соответствующих координатных алгебр. Также показана разрешимость универсальной теории свободной метабелевой алгебры Ли в обоих языках.

Abstract

E. Yu. Daniyarova, I. V. Kazatchkov, V. N. Remeslennikov, Algebraic geometry over free metabelian Lie algebras. II. Finite-field case, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 3, pp. 65—87.

This paper is the second in a series of three, the object of which is to construct an algebraic geometry over the free metabelian Lie algebra F. For the universal closure of a free metabelian Lie algebra of finite rank $r \geqslant 2$ over a finite field k we find convenient sets of axioms in two distinct languages: with constants and without them. We give a description of the structure of finitely generated algebras from the universal closure of F_r in both languages mentioned and the structure of irreducible algebraic sets over F_r and respective coordinate algebras. We also prove that the universal theory of free metabelian Lie algebras over a finite field is decidable in both languages.

§ 1. Введение

Эта статья является второй в серии статей, цель которых — создании алгебраической геометрии над свободной метабелевой алгеброй Ли. В данной статье

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 02-01-00192-а и научной программы «Университеты России».

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 3, с. 65—87.

рассматривается свободная метабелева алгебра Ли F_r конечного ранга $r \geqslant 2$ над конечным полем k. Результаты первой статьи [3], система обозначений и определённых в ней понятий существенно используются здесь.

В § 2, следуя [8, 9], мы излагаем основы алгебраической геометрии над алгебрами Ли. Многие результаты здесь приводятся без доказательств, так как в [8, 9] они доказаны для групп, а доказательства для алгебр Ли аналогичны.

С технической точки зрения наиболее сложным является § 3, где выписаны две системы универсальных аксиом Φ_r и Φ'_r, $r \geqslant 2$, состоящие из семи серий аксиом каждая. Аксиомы первой системы написаны в стандартном языке L первой ступени теории алгебр Ли над полем k, а аксиомы второй системы — в расширенном языке L_{F_r}, который получается из L добавлением всех констант алгебры F_r. Установлены свойства алгебр Ли, удовлетворяющих тем или иным аксиомам этих серий.

Основные результаты статьи сформулированы и доказаны в § 4 (теоремы 4.1.1–4.1.5). Отметим главные из них:

1) найдены достаточно удобные системы аксиом (Φ_r и Φ'_r) для классов $\mathrm{ucl}(F_r)$ и F_r-$\mathrm{ucl}(F_r)$ (универсальных замыканий алгебры F_r в языках L и L_{F_r} соответственно),
2) описана структура конечно порождённых алгебр Ли из этих классов,
3) доказана алгоритмическая рекурсивность универсальной теории алгебры F_r в языках L и L_{F_r}.

Пятый параграф статьи посвящён приложениям теорем из предыдущего параграфа собственно к алгебраической геометрии над алгеброй F_r, $r \geqslant 2$, в случае конечного поля k. Главные результаты в этом параграфе следующие:

1) описана структура координатных алгебр для неприводимых алгебраических множеств над F_r,
2) описана структура соответствующих неприводимых алгебраических множеств,
3) построена теория размерности для категории алгебраических множеств над F_r.

§ 2. Элементы алгебраической геометрии над алгебрами Ли

В [8] изложены базовые понятия алгебраической геометрии над группами. В разделе 2.1 мы вводим общие элементы алгебраической геометрии над алгебрами Ли, следуя [8], и приводим некоторые результаты и теоремы, связанные с ними.

Раздел 2.2 освещает некоторые особенности, возникающие при построении алгебраической геометрии над свободной метабелевой алгеброй Ли F_r конечного ранга r, $r \geqslant 2$.

2.1. Общий случай

Пусть k — произвольное поле, A — фиксированная алгебра Ли над полем k.

Напомним, что алгебра Ли B над полем k называется A-алгеброй, если она содержит выделенную подалгебру, изоморфную алгебре A; гомоморфизм $\varphi\colon B_1 \to B_2$ между A-алгебрами Ли B_1 и B_2 называется A-гомоморфизмом, если $\varphi(a) = a$ для всех $a \in A$; класс A-алгебр Ли образуют категорию, морфизмами которой являются A-гомоморфизмы. Знаком $\cong_A$ будем обозначать изоморфизм в этой категории. Через $\mathrm{Hom}_A(B_1, B_2)$ обозначим множество всевозможных A-гомоморфизмов из A-алгебры Ли B_1 в A-алгебру Ли B_2.

Если $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — конечное множество неизвестных, то алгебру Ли

$$A[X] = A * F(X)$$

назовём *свободной A-алгеброй*, порождённой алфавитом X. Здесь $F(X)$ — свободная алгебра Ли, порождённая множеством X, а $*$ — знак свободного лиева произведения алгебр. Элементы $f \in A[X]$ будем называть полиномами от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из алгебры A:

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r),$$

где $a_1, \ldots, a_r \in A$ — константы. Можно показать, что алгебра $A[X]$ является свободным объектом в категорном смысле в категории A-алгебр Ли.

Аффинным n-мерным пространством над A-алгеброй Ли B назовём множество

$$B^n = \{(b_1, \ldots, b_n) \mid b_i \in B\}.$$

Точку $b = (b_1, \ldots, b_n) \in B^n$ назовём *корнем* многочлена $f \in A[X]$, если

$$f(b) = f(b_1, \ldots, b_n, a_1, \ldots, a_r) = 0.$$

Для произвольного подмножества S алгебры $A[X]$ точка $b \in B^n$ называется корнем системы S, если b — корень каждого многочлена из S.

Алгебраическим множеством над B, соответствующим системе S, назовём множество

$$V_B(S) = \{b \in B^n \mid f(b) = 0 \ \forall f \in S\}.$$

Две системы уравнений S_1 и S_2 над B назовём эквивалентными, если

$$V_B(S_1) = V_B(S_2).$$

Пример 1 (типичные примеры алгебраических множеств).

1. Любой элемент $a \in A$ образует алгебраическое множество $\{a\}$: $V_B(\{x - a\}) = \{a\}$ (здесь $n = 1$ и $X = \{x\}$).
2. Для любого подмножества $M \subseteq A$ централизатор $C_B(M)$ — алгебраическое множество, соответствующее системе $S = \{xm \mid m \in M\}$.

Пусть $Y \subseteq B^n$ — алгебраическое множество, соответствующее системе S, тогда определим *радикал* Y (или *радикал* S):

$$\mathrm{Rad}_B(Y) = \mathrm{Rad}_B(S) = \{f \in A[X] \mid f(b) = 0 \ \forall b \in Y\}.$$

Очевидно, что радикал любой системы является идеалом алгебры $A[X]$. Полином $f \in A[X]$ назовём *следствием* системы S, если $f \in \mathrm{Rad}_B(S)$. Радикалы алгебраических множеств однозначно их определяют, т. е. для любых двух алгебраических множеств

$$Y = Y' \iff \mathrm{Rad}_B(Y) = \mathrm{Rad}_B(Y').$$

Фактор-алгебру

$$\Gamma(Y) = \Gamma(S) = A[X]/\,\mathrm{Rad}_B(Y)$$

назовём *координатной алгеброй*, соответствующей алгебраическому множеству Y (или системе S). Координатные алгебры алгебраических множеств над B являются A-алгебрами Ли и образуют подкатегорию в категории всех A-алгебр Ли.

Лемма 2.1.1. *Для любой системы $S \subseteq A[X]$ над B существует взаимно-однозначное соответствие между множествами $V_B(S)$ и $\mathrm{Hom}_A(\Gamma(S), B)$.*

Доказательство. Точке $y \in V_B(S)$ соответствует A-гомоморфизм «вычисления в точке», действующий из алгебры $A[X]$ в алгебру B по правилу

$$\varphi_y\colon f \to f(y), \quad f \in A[X].$$

Гомоморфизм φ_y корректно наследуется на фактор-алгебре $\Gamma(S)$.

Обратно, если $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(\Gamma(S), B)$, то соответствующей φ точкой будет $y = (\varphi(\bar{x}_1), \ldots, \varphi(\bar{x}_n))$, где $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ — образы алфавита $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ в фактор-алгебре $\Gamma(S)$. Очевидно, что $y \in V_B(S)$. Также очевидно, что заданные отображения встречные. $\square$

Замечание. Координатная алгебра $\Gamma(Y)$ является A-алгеброй Ли, изоморфной алгебре $P_B(Y)$ всех полиномиальных функций из Y в B, определяемых по правилу

$$y \to f(y), \quad y \in Y, \quad f \in A[X].$$

Пример 2 (координатной алгебры для одноточечного алгебраического множества). Если $a \in A$, $Y = \{a\}$, то $\Gamma(Y) \cong A$.

При фиксированной A-алгебре Ли B можно определить категорию алгебраических множеств, в которой объектами являются всевозможные алгебраические множества над алгеброй B, а морфизмы определяются полиномиальными отображениями, а именно: если $Y \subseteq B^n$ и $Z \subseteq B^m$ — алгебраические множества, тогда отображение $\phi\colon Y \to Z$ будет морфизмом в определяемой категории тогда и только тогда, когда существуют $f_1, \ldots, f_m \in A[x_1, \ldots, x_n]$, такие что для любой точки $(b_1, \ldots, b_n) \in Y$

$$\phi(b_1, \ldots, b_n) = (f_1(b_1, \ldots, b_n), \ldots, f_m(b_1, \ldots, b_n)) \in Z.$$

Алгебраические множества Y и Z называются изоморфными, если между ними существуют встречные морфизмы $\phi\colon Y \to Z$ и $\theta\colon Z \to Y$, такие что $\theta\phi = 1_Y$ и $\phi\theta = 1_Z$. Будем обозначать через $\mathrm{Hom}(Y, Z)$ множество всех морфизмов из Y в Z.

Следуя рассуждениям, проведённым в [8], можно убедиться в эквивалентности категорий алгебраических множеств над B и категорией их координатных алгебр. Этот результат мы формулируем здесь в виде двух лемм.

Лемма 2.1.2. *Координатные алгебры определяют алгебраические множества с точностью до изоморфизма:*

$$Y \cong Y' \iff \Gamma(Y) \cong_A \Gamma(Y').$$

Лемма 2.1.3. *Существует взаимно-однозначное соответствие между* $\mathrm{Hom}(Y, Y')$ *и* $\mathrm{Hom}_A(\Gamma(Y'), \Gamma(Y))$. *При этом любому вложению алгебраических множеств* $Y \subseteq Y'$ *соответствует* A*-эпиморфизм* $\varphi\colon \Gamma(Y') \to \Gamma(Y)$ *координатных алгебр. Кроме того, если вложение строгое, то* $\mathrm{Ker}\,\varphi \neq 0$.

Пример 3. Векторное пространство над k с нулевым умножением является частным случаем k-алгебры Ли. Пусть A — фиксированное векторное пространство над k и $B = A$. Тогда с помощью теорем линейной алгебры можно сравнительно нетрудно (см., например, [8, § 6]) доказать следующие факты.

1. Любая совместная система над A эквивалентна треугольной системе уравнений.
2. Любое алгебраической множество $Y \subseteq A^n$ изоморфно множеству вида
$$(\underbrace{A, A, \ldots, A}_{s}, 0, \ldots, 0), \quad 0 \leqslant s \leqslant n.$$
3. Любая координатная алгебра $\Gamma(Y)$ A-изоморфна алгебре
$$A \oplus \mathrm{lin}_k\{x_1, \ldots, x_s\}, \quad 0 \leqslant s \leqslant n.$$

Объединение двух алгебраических множеств, как оказывается, не обязательно будет алгебраическим множеством. Соответствующий контрпример легко строится с помощью результатов примера 3. Поэтому определим *топологию Зарисского* на аффинном пространстве B^n, выбирая в качестве предбазы замкнутых множеств всевозможные алгебраические множества.

Алгебраическое множество $Y \subseteq B^n$ называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде объединения $Y = Y_1 \cup Y_2$ собственных замкнутых подмножеств.

A-алгебра Ли B называется *A-нётеровой по уравнениям*, если для любого натурального n и любой системы $S \subseteq A[x_1, \ldots, x_n]$ найдётся конечная подсистема $S_0 \subseteq S$, такая что $V_B(S) = V_B(S_0)$.

Теорема 2.1.4. *Любое алгебраическое множество* $Y \subseteq B^n$ *над нётеровой по уравнениям* A*-алгеброй Ли* B *представляется в виде конечного объединения неприводимых алгебраических множеств* (неприводимых компонент):

$$Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_l.$$

Причём если $Y_i \nsubseteq Y_j$ *для любых* i, j, *то это представление единственно с точностью до перестановки неприводимых компонент.*

Основная задача алгебраической геометрии над A-алгеброй Ли B есть описание алгебраических множеств над B с точностью до изоморфизма, или, что эквивалентно, описание их координатных алгебр с точностью до A-изоморфизма.

Теорема 2.1.5. *Пусть B — A-нётерова по уравнениям A-алгебра Ли. Тогда конечно порождённая A-алгебра Ли G является координатной алгеброй для неприводимого алгебраического множества над B тогда и только тогда, когда $G \in A\text{-}\mathrm{ucl}(B)$.*

2.2. Случай алгебры F_r

Обозначим через F_r свободную метабелеву алгебру над полем k ранга r. Будем считать, что $\{a_1, \ldots, a_r\}$ — множество свободных порождающих алгебры F_r; $R = k[x_1, \ldots, x_r]$ — кольцо многочленов от r переменных. Напомним, что радикал Фиттинга алгебры F_r совпадает с её коммутантом F_r^2 и на нём есть структура модуля над кольцом R. При этом умножение на буквы x_i кольца R интерпретируется как умножение на свободные порождающие a_i (см. [3]).

Будем строить алгебраическую геометрию над алгеброй F_r, рассматривая её как F_r-алгебру. Предполагаем, что $r > 1$, т. е. что F_r неабелева. В абелевом случае F_1 является одномерным векторным пространством, алгебраическая геометрия над которым известна (см. пример 3 предыдущего раздела).

Наиболее простым и важным примером алгебраического множества над F_r является радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(F_r)$ как подмножество F_r^n для $n = 1$. В качестве системы уравнений, определяющих его, выбираем одно уравнение $(a_1a_2)x = 0$, где a_1 и a_2 — два различных свободных порождающих алгебры F_r (в силу предположения о неабелевости такой выбор осуществим). В самом деле, так как F_r — U-алгебра (см. [3]), то её радикал Фиттинга абелев, следовательно, любой элемент из $\mathrm{Fit}(F_r)$ удовлетворяет приведённому уравнению. И наоборот, так как $\mathrm{Fit}(F_r)$ является модулем без кручения, то для любого элемента $c \notin \mathrm{Fit}(F_r)$ верно $(a_1a_2)c \neq 0$. Позже будет доказано, что радикал Фиттинга как алгебраическое множество является неприводимым и что координатной алгеброй $\mathrm{Fit}(F_r)$ является алгебра $F_r \oplus T_1$ (см. [3]).

Обозначение. Алгебры вида $F_r \oplus T_s$, пополненные за счёт прямого расширения радикала Фиттинга (см. [3]), где T_s — свободный модуль ранга s над кольцом R, будем обозначать через $F_{r,s}$.

Лемма 2.2.1. *Алгебра F_r нётерова по уравнениям.*

Доказательство. Пусть $F_r[X]$ — свободная F_r-алгебра, порождённая алфавитом $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Факторизуя её по вербальному идеалу $V_{\mathfrak{M}}$, определяющему многообразие метабелевых алгебр Ли, $V_{\mathfrak{M}} = \mathrm{id}\langle (ab)(cd) \mid a, b, c, d \in F_r[X]\rangle$, получим алгебру $F_r[X]/V_{\mathfrak{M}} \cong F_r *_{\mathfrak{M}} F_{\mathfrak{M}}(X)$, где $*_{\mathfrak{M}}$ — символ свободного метабелева произведения метабелевых алгебр Ли, а $F_{\mathfrak{M}}(X) = F_n$ — свободная метабелева алгебра Ли, порождённая множеством X. Таким образом, полученная фактор-алгебра изоморфна F_{r+n}. Алгебра Ли F_{r+n} метабелева, следовательно, она нётерова в классическом смысле, т. е. любой её идеал конечно порождён.

Зафиксируем произвольную систему $S \subseteq F_r[X]$. Для доказательства леммы надо найти такую конечную подсистему $S_0 \subseteq S$, что $V_{F_r}(S) = V_{F_r}(S_0)$. Пусть $\bar{S}$ — образ S в фактор-алгебре $F_r *_{\mathfrak{M}} F_{\mathfrak{M}}(X)$, и пусть I — идеал, порождённый $\bar{S}$. Поскольку $F_r *_{\mathfrak{M}} F_{\mathfrak{M}}(X) \cong F_{r+n}$ метабелева, то для идеала I существует конечная система порождающих. Выберем такую конечную подсистему $\bar{S}_0 \subseteq \bar{S}$, что множества $\bar{S}_0$ достаточно для порождения идеала I. Возвращаясь в алгебру $F_r[X]$, возьмём в качестве $S_0 \subseteq S$ инъективное множество прообразов для $\bar{S}_0$, лежащих в S. Очевидно, что при таком выборе S_0 выполняется $V_{F_r}(S) = V_{F_r}(S_0)$. □

Замечание 1. Те же самые рассуждения можно провести для произвольной конечно порождённой метабелевой алгебры Ли A, т. е. любая такая алгебра является нётеровой по уравнениям.

Замечание 2. Идею приведённого выше доказательства леммы 2.2.1 можно обобщить следующим образом. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное многообразие алгебр Ли, и пусть алгебра Ли A содержится в $\mathfrak{M}$. Через $F_{\mathfrak{M}}(X)$ обозначим свободную алгебру Ли в многообразии $\mathfrak{M}$ с базой X, через $A_{\mathfrak{M}}[X] = A *_{\mathfrak{M}} F_{\mathfrak{M}}(X)$ — $\mathfrak{M}$-свободное произведение A и $F_{\mathfrak{M}}(X)$ (определение см. в [1]), через φ — канонический гомоморфизм из $A[X]$ в $A_{\mathfrak{M}}[X]$. Тогда для любой системы $S \subseteq A[X]$ выполнено $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Rad}_A(S)$. Отсюда следует, что

$$\Gamma(S) = A[X]/\operatorname{Rad}_A(S) \cong_A A_{\mathfrak{M}}[X]/\overline{\operatorname{Rad}_A(S)}, \quad \overline{\operatorname{Rad}_A(S)} = \operatorname{Rad}_A(\bar{S}).$$

где черта сверху означает переход к образам в $A_{\mathfrak{M}}[X]$ под действием φ, а $\operatorname{Rad}_A(\bar{S})$ определяется так же, как $\operatorname{Rad}_A(S)$ с единственной разницей, что все необходимые определения даются по отношению к $A_{\mathfrak{M}}[X]$.

Замечание 3. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие метабелевых алгебр Ли и алгебра A принадлежит $\mathfrak{M}$. Согласно замечанию 2, вычисления радикалов систем уравнений над A и их координатных алгебр можно проводить не в $A[X]$, а в метабелевой алгебре Ли $A_{\mathfrak{M}}[X]$.

Опираясь на последнее замечание, исследуем в первом приближении, что представляют собой системы уравнений над F_r, как удобнее их записывать и решать.

Пусть S — система уравнений над алгеброй F_r. Как мы уже отметили, можно полагать, что $S \subseteq (F_r)_{\mathfrak{M}}[X]$, где $\mathfrak{M}$ — многообразие метабелевых алгебр Ли. Обозначим через $I_X = \langle X \rangle$ идеал $(F_r)_{\mathfrak{M}}[X]$, порождённый алфавитом X. Рассмотрим произвольное уравнение $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$. Запишем f в виде суммы, выделяя однородные относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$ слагаемые:

$$f = c + x_1 h_1 + \ldots + x_n h_n + g(x_1, \ldots, x_n),$$

здесь $c \in F_r$, $h_i \in R$, $i = 1, \ldots, n$ (при этом запись $x_i h_i$ расшифровывается неоднозначно (см. [3]), но эти детали нам не важны), $g(x_1, \ldots, x_n) \in I_X^2$. Теперь, чтобы нагляднее представить, как решаются системы уравнений, записанных в таком виде, разложим каждое неизвестное x_i в сумму двух:

$$x_i = z_i + y_i, \quad y_i \in \mathrm{Fit}(F_r), \quad z_i = \alpha_{i1}a_1 + \ldots + \alpha_{ir}a_r, \quad \alpha_{ij} \in k.$$

Таким образом, мы расширили число переменных, получив nr переменных коэффициентов поля k: α_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, r$, и n новых переменных $y_1, \ldots, y_n$, чьи значения мы ищем только внутри $\mathrm{Fit}(F_r)$. Однако тем самым мы упрощаем процедуру решения системы S. Действительно, подставим в каждое уравнение $f = 0$ вместо переменных x_i их выражения через вновь введённые переменные. После этого задача разобьётся на две: мы отдельно приравниваем к нулю линейную часть и часть, заведомо лежащую в $\mathrm{Fit}(F_r)$. Первая задача является задачей линейной алгебры. Если соответствующая система линейных уравнений над k несовместна, то несовместна и исходная система S уравнений над F_r. Если же совместна линейная система, то по каждому её решению α'_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, r$, выписываем вторичную задачу, которая является системой модульных уравнений с коэффициентами из R над модулем $\mathrm{Fit}(F_r)$.

§ 3. Универсальные аксиомы. Φ_r-алгебры

Пусть F_r — свободная метабелева алгебра Ли ранга $r \geqslant 2$ над полем k, $U_r = \mathrm{ucl}(F_r)$, $U'_r = F_r\text{-}\mathrm{ucl}(F_r)$.

Цель этого и следующего параграфов двоякая: во-первых, найти достаточно удовлетворительную систему аксиом для универсального класса U_r (U'_r), а во-вторых, доказать структурные результаты о конечно порождённых алгебрах Ли из U_r (U'_r).

Мы начинаем с формулировки семи серий универсальных аксиом (обозначение Φ_r (Φ'_r)), которые, как будет выяснено в дальнейшем, являются системой аксиом для класса U_r (U'_r). Почти все аксиомы, которые мы напишем, являются формулами в языке L без констант, поэтому одновременно принадлежат и Φ_r и Φ'_r, а различия между системами Φ_r и Φ'_r будут оговорены особо.

Через $\{a_1, \ldots, a_r\}$ обозначим систему свободных порождающих алгебры F_r. В пополненный язык L_{F_r} в качестве констант входят буквы $a_1, \ldots, a_r$, а также всевозможные лиевы многочлены от этих букв.

Так как алгебра F_r метабелева, то мы пишем

Ф1: $\forall x_1, x_2, x_3, x_4\ (x_1x_2)(x_3x_4) = 0$ (тождество метабелевости).

Далее, из информации об алгебре F_r (детали см. в [3, лемма 3.1.4]) следует, что на ней выполнены следующие две аксиомы:

Ф2: $\forall x \forall y\ xyx = 0 \wedge xyy = 0 \to xy = 0$,

Ф3: $\forall x \forall y \forall z\ x \neq 0 \wedge xy = 0 \wedge xz = 0 \to yz = 0$.

Аксиому Ф3 будем называть CT-аксиомой (аксиомой коммутативной транзитивности).

Обозначим через $\mathfrak{M}_2$ квазимногообразие алгебр Ли, определённое аксиомами Ф1, Ф2, и через $\mathfrak{M}_3$ — универсальный класс алгебр Ли, аксиоматизируемый аксиомами Ф1, Ф2, Ф3.

Лемма 3.1. *Пусть B — алгебра Ли из $\mathfrak{M}_2$. Тогда B — метабелева, любая её нильпотентная подалгебра абелева, а также абелев $\mathrm{Fit}(B)$.*

Доказательство. Метабелевость постулируется аксиомой Ф1.

Пусть C — нильпотентная подалгебра B, $c_1, c_2 \in C$. Допустим, что $c_1 \circ c_2 \neq 0$. Тогда в C существует нильпотентная 2-порождённая подалгебра Ли ступени нильпотентности 2: $D = \langle d_1, d_2 \rangle$ (см. [3, лемма 2.1.2]). Отсюда следует, что $d_1 d_2 d_1 = d_1 d_2 d_2 = 0$, но $d_1 d_2 \neq 0$, что противоречит Ф2.

Мы показали, что любая нильпотентная подалгебра алгебры B абелева, отсюда следует, что $\mathrm{Fit}(B)$ абелев (см. [3, лемма 2.1.3]). □

Лемма 3.2. *Пусть B — алгебра Ли из $\mathfrak{M}_3$, и пусть $a \in B \setminus \mathrm{Fit}(B)$. Тогда для любого ненулевого элемента $b \in \mathrm{Fit}(B)$ выполнено $ab \neq 0$.*

Доказательство. Пусть, наоборот, $ab = 0$ для ненулевого элемента $b \in \mathrm{Fit}(B)$. Поскольку $\mathrm{Fit}(B)$ абелев, то $bd = 0$ для любого $d \in \mathrm{Fit}(B)$. Далее по CT-аксиоме заключаем, что $ad = 0$, т. е. a коммутирует со всеми элементами из $\mathrm{Fit}(B)$. Следовательно, $a \in \mathrm{Fit}(B)$ (см. [3, лемма 2.1.4]), что не так. □

Переходя к введению новых формул, запишем в языке L универсальную формулу $\mathsf{Fit}(x)$ со свободной переменной x, определяющую радикал Фиттинга:

$$\mathsf{Fit}(x) \equiv (\forall y \; xyx = 0), \tag{1}$$

и аналогичную формулу $\mathsf{Fit}'(x)$ в языке L_{F_r}:

$$\mathsf{Fit}'(x) \equiv \Big(\bigwedge_i (xa_i x = 0)\Big). \tag{2}$$

Лемма 3.3. *Пусть B — алгебра Ли из $\mathfrak{M}_3$. Тогда область истинности формулы (1) на B есть $\mathrm{Fit}(B)$. В случае, когда B — F_r-алгебра, $\mathrm{Fit}(B)$ также является областью истинности формулы (2).*

Доказательство. По лемме 3.1 $\mathrm{Fit}(B)$ абелев, значит, он содержится в области истинности формулы (1) (соответственно, формулы (2)). Обратно, если $b \in B$ удовлетворяет формуле (1), то идеал $I = \langle b \rangle$ является абелевым, следовательно, $b \in \mathrm{Fit}(B)$. Для случая F_r-алгебры заметим, что если $b \notin \mathrm{Fit}(B)$, то в силу аксиомы Ф3 для некоторого a_i из свободной базы F_r выполняется $ba_i \neq 0$, а потому в силу леммы 3.2 $ba_ib \neq 0$. □

Замечание. Далее будем предполагать, что основное поле k конечно. В этом случае векторное пространство $F_r/\mathrm{Fit}(F_r)$ конечно; его размерность над k равна r.

Лемма 3.4. *Пусть k — конечное поле и n — натуральное число, не превосходящее r. Тогда существует экзистенциальная формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ языка L со следующим свойством: система $\{b_1, \ldots, b_n\}$ элементов алгебры F_r линейно независима по модулю $\mathrm{Fit}(F_r)$ тогда и только тогда, когда формула φ выполняется в F_r на этой системе.*

Доказательство. Приведём явный вид искомой формулы:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \equiv \Bigg(\bigwedge_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\neq\bar{0}} \neg \mathsf{Fit}(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \Bigg).$$

Здесь $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$. Так как поле k конечно, то $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — формула языка L, и так как $\mathsf{Fit}(x)$ — универсальная формула, то $\neg\mathsf{Fit}(x)$ является экзистенциальной формулой, и то же верно для формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Пусть $\{b_1, \dots, b_n\}$ — система элементов из области истинности формулы φ. Тогда в силу леммы 3.3 эта система линейно независима по модулю $\mathrm{Fit}(F_r)$. Очевидно, что верно и обратное. □

Замечание. Согласно лемме 3.3 область истинности формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ на произвольной алгебре Ли B из $\mathfrak{M}_3$ совпадает с множеством n-элементных систем, $n \leqslant r$, линейно независимых элементов по модулю $\mathrm{Fit}(B)$.

С помощью формулы φ мы формализовали понятие линейной независимости системы элементов по модулю радикала Фиттинга в случае конечного поля k, и эта формула удобна при использовании языка L. В пополненном языке L_{F_r} мы имеем «бесплатный» набор систем элементов, линейно независимых по модулю радикала Фиттинга, что вытекает из следующей леммы.

Лемма 3.5. *Пусть B — F_r-алгебра Ли из $\mathfrak{M}_3$ и $c_1, \dots, c_n$, $n \leqslant r$, — константы из F_r, линейно независимые по модулю $\mathrm{Fit}(F_r)$. Тогда элементы $c_1, \dots, c_n$ линейно независимы и по модулю $\mathrm{Fit}(B)$.*

Доказательство. Действительно, если какая-то нетривиальная линейная комбинация $c = \alpha_1 c_1 + \ldots + \alpha_n c_n$, $\alpha_i \in k$, лежит в $\mathrm{Fit}(B)$, то, к примеру, $a_1 a_2 c = 0$ (так как $\mathrm{Fit}(B)$ абелев), а это противоречит тому, что F_r является U-алгеброй. □

Теперь, используя формулу φ из леммы 3.4, напишем аксиому размерности:

$\Phi 4$: $\forall x_1, \dots, x_{r+1}\ \neg\varphi(x_1, \dots, x_{r+1})$.

Поскольку φ — экзистенциальная формула, то $\neg\varphi$ — универсальная формула и аксиома $\Phi 4$ — универсальная аксиома.

Эта аксиома постулирует то, что размерность фактор-пространства алгебры Ли из $\mathfrak{M}_3$ по её радикалу Фиттинга равна или меньше r.

Следующие свойства алгебры F_r, которые мы формализуем аксиоматически, будут записываться с помощью серий аксиом. Напомним, что на $\mathrm{Fit}(F_r)$ есть структура модуля над кольцом многочленов $R = k[x_1, \dots, x_r]$. Далее мы будем писать серии аксиом, которые выражают те или иные свойства $\mathrm{Fit}(F_r)$ как модуля над кольцом R. При записи таких аксиом будем использовать модульные операции, т. е. умножение некоторых элементов алгебры на многочлены из кольца R; при этом подразумевается, что умножение на многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$, $n \leqslant r$, расписывается в сигнатуре метабелевых алгебр Ли через последовательное умножение на буквы x_i по алгоритму, описанному в [3].

Радикал Фиттинга свободной метабелевой алгебры Ли F_r как модуль над кольцом R не имеет кручений, что мы выразим с помощью следующей серии аксиом:

Ф5: для каждого ненулевого многочлена f из кольца $k[x_1, \ldots, x_n]$, $n \leqslant r$, мы пишем аксиому

$$\forall z_1, z_2\ \forall x_1, \ldots, x_n\ (z_1 z_2 \cdot f(x_1, \ldots, x_n) = 0\ \wedge\ z_1 z_2 \neq 0) \to (\neg\varphi(x_1, \ldots, x_n)),$$

где $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — экзистенциальная формула из леммы 3.4.

Следовательно, формула выше является универсальной.

В системе аксиом Φ'_r, т. е. в расширенном языке L_{F_r}, формулы этой серии аксиом можно записать несколько проще:

Ф$'$5: $\forall z_1, z_2\ (z_1 z_2 \cdot f(a_1, \ldots, a_r) = 0 \to z_1 z_2 = 0)$, где f пробегает множество всевозможных ненулевых многочленов кольца $k[x_1, \ldots, x_r]$.

Преимущество такой записи в том, что в ней не используется формула φ, а значит, снимается ограничение о конечности поля k.

Обозначим через $\mathfrak{M}_5$ ($\mathfrak{M}'_5$) универсальный класс, аксиоматизируемый с помощью аксиом Ф1—Ф5 (Ф$'$5).

Лемма 3.6. *Метабелевы U-алгебры Ли, для которых фактор по радикалу Фиттинга имеет размерность $\leqslant r$, и только они принадлежат классу $\mathfrak{M}_5$. Соответственно класс $\mathfrak{M}'_5$ составляют все F_r-алгебры Ли, являющиеся U-алгебрами с размерностью фактора по радикалу Фиттинга, равной r.*

Доказательство. Пусть B — неабелева алгебра Ли из $\mathfrak{M}_5$. Тогда $\mathrm{Fit}(B)$ — абелев идеал по лемме 3.1. Пусть $\dim B/\mathrm{Fit}(B) = n$. Неравенство $n \leqslant r$ следует из леммы 3.4 и аксиомы Ф4. В случае, когда B — F_r-алгебра, n совпадает с r ввиду леммы 3.5.

Покажем, что B является U-алгеброй. На $\mathrm{Fit}(B)$ есть структура модуля над кольцом $k[x_1, \ldots, x_n]$. Покажем, что $\mathrm{Fit}(B)$ не имеет кручения. Возьмём $0 \neq b \in \mathrm{Fit}(B)$, $f(x_1, \ldots, x_n)$ — ненулевой многочлен. По лемме 3.2 $ba \neq 0$ для любого элемента $a \in B \setminus \mathrm{Fit}(B)$. А по аксиоме Ф4 $(ba) \cdot f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$. Поскольку $b \in \mathrm{Fit}(B)$, то ba можно записать в виде $ba = b \cdot g(x_1, \ldots, x_n)$, где $g(x_1, \ldots, x_n)$ — линейный ненулевой многочлен. Следовательно, $b \cdot f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, $\mathrm{Fit}(B)$ — модуль без кручения, а потому B — U-алгебра.

Обратно, пусть B — метабелева U-алгебра Ли и $\dim B/\mathrm{Fit}(B) = n$, $n \leqslant r$. Покажем, что B принадлежит $\mathfrak{M}_3$. Во-первых, из свойств метабелевых U-алгебр Ли (см. [3, теорема 3.2.4]) следует, что B принадлежит $\mathfrak{M}_3$. После чего в силу лемм 3.4 и 3.5 заключаем, что B принадлежит $\mathfrak{M}_5$ ($\mathfrak{M}'_5$). $\square$

Далее, из свойств свободных метабелевых алгебр Ли (см. [3, следствие теоремы 2.3.1]) следует, что любая система элементов $\{b_1, \ldots, b_n\}$ из F_r, $n \leqslant r$, линейно независимых по модулю $\mathrm{Fit}(F_r)$, порождает в F_r также свободную метабелеву алгебру Ли ранга n. Оказывается, что если поле k конечно, то такое условие для алгебр Ли из класса $\mathfrak{M}_5$ ($\mathfrak{M}'_5$) можно записать серией универсальных формул. Используя формулу φ из леммы 3.4, напишем аксиомы этой серии:

Ф6: для любого ненулевого лиева многочлена $l(a_1, \ldots, a_n)$, $n \leqslant r$, от букв $a_1, \ldots, a_r$ свободной базы алгебры F_r мы пишем

$$\forall x_1, \ldots, x_n \ \varphi(x_1, \ldots, x_n) \to (l(x_1, \ldots, x_n) \neq 0).$$

Поскольку φ — экзистенциальная формула, то эта формула в пренексной форме является универсальной формулой. Смысл этой серии аксиом объяснён выше.

Обозначим через $\mathfrak{M}_6$ ($\mathfrak{M}'_6$) универсальный класс алгебр Ли, аксиоматизируемый с помощью аксиом Ф1—Ф6.

Лемма 3.7. *Пусть* $B = F_n \oplus M$ — *алгебра Ли, определённая в* [3, § 4], *где* M — *модуль без кручения над кольцом* $k[x_1, \ldots, x_n]$, $n \leqslant r$. *Тогда* B *принадлежит* $\mathfrak{M}_6$ ($\mathfrak{M}'_6$ *при* $n = r$).

Доказательство. Заметим, что свободная метабелева алгебра Ли F_n ранга $n \leqslant r$ принадлежит $\mathfrak{M}_5$ по лемме 3.6, поэтому, очевидно, принадлежит $\mathfrak{M}_6$. Поскольку $\mathrm{ucl}(F_n) = \mathrm{ucl}(B)$ (см. [3, предложение 4.3.5]), то B также лежит в $\mathfrak{M}_6$. □

К сожалению, не любая конечно порождённая алгебра из $\mathfrak{M}_6$ имеет форму, приведённую в формулировке леммы 3.7. С другой стороны, все конечно порождённые алгебры из U_r (U'_r) имеют такую форму (см. теоремы 4.1.1, 4.1.2 из § 4), т. е. они получаются из F_n, $n \leqslant r$ (соответственно F_r) прямым расширением с помощью модуля без кручения над кольцом многочленов. Суть проблемы в том, что конечно порождённые алгебры Ли из $\mathfrak{M}_6$ ($\mathfrak{M}'_6$) получаются из F_n, $n \leqslant r$ (соответственно F_r) расширением её радикала Фиттинга, но в общем случае это расширение не является прямым, т. е. не является результатом прямого присоединения нового модуля к исходному радикалу Фиттинга. Чтобы избежать этого, мы должны сузить класс $\mathfrak{M}_6$ ($\mathfrak{M}'_6$), написав весьма не очевидную, сложную заключительную серию аксиом.

Для начала введём формулы, подобные формулам (1) и (2), но от нескольких переменных:

$$\mathsf{Fit}(y_1, \ldots, y_l; x_1, \ldots, x_n) \equiv \left(\bigwedge_{i=1}^{n} (y_1 x_i y_1 = 0) \right) \wedge \ldots \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n} (y_l x_i y_l = 0) \right), \quad (3)$$

$$\mathsf{Fit}'(y_1, \ldots, y_l) \equiv \mathsf{Fit}'(y_1) \wedge \ldots \wedge \mathsf{Fit}'(y_l). \quad (4)$$

Смысл новых формул следующий. Для F_r-алгебры Ли B из $\mathfrak{M}_3$ формула (4) выделяют подмножество $\underbrace{\mathrm{Fit}(B) \times \ldots \times \mathrm{Fit}(B)}_{l}$ в $\underbrace{B \times \ldots \times B}_{l}$, что непосредственно следует из леммы 3.3. Если B — алгебра Ли из $\mathfrak{M}_6$, $\{b_1, \ldots, b_n\}$ — элементы B линейно независимые по модулю $\mathrm{Fit}(B)$, $n \leqslant r$, $n \geqslant 2$, то $\mathsf{Fit}(y_1, \ldots, y_l; b_1, \ldots, b_n)$ также выделяет $\underbrace{\mathrm{Fit}(B) \times \ldots \times \mathrm{Fit}(B)}_{l}$. Это же верно и при $n = 1$, если $\dim B/\mathrm{Fit}(B) = 1$. Детали доказательства этих положений такие же, как в лемме 3.3.

Прежде чем выписывать заключительную серию аксиом, нам необходимо объяснить синтаксис этих нетривиальных формул. Мы начнём с написания аксиом серии $\Phi'7$, выражающихся формулами в языке L_{F_r}, ибо эта ситуация проще, чем в случае написания серии $\Phi7$.

Пусть S — фиксированная конечная система модульных уравнений над модулем $\mathrm{Fit}(F_r)$ от переменных $y_1, \ldots, y_l$. Каждое уравнение из S имеет форму

$$h = y_1 f_1(\bar{x}) + \ldots + y_l f_l(\bar{x}) - c = 0, \quad c = c(a_1, \ldots, a_r) \in \mathrm{Fit}(F_r),$$

$\bar{x} = \{x_1, \ldots, x_r\}$ — вектор переменных, $f_1, \ldots, f_l \in R = k[\bar{x}]$. Предположим, что система S несовместна над $\mathrm{Fit}(F_r)$, что очевидным образом записывается формулой в модульной сигнатуре. По системе S строим систему S' уравнений над F_r в сигнатуре языка L_{F_r}, заменяя каждое уравнение $h_i = 0$ из S уравнением $h'_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$, способом, указанным в [3].

$\Phi'7$: для любой несовместной модульной системы уравнений S мы пишем

$$\psi'_S \equiv \forall y_1, \ldots, y_l \ \mathsf{Fit}'(y_1, \ldots, y_l) \to \bigvee_{i=1}^{m} h'_i(y_1, \ldots, y_l) \neq 0.$$

Заметим, что при написании этой серии аксиом конечность поля k не используется.

Обозначим через $\mathfrak{M}'_7$ универсальный класс всех F_r-алгебр Ли, для которых выполняются аксиомы $\Phi1$—$\Phi'7$.

Лемма 3.8. *Пусть конечно порождённая F_r-алгебра Ли B принадлежит $\mathfrak{M}'_7$. Тогда она F_r-изоморфна алгебре $F_r \oplus M$ для некоторого конечно порождённого модуля M без кручения над кольцом R.*

Доказательство. Пусть элементы $a_1, \ldots, a_r$ порождают в B выделенную подалгебру, изоморфную F_r. Тогда по лемме 3.5 они линейно независимы по модулю $\mathrm{Fit}(B)$. Так как B — конечно порождённая алгебра из $\mathfrak{M}'_7$, то по лемме 3.6 $\mathrm{Fit}(B)$ как модуль над кольцом R не имеет кручения и конечно порождён (см. [3, лемма 2.2.2]). Таким образом, нам нужно показать, что подмодуль $\mathrm{Fit}(F_r)$ в модуле $\mathrm{Fit}(B)$ выделяется прямым слагаемым.

Введём для краткости обозначения $P = \mathrm{Fit}(B)$, $N = \mathrm{Fit}(F_r)$ и докажем, что фактор-модуль P/N не имеет кручения. Если это не так, то существуют элемент $d \in \mathrm{Fit}(F_r)$ и ненулевой многочлен $f(x_1, \ldots, x_r)$, такие что уравнение $y \cdot f(x_1, \ldots, x_r) = d$ разрешимо в $\mathrm{Fit}(B)$, пусть $y_1 \in \mathrm{Fit}(B)$ — соответствующее решение. Это же уравнение неразрешимо над $\mathrm{Fit}(F_r)$ (так как, имея решение $y_2 \in \mathrm{Fit}(F_r)$, получаем, что $(y_1 - y_2) \cdot f = 0$, и отсюда $y_1 = y_2$). Следовательно, уравнение $y \cdot f(x_1, \ldots, x_r) = d$ определяет несовместную модульную систему S_0 над $\mathrm{Fit}(F_r)$. В этом случае в алгебре Ли B верна аксиома ψ'_{S_0} из серии $\Phi'7$, что не так. Далее, если P/N — свободный модуль, то $P = N \oplus M$

и $B = F_r \oplus M$. Предположим, что P/N — несвободный модуль и образы элементов $m_1, \dots, m_l \in P$ порождают его. Пусть S — конечная система модульных соотношений для P/N относительно отмеченных порождающих. Заменив в левых частях соотношений порождающие элементы на переменные y_i и написав в правых частях значения левых при замене букв y_i элементами m_i, получим конечную систему S_1 модульных уравнений над N. Система S_1 имеет решение $\{m_1, \dots, m_l\}$ в модуле P, а следовательно, по аксиомам серии $\Phi'7$ и решение $\{c_1, \dots, c_l\}$ в $\mathrm{Fit}(F_r)$. Обозначим через M подмодуль модуля P, порождённый элементами $m_i - c_i = m_i'$, $i = 1, \dots, l$. Ясно, что M изоморфен модулю P/N, а потому $P = N \oplus M$. Отсюда следует, что $B = F_r \oplus M$ (см. [3, лемма 4.3.9]). □

К сожалению, в языке L нет констант, а потому аксиомы из серии $\Phi'7$ не являются формулами в L. Однако если алгебра Ли B принадлежит $\mathfrak{M}_6$, то любая её подалгебра C, порождённая элементами $c_1, \dots, c_n$, $n \leqslant r$, линейно независимыми по модулю $\mathrm{Fit}(B)$ изоморфна F_n. Мы имеем экзистенциальную формулу $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ для выделения таких систем. Но понятно, что даже в самой алгебре F_r подалгебра C может не давать разложения в виде $F_r \oplus M$: C может быть, например, собственной подалгеброй F_r. Мы снимаем возникающие на этом пути проблемы с помощью понятия Δ-локализации алгебры F_r (теория Δ-локализаций метабелевых алгебр Ли изложена в [3, § 4]).

Основная идея при написании системы аксиом $\Phi7$ следующая: раз мы не можем иметь аналога леммы 3.8 при написании формул в языке L, то мы напишем такие аксиомы, чтобы аналог леммы 3.8 был верен для Δ-локальных алгебр Ли из $\mathfrak{M}_7$.

Предварительно введём некоторые новые обозначения и объясним их предназначение. Как и ранее, считаем, что $R = k[x_1, \dots, x_r]$ — кольцо многочленов, $\Delta = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$ — максимальный идеал кольца R. Пусть S — конечная система модульных уравнений над $\mathrm{Fit}(F_n)$, $n \leqslant r$, от переменных $y_1, \dots, y_l$ и $f(x_1, \dots, x_n)$ — произвольный многочлен из R, не лежащий в Δ, $D(f)$ — система его унитарных делителей, $D(f) \subseteq R \setminus \Delta$. Для любого такого f и $\alpha \in \underbrace{D(f) \times \ldots \times D(f)}_{l}$, $\alpha = (d_1, \dots, d_l)$, определим систему $S_{f,\alpha}$, умножая все коэффициенты системы S на многочлен $d = d_1 \ldots d_l$ и деля коэффициенты при букве y_i на d_i.

Лемма 3.9. *Пусть B — алгебра Ли из $\mathfrak{M}_6$. Система S выше имеет решение в $\mathrm{Fit}_\Delta(B)$ тогда и только тогда, когда существуют такие $f(x_1, \dots, x_n) \in R \setminus \Delta$ и $\alpha \in D(f) \times \ldots \times D(f)$, что система $S_{f,\alpha}$ имеет решение в $\mathrm{Fit}(B)$.*

Доказательство. Доказательство ясно. □

Замечание. Если S несовместна над $\mathrm{Fit}_\Delta(B)$, то для любых $f \in R \setminus \Delta$ и α система $S_{f,\alpha}$ также несовместна над $\mathrm{Fit}_\Delta(B)$.

Теперь пусть S — система m модульных уравнений над $\mathrm{Fit}(F_n)$, несовместная в радикале Фиттинга $\mathrm{Fit}_\Delta(F_n)$ Δ-локальной алгебры $(F_n)_\Delta$.

Ф7: для каждого натурального числа $n \leqslant r$ и каждой системы S мы пишем

$$\psi_{n,S} \equiv \forall x_1, \ldots, x_n \ \forall y_1, \ldots, y_l \ \varphi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \mathsf{Fit}(y_1, \ldots, y_l) \to \\ \to \bigvee_{i=1}^{m} h_i(y_1, \ldots, y_l; x_1, \ldots, x_n) \neq 0.$$

Поясним смысл лиевых многочленов h_i, $i = 1, \ldots, m$. Для написания h_i мы берём уравнение i системы S, имеющее вид

$$h_i' = y_1 f_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + y_l f_l(x_1, \ldots, x_n) - c = 0, \\ f_i \in R, \quad c = c(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Fit}(F_n).$$

Способом, указанным в [3], переписываем это уравнение в лиев многочлен, заменяя в записи $c(a_1, \ldots, a_n)$ буквы a_j на x_j, $j = 1, \ldots, n$.

Лемма 3.10. *На свободной метабелевой алгебре Ли F_r выполнены все аксиомы серии Ф7.*

Доказательство. Пусть S — конечная система модульных уравнений над $\mathrm{Fit}(F_n)$, несовместная в $\mathrm{Fit}_\Delta(F_n)$, $n \leqslant r$. Тогда очевидно, что S несовместна в $\mathrm{Fit}_\Delta(F_r)$. Возьмём произвольные элементы $c_1, \ldots, c_r \in F_r$, линейно независимые по модулю $\mathrm{Fit}(F_r)$. Обозначим через C подалгебру F_r, порождённую этими элементами. Как известно, подалгебра C изоморфна алгебре F_r. Поэтому система S несовместна над $\mathrm{Fit}_\Delta(C)$, значит $h_i(b_1, \ldots, b_l; c_1, \ldots, c_n) \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$, для любых $b_1, \ldots, b_l \in \mathrm{Fit}(C_\Delta)$. Но как множество C может не совпадать с F_r. Зато мы имеем, что $C_\Delta = (F_r)_\Delta$ и $\mathrm{Fit}(C_\Delta) = \mathrm{Fit}_\Delta(F_r)$ (см. [3, предложение 4.2.3]), а потому соответствующая формула $\psi_{n,S}$ на алгебре F_r выполняется. □

Обозначим через $\mathfrak{M}_7$ универсальный класс алгебр Ли, определяемый аксиомами Ф1—Ф7.

Лемма 3.11. *Пусть конечно порождённая алгебра Ли B принадлежит $\mathfrak{M}_7$. Тогда её Δ-локализация B_Δ также принадлежит $\mathfrak{M}_7$ и имеет форму $B_\Delta = (F_n)_\Delta \oplus M_\Delta$ для некоторого $n \leqslant r$ и конечно порождённого модуля M без кручения над $k[x_1, \ldots, x_n]$, а сама алгебра B является подалгеброй алгебры $F_{r,s}$ для некоторого натурального s.*

Доказательство. Пусть $\dim B/\mathrm{Fit}(B) = n$, по лемме 3.6 $n \leqslant r$ и B — U-алгебра. По аксиомам серии Ф6 элементы $b_1, \ldots, b_n$, линейно независимые по модулю $\mathrm{Fit}(B)$, порождают подалгебру, изоморфную F_n.

То, что $B_\Delta \in \mathfrak{M}_7$ следует из равенства $\mathrm{ucl}(B) = \mathrm{ucl}(B_\Delta)$, выполненного для любой U-алгебры Ли B (см. [3, предложение 4.2.2]).

Далее, заметим, что, если конечная система модульных уравнений S имеет решение в $\mathrm{Fit}_\Delta(B)$, то она имеет решение в $\mathrm{Fit}_\Delta(F_n)$. Действительно, если S совместна над $\mathrm{Fit}_\Delta(B)$, то по лемме 3.9 $S_{f,\alpha}$ совместна над $\mathrm{Fit}(B)$ для некоторых $f(x_1, \ldots, x_n) \in R \setminus \Delta$ и $\alpha \in D(f) \times \ldots \times D(f)$. Тогда в силу аксиом серии Ф7 $S_{f,\alpha}$ имеет решение в $\mathrm{Fit}_\Delta(F_n)$, и следовательно, по лемме 3.9 система S также имеет решение в $\mathrm{Fit}_\Delta(F_n)$. После этого замечания дальнейшее доказательство того, что B_Δ имеет форму $(F_n)_\Delta \oplus M_\Delta$, практически повторяет доказательство леммы 3.8 и предоставляется читателю.

Так как $(F_n)_\Delta \oplus M_\Delta = (F_n \oplus M)_\Delta$ (см. [3, лемма 4.3.6]) и B вкладывается в B_Δ, то B является конечно порождённой подалгеброй Δ-локальной алгебры $(F_n \oplus M)_\Delta$. Следовательно, B вкладывается в алгебру $F_n \oplus M$ (см. [3, лемма 4.2.1]). Модуль M вкладывается в свободный модуль T_s ранга s над R (см. [5] или [2]). Это влечёт вложение алгебры $F_n \oplus M$ в алгебру $F_{n,s}$ (см. [3, лемма 4.3.9]), которая, в свою очередь, является подалгеброй $F_{r,s}$. Тем самым мы получаем, что B вкладывается в алгебру $F_{r,s}$. □

Обозначим через Φ_r и Φ'_r универсальные классы, определяемые системами аксиом Ф1—Ф7 и Ф1—Ф4, Ф′5, Ф6, Ф′7 соответственно. Алгебры Ли из этих классов будем соответственно называть Φ_r-алгебрами и Φ'_r-алгебрами.

Лемма 3.12. *Для любого натурального числа r и любых $n \leqslant r$ и $m > r$ алгебра F_n принадлежит классу Φ_r, а F_m не принадлежит Φ_r. Также F_r принадлежит Φ'_r и не принадлежит Φ'_n при $n \neq r$.*

Доказательство. То, что F_n является Φ_r-алгеброй, $n \leqslant r$, следует из вида аксиом класса Φ_r и ранее доказанных свойств алгебры F_r, а F_m, $m > r$, не принадлежит Φ_r, поскольку на ней нарушается аксиома размерности этого класса. □

Следствие 1. *В цепочке классов*

$$\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \ldots \subset \Phi_r \subset \ldots$$

все включения являются строгими. Классы же Φ'_r-алгебр не пересекаются при различных натуральных r.

Следствие 2. *Пусть алгебра Ли A содержится в Φ_r, и пусть $\dim A/\mathrm{Fit}(A) = n < r$. Тогда A является Φ_n-алгеброй, но не является Φ_m-алгеброй при $m < n$.*

В заключение этого параграфа отметим моменты, в которых существенно ограничение на конечность основного поля k.

Во-первых, конечность k используется в явном виде при написании формулы φ в языке L, формализующей понятие линейной независимости системы элементов по модулю радикала Фиттинга. В дальнейшем формула φ входит в запись всех аксиом (или серий аксиом) Ф4—Ф7 в языке L.

В расширенном же языке L_{F_r} почти всюду можно отказаться от использования формулы φ, за исключением одной аксиомы — аксиомы размерности Ф4. Кроме того, серию аксиом Ф6 вообще можно исключить из класса аксиом Φ'_r.

Действительно, формула φ не встречается при записи формул серий аксиом Ф′5 и Ф′7. Серия аксиом Ф6 даёт информацию о том, что любая система элементов $\{b_1, \ldots, b_n\}$, $n \leqslant r$, линейно независимых по модулю радикала Фиттинга, порождает подалгебру, изоморфную F_n. Потребность иметь такое свойство возникает при доказательстве леммы 3.8 в языке L_{F_r} и леммы 3.11 в языке L, но при этом нам достаточно найти какую-то одну систему элементов $\{b_1, \ldots, b_n\}$,

$n \leqslant r$, порождающую подалгебру, изоморфную F_n. В языке с константами такую систему мы всегда сможем найти в алгебре F_r. Поэтому информация, извлекаемая из серии аксиом Ф6, нигде не используется при доказательстве результатов об F_r-алгебрах, и формулы этой серии можно исключить из класса аксиом Φ'_r.

Сохранение аксиомы размерности Ф4 существенно. Мы не можем записать эту аксиому без использования формулы φ и не можем исключить аксиому размерности Ф4 из класса аксиом Φ'_r. В случае конечного поля k аксиома размерности выполняется на алгебре F_r, а также на любой алгебре из F_r-$\mathrm{ucl}(F_r)$. В случае, когда основное поле бесконечно, свободная метабелева алгебра Ли F_r любого ранга $r \geqslant 2$ дискриминируется алгеброй F_2. Поэтому F_r-$\mathrm{ucl}(F_r)$ содержит алгебры, для которых размерность фактора по радикалу Фиттинга сколь угодно велика.

§ 4. Теоремы об универсальных замыканиях алгебры F_r

В этом параграфе мы сформулируем и докажем несколько теорем о классах $U_r = \mathrm{ucl}(F_r)$ and $U'_r = F_r$-$\mathrm{ucl}(F_r)$. Основные результаты в нём следующие: доказано, что система Φ_r (Φ'_r) есть система аксиом для U_r (U'_r), описана структура конечно порождённых алгебр Ли из класса U_r (U'_r), доказана разрешимость универсальной теории свободной метабелевой алгебры Ли F_r в двух языках: L и L_{F_r}.

4.1. Формулировки основных результатов

Теорема 4.1.1. *Для произвольной конечно порождённой алгебры Ли A над конечным полем k следующие условия эквивалентны:*

1) $A \in \mathrm{ucl}(F_r)$,
2) A — Φ_r-*алгебра,*
3) A — *подалгебра алгебры* $F_{r,s}$ *для некоторого натурального* s.

Следствие. *Универсальное замыкание* $\mathrm{ucl}(F_r)$ *алгебры* F_r *аксиоматизируется аксиомами класса* Φ_r.

Теорема 4.1.2. *Для произвольной конечно порождённой F_r-алгебры Ли A над конечным полем k следующие условия эквивалентны:*

1) $A \in F_r$-$\mathrm{ucl}(F_r)$,
2) A — Φ'_r-*алгебра,*
3) A F_r-*изоморфна алгебре* $F_r \oplus M$ *для некоторого конечно порождённого модуля M без кручения над кольцом многочленов* $R = k[x_1, \ldots, x_r]$.

Следствие. *Универсальное замыкание* F_r-$\mathrm{ucl}(F_r)$ *алгебры* F_r *аксиоматизируется аксиомами класса* Φ'_r.

Напомним, что конечность поля k существенна при написании аксиомы Ф4, серий аксиом Ф5, Ф6, Ф7.

Следующие две теоремы касаются вопроса разрешимости универсальной теории алгебры F_r в языках L и L_{F_r}.

Теорема 4.1.3. *Множество аксиом Φ_r является рекурсивным множеством, а универсальная теория алгебры F_r над конечным полем k в языке L алгоритмически разрешима.*

Теорема 4.1.4. *Множество аксиом Φ'_r является рекурсивным множеством, а универсальная теория алгебры F_r как F_r-алгебры над конечным полем k в языке L_{F_r} алгоритмически разрешима.*

Теорема 4.1.5. *Алгоритмически разрешима проблема совместности уравнений над алгеброй F_r над конечным полем k.*

Результат последней теоремы контрастирует с результатами В. А. Романькова о проблеме совместности уравнений для некоторых метабелевых алгебраических систем. В [6] им доказана неразрешимость этой проблемы для свободной метабелевой группы достаточно большого ранга. Все рассуждения этой статьи проходят и для свободных метабелевых колец Ли, а также для свободных метабелевых алгебр Ли над полем, для которого неразрешима проблема совместности уравнений.

4.2. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 4.1.1.

$1 \to 2$. Из леммы 3.12 мы знаем, что алгебра F_r является Φ_r-алгеброй. Значит, любая (не обязательно конечно порождённая) алгебра Ли из $\mathrm{ucl}(F_r)$ также является Φ_r-алгеброй.

$2 \to 3$. Непосредственно из леммы 3.11 заключаем, что конечно порождённая алгебра Ли из класса Φ_r является подалгеброй алгебры $F_{r,s}$ для некоторого натурального s.

$3 \to 1$. Импликация следует из того, что $F_{r,s} \in \mathrm{ucl}(F_r)$ (см. [3, предложение 4.3.5]). □

Доказательство следствия теоремы 4.1.1. Мы уже заметили, что любые алгебры Ли из $\mathrm{ucl}(F_r)$ лежат в классе Φ_r. Покажем обратное. Действительно, если B — произвольная Φ_r-алгебра, то любая её конечно порождённая подалгебра A тоже будет Φ_r-алгеброй, так как все аксиомы из класса Φ_r универсальны, значит, $A \in \mathrm{ucl}(F_r)$, откуда заключаем, что $B \in \mathrm{ucl}(F_r)$. □

Доказательства теоремы 4.1.2 и её следствия аналогичны и отличаются только некоторыми ссылками.

Замечание. Поскольку для любого конечно порождённого модуля без кручения M над кольцом R алгебра $F_r \oplus M$ F_r-вкладывается в алгебру $F_{r,s}$ для некоторого натурального s (см. [3, лемма 4.3.9]), то конечно порождённые Φ_r'-алгебры можно рассматривать как F_r-подалгебры алгебр типа $F_{r,s}$.

Доказательство теоремы 4.1.3. Так как в теореме речь идёт об универсальных классах одного объекта, то из общих теоретико-модельных соображений (см. [4] или [7]) следует, что достаточно доказать только первое утверждение теоремы.

Поскольку каждая из серий аксиом Ф1—Ф6 очевидным образом является рекурсивным множеством в случае конечного поля k, то достаточно доказать только рекурсивность множества аксиом Ф7. Аксиомы этой серии пишутся по всевозможным конечным системам модульных уравнений над $\mathrm{Fit}(F_r)$, несовместных в $\mathrm{Fit}_\Delta(F_r)$. Докажем рекурсивность множества таких систем. При этом будем использовать результаты [10], где показано, что большинство алгоритмических проблем в конечно порождённых модулях над коммутативными нётеровыми кольцами алгоритмически разрешимы. В частности, в таких модулях разрешима проблема совместности для конечных систем модульных уравнений. $\mathrm{Fit}_\Delta(F_r)$ — конечно порождённый модуль над коммутативным нётеровым кольцом R_Δ. Множество же всех конечных систем модульных уравнений над $\mathrm{Fit}(F_r)$ рекурсивно в случае конечного поля k. Отсюда следует требуемое. □

Доказательство теоремы 4.1.4 аналогично доказательству теоремы 4.1.3.

Доказательство теоремы 4.1.5. Как уже отмечалось в § 2 (раздел 2.2), задача решения системы уравнений над F_r разбивается на две задачи. Вначале нужно решить линейную систему алгебраических уравнений над k, а затем по каждому полученному решению решить систему модульных уравнений. В случае конечного поля k все эти операции проводятся алгоритмически. □

§ 5. Неприводимые алгебраические множества над F_r и размерность

В § 2 мы ввели категорию алгебраических множеств над произвольной алгеброй Ли и категорию их координатных алгебр. Там же уже отмечалось, что эти две категории эквивалентны. В частности, классификация всех координатных алгебр даёт классификацию всех алгебраических множеств. При этом алгебраическое множество определяется по его координатной алгебре с точностью до изоморфизма в соответствующей категории.

В разделе 5.1 этого параграфа мы проведём классификацию неприводимых алгебраических множеств над F_r, исходя из классификации их координатных алгебр.

В разделе 5.2 мы введём определение размерности алгебраических множеств так же, как в случае классической алгебраической геометрии, и вычислим эти размерности для всех неприводимых алгебраических множеств над F_r.

5.1. Классификация неприводимых алгебраических множеств над F_r

В продолжение всего этого разделе через $a_1, \dots, a_r$ будет обозначаться свободная база свободной метабелевой алгебры Ли F_r, $r \geqslant 2$.

Согласно лемме 2.2.1 алгебра F_r является нётеровой по уравнениям. Следовательно, по теореме 2.1.5 множество координатных алгебр неприводимых алгебраических множеств над F_r — это в точности множество всех конечно порождённых алгебр Ли из F_r-$\mathrm{ucl}F_r$. Теорема 4.1.2 даёт структурное описание таких алгебр. Следующее предложение обобщает эти результаты.

Предложение 5.1.1 (о координатных алгебрах неприводимых алгебраических множеств над F_r). *Конечно порождённая F_r-алгебра Ли G является координатной алгеброй неприводимого алгебраического множества над F_r тогда и только тогда, когда G F_r-изоморфна алгебре $F_r \oplus M$ для некоторого конечно порождённого модуля M без кручения над кольцом многочленов $k[x_1, \dots, x_r]$.*

Теперь с помощью предложения 5.1.1 приступим к классификации неприводимых алгебраических множеств над F_r. Предварительно введём некоторые обозначения.

Пусть $R = k[x_1, \dots, x_r]$, M — конечно порождённый модуль без кручения над R. Через $\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Fit}(F_r))$ мы обозначаем множество всевозможных R-гомоморфизмов из модуля M в $\mathrm{Fit}(F_r)$, рассматриваемый как модуль над R. На это же множество можно смотреть по-иному, а именно зафиксируем в модуле M систему порождающих $\{m_1, \dots, m_n\}$; тогда задание любого R-гомоморфизма равносильно (корректному) определению образов для всех m_i. Это определяет вложение

$$\alpha\colon \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Fit}(F_r)) \to \underbrace{\mathrm{Fit}(F_r) \times \ldots \times \mathrm{Fit}(F_r)}_{n}, \quad \alpha(\phi) = (\phi(m_1), \dots, \phi(m_n)),$$

где $\phi \in \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Fit}(F_r))$. При этом любое соотношение между элементами m_i является соотношением между элементами $\varphi(m_i)$. Далее всюду, в том числе в формулировке теоремы 5.1.3, под записью $\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Fit}(F_r))$ мы будем подразумевать образ $\alpha(\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Fit}(F_r)))$ в $\underbrace{\mathrm{Fit}(F_r) \times \ldots \times \mathrm{Fit}(F_r)}_{n}$.

Лемма 5.1.2. *В обозначениях выше существует цепочка взаимно-однозначных соответствий*

$$\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Fit}(F_r)) \leftrightarrow \mathrm{Hom}_{F_r}(F_r \oplus M, F_r) \leftrightarrow Y,$$

где Y — неприводимое алгебраическое множество над F_r, координатной алгеброй которого является $F_r \oplus M$.

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из леммы 2.1.1 и [3, лемма 4.3.7]. □

Теорема 5.1.3 (о неприводимых алгебраических множествах над F_r). *Любое неприводимое алгебраическое множество над F_r — это, с точностью до изоморфизма, либо точка, либо $\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Fit}(F_r))$ для некоторого конечно порождённого модуля без кручения M над кольцом R. Верное и обратное: соответствующие множества являются неприводимыми алгебраическими над F_r.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное неприводимое алгебраическое множество Y над F_r. По предложению 5.1.1 его координатная алгебра F_r-изоморфна алгебре вида $F_r \oplus M$, где M — конечно порождённый модуль без кручения над кольцом R.

Если $M = 0$, т. е. координатная алгебра есть просто F_r, то существует единственный F_r-гомоморфизм φ из $\Gamma(Y)$ в F_r. Пусть $\varphi(x_i) = b_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда по лемме 2.1.1 $Y = \{(b_1, \ldots, b_l)\} \cong \{0\}$ есть точка. И обратно, любая точка является алгебраическим множеством, очевидно неприводимым, с координатной алгеброй, изоморфной F_r (см. § 2, примеры 1 и 2).

Предположим, что $M \neq 0$. Ввиду леммы 5.1.2 достаточно показать, что множество $\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Fit}(F_r))$ является алгебраическим над F_r и его координатная алгебра F_r-изоморфна алгебре $F_r \oplus M$.

Пусть $m_1, \ldots, m_n$ — система модульных порождающих для M и $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ — система модульных соотношений для относительно порождающих $m_1, \ldots, m_n$. Стандартным способом, изложенным в [3], система S переписывается в систему элементов из алгебры $F_r[X]$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Теперь, добавив к новой системе n уравнений

$$a_1 a_2 x_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

получим систему $S' \subseteq F_r[X]$. По лемме 3.2 $V_{F_r}(S') \subseteq \mathrm{Fit}^n(F_r)$, и следовательно, $V_{F_r}(S') = \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Fit}(F_r))$. Отсюда следует, что множество $\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Fit}(F_r))$ является алгебраическим.

Покажем, что $\Gamma(S') \cong_{F_r} F_r \oplus M$. Для этого определим F_r-гомоморфизм θ по правилу

$$\theta\colon (F_r)_{\mathfrak{M}}[X] \to F_r \oplus M, \quad \theta(x_i) = m_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \theta(a) = a, \quad a \in F_r,$$

и покажем, что $\mathrm{Ker}\,\theta = \mathrm{Rad}(S')$. Здесь $(F_r)_{\mathfrak{M}}[X]$ — свободная F_r-алгебра, порождённая алфавитом в многообразии $\mathfrak{M}$ всех метабелевых алгебр Ли, и $\mathrm{Rad}(S')$ также вычисляется в $\mathfrak{M}$. Как было замечено в § 2, спуск до многообразия $\mathfrak{M}$ не приводит к изменению определения координатной алгебры $\Gamma(S')$.

Итак, для завершения доказательства теоремы убедимся в том, что

$$\mathrm{Ker}\,\theta = \mathrm{Rad}(S').$$

Для этого возьмём полином $f \in \mathrm{Ker}\,\theta$ и запишем его в виде

$$f = c + x_1 h_1 + \ldots + x_n h_n + g(x_1, \ldots, x_n), \quad c \in F_r, \quad h_i \in R, \quad g(x_1, \ldots, x_n) \in I_X^2$$

(см. § 2). Поскольку $F_r \oplus M$ — прямое расширение F_r с помощью модуля M, то $c = 0$. Далее, так как $g(m_1, \ldots, m_n) = 0$ и $f(m_1, \ldots, m_n) = 0$, то мы имеем следующее соотношение в модуле M:

$$m_1h_1 + \ldots + m_nh_n = 0.$$

Отсюда непосредственно следует, что для любой точки $(b_1, \ldots, b_n) \in V_{F_r}(S')$ верно

$$b_1h_1 + \ldots + b_nh_n = 0,$$

т. е. $x_1h_1 + \ldots + x_nh_n \in \mathrm{Rad}(S')$. И значит, $f \in \mathrm{Rad}(S')$.

Теперь пусть $f \in \mathrm{Rad}(S')$. Покажем, что $f \in \mathrm{Ker}\,\theta$. Поскольку $(0, \ldots, 0) \in \in V_{F_r}(S')$, то $c = 0$. Кроме того, имеем, что $g(m_1, \ldots, m_n) = 0$. Проверим, что и $m_1h_1 + \ldots + m_nh_n = 0$. Действительно, если бы это было не так, то нашёлся бы R-гомоморфизм $\phi \in \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Fit}(F_r))$, такой что $\phi(m_1h_1 + \ldots + m_nh_n) \neq 0$ (см. [3, лемма 4.3.8]). Это противоречит тому, что $f \in \mathrm{Rad}(S')$. □

Замечание. С координатной алгеброй $F_r \oplus M$ связана *каноническая* система уравнений S', определённая при доказательстве теоремы 5.1.3. Эта система уравнений зависит от выбора представления модуля M.

Следствие. *Неприводимое алгебраическое множество над F_r в одномерном аффинном пространстве F_r^n, $n = 1$, есть, с точностью до изоморфизма, либо* $\mathrm{Fit}(F_r)$, *либо точка.*

Доказательство. Координатная алгебра неприводимого множества F_r-изоморфна $F_r \oplus M$. Если $M = 0$, то алгебраическое множество есть точка. Если $M \neq 0$, то так как M однопорождён, M — свободный модуль T_1. В этом случае $\mathrm{Hom}_R(T_1, \mathrm{Fit}(F_r))$ изоморфно $\mathrm{Fit}(F_r)$. □

5.2. Размерность

Определение 1. Пусть Y — неприводимое алгебраическое множество. Размерность Y (обозначение $\dim(Y)$) есть наибольшее число m по всем строго убывающим цепочкам неприводимых алгебраических множеств вида

$$Y = Y_0 \supsetneq Y_1 \supsetneq \ldots \supsetneq Y_m.$$

Определение 2. Пусть $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_l$ — представление алгебраического множества Y в виде объединения неприводимых компонент (см. теорему 2.1.4 и лемму 2.2.1). Тогда по определению размерность Y (обозначение $\dim(Y)$) есть максимум размерностей неприводимых компонент Y_i. Корректность этого определения следует из теоремы 2.1.4.

Пусть Y — неприводимое алгебраическое множество над F_r, $\Gamma(Y) \cong_{F_r} F_r \oplus M$ для некоторого конечно порождённого модуля без кручения над кольцом $R = k[x_1, \ldots, x_r]$. Мы покажем, что $\dim(Y)$ однозначно определяется модулем M.

Напомним, что рангом $\mathrm{r}(M)$ модуля M над R по определению является мощность его максимальной линейно независимой над R подсистемы.

Определение 3. Пусть $F_r \oplus M$ является координатной алгеброй неприводимого множества Y. Тогда ранг модуля M над кольцом R назовём рангом координатной алгебры и будем обозначать его через $\mathrm{r}(\Gamma(Y))$.

Теорема 5.2.1. *Размерность неприводимого алгебраического множества над F_r вычисляется по следующей формуле:*

$$\dim(Y) = \mathrm{r}(\Gamma(Y)) = \mathrm{r}(M).$$

Доказательство. Пусть есть строгая цепочка неприводимых алгебраических множеств

$$Y_m \subsetneq \ldots \subsetneq Y_1 \subsetneq Y_0 = Y.$$

Очевидно, что Y_m — точка, $\dim(Y_m) = 0$, $\mathrm{r}(\Gamma(Y_m)) = 0$.

По лемме 2.1.3 каждое строгое вложение $Y_{i+1} \subsetneq Y_i$ индуцирует F_r-эпиморфизм соответствующих координатных алгебр $\varphi\colon F_r \oplus M_i \to F_r \oplus M_{i+1}$, причём $\operatorname{Ker}\varphi \neq 0$. В свою очередь, φ индуцирует R-эпиморфизм $\phi\colon M_i \to M_{i+1}$, причём $\operatorname{Ker}\phi \neq 0$ (см. [3, лемма 4.3.9]). Следовательно, $\mathrm{r}(M_i) > \mathrm{r}(M_{i+1})$. Отсюда получаем, что $\dim(Y) \leqslant \mathrm{r}(\Gamma(Y))$.

Обратно, пусть $\mathrm{r}(\Gamma(Y)) = \mathrm{r}(M) = n$. Покажем, что $\dim(Y) \geqslant n$. Возьмём $0 \neq m \in M$. Пусть N — изолированный подмодуль, порождённый элементом m, $M_1 = M/N$, $\phi\colon M \to M_1$ — канонический R-эпиморфизм. Тогда M_1 — модуль без кручения над R, и $\mathrm{r}(M_1) = n - 1$. Теперь рассуждениями, обратными к проведённым выше, получаем, что $\dim(Y) \geqslant n$. □

Литература

[1] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. — М: Наука, 1985.

[2] Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. — М.: Мир, 1971.

[3] Даниярова Э. Ю., Казачков И. В., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли. I. U-алгебры и универсальные классы // Фундам. и прикл. мат. — 2003. — Т. 9, вып. 3. — С. 37—63.

[4] Кейслер Г., Чен Ч. Ч. Теория моделей. — М.: Мир, 1977.

[5] Ленг С. Алгебра. — М.: Мир, 1968.

[6] Романьков В. А. Об уравнениях в свободных метабелевых группах // Сиб. мат. журн. — 1979. — Т. 20, № 3. — С. 671—673.

[7] Справочная книга по математической логике. Ч. I. Теория моделей / под ред. Дж. Барвайса. — М.: Наука, 1982.

[8] Baumslag G., Myasnikov A. G., Remeslennikov V. N. Algebraic geometry over groups. I. Algebraic sets and ideal theory // J. Algebra. — 1999. — Vol. 219. — P. 16—79.

[9] Myasnikov A. G., Remeslennikov V. N. Algebraic geometry over groups. II. Logical Foundations // J. Algebra. — 2000. — Vol. 234. — P. 225—276.

[10] Seidenberg A. Constructions in algebra // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — Vol. 197. — P. 273—313.