

Свободные неассоциативные суперкоммутативные алгебры

А. И. КОРЕПАНОВ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: kaikaikai@yandex.ru

УДК 512.554

Ключевые слова: свободная суперкоммутативная неассоциативная алгебра, группа автоморфизмов.

Аннотация

В настоящей работе доказано, что однородные подалгебры свободных неассоциативных суперкоммутативных алгебр свободны. В качестве следствия получено, что группа автоморфизмов свободной неассоциативной суперкоммутативной алгебры конечного ранга порождена элементарными автоморфизмами.

Abstract

A. I. Korepanov, Free nonassociative supercommutative algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 3, pp. 103—109.

In the present work, we prove that homogeneous subalgebras of free nonassociative supercommutative algebras are free. As a consequence, we show that the group of automorphisms of a free nonassociative supercommutative algebra of finite rank is generated by elementary automorphisms.

1. Введение

А. Г. Курош [1] доказал, что подалгебры свободных неассоциативных алгебр свободны. А. И. Ширшов [5, 6] доказал это утверждение для свободных алгебр Ли, свободных коммутативных и антикоммутативных алгебр, а Е. Витт [10] — для свободных p -алгебр Ли. А. А. Михалёв [2] и А. С. Штерн [7] получили теорему о свободе подалгебр для свободных супералгебр Ли. А. А. Михалёв [3] доказал свободу подалгебр свободных p -супералгебр Ли. Ж. Левин [9] показал, что если подалгебры свободных алгебр однородного многообразия алгебр свободны, то группы автоморфизмов свободных алгебр конечного ранга этого многообразия порождаются элементарными автоморфизмами (для свободных алгебр Ли это было отмечено П. Коном [8]). У. У. Умирбаев [4] получил необходимые и достаточные условия для того, чтобы многообразие алгебр было шрайеровым, то есть чтобы подалгебры свободных алгебр этого многообразия были свободными алгебрами того же многообразия.

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 3, с. 103—109.
© 2003 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

В данной работе доказано, что однородные подалгебры свободных неассоциативных суперкоммутативных алгебр свободны. В качестве следствия получено, что группа автоморфизмов свободной неассоциативной суперкоммутативной алгебры конечного ранга порождена элементарными автоморфизмами.

2. Свободная суперкоммутативная алгебра

Рассмотрим поле F , $\text{char } F \neq 2$, и два непересекающихся множества $X = \{x_\omega\}$, $\omega \in \Omega_X$, и $Y = \{y_\omega\}$, $\omega \in \Omega_Y$.

Определение 1. Свободной неассоциативной суперкоммутативной алгеброй A с алфавитами X и Y над полем F называется фактор-алгебра свободной неассоциативной алгебры над полем F с алфавитом $X \sqcup Y$ по идеалу, порождённому тождествами $uv = \delta vu$, где $\delta = -1$, когда u и v — нечётные слова, и $\delta = 1$ иначе. Определение чётных и нечётных слов следует ниже.

Определение 2. Неассоциативное слово в алфавите $X \sqcup Y$ назовём чётным, если чётно число входящих в него элементов из Y (с учётом кратности), нечётным в противном случае.

Определение 3. Слова длины 1 назовём правильными и произвольно упорядочим. Полагая определёнными правильные слова длины, меньшей n , назовём слово ω длины n правильным при выполнении следующих условий:

- 1) $\omega = uv$, где u, v — правильные слова,
- 2) $u \geq v$ (если $uv = -vu$, то $u > v$).

Так определённые правильные слова длины n произвольно упорядочим и положим их большими слов меньшей длины.

Лемма 1. Правильные слова образуют линейный базис алгебры A .

Доказательство. Укажем способ, позволяющий единственным способом каждому слову ω поставить в соответствие некоторый элемент ω^* этой же алгебры, причём $\omega \equiv \omega^*$ в этой алгебре и ω — либо правильное слово с коэффициентом ± 1 , либо 0.

Для слов длины 1 положим $\omega^* = \omega$. Пусть способ указан для всех слов длины, меньшей n , и пусть ω — слово длины n , $\omega = uv$. Положим

$$\omega^* = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega \equiv 0, \\ u^*v^*, & \text{если } u^* \geq v^*, \\ \delta v^*u^*, & \text{где } \delta = 1, \text{ если } v^* \text{ и } u^* \text{ коммутируют, } -1 \text{ иначе.} \end{cases}$$

Тогда очевидно, что ω^* правильное.

Каждый элемент $a \in A$, $a = \sum \alpha_i \omega_i$, может быть представлен в виде линейной комбинации $\sum \alpha_i \omega_i^*$ правильных слов.

Ноль алгебры A допускает лишь представления вида

$$0 = \sum_i \alpha_i a_{i_1} \dots a_{i_{n_i}} [c_i d_i + \delta d_i c_i] b_{i_1} \dots b_{i_{m_i}},$$

$\alpha_i \in F$, a, b, c, d — слова, скобки подразумеваются. Непосредственно видно, что правильное выражение правой части, полученное после раскрытия квадратных скобок и замены каждого из полученных слов соответствующим правильным словом, даёт нуль тождественно. Так как для правильного слова ω выполнено $\omega^* = \omega$, то не существует двух различных правильных выражений для одного и того же элемента, что равносильно линейной независимости правильных слов. $\square$

Определение 4. Элемент $a \in A$ назовём чётным, если все слова в записи a в виде линейной комбинации правильных слов чётные, нечётным — если все слова нечётные.

Частично упорядочим элементы A .

Определение 5. Пусть $a_1, a_2 \in A$. Будем считать $a_1 > a_2$, если максимальный член a_1 больше максимального члена a_2 (в смысле упорядоченности правильных слов, без учёта коэффициентов из поля F при словах) или, при их равенстве, второй (третий, четвёртый, ...) по величине член a_1 больше соответствующего члена a_2 .

3. Свободность подалгебр

Теорема 1 (основная). Для любого набора чётных и нечётных элементов подалгебра, порождённая ими, свободна.

Для доказательства теоремы нужно выделить множество свободных образующих. Пусть мы выбрали множество $\mathbf{R}'$ и оно порождает подалгебру $B \subset A$. Будем выделять подмножество $\mathbf{R}$, которое тоже порождает B и не удовлетворяет никакому нетривиальному соотношению.

Определение 6. Будем говорить, что множество

$$E = \{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\} \subset A,$$

где $e_1, \dots, e_k$ — чётные, $e_{k+1}, \dots, e_n$ — нечётные элементы, удовлетворяет нетривиальному соотношению $f(e_1, \dots, e_n)$, если f — не равный тождественно нулю элемент свободной суперкоммутативной алгебры над тем же полем F с множеством свободных образующих $\{x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{n-k}\}$ и при подстановке $\{e_1, \dots, e_k\}$ вместо $\{x_1, \dots, x_k\}$ и $\{e_k, \dots, e_n\}$ вместо $\{y_1, \dots, y_{n-k}\}$ элемент f обращается в нуль в алгебре A .

В дальнейшем будем считать все соотношения (полиномы) *правильными*, то есть приведёнными к определённому так же, как в A , правильному виду элементами своих алгебр. Будем кратко писать: множество $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ удовлетворяет нетривиальному соотношению $f(e_1, \dots, e_n)$, подразумевая разделение $\{e_i\}$ на чётные и нечётные элементы, различать которые нам в дальнейшем практически не понадобится.

Для дальнейших рассуждений потребуются следующие определения.

Определение 7. Назовём множество $Q \subset A$ α -неприводимым, если никакой его элемент не принадлежит подалгебре, порождённой остальными элементами.

Определение 8. Назовём множество $Q \subset A$ β -неприводимым, если каждый член, входящий в состав любого элемента Q , не является произведением старших членов остальных элементов Q .

Обозначим через $\langle Q \rangle$ подалгебру, порождённую Q .

Лемма 2. Можно выбрать α -неприводимое множество $\mathbf{R} \subset \mathbf{R}'$ так, что $\mathbf{R}$ тоже порождает B .

Доказательство. Доказательство этого утверждения основывается на лемме Цорна. Положим $Q_1 < Q_2$, если Q_1 и Q_2 α -неприводимые и $Q_1 \subset Q_2$. Тогда любая цепь $Q_1 < Q_2 < \dots$ имеет мажоранту $Q = \bigcup_i Q_i$. Очевидно, что множество Q α -неприводимое. Следовательно, в $\mathbf{R}'$ существует хотя бы один максимальный элемент, который мы и возьмём в качестве $\mathbf{R}$. $\square$

Будем теперь доказывать, что $\mathbf{R}$ можно взять в качестве множества свободных образующих B , то есть что нет нетривиального соотношения на элементы $\mathbf{R}$. Построим доказательство от противного.

Пусть множество $E = \{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbf{R}$ удовлетворяет нетривиальному соотношению $f(x_1, \dots, x_n)$.

Лемма 3. Для любого элемента ω_i не большей чем e_i степени и такой же чётности, порождённого $\{e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n\}$, множество $\{e_1, \dots, e_i + \omega_i, \dots, e_n\}$ тоже удовлетворяет некоторому нетривиальному соотношению.

Доказательство. Выделим в $f(x_1, \dots, x_n)$ часть, старшую относительно x_i , и обозначим её $f_i(x_1, \dots, x_n)$. Пусть $e_i + \omega_i = e'_i$. Запишем

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_i(x_1, \dots, x_n) + f'_i(x_1, \dots, x_n),$$

тогда

$$\begin{aligned} f(e_1, \dots, e_n) &= f_i(e_1, \dots, e_n) + f'_i(e_1, \dots, e_n) = \\ &= f_i(e_1, \dots, e'_i - \omega_i, \dots, e_n) + f'_i(e_1, \dots, e'_i - \omega_i, \dots, e_n) = \\ &= f_i(e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n) + \varphi(e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n) = f'(e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n). \end{aligned}$$

При этом полином $f_i(x_1, \dots, x_n)$ нетривиален, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ и $f_i(x_1, \dots, x_n)$ не имеют членов одинаковой полистепени (из соображений старшинства по e'_i), а значит, $f'(x_1, \dots, x_n)$ — нетривиальный полином. $\square$

Теперь, основываясь на этой лемме, будем изменять множество E так, чтобы оно продолжало удовлетворять нетривиальному соотношению и чтобы легче было показать наличие противоречия.

Лемма 4. Существует β -неприводимое множество $E' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$, удовлетворяющее некоторому нетривиальному соотношению $f'(x_1, \dots, x_n)$.

Доказательство. Сначала добьёмся, чтобы множество старших частей элементов E было α -неприводимым: если старшая часть элемента e_i порождается старшими частями остальных элементов, то вычтем из e_i соответствующее произведение. При этом строго уменьшится суммарная степень всех элементов $\{e_i\}$. Значит, подобных шагов конечное число и на каком-то этапе множество старших частей станет α -неприводимым.

Без ограничения общности будем считать, что $e_i > e_j \iff i > j$, и пусть для некоторого k , $1 \leq k < n$, множество $\{e_i\}_{i=1}^k$ β -неприводимо. Покажем, что тогда элемент e_{k+1} можно заменить на $e'_{k+1} = e_{k+1} + \omega_{k+1}$, где ω_{k+1} принадлежит подалгебре, порождённой $\{e_i\}_{i=1}^k$, так, что множество $\{e_1, \dots, e_k, e'_{k+1}\}$ будет тоже β -неприводимым. Действительно, пусть в старшей части e_{k+1} есть член, представимый в виде произведения старших членов $\{e_i\}_{i=1}^k$. Тогда вычтем из e_{k+1} соответствующее произведение $\{e_i\}_{i=1}^k$. При этом согласно индуктивному предположению в старшей части этого произведения не могут оказаться члены, представимые в виде произведения старших членов $\{e_i\}_{i=1}^k$, а значит, в старшей части e'_{k+1} уменьшится число членов, представимых в виде произведения старших членов элементов $\{e_i\}_{i=1}^k$. Это значит, что за конечное число шагов мы сделаем множество $\{e_1, \dots, e_k, e'_{k+1}\}$ β -неприводимым. $\square$

Итак, будем считать, что в нашем распоряжении множество $E = \{e_i\}_{i=1}^n$, которое удовлетворяет некоторому записанному в правильной форме нетривиальному соотношению $f(x_1, \dots, x_n)$ и (по лемме 4) такое, что каждый член, входящий в состав любого e_i , не является произведением старших членов остальных элементов E . Покажем наличие противоречия.

Пусть $e = \alpha e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_s}$, $\alpha \in F$, подразумеваются как-то расставленные скобки, — один из членов полинома $f(x_1, \dots, x_n)$, который выбран среди членов, для которых число $n = \sum_{l=1}^s n(e_{i_l})$ максимально, так, чтобы число s было максимально. Покажем, что если слово $\tilde{e} = \tilde{e}_{i_1} \tilde{e}_{i_2} \dots \tilde{e}_{i_s}$, где $\tilde{e}_{i_k}$ — старший член элемента e_{i_k} , привести к правильному виду, то не будет подобных ему членов среди других правильных слов, которые получатся после приведения к правильному виду выражения $f(e_1, \dots, e_n)$.

В самом деле, такое слово могло бы появиться только как некоторое произведение $\tilde{m} = \tilde{e}_{j_1} \tilde{e}_{j_2} \dots \tilde{e}_{j_r}$ членов старших частей множества E . Если некоторый член $\tilde{e}_{j_k}$ не является старшим членом элемента e_{j_k} , то (поскольку он не может быть представлен как произведение старших членов других элементов E) из подобия $\tilde{e}$ и $\tilde{m}$ следует, что $\tilde{e}_{j_k}$ в произведении с некоторыми другими членами $\tilde{e}_{j_t}$ может давать некоторый старший член $\tilde{e}_{i_g}$, из этого следовало бы, что $r > s$, что невозможно. Поэтому все $\tilde{e}_{j_k}$ на самом деле являются старшими членами соответствующих элементов. Значит, из равенства

$$\alpha \tilde{e} - \tilde{m} \equiv 0, \quad \alpha \in F,$$

следует

$$\alpha_1 e - m \equiv 0, \quad \alpha_1 \in F,$$

где $m = \beta e_{j_1} e_{j_2} \dots e_{j_r}$ — член полинома $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, из которого мог быть получен член $\tilde{m}$. Но это противоречит правильности полинома $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, в котором не может содержаться подобных членов. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 1.

4. Порождающие группы автоморфизмов алгебры A

Пусть A — свободная неассоциативная суперкоммутативная алгебра с конечным множеством свободных порождающих $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Пусть φ — эндоморфизм A . Любой эндоморфизм можно однозначно описать по образам образующих. И обратно, любое отображение образующих в однородные полиномы соответствующей чётности задаёт эндоморфизм. Ниже мы опишем все автоморфизмы A . Заметим, что любой эндоморфизм A однородный, то есть он сохраняет чётность элементов A .

Теорема 2. *Любой автоморфизм алгебры A можно разложить в конечную композицию элементарных автоморфизмов вида*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_i + P(\{x_j: j \neq i\}) \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

где $P(\{x_j: j \neq i\})$ — некоторый полином, чётность которого равна чётности x_i , $0 \neq \alpha \in F$.

Доказательство. Назовём степень автоморфизма сумму степеней образов образующих: $l(\varphi) = \sum l(\varphi(x_i))$. Если степень φ равна n , то φ имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow \Phi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

здесь Φ — некоторая невырожденная матрица. Матрицы же элементарных автоморфизмов степени n имеют вид ($\alpha_i \neq 0$)

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_n \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Множество таких матриц содержит матрицы вида $E + \alpha E_{ij}$, где E — единичная матрица, $\alpha \neq -1$, E_{ij} имеет единицу на i -й строке в j -м столбце и нули на всех остальных позициях. А это канонические порождающие для всех невырожденных матриц над полем F . Таким образом, для автоморфизмов степени n существует разложение в композицию элементарных.

Теперь рассмотрим автоморфизм φ степени больше n . Поскольку φ — автоморфизм, то существуют выражения $P_i(\{\varphi(x_i)\}) = x_i$ для каждого i . Поскольку P_i — нетривиальные в алгебре A полиномы и степень φ больше n , то существует нетривиальный полином $\overline{P_j}(\{\varphi(x_i)\})$ степени больше 1, равный тождественно нулю. Здесь верхняя черта — знак взятия старшей части. Но из доказательства теоремы о свободе подалгебр мы знаем, что отсюда следует, что некоторая старшая часть элемента $\varphi(x_i)$ выражается через старшие части образов остальных образующих. А значит, существует такой элементарный автоморфизм φ_1 , что $\varphi_1 \circ \varphi$ — автоморфизм меньшей чем φ степени.

Действуя дальше по редукции, мы получим

$$\varphi_m \circ \dots \circ \varphi_1 \circ \varphi = \text{id}.$$

Заметим, что автоморфизм, обратный элементарному, элементарен. $\square$

Литература

- [1] Курош А. Г. Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр // *Мат. сб.* — 1947. — Т. 20. — С. 239–262.
- [2] Михалёв А. А. Подалгебры свободных цветных супералгебр Ли // *Мат. заметки.* — 1985. — Т. 37, № 5. — С. 653–661.
- [3] Михалёв А. А. Подалгебры свободных p -супералгебр Ли // *Мат. заметки.* — 1988. — Т. 43, № 2. — С. 178–191.
- [4] Умирбаев У. У. О шрайеровых многообразиях алгебр // *Алгебра и логика.* — 1994. — Т. 33, № 3. — С. 317–340.
- [5] Ширшов А. И. Подалгебры свободных лиевых алгебр // *Мат. сб.* — 1953. — Т. 33, № 2. — С. 441–452.
- [6] Ширшов А. И. Подалгебры свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр // *Мат. сб.* — 1954. — Т. 34, № 1. — С. 81–88.
- [7] Штерн А. С. Свободные супералгебры Ли // *Сиб. мат. журн.* — 1986. — Т. 27. — С. 170–174.
- [8] Cohn P. M. Subalgebras of free associative algebras // *Proc. London. Math. Soc.* — 1964. — Vol. 14, no. 3. — P. 618–632.
- [9] Lewin J. On Schreier varieties of linear algebras // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1968. — Vol. 132. — P. 553–562.
- [10] Witt E. Die Unterringe der freien Lieschen Ringe // *Math. Z.* — 1956. — Vol. 64. — P. 195–216.

