

Свойства сопряжения в алгебрах инцидентности

В. Е. МАРЕНИЧ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: VMarenich@yandex.ru

УДК 519.1

Ключевые слова: алгебра инцидентности, отношение сопряжения (функций инцидентности), дзета-функция.

Аннотация

На алгебры инцидентности можно смотреть как на обобщение полных матричных алгебр. В работе изучаются свойства сопряжения функций инцидентности. Методом дизъюнктивных сумм найден критерий сопряжённости диагонально $\leq$ -выпуклой функции f и диагонали fe . Приведены условия, при выполнении которых функция f сопряжена с функцией $Ce + \zeta_{\leq}$ (где функцию $Ce + \zeta_{\leq}$ можно считать аналогом жордановой клетки, определённой в теории матриц). Для частично упорядоченных множеств, удовлетворяющих этим условиям, доказана сопряжённость функций $\zeta_{<}$ и $\zeta_{\leq}$. Приведён пример частично упорядоченного множества, для которого функция $\zeta_{<}$ не сопряжена с $\zeta_{\leq}$. Полученные результаты позволяют сформулировать критерии сопряжённости диагонально $\leq$ -выпуклых функций некоторых частично упорядоченных множеств.

Abstract

V. E. Marenich, Conjugation properties in incidence algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 3, pp. 111–123.

Incidence algebras can be regarded as a generalization of full matrix algebras. We present some conjugation properties for incidence functions. The list of results is as follows: a criterion for a convex-diagonal function f to be conjugated to the diagonal function fe ; conditions under which the conjugacy $f \sim Ce + \zeta_{\leq}$ holds (the function $Ce + \zeta_{\leq}$ may be thought of as an analog for a Jordan box from matrix theory); a proof of the conjugation of two functions $\zeta_{<}$ and $\zeta_{\leq}$ for partially ordered sets that satisfy the conditions mentioned above; an example of a partially ordered set for which the conjugacy $\zeta_{<} \sim \zeta_{\leq}$ does not hold. These results involve conjugation criteria for convex-diagonal functions of some partially ordered sets.

Введение

Систематическое изучение алгебр инцидентности начато работой Ж.-К. Рота, П. Дубиле [2] и продолжается в настоящее время [1, 3–6]. На алгебры инцидентности можно смотреть как на обобщение полных матричных алгебр, поэтому естественно переносить свойства матриц на функции инцидентности. Например, в книге Стенли [5, с. 235] поставлен вопрос: «Есть ли разумный критерий для определения того, когда два элемента алгебры инцидентности сопряжены (по аналогии с теорией канонической формы Жордана)?»

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 3, с. 111–123.

© 2003 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

Вопрос о сопряжённости функций инцидентности зависит от трёх факторов: структуры частично упорядоченного множества, свойств поля F и свойств самих функций инцидентности. Вообще говоря, аналога жордановой канонической формы для функций инцидентности не существует. Для некоторых функций инцидентности таким аналогом могут быть диагонали и функции $Se + \zeta_{\leq}$.

Любая функция инцидентности сопряжена с дизъюнктивной суммой функций, постоянных на диагонали и принадлежащих «меньшим» алгебрам инцидентности. Вопрос о сопряжении функций в алгебре $\text{Inc}_F(P, \leq)$ можно свести к вопросу о сопряжении дизъюнктивных слагаемых, постоянных на диагонали, в «меньших» алгебрах инцидентности.

Методом дизъюнктивных сумм найден критерий сопряжённости диагонально $\leq$ -выпуклой функции f и диагонали fe .

Функцию $Se + \zeta_{\leq}$ можно считать аналогом жордановой клетки, определённой в теории матриц. В работе приведены условия, при выполнении которых функция f сопряжена с функцией $Se + \zeta_{\leq}$. Для частично упорядоченных множеств, удовлетворяющих этим условиям, доказана сопряжённость функций $\zeta_{<}$ и $\zeta_{\leq}$. Приведён пример частично упорядоченного множества, для которого функция $\zeta_{<}$ не сопряжена с функцией $\zeta_{\leq}$. Полученные результаты позволяют сформулировать критерии сопряжённости диагонально $\leq$ -выпуклых функций некоторых частично упорядоченных множеств.

Все приведённые результаты являются новыми. Теорема 1 и некоторые следствия из неё были анонсированы в тезисах [3].

1. Основные понятия

Введём следующие обозначения: F — поле, $F(0)$ — поле характеристики 0, $\text{GF}(q)$ — конечное поле из q элементов, P — множество, $\leq$ — отношение частичного порядка (сокращённо ЧП). Пара $(P, \leq)$ называется частично упорядоченным множеством (ЧУМ). Если любые два элемента из множества P сравнимы по отношению $\leq$, то $\leq$ — линейный порядок (ЛП), а $(P, \leq)$ — линейно упорядоченное множество (ЛУМ), или цепь. Множество $N \subseteq P$ называется антицепью, если любые два различных элемента из N не сравнимы по отношению $\leq$.

Для $a, b \in P$ множество $[a, b] = \{z \mid z \in P, a \leq z \leq b\}$ называется интервалом ЧУМ $(P, \leq)$ с концами a и b . ЧУМ $(P, \leq)$ называется локально конечным, если все его интервалы $[a, b]_{\leq}$ конечны. Далее мы будем рассматривать только локально конечные ЧУМ.

Множество $N \subseteq P$ называется $\leq$ -выпуклым, если $[a, b]_{\leq} \subseteq N$ для любых элементов $a, b \in N$.

Частичный порядок $\leq$ определяет на множестве P отношение меньше $<$ и отношение покрытия $\prec$ следующим образом: $a < b$ равносильно $a \leq b$ и $a \neq b$, $a \prec b$ равносильно $|[a, b]| = 2$. Если $a \prec b$, то говорят, что b покрывает a в ЧУМ $(P, \leq)$. Пара (a, b) называется ребром покрытия, если $a \prec b$.

Пусть (a, b) — ребро покрытия в ЧУМ $(P, \leq)$. На множестве P определим частичный порядок $\leq$ следующим образом: $u \leq v$ тогда и только тогда, когда $u \leq v$ и $(u, v) \neq (a, b)$. Элементы a и b не сравнимы по отношению $\leq$. Будем говорить, что частичный порядок $\leq$ получен из ЧП $\leq$ удалением ребра покрытия (a, b) .

Пусть T — бинарное отношение, содержащееся в ЧП $\leq$. Последовательность $(a, a_1, \dots, a_{n-1}, b)$ называется (a, b, T) -маршрутом, если $aTa_1T \dots Ta_{n-1}Tb$. Число n называется длиной маршрута. Маршруты вида $(a, b, <)$ называются $(a, b, <)$ -цепями.

Если каждая $(a, b, <)$ -цепь при фиксированных $a, b \in P$ имеет одну и ту же длину, то говорят, что ЧУМ $(P, \leq)$ градуировано. Если для градуированного ЧУМ $(P, \leq)$ определена функция $\rho: P \rightarrow \mathbb{Z}$, такая что $\rho(b) = \rho(a) + 1$ для любых $a < b$, то ρ называется ранговой функцией ЧУМ $(P, \leq)$. Обозначим символом $\mathbb{Z}_\rho$ множество значений функции ρ .

Если $\rho(a) = k$, $\rho(b) = k + n$, то уровневые числа интервала $([a, b]_{\leq}, \leq)$ определены равенствами $w_r(k, n) = |\{z \mid z \in [a, b]_{\leq}, \rho(z) - \rho(a) = r\}|$ для $r = 0, 1, \dots, n$. В частности, $w_0(k, n) = w_n(k, n) = 1$.

Будем говорить, что все интервалы ЧУМ $(P, \leq)$ согласованы с ранговой функцией ρ , если для любых элементов $a \leq b$, $c \leq d$ из равенств $\rho(a) = \rho(b)$ и $\rho(b) = \rho(d)$ следует, что равны соответствующие уровневые числа интервалов $([a, b]_{\leq}, \leq)$ и $([c, d]_{\leq}, \leq)$.

Введём следующие обозначения: $\text{Bul}(n)$ — решётка подмножеств n -элементного множества, $\text{Lin}(n, q)$ — решётка подпространств n -мерного векторного пространства над $\text{GF}(q)$, $\text{Aff}(n, q)$ — решётка аффинных подпространств n -мерного векторного пространства над $\text{GF}(q)$.

Функция $f: P^2 \rightarrow F$ называется функцией инцидентности локально конечного ЧУМ $(P, \leq)$, если $f(a, b) = 0$ для всех $a \not\leq b$. Обозначим $\text{inc}_F(P, \leq)$ множество всех функций инцидентности ЧУМ $(P, \leq)$. Будем говорить, что значения $f(a, a)$ лежат на главной диагонали функции инцидентности f , все остальные значения f лежат вне главной диагонали. Функция инцидентности f называется диагональю (и обозначается fe), если $f(a, b) = 0$ для всех $a \neq b$.

Множество $\text{inc}_F(P, \leq)$ относительно операций

$$(f + g)(a, b) = f(a, b) + g(a, b) \quad (\text{сложение}),$$

$$(f * g)(a, b) = \sum_{a \leq z \leq b} f(a, z)g(z, b) \quad (\text{свёртка}),$$

$$(-f)(a, b) = -f(a, b)$$

и операции умножения функции инцидентности на элементы поля F

$$(kf)(a, b) = k(f(a, b))$$

образует ассоциативную алгебру над полем F с единицей e : $e(a, b) = 1$, если $a = b$; $e(a, b) = 0$, если $a \neq b$.

Алгебру инцидентности будем обозначать $\text{Inc}_F(P, \leq)$.

На множестве $\text{inc}_F(P, \leq)$ определена операция «поточечного умножения»: $(fg)(a, b) = f(a, b)g(a, b)$ для всех $a, b \in P$.

Функция $f \in \text{inc}_F(P, \leq)$ обратима в алгебре $\text{Inc}_F(P, \leq)$ тогда и только тогда, когда $f(a, a) \neq 0$ для всех $a \in P$.

Если отношение T содержится в ЧП $\leq$, то определена дзета-функция $\zeta_T \in \text{inc}_F(P, \leq)$: $\zeta_T(a, b) = 1$, если aTb ; $\zeta_T(a, b) = 0$ иначе.

Для конечного ЧУМ $(P, \leq)$ и функции $f \in \text{inc}_F(P, \leq)$ определена матрица $m(f, P, P) = \|f(a, b)\|_{a, b \in P}$. Обозначим $\text{rank}_F m(f, P, P)$ ранг матрицы $m(f, P, P)$.

2. Отношение сопряжения в алгебрах инцидентности

Функции $f, g \in \text{inc}_F(P, \leq)$ назовём сопряжёнными в алгебре $\text{Inc}_F(P, \leq)$ (пишем $f \sim g$), если существует такая обратимая функция $x \in \text{inc}_F(P, \leq)$, что $x^{-1} * f * x = g$.

Лемма 1. Пусть $f \in \text{inc}_F(P, \leq)$.

1. Если $f(a, a) \neq f(b, b)$, $f(a, b) \neq 0$ для некоторых $a < b$, то существует функция $x \in \text{inc}_F(P, \leq)$, такая что $(x^{-1} * f * x)(a, b) = 0$.
2. Если $f(a, a) = f(b, b)$, $f(a, b) \neq 0$ для некоторых $a < b$, то для любой функции $x \in \text{inc}_F(P, \leq)$ выполнено $(x^{-1} * f * x)(a, b) \neq 0$.

Доказательство. Для $a < b$ справедлива формула

$$(x^{-1} * f * x)(a, b) = \frac{x(a, b)}{x(a, a)}(f(a, a) - f(b, b)) + \frac{x(b, b)}{x(a, a)}f(a, b), \quad (1)$$

где $x(a, a) \neq 0$.

1. Согласно (1) для любых $a < b$ равенство $(x^{-1} * f * x)(a, b) = 0$ равносильно равенству $x(a, b)(f(a, a) - f(b, b)) = -x(b, b)f(a, b)$. Таким образом, выбираем произвольное значение $x(b, b) \neq 0$ и получаем $x(a, b) = x(b, b) \frac{f(a, b)}{f(b, b) - f(a, a)}$ для любых $a < b$. Для элементов $u < v$, v не покрывает u , значения $x(u, v)$ могут быть заданы произвольным образом.

2. По условию $a < b$, поэтому согласно (1)

$$(x^{-1} * f * x)(a, b) = \frac{x(b, b)}{x(a, a)}f(a, b) \neq 0. \quad \square$$

3. Отсутствие аналога канонической жордановой формы в алгебрах инцидентности

Над любым алгебраически замкнутым полем каждая матрица A имеет жорданову нормальную форму, то есть A сопряжена с матрицей, вне главной диаго-

нали которой расположены только 0 и 1. В алгебрах инцидентности аналогичное утверждение неверно.

Лемма 2. Пусть $F \neq \text{GF}(2)$ и не все интервалы ЧУМ $(P, \leq)$ являются цепями. Тогда существуют функции, которые нельзя сопряжением преобразовать к функциям со значениями вне главной диагонали, равными 0 или 1.

Доказательство. Пусть функция $f \in \text{inc}_F(P, \leq)$ обладает свойствами $f(a, a) = C = \text{const}$ для всех $a \in P$ и $f(a, b) \neq 0$ для всех $a < b$. Предположим, что $f \sim g$ и все значения функции g вне главной диагонали равны 0 или 1. Тогда $g(a, b) = f(a, b)$, если $a = b$; $g(a, b) = 1$, если $a < b$; $g(a, b) = 0$ во всех остальных случаях.

Докажем, что произведения $f(a, a_1)f(a_1, a_2) \dots f(a_{n-1}, b)$ равны для всех $(a, b, <)$ -цепей $(a, a_1, \dots, a_{n-1}, b)$. Действительно, существует обратимая функция $x \in \text{inc}_F(P, \leq)$, такая что $g = x^{-1} * f * x$. Для всех $a < b$ справедливо $(x^{-1} * f * x)(a, b) = g(a, b)$, что равносильно уравнению $x(a, a)g(a, b) - f(a, b)x(b, b) = 0$. Поэтому $f(a, b) = \frac{x(a, a)}{x(b, b)}$ для всех $a < b$. Для произвольной $(a, b, <)$ -цепи $(a, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b)$ имеем

$$f(a, a_1) = \frac{x(a, a)}{x(a_1, a_1)}, f(a_1, a_2) = \frac{x(a_1, a_1)}{x(a_2, a_2)}, \dots, f(a_{n-1}, b) = \frac{x(a_{n-1}, a_{n-1})}{x(b, b)}.$$

Поэтому

$$f(a, a_1)f(a_1, a_2) \dots f(a_{n-1}, b) = \frac{x(a, a)}{x(b, b)} = \text{const}$$

для произвольной $(a, b, <)$ -цепи $(a, a_1, \dots, a_{n-1}, b)$. Ясно, что не каждая функция f удовлетворяет такому условию. $\square$

4. Сопряжённость функций инцидентности дизъюнктивной сумме

Согласно разделу 3 для алгебр инцидентности нет критерия сопряжённости функций, аналогичного теории нормальной жордановой формы матрицы. Вопрос о сопряжении функций в алгебре $\text{Inc}_F(P, \leq)$ можно свести к вопросу о сопряжении функций, постоянных на диагонали, в алгебрах инцидентности $\text{Inc}_F(P, \leq_1)$, где ЧП $\leq_1$ содержится в ЧП $\leq$.

Для функции $f \in \text{inc}_F(P, \leq)$ определим множества

$$D(f) = \{f(z, z) \mid z \in P\}, \quad P_a(f) = \{z \mid z \in P, f(z, z) = a\}$$

для любого $a \in D(f)$.

Рассмотрим ЧУМ $(P_a(f), \leq_a)$, где ЧП $\leq_a$ есть сужение частичного порядка $\leq$ на множество $P_a(f)$. В дальнейшем вместо $\leq_a$ будем писать $\leq$. Функция $g \in \text{inc}_F(P, \leq)$ есть дизъюнктивная сумма функций $g_a \in \text{inc}_F(P_a(f), \leq)$,

если $g(u, v) = g_a(u, v)$ при u, v , принадлежащих одному множеству $P_a(f)$, и $g(u, v) = 0$ иначе. Пишем $g = \bigoplus_{a \in D(f)} g_a$.

Теорема 1. Любая функция $f \in \text{inc}_F(P, \leq)$ сопряжена в алгебре $\text{Inc}_F(P, \leq)$ с функцией g , являющейся дизъюнктивной суммой некоторых функций $g_a \in \text{inc}_F(P_a(f), \leq)$, где $a \in D(f)$ и $g_a(z, z) = a$ для любого $z \in P_a(f)$.

Доказательство. Пусть $f \in \text{inc}_F(P, \leq)$. Если $f(a, b) = 0$ на ребре покрытия (a, b) , то $f \in \text{inc}_F(P, \leq_1)$, где ЧП $\leq_1$ получен из ЧП $\leq$ удалением ребра покрытия (a, b) . Если существуют такие элементы $a, b \in P$, $a \leq b$, что $f(a, a) \neq f(b, b)$ и $f(a, b) \neq 0$, то по лемме 1 найдётся $x \in \text{inc}_F(P, \leq)$, такая что $(x^{-1} * f * x)(a, b) = 0$, т. е. $f \sim f_1$, где $f_1 \in \text{inc}_F(P, \leq_1)$ и ЧП $\leq_1$ получен из ЧП $\leq$ удалением ребра покрытия (a, b) . Если существуют $a, b \in P$, $a \leq_1 b$, $f(a, a) \neq f(b, b)$, $f(a, b) \neq 0$, то по лемме 1 найдётся $x \in \text{inc}_F(P, \leq_1)$, такая что $(x^{-1} * f * x)(a, b) = 0$, т. е. $f \sim f_1 \sim f_2$, где $f_2 \in \text{inc}_F(P, \leq_2)$ и ЧП $\leq_2$ получен из ЧП $\leq_1$ удалением ребра покрытия (a, b) . Производя указанную процедуру удаления рёбер необходимое число раз, получим $f \sim f_1 \sim f_2 \sim \dots \sim g$, где для любых $c, d \in P$, $c < d$, если $g(c, c) \neq g(d, d)$, то $g(c, d) = 0$. Поэтому g является дизъюнктивной суммой функций g_a , указанных в теореме. $\square$

Теорема 1 даёт способ нахождения таких функций g , что $f \sim g$ и g есть дизъюнктивная сумма.

Для любой функции $g \in \text{inc}_F(P, \leq)$ и любого $a \in D(g)$ обозначим через g_a сужение функции g на $P_a(g) \times P_a(g)$.

Для некоторых ЧУМ $(P, \leq)$ теорема 1 даёт критерий сопряжённости функций из алгебры инцидентности $\text{Inc}_F(P, \leq)$.

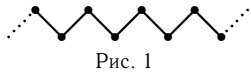


Рис. 1

Пример 1. Пусть $(P, \leq)$ — ЧУМ высоты 1, диаграмма Хассе которого изображена на рис. 1. Справедливы следующие утверждения:

- 1) любая функция $f \in \text{inc}_F(P, \leq)$ сопряжена с дизъюнктивной суммой $\bigoplus_{a \in D(f)} (ae_a + (\zeta_{<})_a)$ в алгебре $\text{Inc}_F(P, \leq)$,
- 2) функции $f, g \in \text{inc}_F(P, \leq)$ сопряжены в алгебре $\text{Inc}_F(P, \leq)$ тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия $D(f) = D(g) = D$; $P_a(f) = P_a(g)$ для всех $a \in D$; $f(c, d) \neq 0$ равносильно $g(c, d) \neq 0$ для любых $c < d$.

Докажем первое утверждение. По теореме 1 $f \sim g = \bigoplus_{a \in D(f)} g_a$. Поскольку для любого $a \in D(f)$ все рёбра ЧУМ являются рёбрами покрытия, то $g_a = ae_a + g_a(\zeta_{<})_a$. Легко проверить, что $g_a \sim ae_a + (\zeta_{<})_a$ для любого $a \in D(f)$, что завершает доказательство. Второе утверждение есть следствие первого. $\square$

Функцию $f \in \text{inc}_F(P, \leq)$ будем называть диагонально $\leq$ -выпуклой, если множества $P_a(f)$ являются $\leq$ -выпуклыми для всех $a \in D(f)$.

По теореме 1 функция $f \in \text{inc}_F(P, \leq)$ сопряжена с некоторыми функциями вида $g = \bigoplus_{a \in D(f)} g_a$. Если f является диагонально $\leq$ -выпуклой, то среди всех таких функций g можно выбрать некоторую «каноническую» функцию.

Теорема 2. Пусть функция $f \in \text{inc}_F(P, \leq)$ диагонально $\leq$ -выпуклая. Тогда функция f сопряжена с дизъюнктивной суммой своих сужений на частично упорядоченные множества $(P_a(f), \leq)$, т. е. $f \sim f = \bigoplus_{a \in D(f)} f_a$.

Доказательство. По теореме 1 существует $x \in \text{inc}_F(P, \leq)$, такая что $x^{-1} * f * x = \bigoplus_{a \in D(f)} g_a$. Поскольку f диагонально $\leq$ -выпуклая, то для любого $b \in D(f)$ имеем

$$g_b = \left(\bigoplus_{a \in D(f)} g_a \right)_b = (x^{-1} * f * x)_b = x_b^{-1} * f_b * x_b.$$

Поэтому $g_a \sim f_a$ в алгебре $\text{Inc}_F(P, \leq)$ для любых $a \in D(f)$. Несложно доказать, что если множества $P_a(f)$ $\leq$ -выпуклые для всех $a \in D(f)$, то условие $g_a \sim f_a$ в алгебре $\text{Inc}_F(P_a, \leq)$ для любых $a \in D(f)$ эквивалентно условию $\bigoplus_{a \in D(f)} g_a \sim \bigoplus_{a \in D(f)} f_a$ в алгебре $\text{Inc}_F(P, \leq)$. $\square$

Следствие 1 (критерий сопряжённости дизъюнктивных сумм). Пусть $g, h \in \text{inc}_F(P, \leq)$, $D(g) = D(h) = D$, $P_a(g) = P_a(h) = P_a$ и множества P_a являются $\leq$ -выпуклыми для любого $a \in D$, $g \sim \tilde{g} = \bigoplus_{a \in D} \tilde{g}_a$, $h \sim \tilde{h} = \bigoplus_{a \in D} \tilde{h}_a$ в алгебре $\text{Inc}_F(P, \leq)$. Тогда утверждения, что $g \sim h$ в $\text{Inc}_F(P, \leq)$ и что $\tilde{g}_a \sim \tilde{h}_a$ в $\text{Inc}_F(P_a, \leq)$ для любого $a \in D$, равносильны. $\square$

Следствие 2. Пусть одна из функций $g, h \in \text{inc}_F(P, \leq)$ является диагонально $\leq$ -выпуклой. Тогда утверждения, что $g \sim h$ в алгебре $\text{Inc}_F(P, \leq)$ и что $D(g) = D(h) = D$, $P_a(g) = P_a(h) = P_a$ и $g_a \sim h_a$ в алгебре $\text{Inc}_F(P_a, \leq)$ для любого $a \in D$, равносильны. $\square$

5. Диагонализируемые функции инцидентности

Будем называть функцию $f \in \text{inc}_F(P, \leq)$ диагонализируемой, если $f \sim f e$. Справедлив следующий критерий диагонализируемости диагонально $\leq$ -выпуклых функций.

Теорема 3. Пусть функция $f \in \text{inc}_F(P, \leq)$ диагонально $\leq$ -выпуклая. Следующие утверждения равносильны:

- 1) функция f диагонализируема,
- 2) $f_a = f(a, a)e_a$ для всех $a \in D(f)$.

Доказательство.

1) $\implies$ 2). Пусть $f \sim fe = \bigoplus_{a \in D(f)} f_a e_a$ в алгебре инцидентности $\text{Inc}_F(P, \leq)$.

По теореме 2 $f \sim \bigoplus_{a \in D(f)} f_a$ в алгебре $\text{Inc}_F(P, \leq)$. По следствию 1 $f_a = x_a * (f_a e_a) * x_a^{-1}$.

2) $\implies$ 1). Пусть $f_a = f(a, a)e_a$ для всех $a \in D(f)$. По теореме 2 $f \sim \bigoplus_{a \in D(f)} f_a = \bigoplus_{a \in D(f)} f(a, a)e_a f e$. $\square$

Существуют примеры, показывающие, что в условии теоремы 3 нельзя отказаться от диагональной $\leq$ -выпуклости функции f .

Следствие 3. Пусть $f \in \text{inc}_F(P, \leq)$. Справедливы следующие утверждения:

- 1) если для любого $a \in D(f)$ множество $P_a(f)$ является $\leq$ -антицепью, то функция f диагонализироваема,
- 2) пусть $f(a, a) = C = \text{const}$ для всех $a \in P$. Функция f диагонализироваема тогда и только тогда, когда $f = Ce$. $\square$

Следствие 4. Пусть функция $f \in \text{inc}_F(P, \leq)$. Если $f(a, a) \neq f(b, b)$ для всех элементов $a \neq b$, то функция f диагонализироваема. $\square$

Следствие 4 есть обобщение известной теоремы линейной алгебры: матрица порядка n , имеющая n попарно различных собственных значений, сопряжена с диагональной матрицей.

6. Функции инцидентности, сопряжённые с $Ce + \zeta_{\leq}$. Сопряжённость некоторых функций инцидентности

Согласно разделу 4 вопрос о сопряжённости функций инцидентности в алгебре $\text{Inc}_F(P, \leq)$ сводится к вопросу о сопряжённости функций, постоянных на диагонали, в меньших алгебрах инцидентности. Среди всех функций, постоянных на диагонали, особый интерес вызывает функция $Ce + \zeta_{\leq}$. Для связного ЧУМ $(P, \leq)$ функцию $Ce + \zeta_{\leq}$ можно считать аналогом жордановой клетки, определённой в теории матриц, по двум причинам.

Если $(P, \leq)$ — конечное ЧУМ и элементы P пронумерованы согласно линейному порядку $\leq$, то матрица $m(Ce + \zeta_{\leq}, P, P)$ — жорданова клетка в смысле теории матриц.

Пусть B — верхняя треугольная матрица размера $n \times n$, удовлетворяющая следующим условиям: вне главной диагонали B расположены только 0 и 1; B подобна жордановой клетке; число единиц вне главной диагонали B равно $n - 1$. Тогда B сама является жордановой клеткой. Аналогичное утверждение справедливо для алгебр инцидентности. Согласно лемме 1, если функция $f \in \text{inc}_F(P, \leq)$ такова, что

- 1) вне главной диагонали f расположены только 0 и 1,

- 2) f сопряжена с жордановой клеткой $Ce + \zeta_{\leq}$,
- 3) f имеет наименьшее число единиц среди всех функций из $\text{inc}_F(P, \leq)$, удовлетворяющих условиям 1), 2),

то $f = Ce + \zeta_{\leq}$.

Опишем некоторые функции инцидентности, сопряжённые с $Ce + \zeta_{\leq}$.

Теорема 4. Пусть ЧУМ $(P, \leq)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) все интервалы $(P, \leq)$ согласованы с ранговой функцией ρ ,
- 2) $w_1(k, n) \neq 0$ и $w_{n-1}(k, n) \neq 0$ в поле F для всех $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

а функция f алгебры $\text{Inc}_F(P, \leq)$ такова, что

- 1) если $a \leq b$, $c \leq d$, $\rho(a) = \rho(c)$, $\rho(b) = \rho(d)$, то $f(a, b) = f(c, d)$,
- 2) $f(a, a) = C = \text{const} \neq 0$ для всех $a \in P$, $f(a, b) \neq 0$ для всех $a < b$.

Тогда $f \sim Ce + \zeta_{\leq}$ в алгебре $\text{Inc}_F(P, \leq)$. Значения функции x , такой что $x^{-1} * f * x = Ce + \zeta_{\leq}$, могут быть вычислены рекуррентно.

Доказательство. Пусть $a \leq b$, $\rho(a) = k$ и $\rho(b) - \rho(a) = n$. Первое условие, наложенное в теореме на функцию f , гарантирует, что уровневые числа ЧУМ $([a, b]_{\leq}, \leq)$ определены корректно, то есть $w_r(k, n)$ не зависят от конкретного выбора значений $a \leq b$, таких что $\rho(a) = k$, $\rho(b) - \rho(a) = n$.

Из условий, наложенных на f , следует, что определены $g(k, l) \in F$, такие что

- 1) $f(a, b) = g(k, l)$ для всех $a \leq b$, $\rho(a) = k$, $\rho(b) = l$,
- 2) $g(k, k) = C$ для любого $k \in \mathbb{Z}_\rho$,
- 3) $g(k, k+1) \neq 0$ для любых $k, k+1 \in \mathbb{Z}_\rho$.

Докажем, что существует функция $x \in \text{inc}_F(P, \leq)$, такая что $x^{-1} * f * x = Ce + \zeta_{\leq}$. Запишем это равенство в виде системы:

$$\sum_{a \leq z \leq b} f(a, z)x(z, b) = \sum_{a \leq z \leq b} x(a, z)(Ce + \zeta_{\leq})(z, b), \quad (2)$$

$$x(a, a) \neq 0 \text{ для всех } a \leq b.$$

Будем рассматривать (2) как систему уравнений и неравенств относительно неизвестных $x(a, b)$, где $a \leq b$. Докажем, что эта система имеет решение. Сначала уменьшим число неизвестных $x(a, b)$ в системе (2). Для этого будем искать $x(a, b)$, где $a \leq b$, $\rho(a) = k$, $\rho(b) = l$, в виде

$$x(a, b) = y(k, l - k). \quad (3)$$

Таким образом, мы считаем, что значения неизвестных $x(a, b)$ для всех $a \leq b$, где $\rho(a) = k$, $\rho(b) = l$, совпадают и задаются равенством (3).

Для $a = b$ условия (2) записываются в виде

$$f(a, a)x(a, a) = Cx(a, a), \quad x(a, a) \neq 0 \text{ для всех } a \in P.$$

Переписав их в обозначениях (3), получим

$$y(k, 0) \neq 0 \text{ для всех } k \in \mathbb{Z}_\rho. \quad (4)$$

Для всех $a < b$ первое условие в системе (2) записывается в виде

$$f(a, b)x(b, b) = x(a, a).$$

В обозначениях (4) получим

$$g(k, k+1)y(k+1, 0) = y(k, 0) \text{ для всех } k, k+1 \in \mathbb{Z}_\rho. \quad (5)$$

Из условий (4) и (5) следует, что для определения последовательности $(y(k, 0))_{k \in \mathbb{Z}_\rho}$ достаточно задать значение $y(k_0, 0) \neq 0$ для некоторого $k_0 \in \mathbb{Z}_\rho$. Все остальные члены последовательности будут определены равенствами (5), так как все $g(k, k+1)$ отличны от 0.

Предположим, что определены члены всех последовательностей

$$(y(k, 0))_{k \in \mathbb{Z}_\rho}, (y(k, 1))_{k \in \mathbb{Z}_\rho}, \dots, (y(k, m-2))_{k \in \mathbb{Z}_\rho}, \text{ где } m \geq 2.$$

Определим теперь все члены последовательности $(y(k, m-1))_{k \in \mathbb{Z}_\rho}$. Для этого рассмотрим все $a \leq b$, такие что $\rho(a) = k$, $\rho(b) = k+m$, $m \geq 2$. Для таких элементов a, b запишем первое уравнение системы (2) в виде

$$w_1(k, m)g(k, k+1)y(k+1, m-1) = y(k, m-1)w_{m-1}(k, m) - \sum_{r=k+2}^{m+k} w_{r-k}(k, m)g(k, r)y(r, k+m-r) \text{ для всех } k, k+1 \in \mathbb{Z}_\rho. \quad (6)$$

По индукционному предположению определена сумма в правой части равенства (6). Поэтому последовательность $(y(k, m-1))_{k \in \mathbb{Z}_\rho}$ определена равенством (6) и выбором $y(k_{m-1}, m-1)$ для некоторого $k_{m-1} \in \mathbb{Z}_\rho$, так как $w_1(m)g(k+1, k) \neq 0$ для всех $k, k+1 \in \mathbb{Z}_\rho$.

По индукции определены члены всех последовательностей $(y(k, m-1))_{k \in \mathbb{Z}_\rho}$, где $m \geq 0$. Поэтому определена функция $x \in \text{inc}_F(P, \leq)$, такая что $x^{-1} * f * x = Ce + \zeta_{<}$. $\square$

Условиям теоремы 4 удовлетворяют все ЧУМ $(P, \leq)$, такие что $|P| \leq 4$ (над любыми полями), а также классические ЧУМ $\text{Bul}(n)$ (над полями характеристики 0), $\text{Lin}(n, q)$ и $\text{Aff}(n, q)$.

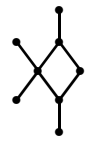


Рис. 2

Из теоремы 4 следует, что $\zeta_{<} \sim \zeta_{\leq}$ в соответствующих алгебрах. Существуют ЧУМ $(P, \leq)$, для которых функции $\zeta_{<}$ и $\zeta_{\leq}$ не сопряжены в алгебре $\text{Inc}_F(P, \leq)$.

Пример 2. Пусть $(P, \leq)$ — ЧУМ, диаграмма Хассе которого изображена на рис. 2, $\zeta_{<} \in \text{inc}_F(P, \leq)$. Непосредственное вычисление показывает, что для любого поля F функция $\zeta_{<}$ не сопряжена с функцией $\zeta_{\leq}$. $\square$

Следствие 5. Пусть ЧУМ $(P, \leq)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) все интервалы $(P, \leq)$ согласованы с ранговой функцией,
- 2) $w_1(k, n) \neq 0$ и $w_{n-1}(k, n) \neq 0$ в поле F для всех $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

а функции f, g алгебры $\text{Inc}_F(P, \leq)$ обладают свойствами

- 1) одна из функций f, g является диагонально $\leq$ -выпуклой,
- 2) если $a \leq b, c \leq d, \rho(a) = \rho(c), \rho(b) = \rho(d)$, то $f(a, b) = f(c, d), g(a, b) = g(c, d)$,
- 3) $f(a, b) \neq 0$ и $g(a, b) \neq 0$ для всех $a < b$.

Тогда утверждения, что $f \sim g$ в алгебре $\text{Inc}_F(P, \leq)$ и что $D(f) = D(g) = D$ и $P_a(f) = P_a(g)$ для всех $a \in D$, равносильны. $\square$

Следствие 6. Пусть $(P, \leq)$ — конечное ЧУМ, удовлетворяющее условиям теоремы 4. Тогда над любым полем F

$$\text{rank}_F m(\zeta_<, P, P) = \text{rank}_F m(\zeta_{<}, P, P). \quad \square$$

Существуют ЧУМ $(P, \leq)$, для которых утверждение следствия 6 неверно.

Пример 3. Пусть $(P, \leq)$ — ЧУМ, диаграмма Хассе которого изображена на рис. 3, $\zeta_{<} \in \text{inc}_F(P, \leq)$. Для любого поля F $\text{rank}_F m(\zeta_<, P, P) \neq \text{rank}_F m(\zeta_{<}, P, P)$. $\square$

Для некоторых ЧУМ теорема 4 справедлива над любым полем F . Примерами таких частично упорядоченных множеств являются ЧУМ $(P, \leq)$, все интервалы которых — цепи. Если $(P, \leq)$ — конечное ЧУМ, все интервалы которого — цепи, то его диаграмма Хассе является лесом.

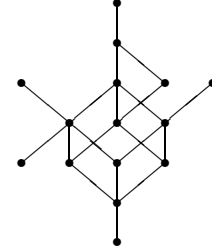


Рис. 3

Следствием теоремы 4 является следующий результат.

Теорема 5. Пусть $(P, \leq)$ — ЧУМ, все интервалы которого — цепи, и функция $f \in \text{inc}_F(P, \leq)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $f(a, a) = \text{const} = C$ для всех $a \in P$,
- 2) $f(a, b) \neq 0$ для всех $a < b$,
- 3) если $a \leq b, c \leq d, \rho(a) = \rho(c), \rho(b) = \rho(d)$, то $f(a, b) = f(c, d)$.

Тогда $f \sim Ce + \zeta_{<}$ в алгебре $\text{Inc}_F(P, \leq)$. $\square$

Следствие 7. Пусть $(P, \leq)$ — ЧУМ, все интервалы которого — цепи, и функции $f, g \in \text{inc}_F(P, \leq)$ обладают следующими свойствами:

- 1) одна из функций f, g является диагонально $\leq$ -выпуклой,
- 2) если $a \leq b, c \leq d, \rho(a) = \rho(c), \rho(b) = \rho(d)$, то $f(a, b) = f(c, d), g(a, b) = g(c, d)$,
- 3) $f(a, b) \neq 0$ и $g(a, b) \neq 0$ для всех $a < b$.

Тогда утверждения, что $f \sim g$ в алгебре $\text{Inc}_F(P, \leq)$ и что $D(g) = D(f) = D$ и $P_a(g) = P_a(f)$ для любого $a \in D$, равносильны. $\square$

Для некоторых ЧУМ первое условие, наложенное на функцию f в условиях теорем 4 и 5, можно опустить.

Пусть $(P, \leq)$ — ЧУМ, все интервалы которого — цепи, и выполнено одно из следующих условий:

- У1) для любого фиксированного $b \in P$ существует единственный элемент $a \in P$, такой что $a < b$,

У2) для любого фиксированного $a \in P$ существует единственный элемент $b \in P$, такой что $a \leq b$.

Теорема 6. Пусть $(P, \leq)$ — ЧУМ, все интервалы которого — цепи, и выполнено одно из условий У1 или У2, функция $f \in \text{inc}_F(P, \leq)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $f(a, a) = \text{const} = C$ для всех $a \in P$,
- 2) $f(a, b) \neq 0$ для всех $a \leq b$.

Тогда $f \sim Ce + \zeta_{\leq}$ в алгебре $\text{Inc}_F(P, \leq)$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4. Приведём его для условия У1.

Доказательство. Если $a = b$ и $a \leq b$, то формулы (2) примут вид

$$\begin{aligned} x(a, a) &\neq 0 \text{ для всех } a \in P, \\ f(a, b)x(b, b) &= x(a, a) \text{ для всех } a \leq b. \end{aligned}$$

Для определения последовательности $\{x(a, a)\}_{a \in P}$ достаточно задать значение $x(a_0, a_0)$ для некоторого $a_0 \in P$.

Предположим, что определены все члены «двойных» последовательностей

$$\{x(a, b)\}_{\rho(b) - \rho(a) = 1}, \dots, \{x(a, b)\}_{\rho(b) - \rho(a) = m-2}.$$

На множестве пар $M = \{(a, b) \mid \rho(b) - \rho(a) = m-1\}$ введём отношение ЧП $\leq$: $(a, b) \leq (c, d)$ тогда и только тогда, когда $a \leq c$ и $b \leq d$.

Определим теперь члены всех «двойных» последовательностей

$$\{x(a, b)\}_{\rho(b) - \rho(a) = m-1},$$

где b фиксировано. По условию У1, наложенному на множество P , b покрывает только один элемент. Значит, при фиксированном элементе b в системе уравнений (2) будет только одно уравнение

$$f(a, a')x(a', b) = x(a, b') - \sum_{a'' \leq a' \leq b} f(a, z)x(z, b),$$

где $a \leq a' \leq a''$ и $b' \leq b$ (при заданном b такие a, a', a'', b' определены единственным образом).

Сумма в правой части последнего равенства определена по индукционному предположению. Выражаем $x(a, b')$ через $x(a', b)$. Выбираем одну из этих переменных свободной. Заметим, что переменная $x(a', b)$ встречается только в одном уравнении (в силу условия У1, наложенного на множество P). $\square$

Следствие 8. Пусть $(P, \leq)$ — ЧУМ, все интервалы которого — цепи, и выполнено одно из условий У1 или У2, функции $f, g \in \text{inc}_F(P, \leq)$ обладают следующими свойствами:

- 1) одна из функций f, g является диагонально $\leq$ -выпуклой,
- 2) $f(a, b) \neq 0$ и $g(a, b) \neq 0$ для всех $a \leq b$.

Тогда утверждения, что $f \sim g$ в алгебре $\text{Inc}_F(P, \leq)$ и что $D(g) = D(f) = D$ и $P_a(g) = P_a(f)$ для любого $a \in D$, равносильны. $\square$

Для ЛУМ $(P, \leq)$ теорема 5 принимает следующий вид.

Теорема 7. Пусть $(P, \leq)$ — линейно упорядоченное множество, функция $f \in \text{inc}_F(P, \leq)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $f(a, a) = \text{const} = C$ для всех $a \in P$,
- 2) $f(a, b) \neq 0$ для всех $a < b$.

Тогда $f \sim Ce + \zeta_{<}$ в алгебре $\text{Inc}_F(P, \leq)$. $\square$

Следствие 9. Пусть $(P, \leq)$ — линейно упорядоченное множество и функции $f, g \in \text{inc}_F(P, \leq)$ обладают следующими свойствами:

- 1) одна из функций f, g является диагонально $\leq$ -выпуклой,
- 2) $f(a, b) \neq 0$ и $g(a, b) \neq 0$ для всех $a < b$.

Тогда утверждения, что $f \sim g$ в алгебре $\text{Inc}_F(P, \leq)$ и что $D(g) = D(f) = D$ и $P_a(g) = P_a(f)$ для любого $a \in D$, равносильны. $\square$

Литература

- [1] Айгнер М. Комбинаторная теория. — М.: Мир, 1987.
- [2] Дубиле П., Рота Дж.-К., Стенли Р. Об основах комбинаторной теории (VI): идея производящей функции // Перечислительные задачи комбинаторного анализа / под ред. Г. П. Гаврилова. — М.: Мир, 1979.
- [3] Маренич В. Е. Свойства отношения сопряжения функций инцидентности // Дискретная математика и её приложения (материалы VII Международного семинара, ч. 3). — М.: МГУ, 2001. — С. 384.
- [4] Рыбников К. А. Введение в комбинаторный анализ. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.
- [5] Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. — М.: Мир, 1990.
- [6] Spiegel E., O'Donnel C. J. Incidence Algebras. — New York, Basel, Hong Kong, 1997.

