Центральная замкнутость простых «странных» супералгебр Ли, расширенных над коммутативной алгеброй

А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

И. А. ПИНЧУК
Московский государственный областной университет

УДК 512.554

Ключевые слова: супералгебра Ли, универсальное центральное расширение, ядро универсального центрального расширения.

Аннотация

В работе изучаются центральные расширения супералгебр Ли $g(A)$, где $g = P(n-1)$ — простая супералгебра Ли одной из так называемых «странных» серий. Показывается, что универсальные центральные расширения таких супералгебр Ли являются тривиальными, т. е. изоморфными самим супералгебрам $g(A)$.

Abstract

A. V. Mikhalev, I. A. Pinchuk, The central closure of the simple «strange» Lie superalgebras extended over a commutative algebra, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 3, pp. 125—131.

In this work we study central extensions of Lie superalgebras $g(A)$, where $g = P(n-1)$ are simple Lie superalgebras from one of the so-called “strange” series. We show that universal central extensions of these Lie superalgebras ara trivial, i.e., they are isomorphic to the superalgebras $g(A)$.

Центральным расширением супералгебры Ли g называется пара (V, φ), состоящая из супералгебры Ли V и сюръективного гомоморфизма $\varphi\colon V \to g$, ядро которого лежит в центре супералгебры Ли V, а именно $[\operatorname{Ker}\varphi, V] = 0$. В этом случае определена короткая точная последовательность

$$0 \to I \to V \xrightarrow{\varphi} g \to 0,$$

где $I = \operatorname{Ker}\varphi$.

Центральное расширение (V, φ) супералгебры Ли g называется универсальным, если для любого центрального расширения (W, ψ) супералгебры Ли g существует единственный гомоморфизм $\nu\colon V \to W$, такой что $\psi \circ \nu = \varphi$.

Супералгебра Ли g называется центрально замкнутой, если она совпадает со своим универсальным центральным расширением, т. е. центральное расширение $\mathrm{Id}\colon g \to g$ является универсальным.

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 3, с. 125—131.

Известно много работ, в которых изучаются универсальные центральные расширения различных классов супералгебр Ли (см. [1—3, 5]). Во всех перечисленных работах рассматриваются универсальные центральные расширения супералгебр Ли $g(A) = g \otimes A$, где g — одна из базисных простых конечномерных супералгебр Ли, A — ассоциативная (для $g = \mathrm{sl}(m, n)$, см. [5]) или ассоциативная и коммутативная k-алгебра с 1 (для всех типов g, см. [1—3]), k — коммутативное и ассоциативное кольцо с 1. Доказывается, что для всех таких супералгебр Ли $g(A)$ существует нетривиальное универсальное центральное расширение, ядро такого расширения изоморфно k-фактор-модулю $\Omega^1_{A/k}/dA$ модуля A над k по подмодулю точных форм (если A коммутативная и ассоциативная алгебра) или второй группе $\mathrm{HC}_2(A)$ циклических гомологий алгебры A (если A не является коммутативной).

Базисные классические супералгебры Ли $g = g_0 \oplus g_1$ характеризуются следующими условиями:

1) g является простой супералгеброй Ли, т. е. в ней нет нетривиального $\mathbb{Z}_2$-градуированного идеала;
2) g_0 является редуктивной алгеброй Ли;
3) в g определена нетривиальная чётная суперсимметричная инвариантная билинейная форма.

Классификация всех базисных классических супералгебр Ли приведена в [4].

Однако среди простых конечномерных супералгебр Ли существуют две «странные» серии, которые не являются базисными классическими (см. [4]). Супералгебры Ли этих серий характеризуются тем, что любая чётная инвариантная билинейная форма, определённая на них, тождественно равна 0.

Данная работа посвящена изучению центральных расширений супералгебр Ли $g(A)$, где $g = P(n-1)$ $(n \geqslant 3)$ — супералгебра Ли из одной из этих «странных» серий (такое обозначение размерности супералгебры Ли g диктуется удобством дальнейших обозначений). Как и ранее, A — коммутативная и ассоциативная k-алгебра с 1 над коммутативным кольцом k с 1. Схема доказательства аналогична использованной в [2].

Супералгебра Ли $P(n-1)$ является подалгеброй супералгебры $\mathrm{sl}(n, n)$, элементы алгебры $P(n-1)$ представляются матрицами вида $\left(\begin{smallmatrix} S & R \\ T & -S^{\mathrm{t}} \end{smallmatrix}\right)$, где S, R и T — квадратные матрицы порядка n, $R^{\mathrm{t}} = R$, $T^{\mathrm{t}} + T = 0$. Тогда супералгебра Ли $g(A) = P(n-1, A)$ порождается следующими образующими:

$$s_{ij}(a) = E_{ij}(a) - E_{j+n,i+n}(a) \quad \text{при } 1 \leqslant i \neq j \leqslant n; \tag{1}$$

$$r_{ij}(a) = \begin{cases} E_{ij}(a) + E_{j-n,i+n}(a) & \text{при } 1 \leqslant i \leqslant n,\ n+1 \leqslant j \leqslant 2n,\ j \neq i+n, \\ E_{ij}(a) & \text{при } 1 \leqslant i \leqslant n,\ j = i+n; \end{cases} \tag{2}$$

$$t_{ij}(a) = \begin{cases} E_{ij}(a) - E_{j+n,i-n}(a) & \text{при } n+1 \leqslant i \leqslant 2n,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ j \neq i-n, \\ 0 & \text{при } n+1 \leqslant i \leqslant 2n,\ j = i-n. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $E_{ij}(a)$ обозначает матрицу размера $(2n \times 2n)$, в которой элемент в i-й строке и j-м столбце равен $a \in A$, остальные элементы равны 0. Эти образующие удовлетворяют следующим соотношениям:

I

$$[s_{ij}(a), s_{kl}(b)] = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq l,\ j \neq k, \\ s_{il}(ab), & \text{если } i \neq l,\ j = k, \\ -s_{kj}(ab), & \text{если } i = l,\ j \neq k. \end{cases}$$

II

$$1)\quad [s_{ij}(a), r_{kl}(b)] = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq k,\ j \neq l-n, \\ r_{il}(ab), & \text{если } j = k,\ j \neq l-n, \\ r_{i,k+n}(ab), & \text{если } j \neq k,\ j = l-n, \\ 2r_{i,i+n}(ab), & \text{если } i = k,\ j = l-n; \end{cases}$$

$$2)\quad [s_{ij}(a), t_{kl}(b)] = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq l,\ i \neq k-n, \\ -t_{kj}(ab), & \text{если } i = l,\ i \neq k-n, \\ -t_{j+n,l}(ab), & \text{если } i \neq l,\ i = k-n. \end{cases}$$

III

$$1)\quad [r_{ij}(a), r_{kl}(b)] = 0;$$

$$2)\quad [t_{ij}(a), t_{kl}(b)] = 0;$$

$$3)\quad [r_{ij}(a), t_{kl}(b)] = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq l,\ j \neq k, \\ s_{il}(ab), & \text{если } i \neq l,\ j = k, \\ -s_{j-n,k-n}(ab), & \text{если } i = l,\ j \neq k. \end{cases}$$

Обозначим через $\mathrm{st}_p(n-1, A)$ k-супералгебру Ли, порождённую образующими

$$S_{ij}(a) \quad \text{для } 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \tag{4}$$

$$R_{ij}(a) \quad \text{для } 1 \leqslant i \leqslant n,\ n+1 \leqslant j \leqslant 2n, \tag{5}$$

$$T_{ij}(a) \quad \text{для } n+1 \leqslant i \leqslant 2n,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ j \neq i-n \tag{6}$$

и следующими соотношениями:

I′

$$[S_{ij}(a), S_{kl}(b)] = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq l,\ j \neq k, \\ S_{il}(ab), & \text{если } i \neq l,\ j = k, \\ -S_{kj}(ab), & \text{если } i = l,\ j \neq k. \end{cases}$$

II′

$$1)\quad [S_{ij}(a),R_{kl}(b)]=\begin{cases}0, & \text{если } j\neq k,\ j\neq l-n,\\ R_{il}(ab), & \text{если } j=k,\ j\neq l-n,\\ R_{i,k+n}(ab), & \text{если } j\neq k,\ j=l-n,\\ 2R_{i,i+n}(ab), & \text{если } i=k,\ j=l-n;\end{cases}$$

$$2)\quad [S_{ij}(a),T_{kl}(b)]=\begin{cases}0, & \text{если } i\neq l,\ i\neq k-n,\\ -T_{kj}(ab), & \text{если } i=l,\ i\neq k-n,\\ -T_{j+n,l}(ab), & \text{если } i\neq l,\ i=k-n.\end{cases}$$

III′

$$1)\quad [R_{ij}(a),R_{kl}(b)]=0;$$
$$2)\quad [T_{ij}(a),T_{kl}(b)]=0;$$
$$3)\quad [R_{ij}(a),T_{kl}(b)]=\begin{cases}0, & \text{если } i\neq l,\ j\neq k,\\ S_{il}(ab), & \text{если } i\neq l,\ j=k,\\ -S_{j-n,k-n}(ab), & \text{если } i=l,\ j\neq k.\end{cases}$$

IV′

$$U_{ij}(\alpha a+\beta b)=\alpha U_{ij}(a)+\beta U_{ij}(b),$$

если $U_{ij}(a)$ — одна из образующих (4)—(6), $a,b\in A$, $\alpha,\beta\in k$.

Определим сюръективный гомоморфизм $\varphi\colon \mathrm{st}_p(n-1,A)\to P(n-1,A)$ условием

$$\varphi U_{ij}(a)=u_{ij}(a), \tag{7}$$

где $U_{ij}(a)$ — одна из образующих (4)—(6), $u_{ij}(a)$ — соответствующая ей образующая вида (1)—(3).

Теорема 1. *Если $n\geqslant 6$, то пара $(\mathrm{st}_p(n-1,A),\varphi)$, состоящая из супералгебры Ли $\mathrm{st}_p(n-1,A)$ и гомоморфизма φ, определённого условием* (7)*, является универсальным центральным расширением супералгебры Ли $P(n-1,A)$.*

Доказательство. Введём обозначения

$$H_{ij}(a,b)=\begin{cases}[S_{ij}(a),S_{ji}(b)], & \text{если } 1\leqslant i\neq j\leqslant n, \quad (8)\\ [R_{ij}(a),T_{ji}(b)], & \text{если } 1\leqslant i\leqslant n,\ n+1\leqslant j\leqslant 2n. \quad (9)\end{cases}$$

Из равенства (9) ясно, что

$$H_{i,i+n}(a,b)=0, \tag{10}$$

так как $T_{i+n,i}(b)=0$.

Обозначим через S, R, T, H k-подмодули в супералгебре Ли $\mathrm{st}_p(n-1,A)$, порождённые элементами (4), (5), (6) и H_{ij} соответственно. Тогда супералгебра

Ли $\mathrm{st}_p(n-1,A)$ является прямой суммой этих подмодулей:

$$\mathrm{st}_p(n-1,A) = S \oplus R \oplus T \oplus H.$$

Доказательство этого факта основано на использовании соотношений I′—III′, супертождества Якоби, а также на инъективности ограничения гомоморфизма φ на подмодули S, R, T. Далее, если $x = s + r + t + h \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, то $\varphi(x) = 0$ и $x = h$, т. е. $\mathrm{Ker}\,\varphi \subseteq H$. Более того, непосредственные вычисления показывают, что для любой образующей $U_{ij}(a)$ вида (4)—(6)

$$[U_{ij}(a), H_{kl}(b,c)] \in S + R + T,$$

откуда $[U_{ij}(a), x] = 0$ для всех $x \in \mathrm{Ker}\,\varphi$.

Для доказательства универсальности расширения $(\mathrm{st}_p(n-1,A), \varphi)$ рассмотрим любое центральное расширение (W, ψ) супералгебры Ли $P(n{-}1,A)$. Для построения гомоморфизма $\nu\colon \mathrm{st}_p(n-1,A) \to W$ определим $\omega_{ij}(a) = \psi^{-1}(u_{ij}(a)) + \mathrm{Ker}\,\psi$, где $u_{ij}(a)$ — одна из образующих (1)—(3), и зададим ν условием $\nu(U_{ij}(a)) = \omega_{ij}(a)$, где $U_{ij}(a)$ — одна из образующих (4)—(6). Корректность такого определения гомоморфизма ν основана на том, что $\omega_{ij}(a)$ не зависит от выбора прообраза элемента $u_{ij}(a)$ (это следует из возможности представить каждую образующую $u_{ij}(a)$ при $n \geqslant 6$ в виде коммутатора). Условие $\psi \circ \nu = \varphi$ проверяется непосредственно. Теорема 1 доказана.

Для описания ядра гомоморфизма φ необходимо исследовать свойства элементов $H_{ij}(a,b)$.

Лемма 2. *Элементы $H_{ij}(a,b)$ супералгебры Ли $\mathrm{st}_p(n-1,A)$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) *отображение $(a,b) \mapsto H_{ij}(a,b)$ является k-билинейным,*
2) $H_{ij}(ab,c) = H_{ik}(a,bc) + \varepsilon H_{kj}(b,ac)$,
3) $H_{ij}(1,a) = \varepsilon H_{ji}(1,a)$,
4) $H_{ji}(1,a) = \varepsilon H_{ij}(a,1)$,

где множитель ε равен ± 1, выбор ε зависит от определений (8) *и* (9) *элементов $H_{ij}(a,b)$.*

Доказательство. Перечисленные условия непосредственно получаются из определений элементов $H_{ij}(a,b)$ и соотношений I′—IV′. Так, например, для доказательства условия 2) запишем $H_{ij}(ab,c)$ всеми возможными способами:

$$\begin{aligned}
H_{ij}(ab,c) &= [S_{ij}(ab), S_{ji}(c)] = [[S_{ik}(a), S_{kj}(b)], S_{ji}(c)] = \\
&= [S_{ik}(a), [S_{kj}(b), S_{ji}(c)]] + [[S_{ik}(a), S_{ji}(c)], S_{kj}(b)] = \\
&= [S_{ik}(a), S_{ki}(bc)] - [S_{jk}(ac), S_{kj}(b)] = H_{ik}(a,bc) + H_{kj}(b,ac); \\
H_{ij}(ab,c) &= [S_{ij}(ab), S_{ji}(c)] = [[R_{ik}(a), T_{kj}(b)], S_{ji}(c)] = \\
&= [R_{ik}(a), [T_{kj}(b), S_{ji}(c)]] + [[R_{ik}(a), S_{ji}(c)], T_{kj}(b)] = \\
&= [R_{ik}(a), T_{ki}(bc)] - [R_{jk}(ac), T_{kj}(b)] = H_{ik}(a,bc) - H_{kj}(b,ac);
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H_{ij}(ab,c) &= [R_{ij}(ab), T_{ji}(c)] = [[S_{ik}(a), R_{kj}(b)], T_{ji}(c)] = \\
&= [S_{ik}(a), [R_{kj}(b), T_{ji}(c)]] - [[S_{ik}(a), T_{ji}(c)], R_{kj}(b)] = \\
&= [S_{ik}(a), S_{ki}(bc)] + [T_{jk}(ac), R_{kj}(b)] = H_{ik}(a, bc) + H_{kj}(b, ac).
\end{aligned}
$$

Объединяя все полученные результаты, получаем условие 2). При доказательстве условий 3) и 4) используется также и ранее доказанное условие 2). Лемма доказана.

Обозначим

$$h(a,b) = H_{1j}(a,b) - H_{1j}(1,ab). \tag{11}$$

Из леммы 2 следует, что элементы $h(a,b)$ не зависят от выбора индекса j. Действительно,

$$
\begin{aligned}
&H_{1j}(a,b) - H_{1j}(1,ab) = \\
&\quad = H_{1k}(a,b) + \varepsilon H_{kj}(1,ab) - (H_{1k}(1,ab) + \varepsilon H_{kj}(1,ab)) = \\
&\quad = H_{1k}(a,b) - H_{1k}(1,ab).
\end{aligned}
$$

Лемма 3. *Для элементов $h(a,b)$ выполняются следующие соотношения:*

1) *отображение $(a,b) \mapsto h(a,b)$ является k-билинейным,*
2) $h(ab,c) = h(a,bc) + h(b,ac)$,
3) $h(a,b) = -h(b,a)$,
4) $h(1,a) = 0$.

Доказательство леммы 3 основано на определении элементов $h(a,b)$ и утверждениях леммы 2.

Теорема 4. *Гомоморфизм $\varphi\colon \mathrm{st}_p(n-1,A) \to P(n-1,A)$ является изоморфизмом, т. е. последовательность*

$$0 \to \mathrm{st}_p(n-1,A) \xrightarrow{\varphi} P(n-1,A) \to 0$$

точна.

Доказательство. Достаточно показать, что $\operatorname{Ker}\varphi = 0$. По теореме 1 любой элемент $x \in \operatorname{Ker}\varphi$ может быть выражен через некоторые $H_{ij}(a,b)$. Запишем $H_{ij}(a,b)$ в виде

$$
\begin{aligned}
H_{ij}(a,b) &= H_{ij}(a \cdot 1, b) = H_{i1}(a,b) + \varepsilon H_{1j}(1,ab) = \\
&= \varepsilon H_{1i}(a,b) - \varepsilon H_{1i}(1,ab) + \varepsilon H_{1i}(1,ab) + \varepsilon H_{1j}(1,ab) = \\
&= h(a',b') + H_{1i}(1,c_i) + H_{1j}(1,c_j).
\end{aligned}
$$

Тогда

$$x = \sum_i h(a_i,b_i) + \sum_{j\geqslant 2} H_{1j}(1,c_j).$$

Но $\varphi(x) = 0$, откуда $c_j = 0$ для всех $j \geqslant 2$, и

$$x = \sum_i h(a_i,b_i).$$

Вместе с тем

$$h(a,b) = H_{1j}(a,b) - H_{1j}(1,ab) = H_{1,n+1}(a,b) - H_{1,n+1}(1,ab) = 0$$

по равенству (10). Отсюда для всех $x \in \operatorname{Ker}\varphi$ мы имеем $x = 0$, и φ — изоморфизм. Теорема доказана. $\square$

Литература

[1] Михалёв А. В., Пинчук И. А. Универсальное центральное расширение одной особой супералгебры Ли с невырожденной формой Киллинга // Универсальная алгебра и её приложения. — Волгоград, 2000. — С. 201—221.

[2] Михалёв А. В., Пинчук И. А. Универсальные центральные расширения супералгебр Ли // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 2002. — Вып. 22. — С. 261—282.

[3] Iohara K., Kogti Y. Central extensions of Lie superalgebras // Comment. Math. Helv. — 2001. — Vol. 76. — P. 110—154.

[4] Kac V. G. Lie superalgebras // Adv. Math. — 1977. — Vol. 26, no. 1. — P. 8—96.

[5] Mikhalev A. V., Pinchuk I. A. Universal central extensions of the matrix Lie superalgebras sl(m,n,A) // Contemp. Math. — 2000. — Vol. 264. — P. 111—125.