Изопериметрические функции и вложения групп

А. Н. ПЛАТОНОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: a.platonov@rambler.ru

УДК 512.54.05

Ключевые слова: группа, вложение, изопериметрическая функция, диаграмма.

Аннотация

Основным результатом данной работы является доказательство того, что вложение групп «почти» сохраняет изопериметрические функции. В частности, все группы с известными изопериметрическими функциями вложимы в 2-порождённую группу с сохранением класса эквивалентности изопериметрической функции.

Abstract

A. N. Platonov, Isoperimetric functions and embeddings of groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 3, pp. 165—173.

In this article, we show that the embedding of groups almost preserves isoperimetric functions. More precisely, if G is a known isoperimetric function group, then there exists an embedding of G into a two-generated group H such that the isoperimetric functions of the groups G and H are equivalent.

Введение

В [6] Громов ввёл понятие изопериметрической функции конечно-определённой группы, позволяющей измерить сложность проблемы равенства слов в группе. Минимальная изопериметрическая функция получила название функции Дэна. Пусть группа G имеет копредставление:

$$G = G(P), \quad P = \langle a_1, \dots, a_m \mid r_1, \dots, r_n \rangle. \tag{1}$$

Пусть $w = 1$ в группе G, тогда по лемме ван Кампена [1] существует диаграмма Δ над P с меткой граничного цикла, равной w, и с минимальным числом 2-клеток. Это число 2-клеток назовём длиной вывода слова w и обозначим $\mathrm{Area}_P(w)$. Тогда будем иметь в свободной группе F_m, свободно порождённой элементами $a_1, \dots, a_m$, равенство вида

$$w = \prod_{i=1}^{k} u_i r_i^{\varepsilon_i} u_i^{-1},$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 3, с. 165—173.

где $u_i \in F_m$, $\varepsilon_i = \pm 1$, k — число, минимальное по всем разложениям такого вида и равное $\mathrm{Area}_P(w)$ (см. [1]).

Пусть $\ell(w)$ обозначает длину слова w в свободной группе F_m. Определим $D_P(n)$ как максимум $\mathrm{Area}_P(w)$ по всем словам w, равным 1 в группе $G = G(P)$, для которых $\ell(w) \leqslant n$.

Обозначим функцию Дэна группы G, заданной копредставлением P, как функцию натурального аргумента n через $D_P(n)$. Функция Дэна $D_P(n)$, как видно из определения, зависит от копредставления P группы G. При переходе к другому копредставлению Q группы G получается функция Дэна $D_Q(n)$, эквивалентная $D_P(n)$ в смысле следующего определения [5].

Определение 1. Пусть f, g — функции натурального аргумента n.

а) Скажем, что асимптотически $f \lesssim g$, если существуют такие положительные константы A, B, C, D, что для любого натурального n

$$f(n) \leqslant Ag(Bn + C) + Dn.$$

б) Скажем, что асимптотически $f \sim g$, если $f \lesssim g$ и $g \lesssim f$.

Под функцией Дэна конечно-определённой группы G мы будем понимать класс эквивалентности минимальных изопериметрических функций по всем конечным представлениям P группы G, введём обозначение $D_G(n)$, n — натуральное число.

Нам также понадобится следующее понятие, заимствованное из [4, 7].

Определение 2. Пусть f — функция натурального аргумента n. Определим $\overline{f}(n)$ для любого натурального n как максимум сумм вида $\sum\limits_{i=1}^{m} f(n_i)$ по всем разложениям числа $n = \sum\limits_{i=1}^{m} n_i$. Будем говорить, что функция $\overline{f}$ — супераддитивное замыкание функции f.

Вопрос об эквивалентности в смысле определения 1 функции Дэна конечно-определённой группы своему супераддитивному замыканию является важным (см. [7]) и остаётся до сих пор открытым. Тем не менее в [7] получен следующий результат.

Лемма 1 ([7]). *Пусть G_1 и G_2 — нетривиальные группы и H — свободное произведение групп G_1 и G_2. Тогда $D_H(n) \sim \overline{D_H}(n)$.*

Из леммы 1 и результатов [4] нетрудно вывести следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть G — группа с функцией Дэна, равной f, $H = G * \mathbb{Z}$ — свободное произведение групп G и $\mathbb{Z}$. Пусть функция Дэна группы H равна g. Тогда*

$$g(n) \sim \overline{f}(n).$$

Основным результатом статьи является теорема 1.

Теорема 1. *Любую конечно-определённую группу G можно вложить в конечно-определённую группу H с двумя порождающими так, что соответствующие* *функции Дэна $g(n)$ и $h(n)$ связаны соотношением $h(n) \sim \overline{g}(n)$. Более того, вложение обладает следующим свойством: для любой нормальной подгруппы N группы G существует такая нормальная подгруппа L группы H, что $N = L \cap G$.*

Вложение

Приведём основные понятия и леммы из [3], которые связаны с построением вложения групп.

Пусть $F = F(a, b)$ — свободная группа с базисом $\{a, b\}$. Зададим слова в алфавите $\{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$ по формуле

$$A_i \equiv a^{100} b^i a^{101} b^i \dots a^{199} b^i, \quad i = 1, 2, \dots \tag{2}$$

($\equiv$ — побуквенное равенство слов).

Лемма 3 ([3]).

1. *Пусть $A' \equiv UV'$ и $A'' \equiv UV''$ — некоторые несовпадающие циклические перестановки слов $A_i^{\pm 1}, A_j^{\pm 1}$ (т. е. U — общее начало). Тогда*

$$\ell(U) < \frac{1}{30} \min(\ell(A_i), \ell(A_j)).$$

2. *Слова $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ свободно порождают подгруппу $H = \mathrm{gp}\{A_i,\ i = 1, 2, \dots\}$.*

Пусть v — некоторое слово в алфавите $\{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$, которое принадлежит H, тогда имеем разложение v в виде

$$v(a, b) = A_{i_1}^{\eta_1} \dots A_{i_k}^{\eta_k},$$

где $\eta_i \in \mathbb{Z}$ для $i = \overline{1, k}$. Назовём тогда v *H-словом*, а разложение $A_{i_1}^{\eta_1} \dots A_{i_k}^{\eta_k}$ — *целым* разложением. Естественным образом в диаграммах Ван Кампена определяются *целые разложения* и *целые* вершины путей, метки которых являются H-словами, *H-фрагменты* и *целые разрезы* H-фрагментов H-слов, *H-сегменты* (см. [3]).

Для конечно-определённой группы G с копредставлением P (1) рассмотрим отображение $\alpha\colon a_i^{\varepsilon} \to A_i^{\varepsilon}$, где $\varepsilon = \pm 1$ и $i = \overline{1, m}$. Отображение α естественным образом продолжается на слова в алфавите $\{a_1^{\pm 1}, \dots, a_m^{\pm 1}\}$ со значениями в группе F. Положим $R_i = \alpha(r_i)$, $i = \overline{1, n}$. Обозначим через N_m нормальное замыкание множества $\{R_i\}_{i=1}^{n}$ в группе $H_m = \mathrm{gp}(A_1, \dots, A_m)$, через L_m — нормальное замыкание множества $\{R_i\}_{i=1}^{n}$ в группе $F = F(a, b)$, через T_m — множество всех H-слов из F, циклически приведённых как элементы группы H_m.

Далее нам понадобятся некоторые обозначения. А именно, через $\ell_F(w)$ обозначим свободную длину слова w из F, через $\ell_H(u)$ обозначим свободную длину слова u из H_m в порождающих группы H_m. Используя технику нильсеновских преобразований [1], нетрудно получить следующую известную лемму.

Лемма 4. *Пусть F — свободная группа ранга 2, H — конечно-порождённая подгруппа в группе F. Для любого слова $w \in H$ обозначим через $\ell_H(w)$ длину слова w в группе H. Тогда существуют такие положительные константы C_1 и C_2, что для любого слова $w \in H$ верно*

$$C_1\ell_H(w) \leqslant \ell_F(w) \leqslant C_2\ell_H(w).$$

Теперь мы можем сформулировать лемму, доказанную в [3].

Лемма 5 ([3]). *Справедливы следующие утверждения:*

1) $L_m \cap H_m = N_m$,
2) *отображение α задаёт вложение группы H_m/N_m в группу F/L_m.*

Диаграммы

Согласно известной лемме ван Кампена [2] процесс вывода следствий из определяющих соотношений можно проиллюстрировать геометрически с помощью плоских диаграмм ван Кампена. Мы будем иметь дело с диаграммами над группами $G = H_m/N_m$ и F/L_m, полагая, что группа F/L_m задаётся копредставлением Q:

$$F/L_m = F/L_m(Q), \quad Q = \langle a, b \mid R_1, \ldots, R_n \rangle. \tag{3}$$

Диаграммы над группой F/L_m будут двух типов: Q-диаграммы, метки контуров которых принадлежат соотношениям копредставления Q, и T_m-диаграммы, метки контуров которых принадлежат T_m. Напомним (см. [3]), что для любого $w = w(a, b)$, принадлежащего L_m существует плоская T_m-диаграмма Δ с меткой граничного цикла, графически равной w, а метка контура каждой 2-клетки есть слово из T_m. Контуры 2-клеток мы будем рассматривать вместе с целыми вершинами, осуществляя, если нужно, необходимые сокращения рёбер, смежных с целой вершиной (см. рис. 1). Будем обозначать через $\partial'\Pi$ приведённый контур 2-клетки Π, через $\partial'\Delta$ — приведённый контур диаграммы Δ, через $\phi(q)$ — метку пути q, где ϕ — размечающая функция на рёбрах со значениями в алфавите $\{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$, через $|q|_F$ — комбинаторную длину пути q. Если метка $\phi(q)$ пути q является H-словом, то обозначим через $|q|_H$ длину метки $\phi(q)$ пути q в группе H_m.

Две клетки Π и Π' назовём совместимыми в Δ, если на их контурах можно выбрать целые вершины o и o' соответственно ($o \neq o'$ в случае $\Pi = \Pi'$), путь x, их соединяющий, с меткой $\phi(x) = 1$ в F. В случае совместимых 2-клеток $\Pi \neq \Pi'$ поддиаграмму с контуром $qxq'x^{-1}$ (вершинами отсчёта граничных контуров 2-клеток Π и Π' считаем o и o' соответственно) можно вырезать из Δ и вклеить одну клетку; следовательно, в T_m-диаграммах с минимальным числом клеток не может быть пар совместимых клеток, а также самосовместимых 2-клеток ($\Pi = \Pi'$) [3]. Аналогично можно определить понятие совместимости 2-клетки Π граничному циклу диаграммы Δ.

В [3, лемма 3] было доказано, что T_m-диаграмма Δ без пар совместимых клеток как карта удовлетворяет условию малых сокращений $C'(\lambda)$ (см. [1, глава 5]) с любым параметром $\lambda > \frac{1}{7}$, в частности с параметром $\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) = \frac{13}{84}$. Положим далее $\lambda = \frac{13}{84}$, $\varepsilon = 1 - 3\lambda = \frac{45}{84}$, $\delta = 1 - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{2}{15}$. Используя известную лемму Гриндлингера (см. [1, глава 5]) для групп с условием малого сокращения, получаем основную лемму о T_m-диаграммах над группой F/L_m.

Лемма 6 ([3], [1, глава 5]). *Пусть Δ — T_m-диаграмма без пар совместимых клеток. Тогда существует 2-клетка Π с граничным контуром $\partial\Pi$, внешняя дуга q' из $\partial'\Pi \cap \partial'\Delta$, дуга q'' из $\partial'\Pi$, дополняющая дугу q', со следующими условиями:*

$$|q'|_F > \varepsilon|\partial'\Pi|_F, \quad |q''|_F < (1-\varepsilon)|\partial'\Pi|_F, \quad |q'|_F - |q''|_F > \delta|q'|_F.$$

Более того, 2-клетка Π совместима с граничным контуром диаграммы Δ.

Диаграмма Δ над группой G имеет метку граничного цикла, являющуюся H-словом, следовательно, можно говорить о целых вершинах и сегментах в контуре Δ (см. рис. 2).

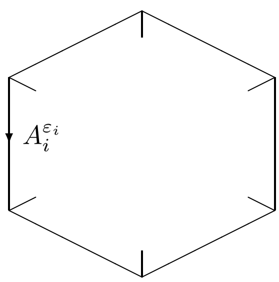

Рис. 1

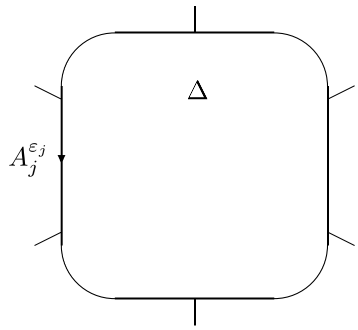

Рис. 2

Для диаграмм над группой G, заданной копредставлением (1), через ψ обозначим размечающую функцию на рёбрах со значениями в алфавите $\{a_1^{\pm 1}, \ldots, a_m^{\pm 1}\}$, через $\psi(q)$ — метку пути q, через $|q|_G$ — комбинаторную длину пути q.

Изопериметрические функции

В этом разделе будет установлена связь между изопериметрическими функциями групп G и F/L_m. Используя лемму 6 о строении диаграмм над группой F/L_m, докажем следующую лемму.

Лемма 7. *Справедливо неравенство*

$$D_Q(n) \leqslant \overline{D_P}(2C_2\delta^{-1}n),$$

где C_2 — константа из леммы 4, δ — константа, определённая выше.

Доказательство. Индукция по n.

База индукции: $n = 0$. Утверждение очевидно.

Предположение индукции: для любого $k < n$ верно следующее:

$$D_Q(k) \leqslant \overline{D_P}(2C_2\delta^{-1}k).$$

Пусть $w = 1$ в группе F/L_m, $\ell_F(w) = n$. По лемме ван Кампена [2] существует дисковая T_m-диаграмма Δ с меткой граничного контура, равной графически w и с минимальным числом 2-клеток. По лемме 6 существует 2-клетка Π с внешней дугой q' из $\partial'\Pi \cap \partial\Delta$, такой что $|q'|_F > \varepsilon|\partial'\Pi|_F$. Обозначим через q'' дугу клетки Π, дополняющую дугу q' до контура клетки Π, через o_1 — вершину, от которой читается слово w как метка граничного цикла диаграммы Δ, через o_2 — вершину, с которой начинается дуга q', через u — путь в граничном цикле Δ, соединяющий вершины o_1 и o_2. Далее проведём преобразование T_m-диаграммы Δ, отделяющее 2-клетку Π (см. [2]) путём обхода граничного контура Δ вдоль контура Π, и получим две T_m-диаграммы (Π и Δ') над группой F/L_m, где вершина o_3 пути $\partial\Delta'$ есть копия вершины o_2, путь u', который является подпутём пути $\partial\Delta'$, есть копия пути u, дуга q''' пути $\partial\Delta'$ есть копия дуги q' и путь q''' в граничном цикле Δ' соединяет вершины o_1 и o_3 (см. рис. 3 и 4).

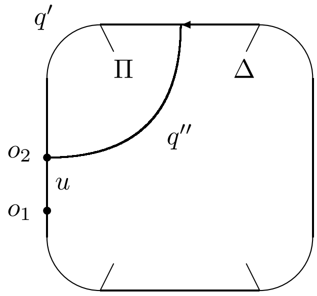

Рис. 3

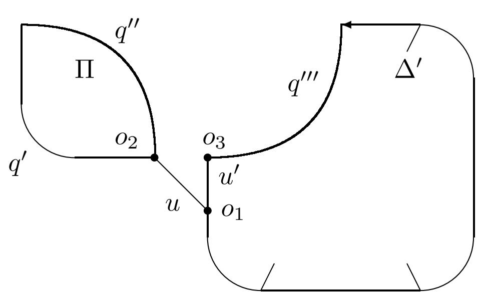

Рис. 4

Пусть $|q'|_F = k_1$ для некоторого натурального k_1. По лемме 6 получим, что $|q'''|_F = |q''|_F < (1-\delta)|q'|_F$ и $|\partial'\Delta'|_F < n-\delta k_1$. Используя лемму 4, будем иметь $|\partial'\Pi|_H \leqslant 2C_2k_1$. Так как клетка Π по определению склеивается из совместимых 2-клеток над Q, то получим неравенство

$$\mathrm{Area}_Q(\phi(\partial\Pi)) \leqslant D_P(|\partial'\Pi|_H) \leqslant D_P(2C_2k_1).$$

К контуру диаграммы Δ' можно применить индуктивную гипотезу, так как $|\partial'\Delta'|_F < n - \delta k_1 < n$. Получим следующее неравенство:

$$\mathrm{Area}_Q(\phi(\partial'\Delta')) \leqslant \overline{D_P}(2C_2\delta^{-1}(n-\delta k_1)) = \overline{D_P}(2C_2\delta^{-1}n - 2C_2k_1).$$

В итоге будем иметь следующую цепь неравенств:

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}_Q(w) &\leqslant \mathrm{Area}_Q(\phi(\partial\Pi)) + \mathrm{Area}_Q(\phi(\partial\Delta')) \leqslant\\ &\leqslant D_P(2C_2k_1) + \overline{D_P}(2C_2\delta^{-1}n - 2C_2k_1) \leqslant\\ &\leqslant \overline{D_P}(2C_2k_1) + \overline{D_P}(2C_2\delta^{-1}n - 2C_2k_1) \leqslant \overline{D_P}(2C_2\delta^{-1}n).\end{aligned}$$

Следовательно, индуктивная гипотеза доказана. □

Напомним, что группы G и F/L_m задаются копредставлениями (1) и (3) соответственно. Следующая лемма показывает, что если метка контура Q-диаграммы M является H-словом, то M с помощью отображения α можно превратить в P-диаграмму M' с условиями $\mathrm{Area}_P(M') = \mathrm{Area}_Q(M)$ и $\alpha(\psi(\partial M')) = \phi(\partial M)$ в группе F.

Лемма 8. *Справедливо неравенство*

$$D_P(n) \leqslant D_Q(C_2n),$$

где C_2 — константа из леммы 4.

Доказательство. Пусть $w = 1$ в группе G, $\ell_H(w) = n$ и в силу леммы 4 $\ell_F(w) \leqslant C_2n$. Для доказательства утверждения леммы 8 достаточно доказать, что если любую минимальную диаграмму K над P превратить с помощью отображения α в диаграмму K' над Q, то полученная диаграмма K' будет минимальной над Q. Это утверждение будет следовать из того, что если метка граничного цикла Q-диаграммы M есть H-слово, то M можно преобразовать в диаграмму M' над группой G, число 2-клеток которой равно числу 2-клеток в M и $\phi(\partial M) = \alpha(\psi(\partial M'))$ в группе F. Докажем последнее утверждение индукцией по числу 2-клеток в диаграмме M над Q. Для диаграммы M над копредставлением S, где $S = P$ или $S = Q$, обозначим через $\mathrm{Area}_S(M)$ число 2-клеток в M. Также будем обозначать через $\mathrm{Area}_{T_m}(M)$ число 2-клеток в T_m-диаграмме M.

База индукции. Пусть M — дисковая диаграмма над Q, $\phi(\partial M)$ — H-слово, $\mathrm{Area}_Q(M) = 0$. Тогда M можно преобразовать в P-диаграмму M' так, что $\phi(\partial M) = \alpha(\psi(\partial M'))$ в группе F и $\mathrm{Area}_Q(M) = \mathrm{Area}_P(M')$. Доказательство очевидно.

Предположение индукции. Пусть M — дисковая диаграмма над Q, $\phi(\partial M)$ — H-слово, $\mathrm{Area}_Q(M) < k$. Тогда M можно преобразовать в P-диаграмму M' так, что $\phi(\partial M) = \alpha(\psi(\partial M'))$ в группе F и $\mathrm{Area}_Q(M) = \mathrm{Area}_P(M')$.

Пусть M — дисковая диаграмма над Q, $\phi(\partial M)$ — H-слово, и пусть $\mathrm{Area}_Q(M) = k$. Докажем, что M можно преобразовать в P-диаграмму M' так, что $\phi(\partial M) = \alpha(\psi(\partial M'))$ в группе F и $\mathrm{Area}_Q(M) = \mathrm{Area}_P(M')$. Так как по условию $\mathrm{Area}_Q(M) = k$, то пусть $\Pi_1, \ldots, \Pi_k$ — 2-клетки в M. Рассмотрим T_m-диаграмму N, полученную из M объединением пар совместимых 2-клеток в одну. Пусть $\mathrm{Area}_{T_m}(N) = r$ и множество 2-клеток T_m-диаграммы N состоит из множества $\Pi'_1, \ldots, \Pi'_r$, где каждой Π'_i соответствует некоторое подмножество N'_i, $i = 1, \ldots, r$ множества 2-клеток $\Pi_1, \ldots, \Pi_k$, причём $N'_i \cap N'_j = \varnothing$, если $i \neq j$. Следовательно, рассматривая Π'_i как Q-диаграмму, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{r}\mathrm{Area}_Q(Pi_i')=\sum_{i=1}^{r}|N_i'|=\mathrm{Area}_Q(M)=k.$$

По определению совместимости 2-клеток в T_m-диаграммах путь, соединяющий пару совместимых 2-клеток, имеет концевыми вершинами целые вершины граничных контуров совместимых 2-клеток. Следовательно, каждую клетку Π_i', $i=1,\ldots,r$, можно преобразовать в диаграмму L_i' над копредставлением P так, что $\phi(\partial\Pi_i')=\alpha(\psi(\partial L_i'))$ в группе F и $\mathrm{Area}_Q(\Pi_i')=\mathrm{Area}_P(L_i')$.

Для диаграммы N справедливы условия леммы 6. Следовательно, существует 2-клетка Π', совместимая с граничным контуром диаграммы N при помощи пути x с меткой $\phi(x)=1$ в группе F.

Далее проведём преобразование диаграммы N, отделяющее клетку Π' от диаграммы N путём обхода граничного контура N вдоль пути x и граничного контура Π'. Пусть x_0 и x_1 — концы пути x, петля s — граничный контур Π', начинающийся в x_0, петля t — граничный контур T_m-диаграммы N', полученной из диаграммы N отделением клетки Π'. Рассмотрим T_m-диаграмму N'', заданную циклом $xsx^{-1}t$, для которой имеем $\phi(\partial N'')=\phi(\partial M)$ в группе F. В силу условия совместимости клетки Π' и ∂N получаем, что метка пути s есть H-слово, преобразуем клетку Π' в P-диаграмму L' с условиями $\mathrm{Area}_Q(\Pi')=\mathrm{Area}_P(L')$ и $\phi(\partial\Pi')=\alpha(\psi(\partial L'))$ в группе F. Рассмотрим T_m-диаграмму N' как диаграмму над копредставлением Q и получим следующее неравенство:

$$\mathrm{Area}_Q(N')=\mathrm{Area}_Q(M)-\mathrm{Area}_Q(\Pi')=\mathrm{Area}_Q(M)-\mathrm{Area}_P(L')<k.$$

Последнее соотношение позволяет применить предположение индукции к диаграмме N' над копредставлением Q и заключить, что существует преобразование диаграммы N' в P-диаграмму O со следующими условиями: $\mathrm{Area}_Q(N')=\mathrm{Area}_P(O)$ и $\phi(\partial N')=\alpha(\psi(\partial O))$ в группе F. Путь x в диаграмме N' можно считать имеющим метку, графически равную 1, и преобразовать в путь y над P со свойством, что $\psi(y)$ графически равна 1.

Положим $M'=L'\cup y\cup O$ — диаграмма над копредставлением P со свойством $\alpha(\psi(\partial M'))=\phi(\partial M)$ в группе F и с условием

$$\mathrm{Area}_P(M')=\mathrm{Area}_P(L')+\mathrm{Area}_P(O)=\mathrm{Area}_Q(\Pi')+\mathrm{Area}_Q(N')=\mathrm{Area}_Q(M).$$

Индуктивная гипотеза доказана.

Пусть M — диаграмма минимального вывода над копредставлением Q для слова w. По доказанному индуктивному утверждению преобразуем M в диаграмму M' над копредставлением P со следующими свойствами: $\phi(\partial M)=\alpha(\psi(\partial M'))$ в группе F и $\mathrm{Area}_Q(M)=\mathrm{Area}_P(M')$. Тогда будет верным неравенство $\mathrm{Area}_P(w)\leqslant\mathrm{Area}_Q(w)$. Обратное неравенство будет справедливым потому, что любую диаграмму K над P можно преобразовать в диаграмму K' над Q со следующими условиями: $\mathrm{Area}_P(K)=\mathrm{Area}_Q(K')$ и $\phi(\partial K')=\alpha(\psi(\partial K))$ в группе F. Отсюда и из леммы 4 вытекает утверждение леммы. □

Утверждение следующей леммы усиливает утверждение леммы 8.

Лемма 9. *Справедливо неравенство*

$$D_Q(n) \gtrsim \overline{D_P}(n).$$

Доказательство. Пусть даны группы G, F, L_m, N_m (см. определения выше), рассмотрим подгруппу $H_{m+1} = \mathrm{gp}\{A_1, \ldots, A_{m+1}\}$ группы F, нормальные подгруппы $N_{m+1} = N_m^{H_{m+1}}$ и $L_{m+1} = N_{m+1}^F$. Выведем следующее соотношение из определения L_{m+1}:

$$L_{m+1} = N_{m+1}^F = N_m^{H_{m+1}{}^F} = N_m^{H_{m+1}F} = N_m^F = L_m,$$

а также заметим, что группа $G' = H_{m+1}/N_{m+1}$ изоморфна группе $G * \mathbb{Z}$. Следовательно, по лемме 8 получим, что $D_{F/L_m}(n) \gtrsim D_{G'}(n)$, а по лемме 2 получим, что $D_{G'}(n) \gtrsim \overline{D_G}(n)$. Следовательно, $D_{F/L_m}(n) \gtrsim \overline{D_G}(n)$. □

Доказательство теоремы 1. Утверждение о соотношении функций Дэна групп H и G следует из лемм 7 и 9. Свойство нормальных подгрупп, упомянутое в формулировке теоремы 1, доказано в [3]. □

Автор выражает свою признательность А. Ю. Ольшанскому за постановку задачи, постоянное внимание и замечания к работе.

Литература

[1] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. — М.: Мир, 1980.

[2] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. — М.: Наука, 1989.

[3] Ольшанский А. Ю. SQ-универсальность гиперболических групп // Мат. сб. — 1995. — Т. 186, № 8. — С. 119—132.

[4] Brick S. G. Dehn functions and products of groups // Trans. Amer. Math. Soc. — 1993. — Vol. 335, no. 1. — P. 369—384.

[5] Gersten S. M. Isoperimetric and isodiametric functions of finite presentations // Geometric Group Theory. Vol. 1. — London Math. Soc. Lecture Note Ser. Vol. 181. — 1993. — P. 79—96.

[6] Gromov M. Hyperbolic groups // Essays in Group Theory. — Springer, 1987. — P. 75—263.

[7] Guba V. S., Sapir M. V. On Dehn functions of free products of groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 127, no. 7. — P. 1885—1891.