Парный анализ инволютивных делений*

А. С. СЕМЁНОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: semyonov1980@mail.ru

УДК 519.61

Ключевые слова: инволютивные деления, аксиома фильтрации, парность, непрерывность, конструктивность.

Аннотация

Основной целью работы является описание нового подхода к изучению инволютивных делений при помощи свойства парности. В статье представлена простая и интуитивно понятная характеризация деления Жане и показана его глубокая взаимосвязь с Lex-порядком на мономах. Описан метод построения аналогов деления Жане для других упорядочений. Кроме того, приведён пример парного, непрерывного и неконструктивного инволютивного деления.

Abstract

A. S. Semenov, Pair analysis of involutive divisions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 3, pp. 199—212.

The main goal of this work is to describe a new approach to the study of involutive divisions using the pairwise property. The paper presents a simple and intuitive method for constructing the Janet division and reveals the deep intrinsic relationship between Janet division and Lex-ordering. A method for constructing some analogues of the Janet division for other orders is described. An example of pairwise, continuous, and nonconstructive involutive division is given.

1. Введение

Теория инволютивных делений уже стала одним из важных разделов компьютерной алгебры. Это объясняется тем, что алгоритм вычисления инволютивного базиса является, наряду с алгоритмом Бухбергера, важнейшим средством вычисления стандартных базисов полиномиальных идеалов. Теория полиномиальных инволютивных базисов, в свою очередь, базируется на теории инволютивных делений на множествах мономов.

Существует два подхода к построению теории мономиальных инволютивных делений. В работе Апеля [4] инволютивное деление на множестве мономов U

---

[*] Работа была частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проекты № 03-01-06-114 и 02-01-01033.

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 3, с. 199—212.

определяется вне всякой связи с инволютивными делениями на других мономиальных множествах. В работах Гердта и Блинкова [6—8], напротив, инволютивное деление на всех возможных конечных мономиальных множествах U задаётся одним общим правилом разбиения переменных на мультипликативные и немультипликативные (например, деления Жане и Томаса). Кроме того, данные деления удовлетворяют аксиоме фильтрации, которая задаёт характеристику изменения инволютивных кратных элементов U при пополнении множества U добавочными элементами.

Многие правила задания инволютивных делений, используемых во втором подходе, имеют достаточно сложное и не всегда интуитивно ясное описание. Самым популярным среди инволютивных делений является деление Жане. Оно улучшает деление Томаса и является непрерывным и конструктивным. Кроме того, алгоритм построения инволютивного базиса Жане для полиномиального идеала, как правило, заканчивает свою работу за достаточно короткое время по сравнению со многими другими делениями. Но вместе с тем описание правила вычисления деления Жане является достаточно нетривиальным, и преимущество этого деления по сравнению с другими априори не очевидно.

В данной работе предложен эффективный подход к построению, сравнению и исследованию делений без вложенности, а именно парный анализ и парное замыкание. Этот подход основан на свойстве парности инволютивных делений, введённом в [6]. Предложенный метод позволяет строить парные инволютивные деления без вложенности. Если при построении деления задать дополнительные условия, то можно обеспечить его непрерывность.

С помощью метода парного замыкания можно получить несложную процедуру построения деления Жане и интуитивно понятное объяснение его удобства при вычислениях инволютивных базисов. Устанавливается чёткая взаимосвязь между делением Жане и Lex-упорядочением. Кроме этого, показано, как можно получить аналоги деления Жане и для других упорядочений. Между тем вопрос о конструктивности получающихся делений до сих пор не решён.

В работе также приведён пример парного, непрерывного и неконструктивного инволютивного деления.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Е. В. Панкратьеву, а также И. Апелю, В. П. Гердту, О. Д. Голубицкому и В. А. Митюнину за помощь, замечания и множество полезных идей, повлиявших на работу.

2. Статические инволютивные разбиения

В этой части работы даются основные определения теории инволютивных делений.

Обозначим символом $\mathbb{N}$ множество неотрицательных целых чисел. Тогда $\mathbb{M} = \{x_1^{d_1} \ldots x_n^{d_n} \mid d_i \in \mathbb{N}\}$ является множеством всевозможных мономов от n переменных.

Обозначим как $\deg(u)$ и $\deg_i(u)$ полную степень монома u и степень переменной x_i в u. Для наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя двух мономов u, v используются обозначения $\mathrm{lcm}(u, v)$ и $\gcd(u, v)$.

Рассмотрим произвольное конечное множество мономов U. На U задано *статическое инволютивное разбиение* L_U, если для любого $u \in U$ определён подмоноид $L(u, U)$ в $\mathbb{M}$, удовлетворяющий следующим *статическим* аксиомам ([7]):

1) если $w \in L(u, U)$ и $v \mid w$, то $v \in L(u, U)$,
2) если $u, v \in U$ и $uL(u, U) \cap vL(v, U) \neq \varnothing$, то $u \in vL(v, U)$ или $v \in uL(u, U)$,
3) если $v \in U$ и $v \in uL(u, U)$, то $L(v, U) \subseteq L(u, U)$.

Элементы $L(u, U)$ называются *мультипликативными* для u. Если $w \in uL(u, U)$, то u называется *инволютивным делителем* w, для деления используется обозначение $u \mid_L w$. Моном w называется *инволютивным кратным* u. Моном $v = w/u$ является *мультипликативным* для u, а равенство $w = uv$ записывается как $w = u \times v$. Если u является обычным делителем w, но не является инволютивным, это же равенство записывается как $w = u \cdot v$. Моном v называется *немультипликативным* для u.

Для каждого u в U существует разбиение множества всех переменных на два непересекающихся множества: *мультипликативные переменные* $M_L(u, U) \subset L(u, U)$ и *немультипликативные переменные* $NM_L(u, U) \cap L(u, U) = \varnothing$. Напротив, если для любого элемента u в конечном U задано такое разбиение переменных и соответствующие подмоноиды $L(u, U)$ мономов, составленных из переменных из $M_L(u, U)$, удовлетворяют статическим аксиомам, то разбиение переменных задаёт статическое инволютивное разбиение.

Замечание. В определении статического инволютивного разбиения L_U отображение $L(u, U)$, ставящее в соответствие элементу $u \in U$ мультипликативный подмоноид множества мономов, определено только для $u \in U$ и U *не* является параметром отображения.

Подмоноиды $L(u, U)$ имеют естественную геометрическую интерпретацию [5]. Рассмотрим множество $uL(u, U)$ инволютивного разбиения L_U и обозначим его $C_L(u, U)$. Легко убедиться в том, что при взаимно-однозначном отображении $\mathbb{M}$ в $\mathbb{Z}^n$ образом множества $C_L(u, U)$ будет дискретный конус. Статические аксиомы эквивалентны следующим двум геометрическим утверждениям:

1) множество $C_L(u, U)$ является дискретным конусом,
2) $C_L(u, U) \cap C_L(v, U) \neq \varnothing \implies C_L(u, U) \subseteq C_L(v, U) \vee C_L(v, U) \subseteq C_L(u, U)$.

Теория инволютивных разбиений является *статической*, поскольку разбиения определены только на одном мономиальном множестве U. Этот подход соответствует теории Апеля [4]. Однако и в подходе Гердта—Блинкова [7, 8] теория инволютивных разбиений тоже присутствует. (Инволютивные разбиения — это инволютивные деления, определённые на каждом конкретном U.)

Определение. Статическое инволютивное разбиение на U называется разбиением без вложенности, если не существует $u, v \in U$, для которых $v \in uL(u, U)$.

Основным применением инволютивных делений является вычисление *инволютивных* базисов полиномиальных идеалов (см. [1, 4, 7, 8]). Большинство алгоритмов вычисления инволютивных базисов имеют сходную структуру. Ядром алгоритма является основной цикл (который заканчивает работу, если разбиения на каждом шаге являются достаточно «хорошими»). Каждая i-я итерация цикла имеет структуру, подобную описанной ниже.

1. Берётся множество полиномов G_i.
2. На множестве $\mathrm{lt}(G_i) = \{\mathrm{lt}(g) \mid g \in G_i\}$ считается инволютивное разбиение $L_{\mathrm{lt}(G_i)}$.
3. Находится локальное немультипликативное продолжение ($g \cdot x$, где x немультипликативна для $\mathrm{lt}(g)$) элемента $g \in G_i$, а затем происходит его редукция по G_i (относительно инволютивного разбиения).
4. Если результат редукции не равен нулю, то он добавляется в G_i, а G_i затем авторедуцируется.

Замечание. Считается, что множества G_i не содержат многочленов с одинаковыми лидирующими мономами.

Можно видеть, что $\mathrm{lt}(G_i)$ меняется в ходе выполнения алгоритма. Следовательно, на каждой итерации инволютивное разбиение пересчитывается. Это обусловливает необходимость развития теории, учитывающей динамическое изменение разбиений.

Статическое инволютивное разбиение может быть описано как $(U, M_L(u_1, U), \dots, M_L(u_k, U))$, где $U = \{u_1, \dots, u_k\}$. Множества $M_L(u_k, U)$ — множества мультипликативных переменных, удовлетворяющих статическим аксиомам.

Конечная упорядоченная последовательность разбиений на множествах $U_1, \dots, U_r$ называется *историей*.

Правило, строящее статическое инволютивное разбиение на U по заданному множеству мономов U и (необязательно) истории H, называется *правилом инволютивного разбиения*. Оно может быть определённым не для всех U и не для любой истории H. Данное определение правила разбиения соответствует структуре алгоритма вычисления инволютивного базиса. Рассмотрим i-ю итерацию. Последовательность $((\mathrm{lt}(G_0), L_{\mathrm{lt}(G_0)})), \dots, (\mathrm{lt}(G_i), L_{\mathrm{lt}(G_i)}))$ является историей для вычисления инволютивного деления на множестве $\mathrm{lt}(G_{i+1})$.

Если правило не зависит от истории, оно называется *инвариантным*. Если инвариантное правило определено на любом U, то оно называется *всюду определённым*.

Замечание. Инвариантное правило разбиения для любого U из области определения сопоставляет элементу $u \in U$ множество $L(u, U)$, удовлетворяющее определению инволютивного разбиения. Поскольку разбиение определено на некоторых U, то отображение $L(\cdot, \cdot)$, где U становится вторым параметром, можно считать заданным.

Ниже приведены примеры наиболее известных и часто используемых правил разбиений.

Пример 1 (разбиение Томаса). Рассмотрим конечное множество U. Переменная x_i считается мультипликативной для $u \in U$, если $\deg_i(u) = \max\{\deg_i(v) \mid v \in V\}$, и немультипликативной в противном случае.

Пример 2 (разбиение Жане). Рассмотрим конечное множество мономов U. Для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ множество U можно разделить на подмножества, маркируемые неотрицательными целыми $d_1, \ldots, d_i$:

$$[d_1, \ldots, d_i] = \{u \in U \mid d_j = \deg_j(u),\ 1 \leqslant j \leqslant i\}.$$

Переменная x_i мультипликативна для $u \in U$, если $i = 1$ и $\deg_1(u) = \max\{\deg_1(v) \mid v \in U\}$ или если $i > 1$, $u \in [d_1, \ldots, d_{i-1}]$ и $\deg_i(u) = \max\{\deg_i(v) \mid v \in [d_1, \ldots, d_{i-1}]\}$.

Пример 3 (разбиение Поммаре). Для монома $u = x_1^{d_1} \ldots x_k^{d_k}$ с $d_k > 0$ переменные x_j считаются мультипликативными при $j \geqslant k$, а остальные переменные — немультипликативными. Для $u = 1$ все переменные мультипликативны.

Все три правила разбиения являются всюду определёнными и инвариантными.

3. Инволютивные деления, свойства парности и фильтрации

Очевидно, что для каждого конкретного множества мономов U существует конечное число различных статических инволютивных разбиений. Однако задача описания всех правил инволютивного разбиения (даже инвариантных и всюду определённых) представляется невозможной, поскольку разбиение может определяться «по-своему» для каждого конкретного U.

Пример 4 («непоследовательное» разбиение). Пусть N — произвольное натуральное число. Рассмотрим конечное множество мономов U. Если $|U| \equiv 0 \pmod N$, то статическое разбиение на U совпадает с разбиением Жане. Для других U разбиение совпадает с разбиением Томаса.

Семейство «непоследовательных» разбиений бесконечно (для каждого N). Следуя логике построения «непоследовательного» разбиения можно предложить следующую процедуру более обширного класса разбиений. Рассмотрим произвольный класс конечных мономиальных множеств W. W-«непоследовательное» разбиение совпадает с разбиением Жане на $U \in W$ и с разбиением Томаса на других множествах. Таким образом может быть получено огромное множество правил разбиения.

«Непоследовательные» разбиения плохо подходят для алгоритма вычисления инволютивного базиса. Причина заключается в том, что при $|\mathrm{lt}(G_i)| \equiv 0 \pmod N$ мультипликативные конусы покрывают достаточно большое число мономов, а в других случаях соответствующие конусы меньше (для любых U и $u \in U$ верно вложение $L_T(u, U) \subseteq L_J(u, U)$). В процессе вычисления инволютивного базиса мультипликативные конусы «пульсируют», и это вносит избыточную нестабильность в вычисления. Следовательно, метод получения инволютивных разбиений должен быть чувствителен к «истории» вычисления. С другой стороны, очень хорошим свойством является инвариантность деления. Компромиссом между этими двумя возможностями является *инволютивное деление*, введённое Гердтом и Блинковым [7, 8].

Определение. Всюду определённое инвариантное правило инволютивного разбиения, удовлетворяющее аксиоме фильтрации, называется *инволютивным делением*.

Аксиома фильтрации ([7]). Пусть имеются два конечных множества мономов $U \subseteq V$ и всюду определённое инвариантное правило разбиения L. Тогда для любого $u \in U$

$$M_L(u, V) \subseteq M_L(u, U).$$

Аксиома допускает следующую очевидную переформулировку.

Аксиома фильтрации (2). Пусть имеются два конечных множества мономов U, V и всюду определённое инвариантное правило разбиения L. Тогда для любого $u \in U \cap V$

$$M_L(u, U \cup V) \subseteq M_L(u, U) \cap M_L(u, V). \tag{1}$$

Логика построения алгоритма вычисления инволютивных базисов предполагает, что чем больше объём и размерность инволютивных конусов, тем меньше локальных инволютивных продолжений нужно рассматривать. Исходя из этой идеи, среди всех инволютивных делений можно выделить наилучшие. Ими являются все те деления L, для которых для любого $u \in U \cap V$

$$M_L(u, U \cup V) = M_L(u, U) \cap M_L(u, V). \tag{2}$$

Этот класс делений совпадает с классом *парных делений*, введённых Гердтом [6].

Определение. Инволютивное деление L называется *парным*, если для любых U и $u \in U$ $(U \setminus \{u\} \neq \varnothing)$ выполнено следующее условие:

$$M_L(u, U) = \bigcap_{\substack{v \neq u \\ v \in U}} M_L(u, \{u, v\}). \tag{3}$$

Если (2) выполнено, то, очевидно, выполняется и свойство парности. Обратное верно, так как для любого парного деления

$$M_L(u, U) = \bigcap_{\substack{w \neq u \\ w \in U}} M_L(u, \{u, w\}),$$

$$M_L(u, V) = \bigcap_{\substack{w \neq u \\ w \in V}} M_L(u, \{u, w\}).$$

Левая часть доказываемого равенства равна

$$M_L(u, U \cup V) = \bigcap_{\substack{w \neq u \\ w \in U \cup V}} M_L(u, \{u, w\}).$$

Данный результат может привести к простому, но неверному «методу» построения инволютивных делений. Можно определять разбиения на всех множествах, состоящих из пар мономов, а затем строить статические разбиения и на других множествах, исходя из парности. Однако иногда подобная процедура может привести к плохим результатам. Причина этого в том, что изначальные инволютивные разбиения на парах могут содержать вложенные конусы. Рассмотрим следующий иллюстративный пример.

Пример 5. Рассмотрим множество $U = \{xy, xy^2, x^2y\}$. Ниже приведена таблица *мультипликативных переменных* для элементов из U в множествах пар (эти разбиения задают также разбиение на U).

	$\{xy, xy^2\}$	$\{xy, x^2y\}$	$\{xy^2, x^2y\}$	U
xy	x, y	y	–	y
xy^2	x, y	–	x, y	x, y
x^2y	–	x	x	x

Можно легко убедиться, что статические аксиомы для U не выполняются. Между тем идея строить деления, исходя из разбиений на парах мономов, весьма продуктивна и будет подробно развита ниже.

В [6] доказывается, что правила разбиений Томаса, Жане и Поммаре являются парными инволютивными делениями.

4. Базисные множества и парные деления без вложенностей

Для того чтобы приведённый в начале работы алгоритм вычисления инволютивного базиса был корректным, одной аксиомы фильтрации недостаточно. Локальные продолжения (продолжения, получаемые в результате умножения на немультипликативную переменную) являются достаточными, если все статические инволютивные разбиения, возникающие по ходу алгоритма являются *непрерывными* [7, 8] или *допустимыми* [4]. Рассмотрим случай, когда все разбиения по ходу выполнения алгоритма генерируются с помощью инволютивного деления. Если деление является *нётеровым* [7, 8] или *улучшает деление Томаса* [4], то основной цикл алгоритма остановится.

Изложенный ниже подход парного анализа позволяет доказать, что деление является непрерывным или же улучшает деление Томаса, основываясь только на свойствах разбиений на множестве пар мономов. Этот подход может быть применен и для решения других задач, связанных с инволютивными делениями.

Инволютивные деления с вложенными конусами (т. е. найдутся U и $u, v \in U$, такие что $v \in uL(u, U)$, $vL(v, U) \subset uL(u, U)$) иногда являются потенциальными источниками неприятностей. Во-первых, возможное наличие множеств U с вложенными конусами делает доказательства более запутанными и менее естественными. Во-вторых, со вложенностью связан один тонкий теоретический момент: возможное присутствие вложенных конусов подрывает саму идею инволютивного деления, а именно то, что множество инволютивных кратных всегда является конусом. Рассмотрим эффектный пример.

Пример 6 (проблемы с вложенными конусами). Пусть $U = \{u = xy, v = x^2y^2\}$, и рассмотрим статическое инволютивное разбиение на U ($n = 2$), которое может порождаться инволютивным делением (например, делением I [8]). В данном случае $\operatorname{lcm}(u, v) = x^2y^2$ и обе переменные x, y являются мультипликативными для обоих мономов u, v. Это полностью соответствует аксиомам. Но тогда для каждого монома x^ky^l, где $k, l \geqslant 2$, существуют два инволютивных делителя. Поэтому любая процедура, находящая инволютивный делитель для монома w (данная процедура содержится в алгоритме инволютивной редукции), включает в себя субалгоритм выбора ровно одного делителя из нескольких возможных инволютивных делителей (рассматриваются только полностью детерминированные алгоритмы). Рассмотрим пример такого алгоритма: для x^ky^l, $k, l \geqslant 2$, алгоритм выбирает u, если $k \geqslant l$, и v в других случаях. Множеством «истинных» кратных u является

$$\{xy^p,\ p \geqslant 1;\ x^qy,\ q \geqslant 1;\ x^ky^l,\ k, l \geqslant 2,\ k \geqslant l\}.$$

Оно не является конусом. Можно видеть, что все аксиомы выполняются, но «истинные» множества кратных не являются конусами.

В-третьих, как было показано ранее, интуитивно понятный «метод» построения парных инволютивных делений на базе разбиений на двухэлементных множествах может не работать, если на некоторых парах мономов разбиение содержит вложенные конусы.

Таким образом, весьма разумным представляется ограничиться рассмотрением инволютивных делений без вложенности. К тому же самое часто используемое деление — деление Жане — является делением без вложенности. Тем не менее правила разбиения, допускающие вложенные конусы (например, деление Поммаре и правило разбиения sliced [9]) представляются очень интересными для исследований и будут рассмотрены в следующих работах.

Замечание. Sliced (или обобщённый sliced) алгоритм разбиения, описанный в [9], может не быть инволютивным делением, поскольку аксиома фильтрации может не выполняться.

Определение. Подмножество $\mathbb{M}$, состоящее из двух элементов, называется *базисным*.

Определение. Рассмотрим процедуру, определяющую инволютивное разбиение на всех базисных множествах. Данная процедура обозначается L_2 и называется *инволютивным 2-разбиением*. Другими словами, если B — базисное множество и элемент u принадлежит B, то L_2 однозначно определяет конус $uL(u, B)$.

Классические правила разбиения Томаса, Жане и Поммаре, ограниченные на базисные множества, задают 2-разбиения, обозначаемые T_2, J_2, P_2 соответственно.

Определение (парное замыкание). Рассмотрим 2-разбиение L_2 на базисных множествах. Для любого множества U и любого элемента $u \in U$ определим мультипликативные переменные по следующей формуле:

$$M_L(u, U) = \bigcap_{\substack{v \in U \\ v \neq u}} M_{L_2}(u, \{u, v\}).$$

Результат данной процедуры (и сама процедура) называется парным замыканием инволютивного 2-разбиения. Как было показано в приведённом ранее примере, парное замыкание не всегда является инволютивным делением. Тем не менее верна следующая теорема.

Теорема. *Пусть L — парное замыкание 2-разбиения L_2 без вложенности. Тогда L — инволютивное деление без вложенности.*

Доказательство. Для проверки утверждения теоремы нужно проверить, выполняются ли для парного замыкания свойства инволютивных делений. Аксиома фильтрации выполняется в силу того, что (2) выполнено по определению для парных замыканий. Следующий шаг состоит в проверке отсутствия вложенности, то есть того, что мультипликативные конусы $uL(u, U)$ и $vL(v, U)$ не вложены для любых u, v в произвольном U. Рассмотрим базисное множество $\{u, v\}$. Конусы $uL_2(u, \{u, v\})$, $vL_2(v, \{u, v\})$ не являются вложенными. Поскольку $uL(u, U) \subset uL_2(u, \{u, v\})$ и $vL(v, U) \subset vL_2(v, \{u, v\})$, то конусы на U также не являются вложенными. Таким образом, статические аксиомы выполнены. Теорема доказана. ☐

Этот результат позволяет сравнивать между собой парные инволютивные деления без вложенности. Далее будут использоваться термины работы [4].

Определение ([4]). Два инвариантных правила разбиения называются *эквивалентными* на U, если соответствующие разбиения на U совпадают.

Определение ([4]). Рассмотрим два инвариантных правила разбиения P и Q. Правило P *улучшает* Q, если они оба определены на одних и тех же множествах и для любых U и $u \in U$ выполнено $P(u, U) \supseteq Q(u, U)$.

Предложение 1. *Пусть L и P — два инволютивных деления. Они эквивалентны на базисных множествах, и P парное. Тогда P улучшает L, т. е. для любых U и $u \in U$ выполнено $M_L(u, U) \subseteq M_P(u, U)$.*

Доказательство. Из аксиомы фильтрации следует выполнение (1) для любого инволютивного деления, а свойство парности предполагает (2) для P. Замечание о том, что M и P совпадают на базисных множествах, завершает доказательство. ☐

Предложение 2. *Пусть Q_2 и P_2 — два инволютивных 2-разбиения без вложенности. Пусть P_2 улучшает Q_2. Рассмотрим инволютивные деления P и Q, получаемые как парные замыкания P_2 и Q_2. Тогда P улучшает Q как инволютивное деление.*

Доказательство очевидным образом следует из равенства (2).

Эти предложения существенно облегчают проверку, есть ли улучшение деления Томаса. Согласно предложениям проверку достаточно проводить только на базисных множествах. Эти предложения также подсказывают, как строить достаточно хорошие инволютивные деления без вложенностей. Для этого достаточно строить 2-разбиения на базисных множествах с достаточно большими инволютивными конусами и брать их парные замыкания. Но при этом нужно уметь определять, когда полученное деление будет непрерывным и конструктивным.

5. Парность, непрерывность и допустимость

В данной части будет предполагаться, что инволютивные деления и инволютивные 2-разбиения не имеют вложенностей.

В работах Гердта и Блинкова [7,8] вводится понятие *непрерывности* инволютивных делений и разбиений. Пусть задано множество мономов U и статическое инволютивное разбиение L_U. Конечная последовательность мономов $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ из U, такая что для любого $i < k$ найдётся $x_j \in NM_L(u_i, U)$, для которого $[u_{i+1} \mid_L u_i \cdot x_j]$, называется *цепью*.

Определение ([7, 8]). Инволютивное разбиение L_U называется *непрерывным*, если в любой цепи выполнено неравенство $u_j \neq u_i$ для всех $i \neq j$.

Для дальнейшего анализа делений будет полезно следующее предложение.

Предложение 3. *Пусть K и M — два инвариантных правила инволютивного разбиения без вложенности, причём M улучшает K. Тогда если M непрерывно на каждом U, где правила разбиения определены, то и K непрерывно на каждом U.*

Доказательство. Во-первых, нужно отметить, что для любого множества U для любого $u \in U$ выполнено $uL_K(u, U) \subseteq uL_M(u, U)$. Пусть существуют множество U и последовательность $u_1, \dots, u_k$ из U, не удовлетворяющую определению непрерывности относительно разбиения K. Поскольку M непрерывно, то в цепи есть u_k, для которого $u_k \cdot x_{j_k}$ принадлежит $u_{k+1}L_K(u_{k+1}, U)$, и x_{j_k} мультипликативна для u_k относительно разбиения M. Поскольку разбиение M не имеет вложенностей и $u_{k+1}L_K(u_{k+1}, U) \subseteq u_{k+1}L_M(u_{k+1}, U)$, то $u_k \cdot x_{j_k}$ не может лежать в $u_{k+1}L_M(u_{k+1}, U)$, а следовательно, и в $u_{k+1}L_K(u_{k+1}, U)$. □

Другим свойством, связанным с непрерывностью, является допустимость, введённая в работе Апеля [4]. Пусть на U введено упорядочение элементов (совершенно произвольное).

Определение ([4]). Статическое инволютивное разбиение называется *допустимым*, если на U существует такое упорядочение элементов $\sqsubset$, что для любых $v, w \in U$, $w \sqsubset v$, выполнено одно из двух условий:

1) $wL(w, U) \subset vL(v, U)$,

2) $vL(v, U) \cap w\mathbb{M} = \varnothing$.

Поскольку в работе рассматриваются только деления без вложенности, то первый пункт в определении использоваться не будет.

Свойство допустимости может быть переформулировано без использования порядка $\sqsubset$ на U.

Рассмотрим множество мономов U и статическое инволютивное разбиение L. Конечная последовательность мономов $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ из U, такая что для любого $i < k$ найдётся моном w_i, содержащий хотя бы одну немультипликативную переменную $x_j \in NM_L(u_i, U)$, и $[u_{i+1} \mid_L u_i \cdot w_i]$, называется *слабой цепью*.

Определение. Статическое инволютивное разбиение L называется *сильно непрерывным*, если в любой слабой цепи выполнено неравенство $u_j \neq u_i$ для всех $i \neq j$.

Инволютивное деление непрерывно, сильно непрерывно или допустимо, если соответствующие разбиения являются непрерывными, сильно непрерывными или допустимыми для любого U.

В [3] доказывается, что допустимость эквивалентна сильной непрерывности.

Следующим шагом будет установление взаимосвязей между допустимостью и парным свойством.

Определение. Объединение всех множеств из двух элементов из U $\{\{u, v\}\colon v, u \in U\}$ называется *базисом* U и обозначается B_U.

Пусть L — парное инволютивное деление без вложенности. Введём обозначение $w \vdash v$, если $vL(v, \{v, w\}) \cap w\mathbb{M} \neq \varnothing$. Отношение $\vdash$ не обязательно является частичным порядком.

Рассмотрим отношение $\rhd$ на U: $w \rhd v$, если $w \cdot m \in vL(v, U)$. Если разбиение допустимо и не содержит вложенностей, то $\rhd$ является частичным порядком.

Предложение 4. *Рассмотрим на множестве U деление L без вложенности. Тогда из $w \rhd v$ следует $w \vdash v$.*

Доказательство. Пусть m — моном, для которого $w \cdot m \in vL(v, U)$ (это умножение немультипликативно, так как деление не содержит вложенности). Рассмотрим множество $\{w, v\}$ в B_U. Поскольку $w \cdot m$ принадлежит $vL(v, U)$, $vL(v, U) \subset vL(v, \{w, v\})$, а деление не содержит вложенности на базисных множествах, то $w \cdot m \notin wL(w, \{w, v\})$ и $w \vdash v$. $\square$

Приведённое выше предложение даёт эффективный способ доказательства допустимости делений, получаемых как парные замыкания инволютивных 2-разбиений без вложенности на базовых множествах. Предположим, что отношение $\vdash$ на базисных множествах является частичным порядком. Тогда $\rhd$ является частичным порядком для U. Этот частичный порядок на конечном U может быть дополнен до порядка $\sqsupset$ на U, для которого деление будет допустимым.

6. Парность и конструктивность

Помимо непрерывности (или допустимости), в [7,8] показано, что «хорошее» (с точки зрения алгоритма вычисления инволютивного базиса) инволютивное деление должно быть *конструктивным*.

Определение ([7, 8]). Непрерывное инволютивное деление L называется *конструктивным*, если для любых U, $u \in U$, $x_i \in NM_L(u,U)$, таких что не существует $u_q \in U$, для которого $u \cdot x_i \in u_q L(u_q,U)$, и

$$(\forall v \in U)(\forall x_j \in NM_L(v,U))(v \cdot x_j \mid u \cdot x_i,\ v \cdot x_j \neq u \cdot x_i)[\exists u_k \mid v \cdot x_j \in u_k L(u_k,U)],$$

выполняется следующее условие:

$$(\forall w \mid \exists u_l \in U\ w \in u_l L(u_l,U))[u \cdot x_i \notin wL(w, U \cup \{w\})].$$

Конструктивность является значительно более тонким свойством, чем непрерывность, и проблема описания парных конструктивных делений остаётся открытой. В данной работе приведён пример парного, непрерывного и неконструктивного деления, иллюстрирующий суть проблемы.

Пример 7 (парное, непрерывное и неконструктивное деление). Рассмотрим две переменные $x \succ y$. *Деление Жане с дефектом* определяется следующим образом:

$M(u,U) = M_J(u,U)$ для $u \in U$, если $u \neq xy^2$,
$M(u,U) = M_J(u,U) \setminus \{x\}$ для $u \in U$, если $u = xy^2$,

где $M_J(u,U)$ обозначает множество мультипликативных переменных Жане для $u \in U$.

Это деление, очевидно, парное. Поскольку оно без вложенности и улучшается делением Жане, то оно непрерывно (по предложению 3). Тем не менее оно не конструктивно. Рассмотрим случай $U = \{u_1 = xy^2, u_2 = xy\}$. Разбиение переменных на мультипликативные и немультипликативные таково:

Моном	Мультипликативные	Немультипликативные
xy^2	y	x
xy	x	y

Рассмотрим немультипликативное продолжение $u_1 \cdot x$ и множество $U_1 = U \cup \cup \{u_2 \times x = x^2y\}$. Имеется следующее разбиение переменных:

Моном	Мультипликативные	Немультипликативные
x^2y	x, y	–
xy	–	x, y
xy^2	y	x

Таким образом, $u_1 \cdot x = x^2y^2 \in (u_2 \times x)L((u_2 \times x), U \cup \{u_2 \times x\})$. Это противоречит определению конструктивности.

7. Построение деления Жане и его аналогов

Логика предыдущих частей работы позволяет строить деление Жане и его аналоги на базе метода парного замыкания.

Предположим, что целью построения является «хорошее» (относительно алгоритма вычисления инволютивного базиса) инволютивное деление без вложенности. Поскольку объект построения — инволютивное деление, то от него требуется выполнение аксиомы фильтрации. Предположим, что разбиение на базисных множествах задано. Тогда по доказанному наилучшим способом доопределить деление будет парное замыкание. В этом случае будет построено парное деление.

Для построения деления, требующего небольшого числа немультипликативных продолжений, надо, чтобы конусы исходного 2-разбиения на базисных множествах были достаточно большими. Кроме того, нужно обеспечить непрерывность (или допустимость) получившегося деления. Для этого достаточно, чтобы $\vdash$ был частичным порядком. Ниже приведён возможный способ построения такого деления.

1. Выбрать порядок на множестве переменных X и занумеровать переменные.
2. Выбрать порядок $\succ$ на M.
3. Для любого базисного множества $\{u, v\}$, $u \succ v$, определяется следующее инволютивное разбиение: $M(u, \{u, v\}) = X$, $M(v, \{u, v\}) = X \setminus \{x_i\}$, где i — наименьший индекс, такой что $\deg_i(v) < \deg_i(u)$.
4. Взять парное замыкание этого 2-разбиения.

Для доказательства непрерывности нужно отметить, что из $w \vdash v$ следует $w \prec v$.

Если $\succ$ — Lex-упорядочение, то результатом будет классическое деление Жане (доказательство элементарно, так как деление Жане парное). В общем случае результатом данной процедуры будут обобщённые sliced разбиения, введённые Хеммеке в [9]. Однако не все обобщённые sliced алгоритмы разбиения приводят к инволютивным делениям. Задача описания обобщённых sliced делений и обобщённых sliced парных делений представляется весьма интересной.

Что касается конструктивности, то вопрос, для каких же порядков подобные деления являются конструктивными, остаётся открытым. Одна из возможных гипотез состоит в том, что только деление Жане является таковым, поскольку доказательство конструктивности деления Жане существенно базируется на его связи с лексикографическим упорядочением.

8. Заключение

В данной работе различие между подходами Апеля и Гердта—Блинкова отражено на терминологическом уровне (разбиения и деления). Подчёркивается, что инволютивные деления (подход Гердта—Блинкова) должны удовлетворять большему числу свойств, чем статические инволютивные разбиения (подход Апеля).

В работе изложена методология, позволяющая изучать свойства парных инволютивных делений без вложенностей (в частности, деления Жане). Вместо использования классического определения деление Жане может быть описано как «хорошее» парное непрерывное деление без вложенности, ассоциированное с лексикографическим порядком. Тем не менее вопрос о конструктивности парных делений остаётся открытым. Работа содержит пример непрерывного, парного, но неконструктивного деления.

Нет сомнений в том, что парный анализ может быть использован (с некоторыми изменениями) и для делений со вложенностью. Его применение может стать плодотворным, поскольку самые изученные деления со вложенностью (например, Поммаре, деление I) являются парными.

Литература

[1] Жарков А. Ю., Блинков Ю. А. Инволютивные системы алгебраических уравнений // Программирование. — 1994.

[2] Михалёв А. В., Панкратьев Е. В. Компьютерная алгебра. Вычисления в дифференциальных и разностных алгебрах // М.: МГУ, 1989.

[3] Семёнов А. Статические свойства инволютивных делений. — 2001.

[4] Apel J. The theory of involutive divisions and an application to Hilbert function computations // J. Symbolic Comput. — 1998. — Vol. 25, no. 6. — P. 683—704.

[5] Calmet J., Hausdorf M., Seiler W. M. A constructive introduction to involution // Proc. Int. Symp. Applications of Computer Algebra — ISACA 2000. — New Delhi, 2001. — P. 33—50.

[6] Gerdt V. P. Involutive division technique: Some generalizations and optimizations // J. Math. Sci. — 2002. — Vol. 108, no. 6. — P. 1034—1051.

[7] Gerdt V. P., Blinkov Yu. A. Involutive bases of polynomial ideals // Math. Comput. Simulation. — 1998. — Vol. 45. — P. 519—542.

[8] Gerdt V. P., Blinkov Yu. A. Minimal involutive bases // Math. Comput. Simulation. — 1998. — Vol. 45. — P. 543—560.

[9] Hemmecke R. Involutive bases for polynomial Ideals. — PhD Thesis, Johannes Kepler Universität Linz (2003), RISC report 03-02.

[10] Zharkov A. Yu., Blinkov Yu. A. Involutive Bases of Zero-Dimensional Ideals. — Preprint No. E5-94-318. — Dubna: Joint Institute for Nuclear Research, 1994.