Мнимо-квадратичные решения антивандермондовых систем с 4 неизвестными и орбиты Галуа деревьев диаметра 4

Г. Б. ШАБАТ
Российский государственный гуманитарный университет
e-mail: george@shabat.mccme.ru

УДК 511.6

Ключевые слова: антивандермондовы системы, плоские деревья, детские рисунки Гротендика.

Аннотация

Работа посвящена элементарной диофантовой проблеме, возникшей из гротендиковской теории *детских рисунков*. Точнее, мы рассматриваем систему уравнений $ax^j + by^j + cz^j + dt^j = 0$ $(j = 1, 2, 3)$ с натуральными a, b, c, d. По тривиальным причинам она не имеет вещественных (а следовательно, и рациональных) ненулевых решений; мы занимаемся случаями, когда она имеет *мнимо-квадратичные* решения. Мы строим бесконечное семейство таких случаев; в них участвуют все мнимо-квадратичные поля. Мы обсуждаем полученный результат с точки зрения орбит Галуа деревьев диаметра 4.

Abstract

G. B. Shabat, Imaginary-quadratic solutions of anti-Vandermonde systems in 4 *unknowns and the Galois orbits of trees of diameter* 4, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 3, pp. 229—236.

The paper is devoted to an elementary Diophantine problem motivated by Grothendieck's *dessins d'enfants* theory. Namely, we consider the system of equations $ax^j + by^j + cz^j + dt^j = 0$ $(j = 1, 2, 3)$ with natural a, b, c, and d. For trivial reasons it has no real (hence rational) nonzero solutions; we study the cases where it has *imaginary quadratic* ones. We suggest an infinite family of such cases covering all the imaginary quadratic fields. We discuss this result from the viewpoint of the Galois orbits of trees of diameter 4.

1. Введение

В статье ставится элементарная задача из диофантовой геометрии, мотивированная теорией *детских рисунков* Гротендика (см. [4, 7, 10]) и даётся её частичное решение.

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 3, с. 229—236.

1.1. Краткий обзор детских рисунков

Под *детским рисунком* (в дальнейшем просто *рисунком* для краткости) Александр Гротендик в своем знаменитом «Наброске программы» [4] предложил понимать граф на замкнутой ориентированной поверхности, дополнение к которому гомеоморфно несвязному объединению открытых дисков. Рисунки рассматриваются с точностью до изотопии внутри поверхности, и начиная с этого места под *рисунком* мы понимаем соответствующий класс эквивалентности. Формально существует несколько синонимов слова *рисунок* (таких как (*гипер*)*карты*, *ленточные графы* и т. п.); в нашем случае выбором слова *рисунок* из этого множества синонимов мы подчёркиваем специфическую точку зрения на изучаемые объекты: они рассматриваются вместе с некоторым сопоставлением им арифметико-геометрических объектов. Сейчас это сопоставление будет кратко описано.

Под *парой Белого* над алгебраически замкнутым полем $\mathbf{k}$ мы понимаем пару (X,β), состоящую из полной неособой алгебраической кривой X над $\mathbf{k}$ и непостоянной рациональной функции $\beta \in \mathbf{k}(X) \setminus \mathbf{k}$ на ней, такой что *единственные конечные критические значения функции* β *суть* 0 *и* 1.

Паре Белого (X,β) над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$ мы сопоставляем рисунок на топологической модели X; соответствующий граф является β-прообразом вещественного отрезка, соединяющего 0 и 1 (в некоторых работах эти точки заменены на 1 и ∞).

Полезное упражнение — проверить, что в принятых предположениях дополнение к этому графу обладает требуемым свойством.

Оказывается, что

— это соответствие взаимно-однозначно в сильнейшем из возможных смыслов (естественно определяемые категории рисунков и пар Белого эквивалентны);

— все пары Белого, входящие в эту эквивалентность, могут быть реализованы над $\bar{\mathbf{Q}}$.

Таким образом, (малая) категория рисунков эквивалентна категории пар Белого над $\bar{\mathbf{Q}}$.

1.2. Действие на рисунках абсолютной группы Галуа

Начиная с этого места мы фиксируем обозначение абсолютной группы Галуа поля рациональных чисел:

$$\Gamma := \mathrm{Aut}(\bar{\mathbf{Q}})$$

(это до некоторой степени скрытое главное действующее лицо наших рассмотрений).

Из последнего утверждения предыдущего раздела следует, что

$$\Gamma \text{ действует на множестве рисунков.}$$

Одна из великих надежд, связанных с программой Гротендика, заключается в том, что эта конструкция позволит нам *увидеть* Γ. На настоящий момент эту надежду нельзя считать ни серьезно подтверждённой, ни отброшенной; на самом деле, мы слишком мало знаем. Вот краткая сводка.

(a) Множества 0- и 2-*валентностей* рисунка (количества ростков рёбер, исходящих из данной вершины, и количества рёбер, ограничивающих данную связную компоненту дополнения к графу) Γ инвариантны. Следовательно, все Γ-орбиты рисунков *конечны*.

(b) В «общем случае» (точное определение которого на сегодняшний день неизвестно) других Γ-инвариантов нет.

(c) Однако в некоторых *специальных* случаях другие инварианты существуют. Группа симметрий рисунка (которая «в общем случае» тривиальна) является Γ-инвариантом.

(d) Приведённые выше Γ-инварианты можно назвать *очевидными*. Однако неочевидные инварианты тоже существуют. Один из них имеет изящный геометрический смысл, это *группа вращений рёбер* (см. [1]).

Однако множество рассмотренных Γ-инвариантов всё ещё неполно. Дополнительные, «скрытые» инварианты были обнаружены в очень специальном случае, к обсуждению которого мы переходим.

1.3. Деревья

Сферические (или, что то же самое, *плоские*) *деревья* образуют дважды частный случай теории: род поверхности равен нулю, а дополнение к графу состоит из единственной компоненты. Даже этот случай понят весьма плохо, хотя более изучен (см., например, [8]).

Комплексный многочлен от одной переменной называется *обобщённым многочленом Чебышёва*, если он имеет не более двух критических значений. Нахождение пар Белого, соответствующих заданному плоскому дереву, сводится к нахождению обобщённого многочлена Чебышёва с кратностями, равными валентностям дерева. Существует лишь конечное число таких многочленов, и они могут быть найдены решением некоторых полиномиальных уравнений; однако лишь один из них (с точностью до аффинной замены аргумента) соответствует заданному дереву.

Γ-действие на деревьях реализуется покоэффициентно.

1.4. Деревья диаметра 4

Говорят, что дерево имеет диаметр $\leqslant 4$, если любые две его вершины могут быть соединены цепочкой из не более чем четырёх рёбер; говорят, что оно имеет диаметр 4, если оно имеет диаметр $\leqslant 4$, но (в очевидном смысле) не является деревом диаметра 1, 2 или 3.

Дерево диаметра 4 имеет корректно определённый *центр*: это единственная вершина, которая может быть соединена с остальными цепочкой в не более чем два ребра. Назовём *парацентральными* вершины, соединённые с центром одним ребром. *Абстрактное дерево* диаметра 4 полностью определяется валентностями парацентральных вершин; *плоское дерево* определяется этим множеством вместе с циклическим порядком на нём.

Обозначим $\mathrm{IV}_{a_1\ldots a_k}$ плоское дерево диаметра 4 с парацентральными валентностями $a_1,\ldots,a_k$; подразумевается, что валентности a_{j+1} следуют за валентностями a_j и что a_1 следует за a_k.

Известно, что многочлены $P\in\bar{\mathbf{Q}}[Z]$, соответствующие дереву $\mathrm{IV}_{a_1\ldots a_k}$, могут быть заданы в виде

$$P=(1-x_1Z)(1-x_2Z)\ldots(1-x_kZ),$$

где алгебраические числа $x_1,\ldots,x_k$ — решения системы уравнений

$$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_kx_k=0,\\ a_1{x_1}^2+a_2{x_2}^2+\ldots+a_k{x_k}^2=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_1{x_1}^{k-1}+a_2{x_2}^{k-1}+\ldots+a_k{x_k}^{k-1}=0, \end{cases}$$

которую мы предлагаем называть *антивандермондовой*, поскольку она представляет собой обычную вандермондову систему, в которой параметры и неизвестные поменялись ролями.

1.5. Деревья диаметра 4 центральной валентности 5

В начале 1990-х Лейла Шнепс первой обнаружила пример IV_{23456}, орбиты Галуа которого составляло не всё множество из 24 деревьев, соответствующих всем перестановкам парацентральных валентностей, а только половина из них, а именно соответствующие *чётным* подстановкам (см. [10]). Будем временно называть такие деревья деревьями *типа Лейлы*. Позже Ю. Ю. Кочетков нашёл много таких примеров и заметил, что дерево IV_{abcde} является деревом типа Лейлы, если $abcde(a+b+c+d+e)$ — полный квадрат [2]. Этот факт был вскоре объяснён Л. Цаппони с помощью штребелевых дифференциалов (см. [9]).

1.6. Деревья диаметра 4 центральной валентности 4

Никакого красивого ответа, сопоставимого с приведённым выше, для деревьев диаметра 4 центральной валентности 4 в настоящее время неизвестно.

Ю. Ю. Кочетковым найдено некоторое количество примеров [3], среди которых — поразительная пара $\mathrm{IV}_{1,25,104,195}$ и $\mathrm{IV}_{1,64,104,195}$, которая до настоящего времени остаётся необъяснённой. Кочетков также доказал (см. [5]), что примеров бесконечно много.

В настоящей работе мы строим бесконечное семейство распадающихся типов. Алгебраические и геометрические структуры, связанные с этим распадением, будут рассмотрены в последующих работах.

2. Диофантова задача

Мы рассматриваем антивандермондову систему

$$\begin{cases} ax + by + cz + dt = 0, \\ ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0, \\ ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0. \end{cases}$$

Наш вопрос таков: *для каких ненулевых натуральных чисел a, b, c, d она имеет решение $(x : y : z : t) \in \mathbf{P}^3(\mathbf{Q}(\sqrt{-D}))$ над некоторым мнимым квадратичным полем?*

2.1. Переформулировка

Для данного натурального неквадрата D и точки $(x : y : z : t) \in \mathbf{P}^3(\mathbf{Q}(\sqrt{-D}))$ спрашивается: *являются ли x, y, z, t решениями антивандермондовой системы для каких-либо натуральных чисел a, b, c, d?*

Предположим, что да. Тогда введём обозначение

$$S := a + b + c + d,$$

перепишем антивандермондову систему как

$$\begin{cases} a + b + c + d = S, \\ ax + by + cz + dt = 0, \\ ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0, \\ ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0 \end{cases}$$

и рассмотрим её как обычную вандермондову систему с неизвестными a, b, c, d.

Начиная с этого момента мы будем считать координаты $(x : y : z : t)$ попарно различными. Противоположный случай значительно проще и будет рассмотрен в другой работе.

Предложение. *Из написанной выше системы следует*

$$a = -S\frac{yzt}{(x-y)(x-z)(x-t)},$$
$$b = S\frac{xzt}{(x-y)(y-z)(y-t)},$$
$$c = -S\frac{xyt}{(x-z)(y-z)(z-t)},$$
$$d = S\frac{xyz}{(x-t)(y-t)(z-t)}.$$

Доказательство. Достаточно применить правило Крамера и вычислить определитель Вандермонда. □

При заданных коммутативных кольцах $A \subset B$ скажем, что элемент $p \in B$ *пропорционален* элементу $q \in B$, если $p \in Aq$.

Теперь нашу задачу можно переформулировать следующим образом: *при заданной паре коммутативных колец найти четыре элемента большего кольца так, чтобы произведение любых трёх было пропорционально произведению их разностей с четвёртым*. Мы будем говорить, что такие четыре элемента удовлетворяют *свойству произведений разностей*.

Проблема построения примеров ни в коем случае не тривиальна. В случае $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(\sqrt{-D})$ она, как мы видели, эквивалентна проблеме нахождения распадающихся орбит типа $\mathrm{IV}_{a,b,c,d}$. Согласно Кочеткову [3], пример с наименьшим $a+b+c+d$ имеет вид

$$\begin{aligned} x &= -37 + 9\sqrt{-7}, \\ y &= 5 + 15\sqrt{-7}, \\ z &= -9 - 3\sqrt{-7}, \\ t &= 8, \\ (a, b, c, d) &= (5, 6, 45, 70). \end{aligned}$$

2.2. Схема факторизации

В рассмотренном выше примере мы можем ввести

$$\begin{aligned} \xi &:= -9 + \sqrt{-7}, \\ \eta &:= -6 - 2\sqrt{-7}, \\ \zeta &:= -1 + \sqrt{-7} \end{aligned}$$

и заметить, что

$$x = -\frac{1}{2}\xi^2, \quad y = \frac{5}{8}\eta^2, \quad z = \frac{3}{2}\zeta^2,$$
$$x - y = 6\sqrt{-7}\zeta, \quad x - z = -2\sqrt{-7}\eta, \quad x - t = -\frac{9}{4}\eta\zeta,$$
$$y - z = -2\sqrt{-7}\xi, \quad y - t = -\frac{3}{2}\xi\zeta, \quad z - t = -\frac{1}{4}\xi\eta.$$

Это наблюдение приводит к следующему определению.

Определение. Скажем, что четыре квадратичные иррациональности $x, y, z, t \in \mathbf{Q}(\sqrt{-D})$ удовлетворяют *специальной схеме факторизации*, если для некоторых $\xi, \eta, \zeta \in \mathbf{Q}(\sqrt{-D})$ выполняются следующие включения:

$$x \in \mathbf{Q}\xi^2, \quad y \in \mathbf{Q}\eta^2, \quad z \in \mathbf{Q}\zeta^2, \quad t \in \mathbf{Q},$$
$$x - y \in \mathbf{Q}\sqrt{-D}\zeta, \quad x - z \in \mathbf{Q}\sqrt{-D}\eta, \quad x - t \in \mathbf{Q}\eta\zeta,$$
$$y - z \in \mathbf{Q}\sqrt{-D}\xi, \quad y - t \in \mathbf{Q}\xi\zeta, \quad z - t \in \mathbf{Q}\xi\eta.$$

Предложение. *Элементы, удовлетворяющие схеме факторизации, удовлетворяют свойству произведений разностей.*

Доказательство. Прямая проверка. □

Замечание. Мы никоим образом не утверждаем, что указанная схема факторизации единственна. Уже в примерах Кочеткова содержится несколько других. Вероятно, существует лишь конечное число схем факторизации, и хорошо было бы все их найти.

3. Решение

Основной результат. *Для произвольных мнимых квадратичных иррациональностей ξ, η числа*

$$\begin{aligned} x &= (\eta^2+\bar\eta^2-\eta\bar\eta)\xi^2,\\ y &= (\xi^2+\bar\xi^2-\xi\bar\xi)\eta^2,\\ z &= (\xi\bar\eta+\bar\xi\eta-\xi\eta)^2,\\ t &= \xi^2\bar\eta^2+\bar\xi^2\eta^2+\xi\bar\xi\eta\bar\eta \end{aligned}$$

удовлетворяют свойству произведений разностей. Соответствующие рациональные числа задаются формулами

$$a := S\frac{(\xi^2-\xi\bar\xi+\bar\xi^2)(\xi^2\bar\eta^2+\bar\xi^2\eta^2+\xi\bar\xi\eta\bar\eta)}{(\xi+\bar\xi)(\xi\bar\eta-\bar\xi\eta)(\xi^2\bar\eta-\bar\xi^2\eta+2\xi\bar\xi\eta-2\xi\bar\xi\bar\eta)},$$

$$b := S\frac{(\eta^2-\eta\bar\eta+\bar\eta^2)(\xi^2\bar\eta^2+\bar\xi^2\eta^2+\xi\bar\xi\eta\bar\eta)}{(\eta+\bar\eta)(\xi\bar\eta-\bar\xi\eta)(\xi\bar\eta^2-\bar\xi\eta^2+2\bar\xi\eta\bar\eta-2\xi\eta\bar\eta)},$$

$$c := S\frac{(\xi^2-\xi\bar\xi+\bar\xi^2)(\eta^2-\eta\bar\eta+\bar\eta^2)(\xi^2\bar\eta^2+\bar\xi^2\eta^2+\xi\bar\xi\eta\bar\eta)}{(\xi^2\bar\eta-\bar\xi^2\eta+2\xi\bar\xi\eta-2\xi\bar\xi\bar\eta)(\xi\bar\eta^2-\bar\xi\eta^2-2\xi\eta\bar\eta+2\bar\xi\eta\bar\eta)(\xi\eta+\bar\xi\bar\eta-2\xi\bar\eta-2\bar\xi\eta)},$$

$$d := S\frac{(\xi^2-\xi\bar\xi+\bar\xi^2)(\eta^2-\eta\bar\eta+\bar\eta^2)}{(\xi+\bar\xi)(\eta+\bar\eta)(\xi\eta+\bar\xi\bar\eta-2\xi\bar\eta-2\bar\xi\eta)}.$$

Следствие. *Над любым мнимым квадратичным полем существует бесконечное количество распадающихся типов* IV_{abcd}.

Доказательство. Действительно, требуется лишь положительность последних четырёх функций, зависящих (скажем, при $S=1$) от комплексных чисел ξ, η. Поскольку мы знаем одну пару значений $\xi=-9+\sqrt{-7}$, $\eta=-6-2\sqrt{-7}$, для которых все четыре выражения положительны, мы просто по соображениям непрерывности заключаем, что эти выражения положительны на некотором открытом конусе в произведении двух комплексных плоскостей. Результат следует из плотности в комплексной плоскости квадратичных иррациональностей из заданного поля. □

Литература

[1] Адрианов Н. М., Кочетков Ю. Ю., Суворов А. Д., Шабат Г. Б. Группы Матье и плоские деревья // Фундам. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, вып. 2. — С. 377—384.

[2] Кочетков Ю. Ю. Частное сообщение. 1995 г.

[3] Кочетков Ю. Ю. Частное сообщение. 1996 г.

[4] Grothendieck A. Esquisse d'un programme // Geometric Galois Actions. — Cambridge Univ. Press, 1977. — London Math. Society, Lecture Notes Series, vol. 243. — P. 3—43.

[5] Kochetkov Yu. Trees of diameter 4 // Proceedings of the 12th International Conference, FPSAC'00 (Formal Power Series and Algebraic Combinatorics) / ed. D. Krob, A. A. Mikhalev, A. V. Mikhalev. — Springer, 2000. — P. 447—475.

[6] Schneps L. Dessins d'enfants on the Riemann sphere // The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants / Schneps L. (ed.). — Cambridge Univ. Press, 1944. — London Math. Society, Lecture Notes Series, vol. 200. — P. 47—98.

[7] Shabat G., Voevodsky V. Drawing curves over number fields // The Grothendieck Festschrift. Vol. 3. — Birkhäuser, 1990. — P. 199—227.

[8] Shabat G., Zvonkin A. Plane trees and algebraic numbers // Jerusalem Combinatorics '93. — Contemporary Mathematics, Amer. Math. Soc., vol. 178. — 1994. — P. 233—275.

[9] Zapponi L. Fleurs, arbres et cellules: un invariant galoisien pour une famille d'arbres // Compositio Mathematika. — 2000. — Vol. 122. — P. 113—133.

[10] The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants / Schneps L. (ed.). — Cambridge Univ. Press, 1944. — London Math. Society, Lecture Notes Series, vol. 200.