Инволютивные деления для эффективных инволютивных алгоритмов

Е. С. ШЕМЯКОВА
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*
e-mail: kate_late@mail.ru

УДК 512+519.6

Ключевые слова: инволютивные деления, базисы Грёбнера, графы инволютивных делений, инволютивные алгоритмы.

Аннотация

Для изучения инволютивных делений предлагается использовать геометрический метод графов. Для инволютивных делений доказан критерий нётеровости, исследованы свойства их графов, получены признак полноты и критерий глобальности инволютивных делений. Введено понятие полного глобального инволютивного деления. Пополняя классические инволютивные деления, получаем новую серию инволютивных делений, которые приводят к более эффективным инволютивным алгоритмам нахождения базисов Грёбнера. Решена проблема, предложенная Гао, а именно получена новая серия инволютивных делений типа Поммаре и деления 2. Доказано, что деления из этой серии непрерывны.

Abstract

E. S. Shemyakova, Involutive divisions for effective involutive algorithms, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 3, pp. 237—253.

Properties of involutive divisions on monomials are studied. A new method of involutive graphs is developed. The concept of complete global involutive division is introduced. A criterion of Noetherity of involutive divisions, a property of graphs of global involutive division, a test for completeness of global involutive division, a criterion of global involutive division are considered. A new series of involutive divisions is obtained by the process of completion. The properties of the divisions contained in the constructed series are studied. It is shown that the divisions from the series are better than the classical involutive divisions for involutive algorithms. The problem stated by Gao is solved: another series of involutive divisions is obtained. It is proved that all divisions of this series are continuous.

1. Введение

Инволютивные деления рассмотрены в [1] как инструмент для построения инволютивных базисов, являющихся частным случаем базисов Грёбнера. В [6] предложена аксиоматизация этих делений. Для каждой пары (U, u), где U —

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 3, с. 237—253.

множество мономов, а $u \in U$, инволютивное деление задаёт разделение переменных на мультипликативные и немультипликативные. Эта идея принадлежит Жане [8] и Томасу [10]. Поммаре [9] использовал разделения переменных для инволютивного анализа систем уравнений с частными производными.

В [6] получены алгоритмы для нахождения инволютивных базисов полиномиальных идеалов с помощью инволютивных делений. Сформулированы свойства непрерывности и конструктивности инволютивных делений. Деление, обладающее этими свойствами, даёт эффективный алгоритм.

Геометрический метод интерпретации инволютивных делений предложен Астрелиным, Голубицким, Панкратьевым [3]. Этот метод развивается в данной работе. Он оказался очень полезным для построения новых делений, которые достаточно просто описываются геометрически, в то время как их аналитическая запись очень громоздка.

Другой взгляд на инволютивные деления — инволютивные направления — предложен Ченом и Гао в [4].

2. Основные определения

Будем использовать определения из [6]. Пусть $\mathbf{M}$ — множество всех мономов от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Определение 1. Будем говорить, что L — *инволютивное деление* на множестве $\mathbf{M}$, если для любого конечного множества $U \subset \mathbf{M}$ и для любого $u \in U$ задан подмоноид $L(u, U)$ моноида $\mathbf{M}$, удовлетворяющий следующим свойствам:

(1) если $w \in L(u, U)$ и $v \mid w$, то $v \in L(u, U)$,
(2) если $u, v \in U$ и $uL(u, U) \cap vL(v, U) \neq \varnothing$, то $u \in vL(v, U)$ или $v \in uL(u, U)$,
(3) если $v \in U$ и $v \in uL(u, U)$, то $L(v, U) \subseteq L(u, U)$,
(4) если $V \subseteq U$, то $L(u, U) \subseteq L(u, V)$ для любого $u \in V$.

Элементы $L(u, U)$ называются *мультипликативными* для u. Переменные, порождающие подмоноид $L(u, U)$, также называются *мультипликативными переменными* для u. Если $w \in uL(u, U)$, то u называется инволютивным делителем или L-делителем w, а моном $v = w/u$ называется L-мультипликативным для u. Если u — обычный делитель w, но не L-делитель, то v называется немультипликативным для u.

Определение 2. Инволютивное деление L называется *глобальным*, если для любого $u \in \mathbf{M}$ мультипликативные мономы элемента u определяются независимо от мономиального множества $U \ni u$, т. е. $L(u, U) = L(u)$.

В [6] приведены следующие примеры инволютивных делений.

Деление Томаса. Для данного конечного множества $U \subset \mathbf{M}$ переменная x_i считается мультипликативной для $u \in U$, если $\deg_i(u) = \max\{\deg_i(v) \mid v \in U\}$, и немультипликативной в противном случае.

Деление Жане. Пусть множество $U \subset \mathbf{M}$ конечно. Для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ разобьём U на группы, задаваемые набором неотрицательных чисел $d_1, \ldots, d_i$:

$$[d_1, \ldots, d_i] = \{u \in U \mid d_j = \deg_j(u),\ 1 \leqslant j \leqslant i\}.$$

Переменная x_i является мультипликативной для $u \in U$ тогда и только тогда, когда

$i = 1$ и $\deg_1(u) = \max\{\deg_1(v) \mid v \in U\}$ или
$i > 1$, $u \in [d_1, \ldots, d_{i-1}]$ и $\deg_i(u) = \max\{\deg_i(v) \mid v \in [d_1, \ldots, d_{i-1}]\}$.

Деление Поммаре. Для монома $u = x_1^{d_1} \ldots x_k^{d_k}$, где $d_k > 0$, переменные x_j, $j \geqslant k$, считаются мультипликативными, а остальные переменные — немультипликативными.

В [7] введены следующие деления.

Деление 1. Пусть U — конечное множество мономов. Переменная x_i является немультипликативной для $u \in U$, если существует такой моном $v \in U$, что $x_{i_1}^{d_1} \ldots x_{i_m}^{d_m} = \text{НОК}(u, v)$, где $1 \leqslant m \leqslant [n/2]$, $d_j > 0$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, и $x_i \in \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\}$.

Деление 2. Для монома $u = x_1^{d_1} \ldots x_k^{d_k}$, где $d_k > 0$, переменная x_i мультипликативна, если $d_i = \max\{d_1, \ldots, d_k\}$.

3. Графы глобальных инволютивных делений

Для произвольного глобального инволютивного деления $L(u)$ построим его ориентированный граф G_L в n-мерном векторном пространстве с базисом $e_1, \ldots, e_n$, где n — число рассматриваемых переменных.

Каждому моному $u = x_1^{d_1} \ldots x_n^{d_n}$ соответствует точка с координатами $(d_1, \ldots, d_n)$ — некоторая вершина графа. В то же время каждой переменной x_j соответствует базисный вектор e_j. Из таких векторов будут строиться рёбра графа.

Если переменная x_j мультипликативна для монома u, то из точки, соответствующей u, выходит вектор e_j.

Рассмотрим некоторую вершину u графа. Ей соответствуют некоторые мультипликативные переменные, интерпретируемые векторами e_j, выходящими из u. Таким образом, множество инволютивных кратных $uL(u)$ элемента u изображается некоторым конусом. Он называется инволютивным конусом элемента u.

Граф инволютивного деления Поммаре для $n = 2$ изображён на рис. 1. При $n = 3$ из каждой вершины будет выходить вверх бесконечная цепочка векторов e_3.

Граф инволютивного деления 2 для $n = 2$ изображён на рис. 2. При $n = 3$ получим последовательность вложенных конусов, порождённых векторами e_1, e_2, e_3 с вершинами в точках $x_1^d x_2^d x_3^d$. На каждой двумерной грани этих трёхмерных конусов геометрическая картина аналогична случаю $n = 2$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
x_2^2 \arrow[u] & x_1x_2^2 \arrow[u] & x_1^2x_2^2 \arrow[u] & x_1^3x_2^2 \arrow[u] & x_1^4x_2^2 \arrow[u] & x_1^5x_2^2 \arrow[u] & \\
x_2 \arrow[u] & x_1x_2 \arrow[u] & x_1^2x_2 \arrow[u] & x_1^3x_2 \arrow[u] & x_1^4x_2 \arrow[u] & x_1^5x_2 \arrow[u] & \\
1 \arrow[u] \arrow[r] & x_1 \arrow[u] \arrow[r] & x_1^2 \arrow[u] \arrow[r] & x_1^3 \arrow[u] \arrow[r] & x_1^4 \arrow[u] \arrow[r] & x_1^5 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Рис. 1. Граф инволютивного деления Поммаре для $n = 2$

На этом примере видно, что не всегда существует путь по рёбрам графа от некоторого элемента до его инволютивного кратного.

Из свойства (2) инволютивного деления вытекает следующее утверждение.

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
x_2^3 \arrow[u] & x_1x_2^3 \arrow[u] & x_1^2x_2^3 \arrow[u] & x_1^3x_2^3 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
x_2^2 \arrow[u] & x_1x_2^2 \arrow[u] & x_1^2x_2^2 \arrow[u] \arrow[r] & x_1^3x_2^2 \arrow[r] & \cdots \\
x_2 \arrow[u] & x_1x_2 \arrow[u] \arrow[r] & x_1^2x_2 \arrow[r] & x_1^3x_2 \arrow[r] & \cdots \\
1 \arrow[u] \arrow[r] & x_1 \arrow[r] & x_1^2 \arrow[r] & x_1^3 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Рис. 2. Граф инволютивного деления 2 для $n = 2$

Предложение 1. *Граф глобального инволютивного деления является лесом, т. е. набором деревьев.*

Доказательство. Для доказательства предложения достаточно показать, что в каждую вершину графа входит не более одного ребра. Предположим, что в одну вершину a приходят сразу две стрелки (например, из b и из c). Это значит, что $\deg b = \deg c$ и существуют $x_i \in L(b)$, $x_j \in L(c)$, такие что $x_i b = x_j c$. Таким образом, $bL(b) \cap cL(c) \neq \varnothing$, и по свойству (2) инволютивного деления либо $c \in bL(b)$, либо $b \in cL(c)$. Но это невозможно, так как $\deg b = \deg c$ и $b \neq c$. □

Из свойства (3) инволютивного деления следует, что векторы, выходящие из произвольной точки конуса, составляют подмножество множества векторов, выходящих из его вершины.

Определение 3 (см. [2]). Пусть K — некоторое подмножество моноида $\mathbf{M}$. Для каждого конечного $U \subset \mathbf{M}$ положим

$$\tilde{L}(u, U) = \begin{cases} L(u, L), & \text{если } u \in U \text{ и } u \in K, \\ \{1\}, & \text{если } u \in U \text{ и } u \notin K. \end{cases}$$

Будем говорить в этом случае, что задана проекция инволютивного деления L на множество K.

Тогда проектированию глобального инволютивного деления L на множество K соответствует «стирание» рёбер, выходящих из точек, не принадлежащих K. Возможны и другие преобразования, позволяющие получать из данного графа инволютивного деления граф нового деления. Например, стерев вектор e_j, выходящий из точки u, стираем также этот вектор у всех точек нового конуса точки u и получаем новое инволютивное деление.

Добавить векторы к данному графу глобального инволютивного деления можно не всегда.

Определение 4. Глобальное инволютивное деление будем называть полным, если его граф нельзя вложить в граф другого глобального инволютивного деления с тем же множеством вершин.

Предложение 2 (признак полноты). *Глобальное инволютивное деление является полным, если его граф — дерево.*

Доказательство. Предположим, что мы дополнили данный граф до графа другого глобального деления с тем же множеством вершин. Рассмотрим вершину u, в которую входит добавленный вектор. По предложению 1 точка u была корнем дерева, то есть мы добавили лишнюю вершину. Противоречие. □

Заметим, что деление Поммаре является полным, а деление 2 из [7] полным не является, так как к его графу мы можем различными способами добавить рёбра, входящие в вершины $x_1^d \dots x_n^d$. Таким образом можно получить серию примеров полных глобальных инволютивных делений. Эти примеры будут рассмотрены подробнее в последнем разделе.

Рассмотрим в n-мерном пространстве множество точек с целочисленными неотрицательными координатами. Пусть G — множество ориентированных графов с вершинами в этих точках, рёбра которых задаются единичными базисными векторами.

Теорема 1 (критерий глобальности инволютивного деления). *Рассмотрим граф A из множества G. Для каждой вершины u графа рассмотрим конус A_u с вершиной в точке u, построенный на рёбрах, выходящих из этой точки.*

Граф A задаёт глобальное инволютивное деление тогда и только тогда, когда для любых вершин u и v, таких что $A_u \cap A_v \neq \varnothing$, либо $A_u \subseteq A_v$, либо $A_v \subseteq A_u$.

Доказательство. Необходимость. Пусть A — граф глобального инволютивного деления, а u и v — некоторые его вершины. Тогда образующими конусов A_u и A_v являются рёбра, отвечающие мультипликативным переменным мономов u и v соответственно. Поэтому конусы A_u и A_v есть множества мультипликативных кратных мономов u и v.

Условие $A_u \cap A_v \neq \varnothing$ означает, что у мономов u и v есть общее мультипликативное кратное, и по свойству (2) определения инволютивного деления либо $u \in A_v$, либо $v \in A_u$. Тогда по свойству (3) определения инволютивного деления либо $A_u \subseteq A_v$, либо $A_v \subseteq A_u$.

Достаточность. Пусть для графа A из множества G условие теоремы выполняется. Построим множество моноидов $L(u)$, порождаемых переменными x_i, которые соответствуют векторам e_i, выходящим из точки u. Покажем, что семейство $L(u)$ задаёт инволютивное деление.

Свойство (1) выполняется, так как $L(u)$ — моноид, порождённый некоторым набором переменных.

Свойство (2) тоже выполняется, так как условие $uL(u) \cap vL(v) \neq \varnothing$ означает, что $A_u \cap A_v \neq \varnothing$, и значит, либо $A_u \subseteq A_v$, либо $A_v \subseteq A_u$. Тогда либо $u \in A_v$, либо $v \in A_u$.

Наконец, свойство (3) выполняется, так как условие $v \in uL(u)$ означает, что $v \in A_u$. Тогда $A_u \cap A_v \neq \varnothing$, и значит, $A_v \subseteq A_u$, то есть $L(v) \subseteq L(u)$. □

4. Графы инволютивных делений

Пусть задано инволютивное деление L и подмножество U множества мономов $\mathbf{M}$. Построим подмоноид $\bar{L}$ множества всех мономов $\mathbf{M}$, такой что

$$\bar{L}(u) = \begin{cases} L(u, U), & \text{если } u \text{ принадлежит } U, \\ \{1\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Предложение 3. *Множество $\bar{L}(u)$ задаёт глобальное инволютивное деление.*

Доказательство. Проверим свойство (1) определения 1. Пусть w принадлежит $\bar{L}(u)$ и $v \mid w$. Если u принадлежит U, то $\bar{L}(u) = L(u, U)$, и свойство выполняется. Если u не принадлежит U, то $\bar{L}(u) = \{1\}$ и, следовательно, $w = 1$, и свойство также выполняется.

Проверим свойство (2) определения 1. Пусть $u\bar{L}(u) \cap v\bar{L}(v) \neq \varnothing$. Возможны три случая.

Если u и v принадлежат U, то $\bar{L}(u) = L(u, U)$ и $\bar{L}(v) = L(v, U)$. Поэтому свойство выполняется, так как оно справедливо для деления L.

Если один из этих элементов, например u, принадлежит U, а другой, v, не принадлежит U, то $\bar{L}(u) = L(u, U)$ и $\bar{L}(v) = \{1\}$. Тогда v принадлежит $uL(u, U)$, и свойство выполняется.

Если u и v не принадлежат U, то $\bar{L}(u) = \{1\}$ и $\bar{L}(v) = \{1\}$. В этом случае $v = u$, и свойство тоже выполняется.

Проверим свойство (3) определения 1. Пусть v принадлежит $u\bar{L}(u)$. Рассмотрим четыре случая.

Если u и v принадлежат U, то $\bar{L}(u) = L(u, U)$ и $\bar{L}(v) = L(v, U)$. Поэтому свойство выполняется, так как оно выполнялось для деления L.

Если u принадлежит U и v не принадлежит U, то $\bar{L}(u) = L(u, U)$ и $\bar{L}(v) = \{1\}$. Тогда, очевидно, свойство выполняется.

Если u не принадлежит U и v принадлежит U, то $\bar{L}(v) = L(v, U)$ и $\bar{L}(u) = \{1\}$. Тогда $v = u$. Противоречие. Случай невозможен.

Если u и v не принадлежат U, то $\bar{L}(u) = \{1\}$ и $\bar{L}(v) = \{1\}$. Очевидно, свойство также выполняется.

Поскольку выбор подмоноида $L(u)$ не зависит от множества U, свойство (4) автоматически выполняется.

Полученное инволютивное деление является глобальным, так как $L(u)$ не зависит от множества U. □

Таким образом, для каждого конечного подмножества U можно построить граф глобального деления, соответствующего этому подмножеству. Из точек за пределами этого множества не выходит ни одно ребро.

Пример 1. Пусть L — деление Томаса, U — произвольное конечное подмножество мономов. Для $n = 2$ граф деления Томаса изображён на рис. 3 (точки изображают элементы множества U).

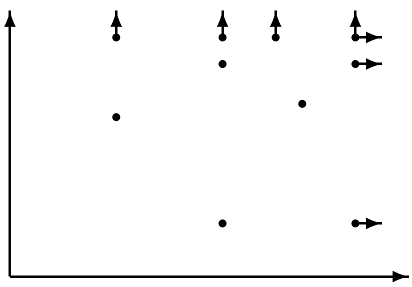


Рис. 3. Граф инволютивного деления Томаса для $n = 2$

Пример 2. Пусть L — деление Жане, U — произвольное конечное подмножество мономов. Для $n = 2$ граф изображён на рис. 4.

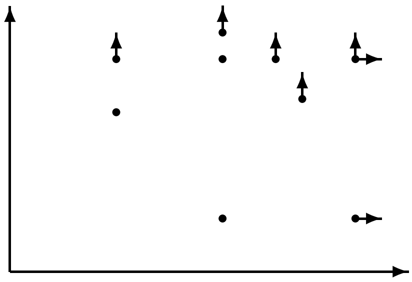
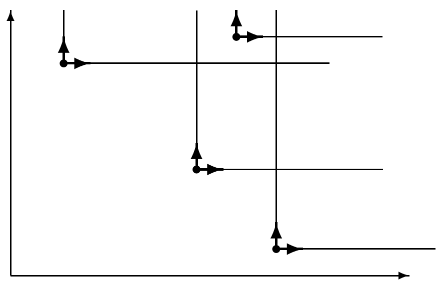


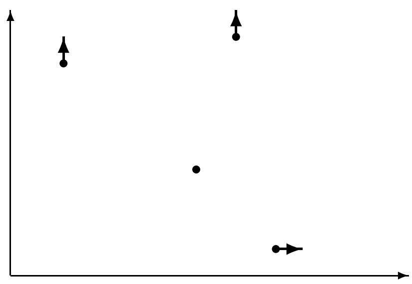
Рис. 4. Граф инволютивного деления Жане для $n = 2$

Пример 3. Пусть L — деление 1, U — произвольное конечное подмножество мономов. Расстоянием Хемминга между двумя мономами будем называть количество переменных, степени которых в этих мономах различны. Обозначим через w наименьшее общее кратное мономов u и v. Тогда переменная x_i не мультипликативна для $u \in U$, если и только если существует такой моном $v \in U$, что расстояние Хемминга между u и w не превосходит $n/2$.

Кратные любого элемента изображаются точками конуса, построенного на всех векторах базиса с вершиной в этом элементе. Общие кратные двух элементов u и v лежат в пересечении двух конусов, которое само является конусом с вершиной w. Если расстояние Хемминга между u и w не превосходит $n/2$, то соответствующие векторы, исходящие из точки u, надо стереть, так как они представляют элементы, не мультипликативные для u.

Пусть $n = 2$ и множество U состоит из четырёх элементов, изображённых на следующих рисунках точками. На первом рисунке построены конусы кратных всех элементов, на втором — мультипликативные переменные для каждого элемента множества U.





Пример 4. Глобальное инволютивное деление для $n = 1$ может быть задано с помощью произвольного подмножества неотрицательных целых чисел. То есть для x в этих степенях мультипликативный моноид равен $\mathbf{M}$.

Любое такое инволютивное деление является проекцией полного инволютивного деления, такого что $L(u) = \mathbf{M}$ для любого $u \in \mathbf{M}$.

5. Основные понятия теории инволютивных делений на языке графов

Формулировки определений из [5] и [6] можно упростить и сделать геометрически наглядными с помощью языка графов. Ниже под каждым определением из [5] и [6] (a) дано определение того же понятия на языке графов (b).

1a. Мономиальное множество U называется L-авторедуцированным, если для любых u и v из U верно $uL(u,U) \cap vL(v,U) = \varnothing$.

1b. Мономиальное множество U называется L-авторедуцированным, если инволютивные конусы элементов U не пересекаются.

2a. Мономиальное множество $\tilde{U}$ называется L-пополнением множества $U \subseteq \tilde{U}$, если для любых мономов $u \in U$ и $w \in \mathbf{M}$ существует моном $v \in \tilde{U}$, такой что $uw \in vL(v, \tilde{U})$.

2b. Мономиальное множество $\tilde{U}$ называется L-пополнением множества $U \subseteq \tilde{U}$, если инволютивный конус множества $\tilde{U}$ содержит конус множества U.

3a. Множество U называется конечно-порождённым относительно L, если U конечно и его L-пополнение существует и тоже конечно.

3b. Множество U называется конечно-порождённым относительно L, если конус U содержится в инволютивном конусе некоторого конечного множества $\tilde{U}$.

4a. Инволютивное деление L называется нётеровым, если любое конечное множество U является конечно-порождённым относительно L.

4b. Инволютивное деление L называется нётеровыми, если конус любого конечного множества U содержится в инволютивном конусе некоторого конечного множества $\tilde{U}$.

5a. Множество U называется L-полным, если оно совпадает со своим L-пополнением.

5b. Множество U называется L-полным, если конус множества U совпадает с его инволютивным конусом.

6a. Множество называется L-инволютивным, если оно L-авторедуцированное и L-полное.

6b. Множество называется L-инволютивным, если инволютивные конусы элементов U не пересекаются и инволютивный конус множества U совпадает с его конусом. При этом конусы элементов не обязаны совпадать с их инволютивными конусами. Пример: рассмотрим мономы $A = x_1^3x_2^3$ и $B = x_1^3x_2^2$. На рис. 5 изображён граф инволютивного деления, заданного следующим образом: $L(A,\{A,B\}) = \{x_1,x_2\}$, $L(B,\{A,B\}) = \{x_1\}$, $L(A,\{A\}) = \{x_1,x_2\}$, $L(B,\{B\}) = \{x_1\}$ и для всех остальных множеств U и их элементов $u \in U$ полагаем $L(u,U) = \{1\}$.

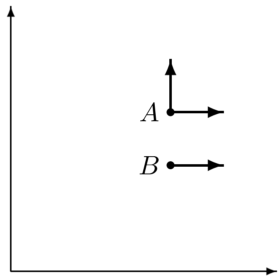


Рис. 5

7a. Множество U называется локально инволютивным, если

$$(\forall u \in U)(\forall x_i \in NM_L(u,U))(\exists v \in U)[v \mid_L (ux_i)].$$

7b. Множество U называется локально инволютивным, если любое немультипликативное продолжение ux_i для любого $u \in U$ лежит в инволютивном конусе U.

6. Нётеровы глобальные инволютивные деления

Рассмотрим глобальное инволютивное деление L на множестве всех мономов $\mathbf{M}$ и его граф G. Также рассмотрим сечение графа G подпространством H, заданным уравнениями $\deg_{q_i}(u) = d_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Обозначим полученный граф через $\tilde{G}$.

Согласно критерию глобальных инволютивных делений граф $\tilde{G}$ является графом некоторого глобального инволютивного деления $\tilde{L}$. Инволютивное деление $\tilde{L}$ назовём сечением инволютивного деления L подпространством H. Оно может быть задано так: каждому моному $u = w \ / \prod\limits_{i=1}^{m} x_{q_i}^{d_i}$, $w \in H$, ставится в соответствие моноид, порождённый множеством мультипликативных переменных w за исключением переменных x_{q_i}, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Замечание 1. Если глобальное инволютивное деление нётерово, то любое сечение его графа соответствует нётерову делению.

Действительно, рассмотрим любое конечное множество U, принадлежащее данному сечению. Так как деление нётерово, то существует конечное подмножество V конуса C_U, такое что инволютивный конус V покрывает конус U. Если точка из $V \subset C_U$ не принадлежит сечению, то её инволютивный конус не имеет общих точек с сечением. Значит, если выбросить из множества V все такие точки, то полученное множество принадлежит сечению и его инволютивный конус покрывает конус U.

Теорема 2. *Глобальное инволютивное деление L на множестве всех мономов $\mathbf{M}$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ является нётеровым тогда и только тогда, когда* *его граф G содержит бесконечную последовательность конусов размерности n, координаты вершин которых неограниченно возрастают, и любое сечение графа обладает аналогичным свойством.*

Доказательство. Достаточность. Пусть граф G содержит бесконечную последовательность S конусов размерности n, координаты вершин которых стремятся к бесконечности независимо друг от друга, причём любое сечение графа также содержит бесконечную последовательность конусов размерности, равной размерности сечения, и координаты их вершин стремятся к бесконечности независимо друг от друга. Обозначим эту последовательность S_H, где H — подпространство, соответствующее сечению.

По критерию глобальных инволютивных делений последовательности S и S_H для любого H — последовательности вложенных конусов. Заметим, что по тому же критерию глобальных инволютивных делений в каждом сечении H существует только одна последовательность вложенных конусов размерности, равной размерности сечения, и координаты их вершин стремятся к бесконечности независимо друг от друга.

Лемма 1. *В последовательностях S и S_H для любого H есть бесконечное число инволютивных конусов графа G.*

Доказательство. В последовательности S все конусы — конусы графа G размерности n. Для неё всё ясно.

Для любой из последовательностей S_H достаточно доказать, что существует лишь конечное число конусов из S_H, являющихся гранями конусов большей размерности.

Предположим противное. Тогда существует сечение H, заданное уравнениями $\deg_{q_1} = d_1,\ldots,$ $\deg_{q_m} = d_m$, такое что в соответствующей последовательности S_H конусов размерности m есть бесконечная последовательность конусов, являющихся гранями конусов (из графа G) большей размерности. Размерности конусов из графа G не превосходят числа n, поэтому существует t, $m+1 \leqslant t \leqslant n$, такое что в последовательности S_H найдётся бесконечная подпоследовательность конусов $C_1, C_2, \ldots$, являющихся соответственно гранями конусов $K_1, K_2, \ldots$ (из графа G) размерности t.

По критерию глобальных инволютивных делений конусы $K_1, K_2, \ldots$ образуют вложенную последовательность конусов, которые лежат в некотором сечении размерности t графа G. Координаты вершин конусов $K_1, K_2, \ldots$, в том числе и x_{q_i}, $1 \leqslant i \leqslant m$, неограниченно возрастают, принимая целые значения. То есть за конечное число шагов становятся больше чисел $d_1, \ldots, d_m$, фиксированных для нашего m-мерного сечения H. Конусы с такими вершинами уже не будут пересекаться с подпространством сечения. Противоречие. □

Замечание 2. Используя лемму, получаем, что сечение H размерности m графа G (и сам граф G) содержит бесконечную последовательность S_H^1 (S^1) конусов размерности m (n), координаты вершин которых стремятся к бесконечности независимо друг от друга, причём эти конусы не являются сечениями других конусов графа G, а значит, они являются инволютивными конусами графа G.

Рассмотрим конечное множество мономов A из множества всех мономов $\mathbf{M}$ и произвольный моном $a \in A$. Обозначим через C_A конус множества A. Пусть C_a — конус размерности n с вершиной в a. В G есть бесконечная последовательность S конусов размерности n, координаты вершин которых стремятся к бесконечности независимо друг от друга. Среди них найдётся инволютивный конус с вершиной из C_a, то есть конус, целиком лежащий в C_a. Обозначим его вершину a_n.

Множество $C_A \setminus C_{a_n}$ — объединение конечного числа конусов $T_1, \ldots, T_r$ размерности меньше n. Каждый из конусов $T_1, \ldots, T_r$ лежит в некотором сечении графа G. Для каждого из этих сечений, используя замечание 2, проведём рассуждения, аналогичные рассуждениям в предыдущем абзаце. Действуя таким образом и последовательно уменьшая размерность, мы представим конус C_A в виде объединения инволютивных конусов с вершинами из C_A. Значит, инволютивное деление нётерово.

Необходимость. Пусть теперь G — граф нётерова глобального инволютивного деления размерности n. Для любой точки a конус C_a — объединение конечного числа инволютивных конусов графа G. Среди них есть конус размерности n. Координаты его вершин не меньше, чем соответствующие координаты точки a. Точка a произвольная. Значит, существует бесконечная последовательность конусов размерности n, таких что координаты их вершин неограниченно возрастают.

По замечанию 1 любое сечение графа нётерова глобального инволютивного деления является нётеровым глобальным инволютивным делением. Таким образом, существует аналогичная последовательность конусов соответствующей размерности. $\square$

Важность нётеровых инволютивных делений показывает следующее предложение.

Предложение 4 ([6]). *Если инволютивное деление нётерово, то любой мономиальный идеал имеет конечный инволютивный базис.*

7. Обобщение инволютивного деления деления 2

Граф деления 2 представляет собой последовательность вложенных n-мерных конусов A_d с вершинами в точках вида $(d, \ldots, d)$, каждая $(n-1)$-мерная грань которых в свою очередь является графом деления 2 размерности $n-1$. Рассмотрим два соседних n-мерных конуса в последовательности A_d: A_u с вершиной в точке $(u, \ldots, u)$ и вложенный в него A_{u+1} с вершиной в точке $(u+1, \ldots, u+1)$. Не нарушая критерия глобального инволютивного деления (инволютивные конусы не должны пересекаться), вставим между A_u и A_{u+1} последовательность вложенных конусов $A_{u_1}, A_{u_2}, \ldots, A_{u_{n-1}}$ размерности n с вершинами $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, где полагаем $u_0 = (u, \ldots, u)$, $u_n = (u+1, \ldots, u+1)$ и при переходе от u_i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, к u_{i+1} ровно одна координата увеличивается на 1. Получим $n!$ различных вариантов вставки $n-1$ конусов для каждой пары соседних конусов A_u, A_{u+1}, т. е. бесконечное множество новых инволютивных делений. Например, один из вариантов вставки для $n = 3$ изображён на рис. 6.

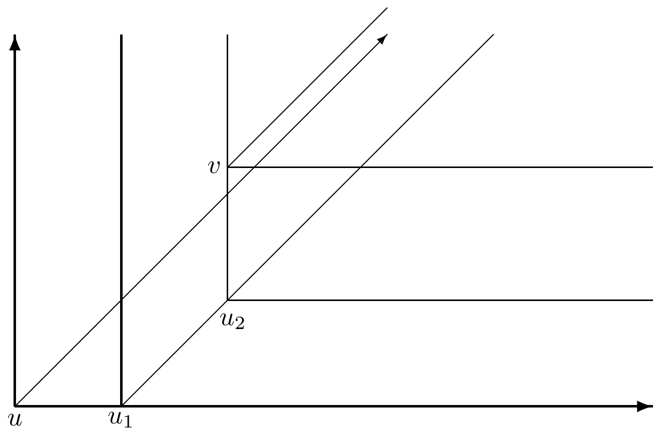


Рис. 6

Чтобы полученное деление стало полным, надо, последовательно уменьшая размерность, выполнить аналогичные вставки на всех гранях, согласовывая их со вставками предыдущей размерности. Тогда граф станет деревом, и по доказанному ранее признаку полноты деления будут полными.

Полученные инволютивные деления назовём обобщениями инволютивного деления 2. Эти деления имеют меньшее число немультипликативных переменных для некоторых из мономов по сравнению с делением 2. То есть уменьшается число немультипликативных продолжений, рассматриваемых в процессе приведения в инволюцию полиномиальных систем, как видно из алгоритмов, приведённых в [6]. Таким образом, повышается эффективность вычислений.

Замечание 3. Из критерия нётеровости следует, что все деления, полученные в этом разделе, являются нётеровыми.

Для построения алгоритмически эффективных инволютивных делений необходимо [6], чтобы они удовлетворяли дополнительным свойствам, помимо условий (1)—(4) определения 1.

Определение 5 ([5]). Инволютивное деление L называется *непрерывным*, если для любого конечного множества $U \in \mathbf{M}$ и для любой конечной последовательности $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ элементов из U, таких что

$$(\forall i < k)(\exists x_j \in NM_L(u_i, U))[u_{i+1} \mid_L u_i x_j],$$

неравенство $u_i \neq u_j$ верно для всех $i \neq j$.

Прежде чем формулировать и доказывать следующее предложение, введём некоторые определения. Обозначим через $\delta^{(i)}$ i-й базисный вектор, а через

$\delta(\beta)$ — вектор, у которого на местах, соответствующих мультипликативным переменным β, стоят единицы, на остальных местах — нули.

Определение 6 ([4]). Рассмотрим два вектора $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ с действительными координатами. Вектор $(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$ называется адамаровым произведением векторов a и b, обозначается $a * b$.

Определение 7 ([4]). Рассмотрим векторы координат, соответствующие мономам α и β. Будем обозначать их теми же буквами. Тогда моном β называется псевдоделителем монома α, если для соответствующих векторов существуют индекс i и $\mu \in \mathbf{N}^n$, такие что $\alpha + \delta^{(i)} = \beta + \mu * \delta(\beta)$, причём x_i — немультипликативная переменная для монома, соответствующего α.

Предложение 5. *Обобщения инволютивного деления 2 являются непрерывными делениями.*

Доказательство. Согласно [4] инволютивное деление непрерывно тогда и только тогда, когда любая последовательность псевдоделителей в конечном множестве вершин графа инволютивного деления состоит из попарно различных элементов. Граф обобщённого деления 2 представляет собой последовательность вложенных n-мерных конусов, каждая $(n-1)$-мерная грань которых в свою очередь является графом обобщённого деления 2 размерности $n-1$. Занумеруем n-мерные конусы по порядку от начала координат.

Будем говорить, что точка *лежит на конусе*, если она принадлежит одной из граней конуса. Возможны два случая.

1. $\alpha + \delta^{(i)}$ лежит не только на том же n-мерном конусе (обозначим его A), но и на той же грани конуса (обозначим её A_1), что и α. Равенство $\alpha + \delta^{(i)} = \beta + \mu * \delta(\beta)$ означает, что $\alpha + \delta^{(i)}$ содержится в инволютивном конусе β. Поэтому β лежит либо на грани A_1, либо на каком-то из предыдущих конусов. В последнем случае инволютивный конус β обязан быть n-мерным, иначе он будет пересекать n-мерный конус A, что невозможно по критерию глобальных инволютивных делений. То есть у β нет немультипликативных переменных, а значит, нет и псевдоделителей.

2. $\alpha + \delta^{(i)}$ лежит на конусе с бóльшим, чем у конуса A, номером, n-мерном конусе B. Аналогично случаю 1 $\alpha + \delta^{(i)}$ содержится в инволютивном конусе β. Поэтому β лежит либо на B, либо на каком-то из предыдущих конусов. В последнем случае инволютивный конус β обязан быть n-мерным аналогично предыдущему случаю.

Итак, β либо лежит на том же конусе и той же его грани, что и α, либо лежит на конусе с бóльшим номером, либо у β нет псевдоделителей. Значит, в последовательности псевдоделителей повторение элемента (зацикливание) возможно лишь в том случае, когда все элементы цикла лежат на одной и той же $n-1$-мерной грани, являющейся графом деления 2 размерности $n-1$.

Осталось проверить непрерывность обобщения инволютивного деления 2 размерности $n = 1$. При $n = 1$ обобщение инволютивного деления 2 совпадает с делением 2, которое, как известно из [7], непрерывно. □

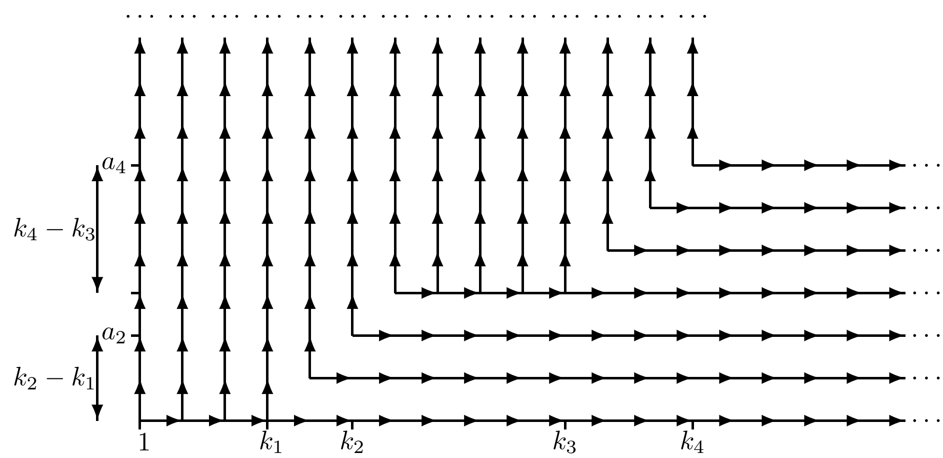
Алгоритмически эффективные инволютивные деления должны быть ещё и конструктивными [6]. Конструктивны ли обобщения деления 2? Это пока не ясно. Обобщённые деления 2 могут быть заданы аналитически следующим образом. Для каждого натурального числа d зададим перестановку σ_d чисел от 1 до n. Для мономов вида

$$(x_1^d \dots x_n^d) * x_{\sigma_d(1)},$$
$$(x_1^d \dots x_n^d) * x_{\sigma_d(1)} * x_{\sigma_d(2)},$$
$$\dots$$
$$(x_1^d \dots x_n^d) * x_{\sigma_d(1)} * x_{\sigma_d(2)} * \dots * x_{\sigma_d(n)}$$

все переменные являются мультипликативными. Для любого другого монома $u = x_1^{d_1} \dots x_k^{d_k}$, где $d_k > 0$, переменная x_i мультипликативная, если $d_i = \max\{d_1, \dots, d_k\}$.

8. Обобщение инволютивного деления Поммаре и деления 2

В работе [4] поставлен вопрос о существовании обобщений деления Поммаре и деления 2. Такие деления могут оказаться полезными для алгоритмов из [6]. Следующая серия делений является обобщением сразу двух этих типов. Поэтому назовём такие деления обобщением инволютивного деления Поммаре и деления 2. На языке графов эта серия описывается просто: сначала идёт слой деления Поммаре, потом слой деления 2, потом опять слой деления Поммаре и т. д. Например, при $n = 2$ одно из делений этой серии выглядит следующим образом:



Зададим такие деления аналитически. Пусть $k_1, k_2, \ldots$ — неубывающая последовательность натуральных чисел. Для чётных положительных i положим $a_i = (i/2 - 1) + \sum\limits_{n=1}^{i/2}(k_{2n} - k_{2n-1})$, и пусть $a_0 = -1$. Для любого монома $u = x_1^{d_1} \ldots x_k^{d_k}$, где $d_k > 0$ (то есть $d_{k+1} = \ldots = d_n = 0$), положим:

(1) если

$$\begin{cases} k_i < d_1 \leqslant k_{i+1}, \\ a_i < d_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} k_i < d_1, \\ a_i = d_2, \end{cases} \quad \text{где } i \text{ чётное,}$$

то

если $k \neq 2$, то x_j мультипликативная для всех $j \geqslant k$,

если $k = 2$, то x_j мультипликативная для всех $j \geqslant k$ и x_1 мультипликативная тогда и только тогда, когда $d_2 = a_i$;

(2) если

$$\begin{cases} k_i < d_1 \leqslant k_{i+1}, \\ a_{i-1} < d_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} k_i < d_1, \\ a_{i_1} < d_2 \leqslant a_{i+1}, \end{cases} \quad \text{где } i \text{ нечётное,}$$

то x_j мультипликативная тогда и только тогда, когда $h_j = \max\limits_t h_t$, где

$$h_j = \begin{cases} d_j, & \text{если } j \neq 1, 2, \\ d_1 - (k_i + 1), & \text{если } j = 1, \\ d_2 - (a_{i-1} + 2), & \text{если} j = 2. \end{cases}$$

Области (1) и (2) — это слои делений Поммаре и делений 2 соответственно. Занумеруем слои от начала координат. По критерию глобальных инволютивных делений обобщения инволютивного деления Поммаре и деления 2 глобальные инволютивные.

Предложение 6. *Обобщения инволютивного деления Поммаре и деления 2 являются непрерывными.*

Доказательство. Аналогично рассуждениям в доказательстве предложения 5 рассмотрим произвольные вершины графа α и β, $\delta^{(i)}$ — i-й базисный вектор, $\delta(\beta)$ — вектор, у которого на местах, соответствующих мультипликативным переменным β, стоят единицы, на остальных местах — нули. Аналогично, согласно [4] инволютивное деление непрерывно тогда и только тогда, когда любая последовательность псевдоделителей в конечном множестве вершин его графа состоит из попарно различных элементов.

Рассмотрим равенство $\alpha + \delta^{(i)} = \beta + \mu * \delta(\beta)$. Возможны два случая.

1. $\alpha + \delta^{(i)}$ лежит в следующем слое (по отношению к слою, в котором находится α). То есть $\alpha + \delta^{(i)}$ лежит на границе слоя — n-мерном конусе A. Тогда β лежит либо в том же слое, либо в каком-то из предыдущих слоёв. В последнем случае инволютивный конус β обязан быть n-мерным, иначе он будет пересекать n-мерный конус A, что невозможно по критерию глобальных инволютивных делений.

2. $\alpha + \delta^{(i)}$ и α лежат в одном слое. Обозначим нижнюю границу этого слоя, n-мерный конус, через B. Тогда β лежит либо в том же слое, либо в каком-то из предыдущих слоёв. В последнем случае инволютивный конус β обязан быть n-мерным, иначе он будет пересекать n-мерный конус B, что невозможно по критерию глобальных инволютивных делений.

Значит, при переходе от монома α к его псевдоделителю β либо у β нет псевдоделителей, то есть на этом элементе цепочка заканчивается и β отличен от всех предыдущих элементов цепочки, либо β лежит в том же или следующем (по отношению к слою, в котором находится α) слое. Элементы цепочки, находящиеся в одном слое, различны в силу непрерывности делений 2 и Поммаре [7]. Элементы, находящиеся в разных слоях, различны, так как слои не пересекаются. Вернуться в уже пройденный слой цепочка не может. Значит, в любой цепочке псевдоделителей все элементы различны. $\square$

Автор благодарит Е. В. Панкратьева и А. Семёнова за советы и комментарии, а также А. Зобнина и А. Овчинникова за проявленную самоотверженность в рецензировании данной статьи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 02-01-01033.

Литература

[1] Жарков А. Ю., Блинков Ю. А. Инволютивные системы алгебраических уравнений // Программирование. — 1994. — С. 53—56.

[2] Шемякова Е. С. Инволютивные деления. Графы // Программирование.

[3] Astrelin A. V., Golubitsky O. D., Pankratiev E. V. Gröbner bases and involutive bases // Algebra: Proceedings of the International Algebraic Conference on the Occasion of the 90th Birthday of A. G. Kurosh, Moscow, Russia, May 25—30, 1998. — Berlin: Walter de Gruyter, 2000. — P. 49—55.

[4] Chen Yu-Fu, Gao Xiao-Shan. Involutive directions and new involutive divisions // Comput. Math. Appl. — 2001. — Vol. 41, no. 7—8. — P. 945—956.

[5] Gerdt V. P., Berth M., Czichowski G. Involutive divisions in «Mathematica»: implementation and some applications.

[6] Gerdt V. P., Blinkov Yu. A. Ivolutive bases of polynomial ideals // Mathematics and Computers in Simulation. — 1998. — Vol. 45. — P. 519—542.

[7] Gerdt V. P., Blinkov Yu. A. Minimal involutive bases // Mathematics and Computers in Simulation. — 1998. — Vol. 45. — P. 543—560.

[8] Janet M. Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles // J. Math. Pure Appl. — 1920. — Vol. 3. — P. 65—151.

[9] Pommaret J. F. Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups. — New York: Gordon and Breach, 1978.

[10] Thomas J. Differential Systems. — New York: American Mathematical Society, 1937.