О мягкости отображений единичного шара борелевских мер*

Ю. В. САДОВНИЧИЙ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: uvs@mail333.com

УДК 515.12

Ключевые слова: функтор, мягкое отображение, AE(0)-пространство, абсолютный экстензор, аксиома Мартина.

Аннотация

Основным результатом работы являются две теоремы. Первая из них утверждает, что функтор U_τ переводит 0-мягкие отображения пространств веса $\leqslant\omega_1$ на польские пространства в мягкие отображения. Вторая теорема, являющаяся следствием первой, утверждает, что функтор U_τ переводит AE(0)-пространства веса $\leqslant\omega_1$ в AE-пространства. Эти теоремы доказываются в предположении аксиомы Мартина $\mathrm{MA}(\omega_1)$.

Распространить эти результаты на пространства веса $\geqslant\omega_2$ нельзя. Для пространств веса ω_1 эти утверждения нельзя получить без дополнительных теоретико-множественных предположений. Так, вопрос о том, является ли пространство $U_\tau(\mathbb{R}^{\omega_1})$ абсолютным экстензором, нельзя разрешить в аксиоматике ZFC.

Основной результат нельзя перенести на функтор U_R единичного шара радоновых мер. В самом деле, $U_R(\mathbb{R}^{\omega_1})$ не является вещественно полным пространством и, следовательно, $U_R(\mathbb{R}^{\omega_1}) \notin \mathrm{AE}(0)$.

Abstract

Yu. V. Sadovnichii, On soft mappings of the unit ball of Borel measures, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 4, pp. 41—54.

The main result of this paper is two theorems. One of them asserts that the functor U_τ takes the 0-soft mappings between spaces of weight $\leqslant\omega_1$ and Polish spaces to soft mappings. The other theorem, which is a corollary to the first one, asserts that the functor U_τ takes the AE(0)-spaces of weight $\leqslant\omega_1$ to AE-spaces. These theorems are proved under Martin's axiom $\mathrm{MA}(\omega_1)$.

The results cannot be extended to spaces of weight $\geqslant\omega_2$. For spaces of weight ω_1, these results cannot be obtained without additional set-theoretic assumptions. Thus, the question as to whether the space $U_\tau(\mathbb{R}^{\omega_1})$ is an absolute extensor cannot be answered in ZFC.

The main result cannot be transferred to the functor U_R of the unit ball of Radon measures. Indeed, the space $U_R(\mathbb{R}^{\omega_1})$ is not real-compact and, therefore, $U_R(\mathbb{R}^{\omega_1}) \notin \mathrm{AE}(0)$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 03-01-00706).

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 4, с. 41—54.

Введение

Основным результатом работы являются теоремы 3.4 и 3.5. Первая из них утверждает, что функтор U_τ переводит 0-мягкие отображения пространств веса $\leqslant\omega_1$ на польские пространства в мягкие отображения. Теорема 3.5, являющаяся следствием теоремы 3.4, утверждает, что функтор U_τ переводит $\mathrm{AE}(0)$-пространства веса $\leqslant\omega_1$ в AE-пространства. Эти теоремы доказываются в предположении аксиомы Мартина $\mathsf{MA}(\omega_1)$. Для функтора P_τ соответствующие утверждения доказаны в [6].

Распространить эти результаты на пространства веса $\geqslant\omega_2$ нельзя (замечание 3.6). Для пространств веса ω_1 эти утверждения нельзя получить без дополнительных теоретико-множественных предположений. Так, из предложения 3.7 вытекает, что вопрос о том, является ли пространство $U_\tau(\mathbb{R}^{\omega_1})$ абсолютным экстензором, нельзя разрешить в аксиоматике ZFC.

Теоремы 3.4 и 3.5 нельзя перенести на функтор U_R единичного шара радоновых мер. В самом деле, в [5] показано, что $U_R(\mathbb{R}^{\omega_1})$ не является вещественно полным пространством и, следовательно, $U_R(\mathbb{R}^{\omega_1})\notin\mathrm{AE}(0)$.

Параграфы 1 и 2 носят предварительный характер. Здесь приводятся сведения, необходимые для доказательства основных результатов. В частности, в § 2 утверждения теорем 3.4 и 3.5 получены для пространств со счётной базой (теоремы 2.10 и 2.11).

Все пространства предполагаются тихоновскими, все отображения, как правило, непрерывны. *Компактами* называются бикомпактные хаусдорфовы пространства. Через $|A|$ обозначается мощность множества A. Порядковое число отождествляется с множеством всех предыдущих порядковых чисел.

§ 1. Функтор U_τ

Пусть $\mathcal{B}(X)$ — σ-алгебра всех борелевских множеств пространства X. *Борелевской мерой* на X называется счётно-аддитивная функция $\mu\colon\mathcal{B}(X)\to[0,+\infty)$. Множество всех борелевских мер на X обозначается через $M(X)$. В дальнейшем борелевские меры будем называть просто *мерами*. Для $\mu\in M(X)$ мы полагаем $\|\mu\|=\mu(X)$. Мера $\mu\in M(X)$ называется

1) *вероятностной*, если $\|\mu\|=1$,
2) *радоновой*, если $\mu(B)=\sup\{\mu(K)\colon K\subset B$ и K есть компакт$\}$ для любого борелевского множества $B\in\mathcal{B}(X)$,
3) *τ-аддитивной*, если $\mu(G_0)=\sup\{\mu(G)\colon G\in\mathcal{G}_0\}$ для любого открытого множества G_0 и любого направленного вверх семейства $\mathcal{G}_0$ открытых подмножеств X, дающего в сумме множество G_0,
4) *регулярной*, если $\mu(B)=\sup\{\mu(F)\colon F\subset B$ и F замкнуто$\}$.

1.1. Предложение ([10]). *Всякая радонова мера τ-аддитивна, а всякая τ-аддитивная мера регулярна.*

Всюду в § 1 предполагаем, что Y есть подпространство пространства X. Пусть $B \in \mathcal{B}(Y)$. Для $\mu \in M(X)$ положим

$$r_Y^X(\mu)(B) = \inf\{\mu(C)\colon C \in \mathcal{B}(X) \text{ и } B \subset C\}. \tag{1.1}$$

1.2. Предложение ([10]). *Определённая формулой* (1.1) *функция* $r_Y^X(\mu)$ *есть мера на* Y.

Меру $r_Y^X(\mu)$ будем называть *ограничением* меры μ на множество Y, а отображение $r_Y^X\colon M(X) \to M(Y)$ — *оператором ограничения*. Для $\mu \in M(Y)$ и $B \in \mathcal{B}(X)$ положим

$$e_X^Y(\mu)(B) = \mu(B \cap Y). \tag{1.2}$$

1.3. Предложение ([10]). *Определённая формулой* (1.2) *функция* $e_X^Y(\mu)$ *есть мера на* X, *причём* $\|e_X^Y(\mu)\| = \|\mu\|$.

Меру $e_Y^X(\mu)$ будем называть *продолжением* меры μ с множества Y на множество X, а отображение $e_X^Y\colon M(Y) \to M(X)$ — *оператором продолжения*. Следующее равенство очевидно:

$$r_Y^X \circ e_X^Y = \mathrm{id}_{M(Y)}. \tag{1.3}$$

1.4. Предложение ([10]). *Мера* $\mu \in M(Y)$ τ*-аддитивна тогда и только тогда, когда* τ*-аддитивна мера* $e_X^Y(\mu)$.

Обозначим через $M_\tau(X)$, $U_\tau(X)$ и $P_\tau(X)$ соответственно множество всех τ-аддитивных мер на X, множество всех τ-аддитивных мер на X с $\|\mu\| \leqslant 1$ и множество всех τ-аддитивных вероятностных мер на X. Символы $M_R(X)$, $U_R(X)$ и $P_R(X)$ будут обозначать соответствующие множества радоновых мер на X, а символы $M_r(X)$, $U_r(X)$ и $P_r(X)$ — множества регулярных мер.

В силу предложения 1.4 отображение $e_X^Y\colon M(Y) \to M(X)$ порождает отображение $e_X^Y\colon U_\tau(Y) \to U_\tau(X)$. Положим $U_Y^*(X) = \{\mu \in U_\tau(X)\colon \mu(B) = 0$ для любого $B \in \mathcal{B}(X)$ с $B \cap Y = \varnothing\}$.

1.5. Предложение ([4]). *Верно равенство* $e_X^Y \circ r_Y^X|_{U_Y^*(X)} = \mathrm{id}$.

Из предложений 1.4 и 1.5 вытекает

$$e_X^Y(U_\tau(Y)) = U_Y^*(X). \tag{1.4}$$

Из (1.3) и (1.4) следует

$$r_Y^X(U_Y^*(X)) = U_\tau(Y). \tag{1.5}$$

Пространство X называется *абсолютно борелевским множеством*, если X является борелевским подмножеством любого (какого-нибудь) своего компактного расширения. Примерами абсолютно борелевских множеств являются локально компактные пространства. Другой класс абсолютно борелевских множеств образуют польские пространства, т. е. сепарабельные пространства, метризуемые полной метрикой. Польское пространство, как и всякое пространство, метризуемое полной метрикой, по теореме Чеха является абсолютным G_δ-множеством.

Вытекающее из (1.4) равенство $e^X_{\beta X}(M_\tau(X)) = M^*_X(\beta X)$, где βX — стоун-чеховское расширение пространства X, имеет своим следствием следующее утверждение.

1.6. Предложение. *Если X — абсолютно борелевское множество, то $M_R(X) = M_\tau(X)$ и, следовательно, $U_R(X) = U_\tau(X)$ и $P_R(X) = P_\tau(X)$.*

Для мер на компакте K понятия регулярности, τ-аддитивности и радоновости совпадают. Множество $U_R(K) = U_\tau(K) = U_r(K)$ будем обозначать через $U(K)$. Напомним, что $*$-слабая топология на $U(K)$ задаётся вложением $U(K) \to \mathbb{R}^{C(K)}$, которое отождествляет меру μ с её интегральным представлением $\int\limits_\mu : C(K) \to \mathbb{R}$.

Отображения $e^X_{\beta X} : U_\tau(X) \to U^*_X(\beta X)$ и $r^{\beta X}_X : U^*_X(\beta X) \to U_\tau(X)$ обозначим через e^X и r_X соответственно. Из (1.3) вытекает, что отображение e^X является теоретико-множественным вложением. Определим $*$-слабую топологию на $U_\tau(X)$, считая e^X топологическим вложением.

Пусть $f : X \to Z$ — непрерывное отображение, $\mu \in M(X)$ и $B \in \mathcal{B}(Z)$. Полагая

$$M_\tau(f)(\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B)), \tag{1.6}$$

получаем меру $M_\tau(f)(\mu)$ на Z. Равенство (1.6) определяет отображение

$$M(f) : M(X) \to M(Z).$$

Очевидно, что $M(f)(U_\tau(X)) \subset U_\tau(Z)$ и $M(f)(U_R(X) \subset U_R(Z)$. Следовательно, равенство (1.6) определяет отображения $U_\tau(f) : U_\tau(X) \to U_\tau(Z)$ и $U_R(f) : U_R(X) \to U_R(Z)$. Ясно также, что

$$\|U_\tau(f)(\mu)\| = \|\mu\|. \tag{1.7}$$

Кроме того,

$$U_\tau(f)(t\mu) = tU_\tau(f)(\mu) \quad \text{для любого} \quad t \in [0,1]. \tag{1.8}$$

Отображения $U_\tau(f)$ и $U_R(f)$ непрерывны. Более того, имеет место следующая теорема.

1.7. Теорема ([3]). *Конструкции U_τ и U_R являются ковариантными функторами, действующими в категории Tych и продолжающими функтор U : Comp $\to$ Comp.*

1.8. Предложение ([4]). *Пусть γX — компактификация пространства X. Тогда отображения $e^X_{\gamma X}$ и $r^{\gamma X}_X|_{U^*_X(\gamma X)}$ являются взаимно обратными гомеоморфизмами.*

Из определения (1.6) вытекает, что если $Y \subset X$ и $i^Y_X : Y \to X$ — тождественное вложение, то

$$U_\tau(i^Y_X) = e^Y_X. \tag{1.9}$$

Следствием равенства (1.9) и ковариантности функтора U_τ является следующее утверждение.

1.9. Предложение. *Пусть $f\colon X \to Z$ — непрерывное отображение, а $X_0 \subset X$ и $Z_0 \subset Z$ — такие подпространства, что $f(X_0) \subset Z_0$. Тогда справедливо равенство $e_Z^{Z_0} \circ U_\tau(f_0) = U_\tau(f) \circ e_X^{X_0}$, где $f_0 = f|_{X_0}$.*

Из предложений 1.8 и 1.9 следует утверждение 1.10.

1.10. Предложение. *Пусть $f\colon X \to Z$ — непрерывное отображение, $\gamma f\colon \gamma X \to \gamma Z$ — какая-то его компактификация. Тогда верно равенство $U_\tau(f) = r_Z^{\gamma Z} \circ U(\gamma f) \circ e_{\gamma X}^X$.*

1.11. Теорема ([3]). *Функтор U_τ сохраняет (замкнутые) вложения.*

Пусть $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta, A\}$ — обратный спектр, $X = \varprojlim S$, а $\pi_\alpha\colon X \to X_\alpha$ — предельные проекции спектра S. По теореме 1.7 семейства $U_\tau(S) = \{U_\tau(X_\alpha), U_\tau(\pi_\alpha^\beta), A\}$ и $U_R(S) = \{U_R(X_\alpha), U_R(p_\alpha^\beta), A\}$ также являются обратными спектрами. Обозначим через $R_S\colon U_\tau(X) \to \varprojlim U_\tau(S)$ предел отображений $U_\tau(\pi_\alpha)$, $\alpha \in A$. Аналогично определяется отображение $R'_S\colon U_R(X) \to \varprojlim U_R(S)$.

1.12. Теорема ([3]). *Отображения R_S и R'_S являются вложениями. Если $\pi_\alpha(X)$ всюду плотно в X_α для всякого $\alpha \in A$, то $R_S(U_\tau(X))$ всюду плотно в $\varprojlim U_\tau(S)$, а $R'_S(U_R(X))$ всюду плотно в $\varprojlim U_R(S)$. Если, кроме того, A счётно, то R'_S является гомеоморфизмом.*

Пусть $\mu_0 \in U_\tau(X)$ и $V_1, \ldots, V_k$ — открытые подмножества пространства X. Для $\varepsilon > 0$ положим

$$N(\mu_0, V_1, \ldots, V_k, \varepsilon) = \{\mu \in M_\tau(X)\colon \mu(V_i) > \mu_0(V_i) - \varepsilon,\ |\mu(X) - \mu_0(X)| < \varepsilon\}.$$

1.13. Предложение ([2, часть II, п. 2, замечание III]). *Множества $N(\mu_0, V_1, \ldots, V_k, \varepsilon)$ образуют базу пространства $M_\tau(X)$.*

Из предложения 1.13 непосредственно вытекает следующее утверждение.

1.14. Предложение. *Множества $M_\tau^{<\frac{1}{n}}(X) = \bigl\{\mu \in U_\tau(X)\colon \|\mu\| < \frac{1}{n}\bigr\}$ образуют базу окрестностей нулевой меры $\bar{0}$.*

Говорят, что точка $z \in Z$ есть точка замкнутости отображения $f\colon X \to Z$, если для всякой окрестности $Of^{-1}(z)$ множество $f^{\#}Of^{-1}(z)$ открыто.

1.15. Предложение. *Если отображение $P_\tau(f)\colon P_\tau(X) \to P_\tau(Z)$ является эпиморфизмом, то $\bar{0} \in U_\tau(Z)$ является точкой замкнутости отображения $U_\tau(f)$.*

Доказательство. Пусть O — окрестность меры $\bar{0} = U_\tau(f)^{-1}(\bar{0})$. Согласно предложению 1.14 существует такое n, что $M_\tau^{<\frac{1}{n}}(X) \subset O$. В силу того же предложения 1.14 достаточно показать, что

$$M_\tau^{<\frac{1}{n}} \subset U_\tau(f)^{\#} M_\tau^{<\frac{1}{n}}(X). \tag{1.10}$$

Пусть $\mu \in M_\tau^{<\frac{1}{n}}(Z)$, т. е. $\|\mu\| < \frac{1}{n}$. Если $\|\mu\| = 0$, т. е. $\mu = \bar{0}$, то $U_\tau(f)^{-1}(\mu) = \{\bar{0}\} \subset M_\tau^{<\frac{1}{n}}(Z)$. Предположим теперь, что $\|\mu\| > 0$. Поскольку $P_\tau(f)$ —

эпиморфизм, существует такая мера $\nu \in P_\tau(X)$, что $P_\tau(f)(\nu) = \frac{\mu}{\|\mu\|}$. Полагая $\nu' = \|\mu\| \cdot \nu$, получаем, что $U_\tau(f)(\nu') = \mu$. Для любой другой меры $\lambda \in U_\tau(f)^{-1}(\mu)$ имеем в силу (1.7) $\|\lambda\| = \|\mu\|$, и значит, $\lambda \in M_\tau^{<\frac{1}{n}}(X)$. Предложение доказано. □

1.16. Предложение. *Если пространство X имеет свойство Суслина, то $U_\tau(X)$ также имеет свойство Суслина.*

Доказательство. Пусть v — дизъюнктная система открытых подмножеств пространства X. Для рационального $r \in (0,1]$ положим $M_\tau^{=r}(X) = \{\mu \in U_\tau(X)\colon \|\mu\| = r\}$. Пространство $M_\tau^{=r}(X)$ гомеоморфно $P_\tau(X)$. Но $P_\tau(X)$ имеет свойство Суслина (см. [6, предложение 2.20]). Следовательно, семейство $v_r = \{V \in v\colon V \cap M_\tau^{=r}(X) \neq \varnothing\}$ счётно. В то же время множество $\bigcup\limits_r M_\tau^{=r}(X)$ всюду плотно в $U_\tau(X)$. Значит, $v = \bigcup\limits_r v_r$ и, следовательно, v счётно. Предложение доказано. □

§ 2. Абсолютные экстензоры в категории *Tych* и обратные спектры

Для отображения $f\colon X \to Y$ полагаем $f^*(C(Y)) = \{\varphi \circ f\colon \varphi \in C(Y)\}$. Если $X_0 \subset X$, то $C(X)|_{X_0} \equiv \{\varphi|_{X_0}\colon \varphi \in C(X)\}$. Подпространство $X_0 \subset X$ называется *C-вложенным в X*, если $C(X)|_{X_0} = C(X_0)$. Под *размерностью* подразумевается лебегова размерность, определённая посредством конечных конуль-покрытий, т. е. $\dim X = \dim \beta X$. Следующее определение было дано А. Ч. Чигогидзе.

2.1. Определение. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *n-мягким* (в категории *Tych*), $n = 0, 1, \ldots, \infty$, если для любого пространства Z размерности $\leqslant n$, любых двух его подпространств $Z_0 \subset Z_1$ и любых отображений $g_0\colon Z_0 \to X$ и $h\colon Z_1 \to Y$, таких что $g^*(C(X)) \subset C(Z)|_{Z_0}$, $h^*(C(Y)) \subset C(Z)|_{Z_1}$ и $f \circ g = h|_{Z_0}$, существует такое отображение $k\colon Z_1 \to X$, что $f \circ k = h$, $g = k|_{Z_0}$ и $k^*(C(X)) \subset C(Z)|_{Z_1}$. Отображение называется *мягким*, если оно ∞-мягко.

2.2. Определение. Пространство X назовём $\mathrm{AE}(n)$*-пространством* (в категории *Tych*), пишем $X \in \mathrm{AE}(n)$, если его постоянное отображение n-мягко. $\mathrm{AE}(\infty)$-пространства называются AE-*пространствами* или *абсолютными экстензорами*.

2.3. Предложение ([7]). *Отображение $f\colon X \to Y$ между польскими пространствами n-мягко тогда и только тогда, когда для любого польского пространства Z размерности $\leqslant n$, любого его замкнутого подпространства Z_0 и любых отображений $g\colon Z_0 \to X$ и $h\colon Z \to Y$, удовлетворяющих условию $f \circ g = h|_{Z_0}$, существует такое отображение $k\colon Z \to X$, что $k|_{Z_0} = g$ и $f \circ k = h$.*

2.4. Предложение ([7]). *Сепарабельное метризуемое пространство является* $\mathrm{AE}(0)$*-пространством тогда и только тогда, когда оно польское.*

2.5. Предложение ([7]). *Отображение между польскими пространствами* 0*-мягко тогда и только тогда, когда оно сюръективно и открыто.*

2.6. Теорема ([1]). *Если* f — 0*-мягкое отображение между польскими пространствами, то отображение* $P_\tau(f)$ *мягко.*

Эта теорема сформулирована ([1, теорема 1.2]) в другой форме, эквивалентной данной ввиду предложений 1.6 и 2.5.

Напомним, что R*-вес* пространства X (обозначается $R\text{-}w(X)$) определяется как наименьшее кардинальное число κ, для которого X допускает C-вложение в $\mathbb{R}^\kappa$. Отметим, что R-вес определён для любого пространства X, поскольку отображение вычисления $X \to \mathbb{R}^{C(X)}$ является C-вложением.

2.7. Предложение ([7]). *Если* $X \in \mathrm{AE}(0)$, *то* $wX = R\text{-}w(X)$.

2.8. Предложение ([7]). *Если* $f\colon X \to Y$ — n*-мягкое отображение, то* $X \in \mathrm{AE}(n)$ *тогда и только тогда, когда* $Y \in \mathrm{AE}(n)$.

Следующее вспомогательное утверждение очевидно.

2.9. Предложение. *Пусть* $f\colon X \to Y$ *и* $g\colon Y \to Z$ — *отображения, композиция которых* $g \circ f$ *непрерывна. Пусть в точке* $z \in Z$ *отображение* g *замкнуто и взаимно-однозначно. Тогда отображение* f *непрерывно во всякой точке* $x \in f^{-1}(g^{-1}(z))$.

2.10. Теорема. *Если* $f\colon X \to Y$ — 0*-мягкое отображение между польскими пространствами, то отображение* $U_\tau(f)$ *мягко.*

Доказательство. Функтор U_τ переводит польские пространства в польские [3]. Следовательно, для доказательства мягкости отображения $U_\tau(f)$ достаточно проверить, что оно удовлетворяет критерию мягкости из предложения 2.3.

Пусть Z — польское пространство, Z_0 — его замкнутое подмножество, а отображения $g\colon Z_0 \to U_\tau(X)$ и $h\colon Z \to U_\tau(Y)$ удовлетворяют условию

$$U_\tau(f) \circ g = h|_{Z_0}. \tag{2.1}$$

Нам надо построить отображение $k\colon Z \to U_\tau(X)$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

$$k|_{Z_0} = g, \tag{2.2}$$
$$U_\tau(f) \circ k = h. \tag{2.3}$$

Для произвольного пространства S определяем отображения

$$q_S\colon U_\tau(S) \setminus \{\bar{0}\} \to (0, 1],$$
$$\pi_S\colon U_\tau(S) \setminus \{\bar{0}\} \to P_\tau(S)$$

равенствами

$$q_S(\mu) = \|\mu\|, \tag{2.4}$$
$$\pi_S(\mu) = \frac{\mu}{\|\mu\|}. \tag{2.5}$$

Из очевидной непрерывности отображения q_S вытекает непрерывность π_S. Далее, из (1.7) вытекает

$$q_X = q_Y \circ U_\tau(f), \tag{2.6}$$

а из очевидного равенства $U_\tau(f)(t\mu) = tU_\tau(f)(\mu)$ для всякого $t \in [0,1]$ вытекает

$$P_\tau(f) \circ \pi_X = \pi_Y \circ U_\tau(f). \tag{2.7}$$

Положим $A = h^{-1}(\bar{0})$ и определим отображения $\alpha_1\colon Z_0 \setminus A \to P_\tau(X)$ и $\alpha_2\colon Z \setminus A \to P_\tau(Y)$ как композиции

$$\alpha_1 = \pi_X \circ q, \tag{2.8}$$

$$\alpha_2 = \pi_Y \circ h. \tag{2.9}$$

Тогда верно равенство

$$P_\tau(f) \circ \alpha_1 = \alpha_2|_{Z_0 \setminus A}. \tag{2.10}$$

В самом деле,

$$P_\tau(f) \circ \alpha_1 = P_\tau(f) \circ \pi_X \circ g \overset{\text{согласно (2.7)}}{=} \pi_Y \circ U_\tau(f) \circ g \overset{\text{согласно (2.1)}}{=}$$
$$= \pi_Y \circ (h|_{Z_0}) \overset{\text{согласно (2.9)}}{=} \alpha_0|_{Z_0 \setminus A}.$$

Пространство $Z \setminus A$ является польским как открытое подмножество польского пространства Z. Поэтому согласно (2.10) пара отображений (α_1, α_2) удовлетворяет сформулированному в предложении 2.3 критерию мягкости для отображения $P_\tau(f)$. Следовательно, из предложения 2.3 и теоремы 2.6 вытекает существование такого отображения $k_1\colon Z \setminus A \to P_\tau(X)$, что

$$k_1|_{Z_0 \setminus A} = \pi_X \circ g, \tag{2.11}$$

$$P_\tau(f) \circ k_1 = \pi_Y \circ h. \tag{2.12}$$

Определим отображение $k_2\colon Z \setminus A \to (0,1]$ равенством

$$k_2 = q_Y \circ h. \tag{2.13}$$

Тогда верно равенство

$$k_2|_{Z_0 \setminus A} = q_X \circ g. \tag{2.14}$$

В самом деле,

$$k_2|_{Z_0 \setminus A} \overset{\text{согласно (2.13)}}{=} q_Y(h|_{Z_0 \setminus A}) \overset{\text{согласно (2.1)}}{=} q_Y \circ U_\tau(f) \circ g \overset{\text{согласно (2.6)}}{=} q_X \circ g.$$

Теперь определим отображение $k\colon Z \to U_\tau(X)$ следующим образом:

$$k(A) = \bar{0}, \tag{2.15}$$

$$k(z) = k_2(z) \cdot k_1(z) \quad \text{для} \quad z \notin A. \tag{2.15$_1$}$$

Покажем, что k — искомое отображение. Сначала проверим выполнение условий (2.2) и (2.3). Пусть $z \in Z_0$. Если $z \in A$, то $k(z) = \bar{0}$ и $h(z) = \bar{0}$. Тогда

$U_\tau(f)(g(z)) = \bar{0}$ согласно (2.1), откуда $g(z) = \bar{0}$, поскольку $\bar{0}$ является точкой взаимной однозначности отображения $U_\tau(f)$. Если же $z \in Z_0 \setminus A$, то

$$k(z) \overset{\text{согласно (2.15}_1)}{=} k_2(z) \cdot k_1(z) \overset{\text{согласно (2.14)}}{=} q_X(g(z)) \cdot k_1(z) \overset{\text{согласно (2.11)}}{=}$$
$$= q_X(g(z)) \cdot \pi_X(g(z)) \overset{\text{согласно (2.4) и (2.5)}}{=} \|g(z)\| \cdot \frac{g(z)}{\|g(z)\|} = g(z).$$

Таким образом, равенство (2.2) проверено.

Остаётся проверить непрерывность отображения k. Но в точках открытого множества $Z \setminus A$ оно непрерывно, поскольку является произведением непрерывных отображений k_1 и k_2. Непрерывность же отображения k в точках $z \in A$ вытекает из (2.3) и предложений 2.9 и 1.15. Теорема доказана. $\square$

2.11. Теорема. *Если X — польское пространство, то $U_\tau(X)$ есть абсолютный экстензор.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to \{0\}$ — постоянное отображение. Согласно предложению 2.4 имеем, что $X \in \mathrm{AE}(0)$. Поэтому по определению 2.1 отображение f 0-мягко. Следовательно, в силу теоремы 2.10 отображение $U_\tau(f)$ мягко. Но $U_\tau(0)$ естественно гомеоморфно отрезку $[0,1]$. Значит, $U_\tau(X) \in \mathrm{AE}$ согласно предложению 2.8. Теорема доказана. $\square$

Пусть $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \theta\}$ — вполне упорядоченный обратный спектр, и пусть $\gamma < \theta$ — предельный ординал. Положим $S|_\gamma = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \alpha < \gamma\}$. Пусть $\pi_{\alpha,\gamma}\colon \varprojlim(S|_\gamma) \to X_\alpha$ — предельные проекции спектра $S|_\gamma$. Тогда существует единственное отображение $\pi^\gamma\colon X_\gamma \to \varprojlim(S|_\gamma)$, такое что $\pi_{\alpha,\gamma} \circ \pi^\gamma = \pi^\gamma_\alpha$, $\alpha < \gamma$. Спектр S называется *непрерывным*, если для всякого предельного $\gamma < \theta$ отображение π^γ является гомеоморфизмом.

Обратный спектр $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, A\}$ называется *факторизующим*, если всякая функция $\varphi \in C(\varprojlim S)$ представляется в виде композиции $\psi \circ \pi_\alpha$, где π_α — предельная проекция спектра S, $\psi \in C(X_\alpha)$.

2.12. Предложение ([8]). *Пусть $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, A\}$ — непрерывный спектр, предельные проекции которого сюръективны и открыты, а пространства X_α имеют свойство Суслина. Тогда S — факторизующий спектр.*

2.13. Предложение ([7]). *Всякое* $\mathrm{AE}(0)$*-пространство имеет свойство Суслина.*

Говорят, что отображение $f\colon X \to Y$ имеет *польское ядро*, если существует такое вложение $i\colon X \to Y \times \mathbb{R}^\omega$, что $f = p_Y \circ i$, где $p_Y\colon Y \times \mathbb{R}^\omega \to Y$ — проектирование.

2.14. Теорема ([7]). *Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение на* $\mathrm{AE}(n)$*-пространство со счётной базой. Отображение f является n-мягким тогда и только тогда, когда существует такой факторизующий непрерывный спектр $S_f = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \kappa\}$, что*

(0) $\kappa \leqslant R\text{-}w(X)$,
(1) $f = \pi_0$,
(2) $X_\alpha \in \mathrm{AE}(n)$,
(3) $\pi_\alpha^{\alpha+1}$ *n-мягко и имеет польское ядро.*

Кроме того, можно найти непрерывную направленность $\{A_\alpha,\ \alpha \in \kappa\}$ собственных подмножеств κ, вполне упорядоченную по включению, и замкнутые вложения $i_\alpha\colon X_\alpha \to J^{A_\alpha} \times Y$, где J — открытый интервал $(0,1)$, такие что

(4) $\pi_\beta^\alpha = i_\beta^{-1} \circ (q_{A_\beta}^{A_\alpha} \times \mathrm{id}_Y) \circ i_\alpha$,
(5) $A_{\alpha+1} \setminus A_\alpha$ *счётно.*

2.15. Теорема ([7]). *Если все короткие проекции $\pi_\alpha^{\alpha+1}$ вполне упорядоченного непрерывного спектра n-мягки, то и все его предельные проекции π_α n-мягки.*

Хорошо известно следующее достаточно очевидное утверждение.

2.16. Предложение. *Пусть проекции π_β^α спектра S открыты. Тогда если его предельные проекции π_α сюръективны, то они открыты.*

§ 3. Мягкие отображения

Формулировку аксиомы Мартина MA и её версии $\mathrm{MA}(\omega_1)$ читатель может найти, например, в [6]. Напомним, что аксиома Мартина вытекает из континуум-гипотезы, совместима с её отрицанием, а $\mathrm{MA}(\omega_1)$ является следствием $\mathrm{MA} + \neg\mathrm{CH}$. Для кардинального числа κ множество $Y \subset X$ называется *G_κ-множеством* в X, если оно является пересечением $\leqslant \kappa$ открытых множеств. В частности, G_{ω_0}-множества — это G_δ-множества.

Обратный спектр S назовём τ-непрерывным, если отображение

$$R_S\colon U_\tau\bigl(\varprojlim S\bigr) \to \varprojlim U_\tau(S)$$

является гомеоморфизмом.

3.1. Лемма (в предположении MA, [5]). *Пусть $S = \{X_\alpha, p_\beta^\alpha, \theta\}$ — вполне упорядоченный непрерывный спектр из компактов, где $\theta < \mathfrak{c}$ — предельный ординал. Пусть $X = \varprojlim S$, $Y \subset X$, $Y_\alpha = p_\alpha(Y)$ и $q_\beta^\alpha = p_\beta^\alpha|_{Y_\alpha}$. Тогда, если каждое Y_α есть $G_{|\theta|}$-множество в X_α и $Y = \bigcap\{p_\alpha^{-1}(Y_\alpha)\colon \alpha \in \theta\}$, то обратный спектр $T = \{Y_\alpha, q_\beta^\alpha, \theta\}$ является U_τ-непрерывным.*

3.2. Следствие (в предположении $\mathrm{MA}(\omega_1)$). *Утверждение леммы* 3.1 *справедливо для $\theta = \omega_1$.*

Обратный спектр $S' = \{X'_\alpha, p'^\alpha_\beta, A\}$ называется (*замкнутым*) *подспектром* спектра $S = \{X_\alpha, p_\beta^\alpha, A\}$, если существует такой морфизм $\Phi = \{\varphi_\alpha\colon \alpha \in A\}\colon S' \to S$, что всякое отображение $\varphi_\alpha\colon X'_\alpha \to X_\alpha$ является (замкнутым) вложением. В этом случае отображение

$$\varphi = \varprojlim \Phi\colon \varprojlim S' \to \varprojlim S \tag{3.1}$$

автоматически является замкнутым вложением.

3.3. Лемма. *Пусть S' — подспектр спектра S. Тогда*

(1) *$R_{S'}$ является ограничением отображения R_S на $U_\tau(\varprojlim S')$.*

Если, кроме того, S' замкнут в S, то

(2) *$R_{S'}$ есть замкнутое вложение.*

Доказательство. Определим отображение $f\colon \varprojlim U_\tau(S') \to \varprojlim U_\tau(S)$ как предел морфизма $U_\tau(\Phi)\colon U_\tau(S') \to U_\tau(S)$. Поскольку U_τ сохраняет (замкнутые) вложения (теорема 1.11), $P_\tau(\Phi)$ является (замкнутым) вложением. Тогда согласно (3.1) отображение f является (замкнутым) вложением. В наших обозначениях условие (1) эквивалентно

$$\varphi \circ R_{S'} = R_S \circ U_\tau(\varphi). \tag{3.2}$$

Пусть π_α и π'_α — предельные проекции спектров $U_\tau(S)$ и $U_\tau(S')$. По определению отображений R_S и $R_{S'}$ имеем

$$U_\tau(p_\alpha) = \pi_\alpha \circ R_S, \tag{3.3}$$

$$U_\tau(p'_\alpha) = \pi'_\alpha \circ R_{S'}, \tag{3.4}$$

где p_α и p'_α — предельные проекции спектров S и S'. По определению отображения $\varphi = \varprojlim \Phi$ мы имеем $\varphi_\alpha \circ p'_\alpha = p_\alpha \circ \varphi$ и, значит,

$$U_\tau(\varphi_\alpha) \circ U_\tau(p'_\alpha) = U_\tau(p_\alpha) \circ U_\tau(\varphi). \tag{3.5}$$

Наконец,

$$U_\tau(\varphi_\alpha) \circ \pi'_\alpha = \pi_\alpha \circ f, \tag{3.6}$$

поскольку $f = \varprojlim U_\tau(\Phi)$. Используя равенства (3.3)—(3.6), мы получаем, что

$$\pi_\alpha \circ f \circ R_{S'} = \pi_\alpha \circ R_S \circ U_\tau(\varphi). \tag{3.7}$$

Поскольку отображения π_α, $\alpha \in A$, разделяют точки пространства $U_\tau(S)$, равенство (3.7) влечёт выполнение условия (1).

Пусть теперь Φ — замкнутое вложение, а R_S — гомеоморфизм. Тогда $U_\tau(\varphi)$ является замкнутым вложением. Отсюда в силу (3.2) следует, что $f \circ R_{S'}$ есть замкнутое вложение. Но тогда вложение $R_{S'}$ также замкнуто. $\square$

3.4. Теорема (в предположении MA(ω_1)). *Если f — 0-мягкое отображение пространства X веса $\leqslant \omega_1$ на польское пространство Y, то $U_\tau(f)$ мягко.*

Доказательство. Начнём с того, что

$$X \in \mathrm{AE}(0) \tag{3.8}$$

в силу предложений 2.4 и 2.8. Если $wX = \omega_0$, то X есть польское пространство ввиду предложения 2.4. Поэтому $U_\tau(f)$ мягко по теореме 2.10.

Пусть теперь $wX = \omega_1$. Тогда $R\text{-}w(X) = \omega_1$ согласно (3.8) и предложению 2.7. Значит, мы можем применить теорему 2.14 и представить f как предельную проекцию π_0 факторизующего непрерывного спектра $S_f = \{X_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha+1}, \omega_1\}$, состоящего из AE(0)-пространств X_α и 0-мягких проекций $\pi_\alpha^{\alpha+1}$ с польским ядром. Но тогда все элементы X_α спектра S_f имеют счётную базу и, следовательно, являются польскими пространствами по предложению 2.4. Из предложения 1.6 и теоремы 1.12 вытекает непрерывность спектра $U_\tau(S_f)$. Пространства этого спектра — абсолютные экстензоры по теореме 2.11, короткие проекции мягки по теореме 2.10. Мы докажем, что $U_\tau(S_f)$ удовлетворяет достаточным условиям теоремы 2.14 для $n=\infty$, если мы сможем доказать следующие два утверждения.

1°. $U_\tau(\pi_0)$ гомеоморфно предельной проекции $\psi_0\colon \varprojlim U_\tau(S_f)\to U_\tau(Y)$.

2°. $U_\tau(S_f)$ — факторизующий спектр.

Применяя теорему 2.14 к отображению f, мы получаем, что существует замкнутое вложение $\Phi=\{\varphi_\alpha\colon \alpha\in\omega_1\}\colon S_f\to T$, где $T=\{J^{A_\alpha}\times Y, q^{A_\alpha}_{A_\beta}\times \mathrm{id}_Y,\omega_1\}$. Положим $S=\{I^{A_\alpha}\times bY, p^{A_\alpha}_{A_\beta}\times \mathrm{id}_{bY},\omega_1\}$, где bY — компактное расширение. Очевидно, что пара (S,T) удовлетворяет условиям леммы 3.1, значит, R_T — гомеоморфизм. Из леммы 3.3 вытекает, что R_{S_f} — замкнутое вложение. Предельные проекции π_α спектра S_f сюръективны, поскольку они 0-мягки в силу теорем 2.14 и 2.15. По теореме 1.12 имеем, что R_{S_f} — всюду плотное вложение. Значит, R_{S_f} — гомеоморфизм.

Обозначим предельные проекции спектра $U_\tau(S_f)$ через ψ_α. Тогда (3.4) можно записать в виде $U_\tau(\pi_\alpha)=\psi_\alpha\circ R_{S_f}$, откуда вытекает утверждение 1°.

3.4.1. Утверждение. *Проекции ψ_α сюръективны.*

Доказательство. Пусть $\mu\equiv\mu_\alpha\in U_\tau(X_\alpha)$. Нам надо найти такую нить $m=\{\mu_\beta\colon \beta\in\omega_1\}$ спектра $U_\tau(S_f)$, что $\psi_\alpha(m)=\mu_\alpha$. Для $\beta<\alpha$ положим $\mu_\beta=u_\tau(\pi^\alpha_\beta)(\mu_a)$. Меры μ_β для $\beta>\alpha$ определяются трансфинитной рекурсией. Предположим, что они определены для всех $\beta<\alpha$. Если $\gamma=(\gamma-1)+1$, то отображение $U_\tau(\pi^\gamma_{\gamma-1})$ сюръективно, поскольку оно мягко по теореме 2.10. Значит, существует такая мера $\mu_\gamma\in U_\tau(X_\gamma)$, что $U_\tau(\pi^\gamma_{\gamma-1})(\mu_\gamma)=\mu_{\gamma-1}$.

Если γ — предельное число, то из теоремы 1.12 вытекает, что для нити $\{\mu_\beta\colon \beta<\gamma\}$ спектра $U_\tau(S_f)|_\gamma$ существует мера $\mu_\gamma\in U_\tau(X_\gamma)$, удовлетворяющая условию $U_\tau(\pi^\gamma_\beta)(\mu_\gamma)=\mu_\beta$ для всех $\beta<\gamma$. Таким образом, нужная нам нить m найдена. Утверждение доказано. □

Из предложения 2.16 и утверждения 3.4.1 вытекает следующее утверждение.

3.4.2. Утверждение. *Проекции ψ_α открыты.*

3.4.3. Утверждение. *Пространство $U_\tau(X)$ имеет свойство Суслина.*

Доказательство. Согласно (3.8) все конечные степени X^n являются AE(0)-пространствами и, следовательно, имеют свойство Суслина по предложению 2.13. Применение предложения 1.16 завершает доказательство. □

Итак, предельные проекции ψ_α спектра $U_\tau(S_f)$ сюръективны, открыты, а его предел, гомеоморфный $U_\tau(X)$ согласно (1°), имеет свойство Суслина. Поэтому из теоремы 2.14 вытекает, что $U_\tau(S_f)$ — факторизующий спектр. Утверждение 2° проверено. Теорема доказана. □

Из теоремы 3.4, применённой к постоянному отображению, вытекает следующая теорема.

3.5. Теорема (в предположении MA(ω_1)). *Если* $X \in \mathrm{AE}(0)$ *и* $wX \leqslant \omega_1$, *то* $U_\tau(X) \in \mathrm{AE}$.

3.6. Замечание. Распространить теорему 3.5 на пространства X веса $\geqslant \omega_2$ нельзя ни при каких теоретико-множественных предположениях. В самом деле, в силу теоремы Дитора и Хэйдона [9] в качестве контрпримера можно взять тихоновский куб I^{ω_2}.

Напомним, что *вещественно полными* называются пространства, гомеоморфные замкнутым подмножествам тихоновских степеней $\mathbb{R}^\kappa$ вещественной прямой.

3.7. Предложение. *Пространство* $U_\tau(\mathbb{R}^\mathfrak{c})$ *не является абсолютным экстензором.*

В самом деле, в [5] доказано, что $U_\tau(\mathbb{R}^\mathfrak{c})$ не является вещественно полным пространством. В то же время всякий абсолютный экстензор вещественно полон [7].

3.8. Предложение. *Если* $f\colon X \to Y$ *— такое отображение, что прообраз* $f^{-1}(y_0)$ *некоторой точки* $y_0 \in Y$ *гомеоморфен* $\mathbb{R}^\mathfrak{c}$, *то* $U_\tau(f)$ *не является мягким отображением.*

В самом деле, если бы $U_\tau(f)$ было мягким, то $U_\tau(f)^{-1}(\delta(y_0)) \in \mathrm{AE}$, где $\delta(y_0)$ — мера Дирака. Но $U_\tau(f)^{-1}(\delta(y_0)) = U_\tau(f^{-1}(y_0)) = U_\tau(\mathbb{R}^\mathfrak{c})$, что противоречит предложению 3.7.

Литература

[1] Банах Т. О., Радул Т. Н. Геометрия отображений пространств вероятностных мер // Матем. студ. Праці Львівского матем. т-ва. — 1999. — № 11. — С. 17—30.

[2] Варадарайн В. С. Меры на топологических пространствах // Мат. сб. — 1961. — Т. 55, № 1. — С. 35—100.

[3] Садовничий Ю. В. О некоторых категорных свойствах функтора U^τ // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1999. — № 3. — С. 38—42.

[4] Садовничий Ю. В. Поднятие функторов U_τ и U_R на категорию ограниченных метрических пространств и категорию равномерных пространств // Мат. сб. — 2000. — Т. 191, № 11. — С. 79—104.

[5] Садовничий Ю. В. О свойствах полноты функторов единичного шара борелевских мер // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 2003. — Вып. 23. — С. 338—357.

[6] Федорчук В. В. Топологическая полнота пространств мер // Изв. РАН. Сер. мат. — 1999. — Т. 63, № 4. — С. 207—223.

[7] Федорчук В. В., Чигогидзе А. Ч. Абсолютные ретракты и бесконечномерные многообразия. — М.: Наука, 1992.

[8] Щепин Е. В. Функторы и несчётные степени компактов // Успехи мат. наук. — 1981. — Т. 36, вып. 3. — С. 3—62.

[9] Ditor S., Haydon R. On absolute retracts, $P(S)$ and complemented subspaces of $C(D^{\omega_1})$ // Studia Math. — 1976. — Vol. 56, no. 3. — P. 243—251.

[10] Gardner R. G., Pfeffer W. F. Borel measures // Handbook of set-theoretic topology. — Elsevier, 1984. — P. 961—1043.