Изоморфизм Тома для неориентируемых расслоений*

Е. Г. СКЛЯРЕНКО
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 515.145.25

Ключевые слова: векторное расслоение, ориентирующий пучок, классы Тома и Эйлера, декартово произведение и сумма Уитни расслоений, послойные отображения, последовательности Гизина, изоморфизмы Тома, двойственность Пуанкаре.

Аннотация

Классическая теория изоморфизмов Тома распространяется на неориентируемые векторные расслоения. Изучаются свойства ориентирующих пучков расслоений, классов Тома τ и Эйлера e по отношению к проекциям в расслоениях, послойным отображениям расслоений, декартовым произведениям расслоений и суммам Уитни. Подтверждается наличие стандартных конструкций, участвующих в применениях классов τ и e. Показывается, что для расслоений над многообразиями изоморфизмы Тома вместе с их формой — следствия двойственности Пуанкаре.

Abstract

E. G. Sklyarenko, The Thom isomorphism for nonorientable bundles, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 4, pp. 55—103.

The classical theory of Thom isomorphisms is extended to nonorientable vector bundles. The properties of orientation sheaves of bundles and of the Thom and Euler classes τ and e with respect to projections, fiber maps, Cartesian products, and Whitney sums of bundles are studied. The validity of standard constructions used in the applications of the classes τ and e is confirmed. It is shown that the Thom isomorphisms, together with their form, are consequences of the Poincaré duality.

§ 1. Введение

Известна роль фактора ориентируемости в теории расслоений. От него зависят все наиболее принципиальные результаты гомологического характера в этой теории, в том числе относящиеся к обобщённым гомологиям и когомологиям (см., например, замечание к теореме 15.51 в [11]). Неориентируемые в обычном смысле расслоения «ориентируемы», очевидно, по отношению к классическим гомологиям и когомологиям с коэффициентами в кольце $\mathbb{Z}_2$ вычетов по модулю 2, и именно по этой причине при рассмотрении для таких расслоений

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 03-01-00705.

любых конструкций, связанных с изоморфизмом Тома, большинством авторов рекомендуется переход от целочисленных гомологий или когомологий к группам с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ (см., например, [22, глава 16, п. 10], [5, глава VIII, § 11], [9, § 10]).

Однако ровно в той же мере, что и по отношению к $\mathbb{Z}_2$, неориентируемое расслоение «ориентируемо» по отношению к своему ориентирующему пучку. Собственно, такой взгляд аналогичен интерпретации свойства ориентируемости по отношению к спектру или некоторой обобщённой теории гомологий, см. определения 14.5 и 15.14 в [11]. Новым является лишь то, что какой-то единой для базового пространства и пространства расслоения теории гомологий (или когомологий) нет (ср. с теоремами 14.6 и 15.51 типа Тома в [11]), гомологии (или когомологии) тотального пространства и базы следует рассматривать с отличными коэффициентами (стандартно — непостоянными).

Основное содержание работы — распространение классической теоремы Тома об изоморфизме и связанных с ней наиболее типичных конструкций на неориентируемые векторные расслоения (и непостоянные коэффициенты). Фактически демонстрируется, что классическая теория — частный случай более общей, автоматически получающийся из более общей при сужении класса расслоений до ориентируемых.

Известны отдельные результаты в направлении обобщения теоремы Тома об изоморфизме для когомологий. Наиболее общими были теорема 14 в [19, глава 6, § 9] и теоремы 7.10 и 12.2 в [1], полученные для когомологий тотального пространства с постоянными коэффициентами и когомологий базы с коэффициентами в предпучке ориентирующего типа (фактически определяющем ориентирующий пучок расслоения). При этом в [19] используются когомологии Чеха базы и когомологии Александера тотального пространства, а в [1] — когомологии покрытия базового многообразия и когомологии де Рама. Использование общих конструкций свидетельствует, по-видимому, о том, что в рамках одной ишь сингулярной теории и когомологий де Рама получить обобщение невозможно. Это подтверждается конструкцией изоморфизма Тома для когомологий неориентируемых расслоений, полученной в § 7 главы IV в новой редакции [23] в терминах пучковых когомологий с использованием аппарата связанных с расслоением спектральных последовательностей и анализа пучков Лере, отвечающих некоторым специальным коэффициентам (в соответствующем § 8 первой редакции аналогичная конструкция проведена для когомологий с коэффициентами в пучках только ориентируемых расслоений).

В настоящей работе также широко используются общие теории и средства теории пучков. Основные конструкции рассматриваются не только для когомологий H^* (с любыми замкнутыми носителями) и гомологий H_*^{c} с компактными носителями, но и для групп H_φ^* и H_*^φ с носителями в каких-то семействах φ (возможно, и не паракомпактифицирующих). Делается это, в основном, по двум причинам. Во-первых, в категории локально компактных пространств и их собственных отображений (например, в категории многообразий) самостоятельное значение имеют когомологии H_{c}^* с компактными носителями и гомологии H_*

«второго рода» — с любыми замкнутыми носителями. Во-вторых, в типичных случаях (они отмечаются в работе) гомологии и когомологии пар пространств (X, Y) оказываются гомологиями или когомологиями одного пространства X (возможно, и $X \setminus Y$) с подходящими каждому случаю носителями. Тем самым там, где это возможно, нет нужды в отдельных доказательствах результатов для относительных гомологий или когомологий. Понятие семейства носителей для гомологий и когомологий было введено А. Картаном [24].

При естественных ограничениях на базовые пространства (без которых в сингулярной теории начинают возникать разного рода «аномалии») применяемые в работе когомологии эквивалентны сингулярным. Это так, например, в категории HLC-пространств — паракомпактных хаусдорфовых топологических пространств, гомологически локально связных (даже слабо) по отношению к сингулярной теории [23, глава III, § 1]. В категории HLC-пространств изоморфным оказывается и естественное преобразование обычных сингулярных гомологий с постоянными коэффициентами в применяемые в работе гомологии H_*^{c} Стинрода—Ситникова (см., например, [8, § 9.6] или обсуждение этого вопроса в начале § 10 в [15]). Для локально постоянных коэффициентов аналогичное преобразование удалось построить пока лишь в категории локально компактных HLC-пространств, но для любых паракомпактифицирующих семейств носителей φ, и оно оказывается изоморфизмом по крайней мере для групп типа H_*^{c} и H_* [15, предложение 10.10 и теорема 10.11]. Аналогичное преобразование сингулярных групп определено в [23] в применяемые там группы гомологий Бореля—Мура, при этом было показано (следствия 12.15, 12.17 и 12.21 главы V, соответственно 11.9, 11.12 и 11.16 в первой редакции), что оно есть изоморфизм либо при $\varphi = \mathrm{c}$, либо когда пространство имеет конечную гомологическую размерность. Поскольку в обсуждаемых условиях группы Бореля—Мура и Стинрода—Ситникова изоморфны [15, теорема 10.7], для пространств конечной гомологической размерности (в частности, для многообразий) указанное выше преобразование сингулярных групп в группы Стинрода—Ситникова изоморфно и для любых паракомпактифицирующих семейств φ.

Фигурирующее в работе $\smile$-умножение имеет аксиоматическое описание в теории пучковых когомологий [23, глава II, теорема 7.1] и потому единственно. Конструкции умножений, определяемые первоначально только для постоянных или локально постоянных коэффициентов (как, например, классическое умножение в сингулярной теории, умножение в когомологиях Александера—Спаньера и де Рама), допускают естественные распространения на пучковые коэффициенты [15, § 4] и потому определяют то же $\smile$-умножение.

В работе используется общая конструкция $\frown$-умножения, разработанная в [15]. В соответствии с [15, § 5, 8 и 9] эта конструкция оказывается эквивалентной некоторым другим известным конструкциям умножения гомологий на когомологии (применяемой в [23, глава V, § 10], используемой в [8, § 7.9, 9.5, 10.1 и 10.5], определённой в [13, глава 8, п. 5.3] и др.). Этим установлена, в частности, эквивалентность возникающих $\frown$-умножений друг другу. По всей вероятности, в категории HLC-пространств все эти умножения совпадают с классическим, применяемым в сингулярной теории, но этот факт пока никем не установлен (и сам вопрос в указанных выше источниках никак не освещается). Эквивалентность общего $\frown$-умножения классическому удалось установить всё же в категории локально компактных HLC-пространств для умножений H_*^{c} на H_{c}^*, H_*^{c} на H^*, H_* на H_{c}^* и H_* на H^*, принимающих значения в H_*^{c} в первых трёх случаях и в H_* в последнем. Во всех случаях для гомологий используются любые локально постоянные коэффициенты, а для когомологий — локально постоянные коэффициенты, слои которых изоморфны основному кольцу [15, теорема 10.2]. В частности, $\frown$-умножение, фигурирующее ниже в теореме 3.10 (при соответствующих базах) и в § 5, совпадает с классическим (если определять операцию умножения сингулярных цепей на коцепи в форме, принятой в [19, глава 5, § 6, конец п. 15]; принятая в [5] и [9] форма отличается знаком). Возможные сомнения в связи с применяемой формальной конструкцией $\frown$-умножения в общих ситуациях должны быть рассеяны замечанием 3.9.

Основные конструкции проводятся в работе для расслоений над любыми хаусдорфовыми базами. В тех случаях, когда условия типа паракомпактности обеспечивают какие-то упрощения, это (ср. с [8]) обычно учитывается. Все пучки в работе — это пучки модулей над некоторым кольцом Λ с единицей, которое предполагается дедекиндовым и нётеровым. В качестве Λ может быть использовано любое кольцо главных идеалов. Для используемого кольца инъективность модулей равносильна делимости, плоские модули — это модули без кручения. Наследственность Λ обеспечивает наличие соотношений типа Кюннета и формул универсальных коэффициентов (см. [6, глава VII]).

В отличие от классических конструкций для ориентируемых расслоений, существенно использующих связи между гомологиями и когомологиями, характерные для постоянных коэффициентов (см., например, [19, глава 5, § 7], [5, глава VIII, § 11], [9, § 10]), в общем случае с характерным для него употреблением непостоянных коэффициентов конструкции изоморфизма Тома для гомологий и когомологий приходится осуществлять раздельно. Для когомологий это делается в § 2. Как и в [23], основной инструмент для обнаружения изоморфизма — спектральная последовательность Лере и анализ строения пучков Лере расслоения. Однако в отличие от [23] изоморфизм получается непосредственно, без учёта влияния на вид спектральной последовательности ориентирующего пучка расслоения (см. изоморфизмы (2.3) и (2.4)). Применяемые для этого вспомогательные технические конструкции используются затем также в § 3 и 4. Оценивается общая роль операции $\smile$-умножения в установлении связей между когомологиями базы и расслоённого пространства (по модулю дополнения к нулевому сечению), и на основе этого выявляются прозрачные причины (в основном алгебраического характера), однозначно указывающие на целесообразность применения для реализации изоморфизма Тома умножения $\smile\tau$ именно на класс Тома. В § 2 рассмотрен также относительный вариант теоремы Тома.

В § 3 представлена гомологическая версия изоморфизма Тома (теоремы 3.2 и 3.10). Изоморфизм осуществляется посредством операции $\frown\tau$. Какого-либо полноценного аналога спектральной последовательности Лере, приспособленного к манипуляциям с непостоянными коэффициентами и операцией $\frown$-умножения, для гомологий не существует, поэтому конструкция изоморфизма Тома осуществляется независимо от § 2 и только для локально постоянных коэффициентов (используется, однако, технические конструкции § 2).

В § 4 определяется класс Эйлера e, устанавливаются стандартные свойства классов e и τ по отношению к послойным отображениям (теорема 4.2), декартовым произведениям (теорема 4.8), суммам Уитни (теорема 4.10) и по отношению друг к другу (предложение 4.5). Новым моментом в указанных теоремах является описание соответствующих свойств ориентирующих пучков. Устанавливаются все другие стандартные свойства класса e (следствие 4.6, предложения 4.7 и 4.11, теорема 4.14). Для произвольных коэффициентов (локально постоянных в случае гомологий) конструируются точные последовательности типа Тома—Гизина с аналогичным обычному описанием гомоморфизмов в них, в том числе с использованием соответствующих умножений на класс Эйлера (теоремы 4.12 и 4.13).

В § 5 рассматриваются расслоения, базами которых служат многообразия. На неориентируемые базисные многообразия распространяются некоторые известные свойства класса e (в частности, теорема 5.2). Наличие сечений расслоения, трансверсальных к основному (нулевому), и двойственность Пуанкаре позволяют в случае гладких расслоений получить ряд интерпретаций классов τ и e основного расслоения в терминах гомологий и когомологий базы M и её трансверсального «самопересечения» M_0, нормальных расслоений M_0 в M и в основном расслоённом пространстве E (теоремы 5.4 и 5.9, следствия 5.10, 5.15 и 5.16). Независимо от условий ориентируемости получены некоторые результаты о существовании сечений или векторных полей, о нулях сечений расслоений, в частности о нулях векторных полей на многообразиях (теорема 5.1, следствие 5.11, теорема 5.12, следствие 5.14). Устанавливаемая посредством операции $\frown\tau$ связь между фундаментальными классами гомологий многообразий E и M применяется для доказательства того, что в случае расслоений над многообразиями изоморфизмы Тома вместе с их формой — следствие двойственности Пуанкаре (теорема 5.18). При этом изоморфизмы Тома § 2 для когомологий отождествляются с изоморфизмами § 3 для гомологий. Аналогичным образом когомологическая последовательность типа Тома—Гизина отождествляется с гомологической (теорема 5.19).

В § 5 существенно используются результаты § 4, в том числе свойства ориентирующих пучков по отношению к суммам Уитни и проекциям расслоений. Широко используется двойственность Пуанкаре в форме, полученной А. Картаном [24] (в качестве следствия его спектральной последовательности, отвечающей дифференциальному пучку цепей) и развитой затем в известной работе Бореля и Мура о гомологиях локально компактных пространств (см. [23, глава V, § 9]; описание первоначальной конструкции Картана см., например, в [23, глава IV, п. 2.9]). В конструкциях, связанных с применением умножения на классы h когомологий пар пространств (E, V) (в частности, на класс Тома τ), существенным моментом оказывается возможность представлять коцепи сечениями вялых пучков и, как результат, с носителями в $E\setminus V$ — указанные классы h (но не в регулярных или трубчатых окрестностях $E\setminus V$ в E, как это имеет место в классических подходах, ср., например, с [1, предложение 12.8]).

В § 6 разъясняется связь выбора класса τ с понятием ориентации.

§ 2. Изоморфизм Тома для когомологий

Пусть $\pi\colon E\to X$ — локально тривиальное вещественное n-мерное векторное расслоение со слоем $\mathbb{R}^n$, E_0 — часть E, состоящая из ненулевых векторов слоёв, X — хаусдорфово пространство, $\mathcal{H}^n(\pi)$ — ориентирующий пучок расслоения π над основным кольцом Λ, определяемый когомологиями $H^n_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n_x;\Lambda)$ слоёв $\mathbb{R}^n_x=\pi^{-1}(x)$ над точками $x\in X$. Для любого пучка Λ-модулей $\mathcal{A}$ на X символ $\pi^*\mathcal{A}$ означает обратный образ $\mathcal{A}$ при отображении π. Для произвольного семейства носителей φ в пространстве X символом θ будем обозначать прообраз φ при проекции π, то есть семейство носителей в E, определяемое всеми прообразами множеств из φ.

2.1. Теорема. *Существует элемент $\tau\in H^n(E,E_0;\pi^*\mathcal{H}^n(\pi))$ (который будет называться классом Тома расслоения), ограничение которого на каждый слой $\mathbb{R}^n_x$ есть образующая (то есть 1 или -1) изоморфного Λ кольца $H^n_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n_x;\Lambda_x)$, где Λ_x — постоянный пучок, служащий ограничением пучка $\pi^*\mathcal{H}^n(\pi)$ на слой $\mathbb{R}^n_x$, $x\in X$. Своими ограничениями на слои элемент τ определён однозначно. Для любого пучка Λ-модулей $\mathcal{A}$ на X сопоставление $h\to\pi^*(h)\smile\tau$ при каждом целом числе $m\in\mathbb{Z}$ устанавливает изоморфизм $H^m_\varphi(X,\mathcal{A})\to H^{m+n}_\theta(E,E_0;\pi^*(\mathcal{A}\otimes_\Lambda\mathcal{H}^n(\pi)))$.*

В частности, $H^q_\theta(E,E_0;\pi^*(\mathcal{A}\otimes_\Lambda\mathcal{H}^n(\pi)))=0$ при $q<n$. Отметим также, что $H^n(E,E_0;\pi^*\mathcal{H}^n(\pi))=H^0(X;\Lambda)$ и что последняя группа — это группа локально постоянных функций на X со значениями в Λ, изоморфная Λ для связных X.

Перед доказательством теоремы сформулируем несколько замечаний.

2.2. Сопоставлением $h\to\pi^*(h)$ устанавливается изоморфизм

$$H^m_\varphi(X;\mathcal{A})\to H^m_\theta(E;\pi^*\mathcal{A})$$

(предложение 2.6).

2.3. Пучок $\mathcal{A}$ в формулировке теоремы может быть заменён на $\mathcal{A}\otimes_\Lambda\mathcal{H}^n(\pi)$. Поскольку $\mathcal{H}^n(\pi)\otimes_\Lambda\mathcal{H}^n(\pi)=\Lambda$, эквивалентной формой изоморфизма оказывается также следующая:

$$H^m_\varphi(X;\mathcal{A}\otimes_\Lambda\mathcal{H}^n(\pi))\to H^{m+n}_\theta(E,E_0;\pi^*\mathcal{A}).$$

2.4. Собственно, в [23, глава IV, п. 7.9] устанавливается только последнее утверждение теоремы 2.1. Связь τ с когомологиями слоёв обсуждается лишь для ориентируемых расслоений, выбор τ для которых отождествляется с выбором ориентации. Что касается общего случая, подобная связь считается неосуществимой. См., однако, § 6.

Как отмечено в § 1, для неориентируемого расслоения над паракомпактным пространством X и постоянных коэффициентов $\mathcal{A} = G$ изоморфизм $H^m(X; G \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)) = H^{m+n}(E, E_0; G)$, в сущности, получен (без аппарата спектральных последовательностей) в [19, глава 6, § 9, теорема 14]. Частным случаем этого результата оказывается изоморфизм, приведённый в [10] (X — конечный клеточный комплекс и $G = \mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел). Частным случаем можно считать и отмеченный в § 1 результат из [1] (π — гладкое расслоение над многообразием X, $G = \mathbb{R}$ — поле вещественных чисел). Класс Тома неориентируемого расслоения авторами не использовался (и не определялся; впрочем, в частном случае касательного расслоения многообразия X класс τ всё же был определён в [19, глава 6, упражнение A3] посредством диагонального вложения $X \subset X \times X$, но для иных целей).

Перед доказательством теоремы 2.1 в качестве её следствия получим относительные варианты изоморфизма.

2.5. Теорема. *Пусть Y — подпространство в X и $F = \pi^{-1}(Y)$. Пусть выполнено одно из условий:* а) *Y открыто;* б) *Y замкнуто и паракомпактно, а семейство φ паракомпактифицирующее;* в) *X наследственно паракомпактно, Y — произвольное подпространство и φ — паракомпактифицирующее семейство. В этих условиях π индуцирует изоморфизм когомологий $H^*_\varphi(X, Y; \mathcal{A}) = H^*_\theta(E, F; \pi^*\mathcal{A})$ и умножение $\smile \tau$ осуществляет изоморфизм $H^m_\theta(E, F; \pi^*\mathcal{A}) \to H^{m+n}_\theta(E, E_0 \cup F; \pi^*(\mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)))$.*

В самом деле, первый из изоморфизмов — следствие изоморфизма для одиночных пространств (предложение 2.6 ниже) и леммы о пяти изоморфизмах. Когомологии $H^*_\varphi(X, Y; \mathcal{A})$ в указанных случаях изоморфны когомологиям $H^*_{\varphi \,|\, X \setminus Y}(X; \mathcal{A})$ всего пространства с носителями из φ, содержащимися в $X \setminus Y$, см. [23, глава II, теорема 12.1 и определение 10.5 (10.4 в первой редакции)]. По аналогичным причинам $H^*_\theta(E, F; \pi^*\mathcal{A}) = H^*_{\theta \,|\, E \setminus F}(E; \pi^*\mathcal{A})$, причём, очевидно, $\theta \,|\, E \setminus F = \pi^{-1}(\varphi \,|\, X \setminus Y)$. В силу теоремы 2.1 операция $\smile \tau$ обеспечивает изоморфизм $H^m_{\theta \,|\, E \setminus F}(E; \pi^*\mathcal{A}) \to H^{m+n}_{\theta \,|\, E \setminus F}(E, E_0; \pi^*(\mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)))$. Остаётся убедиться, что в рассматриваемых условиях последняя группа изоморфна когомологиям пары $(E, E_0 \cup F)$.

В силу указанных выше результатов из [23] это так, очевидно, для открытого F (то есть в случае открытого Y), поскольку обе группы изоморфны когомологиям E с носителями из θ, содержащимися в $E \setminus (E_0 \cup F)$. По тем же причинам это верно для любого $Y \subset X$, когда пространство E оказывается наследственно паракомпактным. Чтобы убедиться в этом в оставшейся (весьма общей) ситуации, придётся воспользоваться конкретным устройством подпространства $E_0 \cup F$.

Для этого заметим, что ограничения π на паракомпактные подпространства $\Phi \subset X$ — евклидовы расслоения (расслоения с ортогональной структурной группой, см. [9, § 2]), следовательно, являются паракомпактными как счётные объединения расслоений на компактные диски возрастающих радиусов. Это означает паракомпактифицируемость θ для паракомпактифицирующих семейств φ. По тем же причинам $\pi^{-1}(\Phi)\cap E_0$ паракомпактны как счётные объединения дополнений к расслоениям на открытые диски уменьшающихся радиусов. Следовательно, для паракомпактифицирующих φ паракомпактифицирующими оказываются семейства $\theta_0=\theta\cap E_0$. По сходным причинам для паракомпактного $\Phi\subset X$ и паракомпактного подпространства $Y\subset X$ паракомпактно множество $\pi^{-1}(\Phi)\cap(E_0\cup F)$, что обеспечивает паракомпактифицируемость семейства $\eta=\theta\cap(E_0\cup F)$. В силу указанных выше результатов из [23] заключаем, что когомологии $H^*_\eta(E_0\cup F,F)$ (с коэффициентами в произвольном пучке) изоморфны $H^*_{\eta\,|\,E_0\setminus F}(E_0)$. Но $\eta\,|\,E_0\setminus F=\theta_0\,|\,E_0\setminus F=\theta_1\cap E_0$, где $\theta_1=\pi^{-1}(\varphi_1)$ и $\varphi_1=\varphi\,|\,X\setminus Y$. Поэтому когомологии пары $(E_0\cup F,F)$ по отношению к семейству θ совпадают с $H^*_{\theta_1\cap E_0}(E_0)$.

Считая, что определяющие когомологии коцепи реализуются как сечения канонической вялой резольвенты Годемана, получаем короткую точную последовательность коцепных комплексов — последовательность (21) ((1) в первой редакции) в [23, глава II, § 12]:

$$0\to C^*_{\theta_1}(E,E_0)\to C^*_{\theta_1}(E)\to C^*_{\theta_1\cap E_0}(E_0)\to 0.$$

Поскольку $\theta_1=\theta\,|\,E\setminus F$, первый комплекс в этой последовательности даёт интересующие нас когомологии $H^*_{\theta\,|\,E\setminus F}(E,E_0)$. В рассматриваемых условиях (в силу всё тех же использованных выше результатов из [23]) когомологии пары (E,F) с носителями в θ — это когомологии E с носителями в θ_1, $C^*_{\theta_1}(E)=C^*_\theta(E,F)$. Таким образом, при тождественном отображении в среднем члене короткая точная последовательность выше за счёт отображения в третьем комплексе отображается в каноническую тройку коцепных комплексов, определяющих когомологическую последовательность тройки $(E,E_0\cup F,F)$, см. последовательность (24) ((4) в первой редакции) в [23, глава II, § 12]. Поскольку во втором и третьем членах индуцируются изоморфизмы когомологиям (E,F) и $(E_0\cup F,F)$, в силу леммы о пяти изоморфизмах получаем нужный нам изоморфизм $H^*_{\theta_1}(E,E_0)=H^*_{\theta_1}(E,E_0\cup F)$.

В оставшейся части настоящего параграфа доказывается теорема 2.1.

Пусть $\tilde\pi\colon\tilde E\to X$ — ассоциированное с π расслоение на n-мерные сферы S^n, получающееся заменой слоёв π их одноточечными компактификациями, $\tilde E_0$ — дополнение в $\tilde E$ к нулевому сечению $i_0\colon X\to E$ и $i_\infty\colon X\to\tilde E$ — сечение, состоящее из точек $\tilde E\setminus E$.

2.6. Предложение. $H^m_\varphi(X;\mathcal{A})=H^m_\theta(E;\pi^*\mathcal{A})=H^m_{\tilde\theta}(\tilde E_0;\tilde\pi^*\mathcal{A})$ (*здесь* $\tilde\theta=\tilde\pi^{-1}(\varphi)$).

Достаточно доказать первое равенство. Имеем

$$H^m_\varphi(X;\mathcal{A})=\varinjlim_{\Phi\in\varphi}\{H^m(X,X\setminus\Phi;\mathcal{A})\}$$

[17, предложение 1], аналогично для E и θ, поэтому

$$H^m_\theta(E;\pi^*\mathcal{A}) = \varinjlim_{\Phi\in\varphi}\{H^m(E, E\setminus\pi^{-1}(\Phi);\pi^*\mathcal{A})\}.$$

Тем самым достаточно установить изоморфизм

$$H^m(X, X\setminus\Phi;\mathcal{A}) = H^m(E, E\setminus\pi^{-1}(\Phi);\pi^*\mathcal{A}).$$

Индуцированное π отображение точных последовательностей когомологий пар $(X, X\setminus\Phi)$ и $(E, E\setminus\pi^{-1}(\Phi))$ и лемма о пяти изоморфизмах сводят, наконец, общую задачу к установлению изоморфизма $H^m(X;\mathcal{A}) = H^m(E;\pi^*\mathcal{A})$.

Для этого представим E в виде объединений $\bigcup\limits_i T_i$ замкнутых и $\bigcup\limits_i U_i$ открытых множеств так, что $i_0(X)\subset U_i\subset T_i\subset U_{i+1}$, а проекции $T_i\to X$ ацикличны и имеют компактные прообразы точек. При отсутствии у X свойства паракомпактности это можно сделать, взяв в качестве T_1 послойно выпуклую оболочку дополнения в $\tilde{E}$ к достаточно малой окрестности замкнутого множества $i_\infty(X)$, определив затем T_i как результат послойного умножения T_1 на i. При реализации определяющих группы $H^m(E;\pi^*\mathcal{A})$ коцепей как комплекса $C^*(E;\pi^*\mathcal{A})$ сечений канонической вялой резольвенты Годемана пучка $\pi^*\mathcal{A}$ имеем $C^*(E;\pi^*\mathcal{A}) = \varprojlim\limits_i\{C^*(U_i;\pi^*\mathcal{A})\}$ при эпиморфных ограничениях коцепей, индуцируемых включениями $U_i\subset U_{i+1}$. Хорошо известно (см., например, [21, теорема 1 или общая лемма 7]), что в подобных ситуациях имеют место точные последовательности

$$0\to\varprojlim_i{}^1\{H^{m-1}(U_i;\pi^*\mathcal{A})\}\to H^m(E;\pi^*\mathcal{A})\to\varprojlim_i\{H^m(U_i;\pi^*\mathcal{A})\}\to 0.$$

По соображениям конфинальности ([7, теорема 1] или [8, лемма A.18]) пространства U_i здесь могут быть заменены на T_i. Для последних же в силу теоремы Вьеториса—Бегла [23, глава II, теорема 11.7 или теорема 11.2 в первой редакции] $H^q(T_i;\pi^*\mathcal{A}) = H^q(X;\mathcal{A})$, поэтому проективные системы $\{H^q(T_i;\pi^*\mathcal{A})\}$ постоянны, функтор $\varprojlim\limits_i{}^1$ обращается для них в нуль ([21, лемма 1] или [8, лемма A.17]). Следовательно, $H^m(E;\pi^*\mathcal{A}) = H^m(X;\mathcal{A})$. Предложение доказано.

Композиция $\tilde{\pi}i_\infty$ — тождественное отображение пространства X, поэтому точная последовательность когомологий пары $(\tilde{E}, i_\infty(X))$ с коэффициентами в $\tilde{\pi}^*\mathcal{A}$ расщепляется на расщепляющиеся короткие точные последовательности

$$0\to H^m(\tilde{E}, i_\infty(X);\tilde{\pi}^*\mathcal{A})\to H^m(\tilde{E},\tilde{\pi}^*\mathcal{A})\to H^m(X;\mathcal{A})\to 0. \tag{2.1}$$

Сопоставляя эту последовательность с аналогичной последовательностью для $(\tilde{E},\tilde{E}_0)$, заключаем, что $H^m(\tilde{E}, i_\infty(X);\tilde{\pi}^*\mathcal{A}) = H^m(\tilde{E},\tilde{E}_0;\pi^*\mathcal{A})$, а воспользовавшись ещё и теоремой вырезания, получим изоморфизм

$$H^m(E, E_0;\pi^*\mathcal{A}) = H^m(\tilde{E}, i_\infty(X);\tilde{\pi}^*\mathcal{A}). \tag{2.2}$$

Рассмотрим члены $E_2^{pq} = H^p(X;\mathcal{H}^q(\tilde{\pi}^*\mathcal{A}))$ спектральной последовательности Лере отображения $\tilde{\pi}$. Слои пучков Лере $\mathcal{H}^q(\tilde{\pi}^*\mathcal{A})$ в точках $x\in X$ определяются предпучками $U\to H^q(\tilde{\pi}^{-1}(U);\tilde{\pi}^*\mathcal{A})$, $x\in U$. Поскольку слои $\tilde{\pi}$ компактны, это отображение замкнуто и множества вида $\tilde{\pi}^{-1}(U)$ для окрестностей U точки x составляют фундаментальную систему окрестностей слоя $\tilde{\pi}^{-1}(x) \approx S^n$. Поэтому в силу свойства жёсткости вложений $\tilde{\pi}^{-1}(x) \subset \tilde{E}$ (см. [23, глава II, случай (e) определения 10.5 и теорема 10.6, соответственно 10.4 и 10.5 в первой редакции]) слои $\mathcal{H}^q(\tilde{\pi}^*\mathcal{A})$ совпадают с когомологиями $H^q(S^n; \mathcal{A}_x)$ ($\mathcal{A}_x$ — постоянный пучок на $\tilde{\pi}^{-1}(x)$, являющийся ограничением $\tilde{\pi}^*\mathcal{A}$, со слоями, изоморфными слою $\mathcal{A}_x$ пучка $\mathcal{A}$ в точке x). Таким образом, $E_2^{pq} = 0$ при $q \neq 0$ и $q \neq n$. Из расщепляемости (2.1) заключаем, что являющаяся следствием спектральной последовательности точная последовательность (типа Гизина) распадается на расщепляющиеся короткие точные последовательности

$$0 \to H^m(X; \mathcal{A}) \to H^m(\tilde{E}; \tilde{\pi}^*\mathcal{A}) \to H^{m-n}(X; \mathcal{H}^n(\tilde{\pi}^*\mathcal{A})) \to 0.$$

Индуцируемые $\tilde{\pi}$ первые отображения в этих последовательностях обратны к эпиморфизмам в (2.1). Тем самым в силу (2.2)

$$H^m(E, E_0; \pi^*\mathcal{A}) = H^{m-n}(X; \mathcal{H}^n(\tilde{\pi}^*\mathcal{A})). \tag{2.3}$$

Аналогичным образом получается и более общий изоморфизм, учитывающий носители, а именно

$$H^m_\theta(E, E_0; \pi^*\mathcal{A}) = H^{m-n}_\varphi(X; \mathcal{H}^n(\tilde{\pi}^*\mathcal{A})). \tag{2.4}$$

Для этого следует воспользоваться более общей спектральной последовательностью из [23, глава IV, теорема 6.1], учитывающей носители в X и E и применимой к проекции $\tilde{\pi}\colon (\tilde{E}, A) \to X$ расслоения с выделенным подпространством $A \subset \tilde{E}$. В интересующем нас случае $A = i_\infty(X)$. Второй член этой спектральной последовательности в рассматриваемой ситуации имеет вид $E_2^{pq} = H^p_\varphi(X; \mathcal{H}^q_\psi(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}|A; \mathcal{B}))$, где $\mathcal{B}$ — произвольный, вообще говоря, пучок на $\tilde{E}$ и ψ — также произвольное в общем случае семейство носителей в $\tilde{E}$. Спектральная последовательность сходится к когомологиям $H^{p+q}_{\varphi(\psi)}(\tilde{E}, A; \mathcal{B})$, в которых $\varphi(\psi)$ — определяемое в [23] зависящее от φ и ψ семейство носителей в $\tilde{E}$. В нашей ситуации $\mathcal{B} = \tilde{\pi}^*\mathcal{A}$, а семейство, фигурирующее в [23] как ψ, — это семейство всех замкнутых в $\tilde{E}$ множеств, поэтому в соответствии с определением 5.1 семейства $\varphi(\psi)$ (и используемым в нём определением 3.1) из [23, глава IV] $\varphi(\psi) = \tilde{\pi}^{-1}(\varphi) = \tilde{\theta}$ и, таким образом, спектральная последовательность сходится к $H^*_{\tilde{\theta}}(\tilde{E}, i_\infty(X); \tilde{\pi}^*\mathcal{A}) = H^*_\theta(E, E_0; \pi^*\mathcal{A})$. В силу тех же аргументов, что и для вложений $\tilde{\pi}^{-1}(x) \subset \tilde{E}$ (см. выше), выполнены сформулированные в указанной выше теореме 6.1 из [23, глава IV] условия жёсткости для содержащихся в $\tilde{E}$ пар $(\tilde{\pi}^{-1}(x), \tilde{\pi}^{-1}(x) \cap i_\infty(X))$, обеспечивающие в соответствии с этой теоремой изоморфизм слоёв обобщённых пучков Лере $\mathcal{H}^q(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}|A; \tilde{\pi}^*\mathcal{A})$ в точках $x \in X$ когомологиям слоёв $\tilde{\pi}$, то есть в рассматриваемой нами ситуации — когомологиям пар $(S^n, S^n \cap i_\infty(X))$. Тем самым изоморфизм (2.4) в конечном итоге — следствие тех же аргументов, что и (2.3).

Далее выясним строение пучка Лере $\mathcal{H}^n(\tilde{\pi}^*\mathcal{A})$. Как указано выше, слоем этого пучка в точке $x \in X$ является модуль $\mathcal{A}_x = H^n(S^n; \mathcal{A}_x)$. Таким образом, слои пучков $\mathcal{H}^n(\tilde{\pi}^*\mathcal{A})$ и $\mathcal{A}$ совпадают.

2.7. Лемма. *Пучки $\mathcal{A}$ и $\mathcal{H}^n(\tilde\pi^*\mathcal{A})$ локально изоморфны. При этом $\mathcal{H}^n(\tilde\pi^*\mathcal{A}) = \mathcal{H}^n(\pi)\otimes_\Lambda\mathcal{A}$, где $\mathcal{H}^n(\pi) = \mathcal{H}^n(\tilde\pi^*\Lambda) = \mathcal{H}^n(\Lambda)$ (Λ — постоянный пучок, отвечающий основному кольцу).*

Доказательство. Для проверки первого утверждения достаточно убедиться, что в случае тривиального расслоения π имеет место совпадение $\mathcal{H}^n(\tilde\pi^*\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Доказательство проведём индукцией по n. Пусть $S^n = D_1^n \cup D_2^n$ — объединение двух n-мерных клеток, для которых $D_1^n \cap D_2^n = S^{n-1}$, $n \geqslant 1$, и пусть $\tilde U^p = U\times S^p$, $\tilde U_i^n = U\times D_i^n$, где U — окрестность точки $x\in X$. Пусть сперва $n=1$. Рассмотрим низшие члены точной последовательности когомологий триады $(\tilde U^1; \tilde U_1^1, \tilde U_2^1)$:

$$0 \to H^0(\tilde U^1;\tilde\pi^*\mathcal{A}) \to H^0(\tilde U_1^1;\tilde\pi^*\mathcal{A}) \oplus H^0(\tilde U_2^1;\tilde\pi^*\mathcal{A}) \to$$
$$\to H^0(U;\mathcal{A}) \oplus H^0(\tilde U;\mathcal{A}) \to H^1(\tilde U^1;\tilde\pi^*\mathcal{A}) \to \dots.$$

В этой ситуации $\tilde U^0$ есть объединение $U\cup\tilde U$, где $\tilde U$ гомеоморфно U и $\tilde U\cap U = \varnothing$. При переходе к индуктивным пределам по окрестностям U точек $x\in X$ точность сохранится, возникнет стандартная точная последовательность пучков

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}\oplus\mathcal{A} \to \mathcal{A}\oplus\mathcal{A} \to \mathcal{H}^1(\tilde\pi^*\mathcal{A}) \to 0.$$

В самом деле, предпучки типа $U \to H^p(\tilde U^1;\tilde\pi^*\mathcal{A})$ индуцируют $\mathcal{A}$ при $p=0$, $\mathcal{H}^1(\tilde\pi^*\mathcal{A})$ при $p=1$ и нулевые пучки при $p>1$, предпучки же $U\to H^p(\tilde U_i^1;\tilde\pi^*\mathcal{A})$ и $U \to H^p(\tilde U_1^1\cap\tilde U_2^1;\tilde\pi^*\mathcal{A})$ индуцируют соответственно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\oplus\mathcal{A}$ при $p=0$ и нулевые пучки при $p>0$. Учитывая стандартность гомоморфизмов, из точной последовательности заключаем, что $\mathcal{H}^1(\tilde\pi^*\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

При $n>1$ рассмотрим следующий участок когомологической точной последовательности триады $(\tilde U^n; \tilde U_1^n, \tilde U_2^n)$:

$$\dots \to H^{n-1}(\tilde U_1^n;\tilde\pi^*\mathcal{A}) \oplus H^{n-1}(\tilde U_2^n;\tilde\pi^*\mathcal{A}) \to H^{n-1}(\tilde U^{n-1};\tilde\pi^*\mathcal{A}) \to$$
$$\to H^n(\tilde U^n;\tilde\pi^*\mathcal{A}) \to H^n(\tilde U_1^n;\tilde\pi^*\mathcal{A}) \oplus H^n(\tilde U_2^n;\tilde\pi^*\mathcal{A}) \to \dots.$$

Сопоставление таких последовательностей открытым множествам U определяет на X точную последовательность соответствующих предпучков. Учитывая, что по краям возникают нулевые пучки (пучки Лере при ацикличном компактном слое), а в средних членах — пучки Лере с компактными слоями S^{n-1} и S^n, получаем требуемый изоморфизм $\mathcal{A} = \mathcal{H}^{n-1}(\tilde\pi_{n-1}^*\mathcal{A}) = \mathcal{H}^n(\tilde\pi^*\mathcal{A})$ (здесь $\tilde\pi_{n-1}$ — ограничение $\tilde\pi$ на подпространства типа $\tilde U^{n-1}\subset\tilde U^n$).

Докажем второе утверждение леммы. Пусть U_1, U_2 — две карты расслоения π и $U = U_1\cap U_2\subset X$. В соответствии с определением пучка Лере $\mathcal{H}^n(\tilde\pi^*\mathcal{A})$ для $x\in U$ включения $U\subset U_i$ индуцируют изоморфизмы слоёв $\mathcal{A}_x$ локально изоморфного $\mathcal{A}$ пучка $\mathcal{H}^n(\tilde\pi^*\mathcal{A})$, либо тождественные, либо отличающиеся от тождественного знаком в зависимости от того, посредством какой степени гомеоморфизмов отождествляются слои $\tilde\pi^{-1}(x)\approx S^n$ расслоения $\tilde\pi$ (поскольку $\mathcal{A}_x = H^n(S^n;\mathcal{A}_x)$). То же справедливо и для пучка $\mathcal{H}^n(\pi)\otimes_\Lambda\mathcal{A}$, поскольку структурная группа пучка $\mathcal{H}^n(\pi)$ как расслоения состоит из 1 и -1 кольца Λ. Тем самым устройство пучка $\mathcal{H}^n(\tilde\pi^*\mathcal{A})$ совпадает с устройством $\mathcal{H}^n(\pi)\otimes_\Lambda\mathcal{A}$.

2.8. Следствие. *Пучок $\mathcal{H}^n(\tilde{\pi}^*\mathcal{A})$ тогда и только тогда локально постоянен, когда таков пучок $\mathcal{A}$.*

2.9. Следствие. $\mathcal{H}^n(\tilde{\pi}^*(\mathcal{A}\otimes_\Lambda \mathcal{B})) = \mathcal{H}^n(\tilde{\pi}^*\mathcal{A})\otimes_\Lambda \mathcal{B}$.

В самом деле, $\mathcal{H}^n(\tilde{\pi}^*(\mathcal{A}\otimes_\Lambda \mathcal{B})) = \mathcal{H}^n(\pi)\otimes_\Lambda \mathcal{A}\otimes_\Lambda \mathcal{B} = \mathcal{H}^n(\tilde{\pi}^*\mathcal{A})\otimes_\Lambda \mathcal{B}$.

Соотношение следствия — частный случай более общего (в котором $\mathcal{A}$ — пучок на отображаемом пространстве), получаемого из иных конструкций для общих отображений (см. [23, глава IV, предложение 4.6]).

2.10. Следствие. *Изоморфизму* (2.4) *можно придать вид*

$$H^m_\theta(E, E_0; \pi^*\mathcal{A}) = H^{n-m}_\varphi(X; \mathcal{H}^n(\pi)\otimes_\Lambda \mathcal{A})$$

Из отвечающей соответствующим носителям точной последовательности (2.1) получаем следующее соотношение.

2.11. Следствие. *Имеет место разложение когомологий $\tilde{E}$ в прямую сумму $H^m_{\tilde{\theta}}(\tilde{E}; \tilde{\pi}^*\mathcal{A}) = H^m_\varphi(X; \mathcal{A})\oplus H^{m-n}_\varphi(X; \mathcal{H}^n(\pi)\otimes_\Lambda\mathcal{A})$, второе слагаемое в которой — ядро гомоморфизма i_0^*.*

В силу отмеченного выше строения структурной группы расслоения $\mathcal{H}^n(\pi)$ имеет место также следующее утверждение.

2.12. Следствие. $\mathcal{H}^n(\pi)^{-1} = \mathcal{H}^n(\pi)$ (*т. е.* $\mathcal{H}^n(\pi)\otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi) = \Lambda$).

Таким образом, условия $\mathcal{A} = \mathcal{H}^n(\pi)\otimes_\Lambda \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} = \mathcal{H}^n(\pi)\otimes_\Lambda \mathcal{A}$ равносильны, справедливо следующее утверждение.

2.13. Следствие. $\mathcal{H}^n(\tilde{\pi}^*\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{A} = \mathcal{H}^n(\tilde{\pi}^*\mathcal{B})$.

2.14. Следствие. $\mathcal{H}^n(\tilde{\pi}^*\mathcal{H}^n(\tilde{\pi}^*\mathcal{A})) = \mathcal{A}$.

В силу леммы 2.7 и следствия 2.12 изоморфизму (2.4) можно придать также следующий вид: $H^m_\varphi(X; \mathcal{A}) = H^{m+n}_\theta(E, E_0; \pi^*\mathcal{H}^n(\tilde{\pi}^*\mathcal{A}))$.

В частности, $H^n(E, E_0; \pi^*\mathcal{H}^n(\pi)) = H^0(X; \Lambda)$ — кольцо локально постоянных функций со значениями в Λ (см. замечание к формулировке теоремы 2.1). Отвечающий единичной функции при этом изоморфизме элемент $\tau \in H^n(E, E_0; \pi^*\mathcal{H}^n(\pi))$ будем называть классом Тома расслоения π. В случае ориентируемого расслоения $\mathcal{H}^n(\pi) = \Lambda$ и $\pi^*\Lambda = \Lambda$ получается обычный класс Тома ориентируемого расслоения. Наличие указанного класса τ в общем случае, как отмечено во введении, фактически означает ориентируемость произвольного расслоения π над своим ориентирующим пучком $\mathcal{H}^n(\pi)$. При этом, как и в классической ситуации, в случае связной базы π имеет две ориентации (если, конечно, $-1 \neq 1$ в Λ) и выбор τ означает выбор одной из них[1]. Поскольку $H^0(X; \Lambda)$ — группа локально постоянных функций, а все полученные соотношения естественны по отношению к включениям $Y \subset X$, класс τ единственным образом определяется своими ограничениями на слои расслоения π.

Соотношения между коэффициентами для расслоения и базы позволяют оценить в реализации изоморфизма Тома роль класса τ. Учитываем, что

[1]См. также § 6.

$H^m_\varphi(X;\mathcal{A}) = H^m_\theta(E;\pi^*\mathcal{A})$ и что в силу открытости E_0 когомологии пары (E,E_0) можно интерпретировать как когомологии с носителями в $E\setminus E_0 = i_0(X)$ самого пространства E. Поэтому определена операция умножения

$$\smile\colon H^m_\theta(E;\pi^*\mathcal{A}) \otimes_\Lambda H^n(E,E_0;\mathcal{G}) \to H^{m+n}_\theta(E,E_0;\mathcal{G}\otimes_\Lambda \pi^*\mathcal{A}).$$

Для любого $t \in H^n(E,E_0;\mathcal{G})$ возникает преобразование

$$\smile t\colon H^m_\theta(E;\pi^*\mathcal{A}) \to H^{m+n}_\theta(E,E_0;\mathcal{G}\otimes_\Lambda \pi^*\mathcal{A}).$$

Это преобразование есть композиция с $\smile$ определяемого элементом t отображения модуля $H^m_\theta(E;\pi^*\mathcal{A})$ в указанное выше тензорное произведение. Изоморфизма для $\smile t$ естественно ожидать только при условии, что модуль $H^n(E,E_0;\mathcal{G})$ есть Λ (или прямая сумма Λ). В соответствии с наблюдениями выше определённой информацией о $H^n(E,E_0;\mathcal{G})$ мы обладаем лишь в случае, когда $\mathcal{G}$ — пучок вида $\pi^*\mathcal{B}$. В этом случае в силу следствия 2.10 $H^n(E,E_0;\mathcal{G}) = H^0(X;\mathcal{H}^n(\pi)\otimes_\Lambda \mathcal{B})$ — группа сечений пучка $\mathcal{H}^n(\pi)\otimes_\Lambda\mathcal{B}$, гарантированно отличная от нуля, лишь если этот пучок постоянен. А чтобы она была ещё и как-то связана с кольцом Λ (оказалась группой локально постоянных функций из X в Λ), необходимо, чтобы $\mathcal{H}^n(\pi)\otimes_\Lambda\mathcal{B} = \Lambda$, то есть чтобы $\mathcal{B} = \mathcal{H}^n(\pi)$ (см. следствие 2.12) или $\mathcal{G} = \pi^*\mathcal{H}^n(\pi)$. Результат операции $\smile t$ в этом случае будет принадлежать когомологиям (E,E_0) с коэффициентами в $\pi^*\mathcal{H}^n(\pi)\otimes_\Lambda \pi^*\mathcal{A} = \pi^*(\mathcal{H}^n(\pi)\otimes_\Lambda\mathcal{A})$, что соответствует указанным в теореме 2.1. Наконец, естественного изоморфизма, совместимого с применявшимися выше конструкциями, посредством операции $\smile t$ можно ожидать лишь при $t = \tau = \pm 1 \in \Lambda \subset H^n(E,E_0;\pi^*\mathcal{H}^n(\pi))$. Так как Λ выделяется прямым слагаемым в $H^n(E,E_0;\pi^*\mathcal{H}^n(\pi))$, а присутствующая в умножении $\smile$ операция $\otimes_\Lambda$ перестановочна с прямыми суммами, операция $\smile t$ при $t=\tau$ — действительно изоморфизм.

В этих рассуждениях мы воспользовались следующим утверждением (которое будет использоваться также в § 4 и 5).

2.15. Лемма. *Для непрерывного отображения $f\colon E\to X$ и пучков $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ на X имеет место $f^*(\mathcal{A}\otimes_\Lambda\mathcal{B}) = f^*\mathcal{A}\otimes_\Lambda f^*\mathcal{B}$.*

Доказательство. Пучок $f^*\mathcal{A}\otimes_\Lambda f^*\mathcal{B}$ порождается предпучком $f^*\mathcal{A}(U)\otimes_\Lambda f^*\mathcal{B}(U)$, где U — открытые множества в E [3, глава II, п. 2.8]. Группа сечений $f^*\mathcal{A}(U)$ совпадает с группой непрерывных отображений $U\to\mathcal{A}$, накрывающих f в том смысле, что их композиция с $p\colon\mathcal{A}\to X$ совпадает с ограничением f на U (см. [3, глава II, п. 1.12]). Аналогичное описание имеет $f^*\mathcal{B}(U)$. Поскольку пространство $\mathcal{A}$ (аналогично $\mathcal{B}$) локально гомеоморфно X, указанные отображения локально представляются в виде композиции f и сечений в $\mathcal{A}$ (соответственно $\mathcal{B}$). Поэтому определено естественное преобразование — гомоморфизм предпучков $f^*\mathcal{A}(U)\otimes_\Lambda f^*\mathcal{B}(U)\to f^*(\mathcal{A}\otimes_\Lambda\mathcal{B})(U)$. Тем самым определён гомоморфизм пучков $f^*\mathcal{A}\otimes_\Lambda f^*\mathcal{B}\to f^*(\mathcal{A}\otimes_\Lambda\mathcal{B})$. Слои всех обсуждаемых пучков над точками E совпадают со слоями соответствующих пучков над образами этих точек при отображении f [3, глава II, п. 1.12], поэтому гомоморфизм пучков изоморфен на слоях (слои тензорного произведения пучков суть тензорные произведения слоёв, см. [3, глава II, п. 2.8]). Так как любой гомоморфизм пучков есть локальный гомеоморфизм, указанное преобразование пучков есть изоморфизм. Лемма доказана.

§ 3. Изоморфизм Тома для гомологий

В отличие от когомологий приспособленные к разного рода применениям гомологии определены пока только для локально постоянных коэффициентов (см. в связи с этим, в частности, [15, § 6]), поэтому в настоящем параграфе $\mathcal{A}$ — локально постоянный пучок Λ-модулей (на хаусдорфовом пространстве X). Как и в § 2, $i_0\colon X \to E$ — нулевое сечение расслоения $\pi\colon E \to X$, $E_0 = E \setminus i_0(X)$. Всюду ниже символ H^{c}_* означает гомологии Стинрода—Ситникова (с компактными носителями), H_* — аналогичной природы гомологии второго рода (существующие, вообще говоря, не только для локально компактных пространств, см. конец параграфа). Альтернативное описание этих теорий дано в [8]. Основные результаты настоящего параграфа (теоремы 3.2 и 3.10) справедливы, однако, не только для H^{c}_* и H_*, но (при естественных ограничениях) и для соответствующих сингулярных групп (см. замечание 3.9 и введение). Применение общих теорий помимо отмеченного в конце введения проще ещё и тем, что при оперировании с парами пространств и с триадами не возникает типичных для сингулярной теории затруднений, связанных с необходимостью проверки условий типа вырезаемости (ср., например, с леммой 3.6).

Пусть Y — произвольное подпространство в X и $F = \pi^{-1}(Y)$. Имеет место следующий аналог предложения 2.6 (см. также замечание 3.11 для групп H_* второго рода).

3.1. Лемма. *Отображения i_0 и π индуцируют изоморфизм $H^{\mathrm{c}}_*(X, Y; \mathcal{A}) = H^{\mathrm{c}}_*(E, F; \pi^*\mathcal{A})$ (в том числе для сингулярных групп).*

Доказательство. Для постоянных коэффициентов утверждение — следствие свойства гомотопии. Из леммы о пяти изоморфизмах, применённой к индуцированному вложением i_0 отображению гомологической последовательности триады $(X_1 \cup X_2; X_1, X_2)$ в аналогичную последовательность триады $(E_1 \cup E_2; E_1, E_2)$, в которой $E_i = \pi^{-1}(X_i)$, следует, что утверждение леммы справедливо для $X_1 \cup X_2$, если оно справедливо для X_1, X_2 и $X_1 \cap X_2$. Утверждение верно для компактного подпространства $C \subset X$ и $E(C) = \pi^{-1}(C)$, поскольку C можно покрыть конечным числом подмножеств, над каждым из которых пучок $\mathcal{A}$ постоянен, и применить индукцию по числу таких подмножеств. Сравнение гомологических последовательностей пар (C, C') и $(E(C), E(C'))$ посредством индуцированного i_0 гомоморфизма вместе с леммой о пяти изоморфизмах обеспечивают справедливость утверждения для компактных пар (X, Y). В общем случае группы $H^{\mathrm{c}}_p(X, Y; \mathcal{A})$ — прямые пределы групп $H_p(C, C'; \mathcal{A})$ по компактным парам $(C, C') \subset (X, Y)$, аналогично для (E, F). Но для каждой компактной пары

(C, C') группы $H_p^c(E(C), E(C'); \pi^*\mathcal{A})$ — прямые пределы групп $H_p(D, D'; \pi^*\mathcal{A})$ по всем компактным парам $(D, D') \subset (E(C), E(C'))$, и в создавшейся ситуации $H_p^c(E, F; \pi^*\mathcal{A})$ — прямой предел групп $H_p^c(E(C), E(C'); \pi^*\mathcal{A}) = H_p^c(C, C'; \mathcal{A})$. Лемма доказана.

Так же, как в конце доказательства теоремы 2.1, класс Тома τ может рассматриваться как класс когомологий всего пространства E с носителями в $E \setminus E_0$. Поэтому результат операции $\frown \tau$ принадлежит гомологиям E с носителями в гомеоморфном X подпространстве $i_0(X)$, то есть в конечном итоге — гомологиям X (возможно, относительным).

3.2. Теорема. *Для $h \in H_m^c(E, F \cup E_0; \pi^*\mathcal{A})$ операция $h \frown \tau$ определяет изоморфизм $H_m^c(E, F \cup E_0; \pi^*\mathcal{A}) \to H_{m-n}^c(X, Y; \mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi))$.*

В силу следствия 2.12 эквивалентной формой утверждения оказывается изоморфизм $\frown \tau \colon H_m^c(E, F \cup E_0; \pi^*(\mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi))) \to H_{m-n}^c(X, Y; \mathcal{A})$.

Умножение $\frown$ естественно по отношению к отображениям гомологий и когомологий, индуцированным включениями, поэтому, как и в § 2, в конструкциях ниже будем пользоваться ассоциированным с π расслоением $\tilde{\pi} \colon \tilde{E} \to X$ на сферы S^n и наряду с (E, E_0) или $(E, F \cup E_0)$ — парами с теми же гомологиями $(\tilde{E}, \tilde{E}_0)$, $(\tilde{E}, i_\infty(X))$ или $(\tilde{E}, \tilde{F} \cup \tilde{E}_0)$ и $(\tilde{E}, \tilde{F} \cup i_\infty(X))$, где $\tilde{F} = \tilde{\pi}^{-1}(X)$, $\tilde{E}_0 = \tilde{E} \setminus i_0(X)$ (см. выводы из леммы 3.3).

Заметим, что, поскольку $\tilde{\pi} i_0$ — тождественное отображение X, из теоремы следует, что $H_m^c(\tilde{E}, \tilde{F}; \tilde{\pi}^*\mathcal{A}) = H_m^c(X, Y; \mathcal{A}) \oplus H_{m-n}^c(X, Y; \mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi))$, причём совпадающее с $H_m^c(\tilde{E}, \tilde{F} \cup i_\infty(X); \tilde{\pi}^*\mathcal{A})$ второе прямое слагаемое есть ядро отображения гомологий, индуцированного $\tilde{\pi}$ (ср. со следствием 2.11). При $Y = \tilde{F} = \varnothing$ это вытекает из точной последовательности гомологий пары $(\tilde{E}, i_\infty(X))$, а так как аналогичное представление имеет место для $\tilde{F}$, оно получается и для гомологий пары.

Перед доказательством теоремы выделим используемые в описании умножения $\frown$ необходимые сведения о пучках цепей. Гомологии определяются цепями типа Чеха (возникающими при переходе к обратным пределам из цепей подходящих систем покрытий) или цепями Масси [8]. И те и другие оказываются сечениями дифференциальных пучков цепей $\mathcal{C}_*(X; \mathcal{A})$, описание которых можно найти в [15, § 7] (для цепей типа Чеха — также в [14, § 5]). Для локально компактного хаусдорфова пространства X эти пучки оказываются вялыми, для произвольных хаусдорфовых пространств — только мягкими, однако носители их сечений (то есть цепей X) всегда локально компактны. Гомологии пространства X с носителями в некотором семействе φ определяются цепями с их локально компактными носителями (как носителями сечений пучков $\mathcal{C}_*(X; \mathcal{A})$), содержащимися в φ. Гомологии H_*^c определяются всеми сечениями с компактными носителями. Гомологии любого подпространства $Y \subset X$ можно считать гомологиями самого X с носителями цепей, оказывающимися в Y. Гомологии замкнутой локально компактной пары (X, Y) (в частности, компактной) определяются сечениями $\mathcal{C}_*(X; \mathcal{A})$ на $X \setminus Y$, равносильно, классами сечений над всем X, отличающихся лишь над Y (классами продолжений сечений с $X \setminus Y$

на X, см. [15, следствие 7.4 и предложение 7.6] для цепей Масси, [15, описание цепей после предложения 7.9] или [14, § 5] для цепей типа Чеха). Тем самым гомологии компактной пары (X, Y) совпадают с гомологиями второго рода открытого множества $X \setminus Y$ (аналогичный факт в теории гомологий Бореля—Мура справедлив лишь при некоторых весьма искусственных ограничениях как на коэффициенты, так и на само пространство X, см. [23, глава V, следствие 5.9], и это есть один из факторов, затрудняющих применение теории).

Напомним определение операции $\frown$-умножения. Пусть $\mathcal{C}^*(\mathcal{G})$ — резольвента Годемана локально постоянного пучка $\mathcal{G}$ и $\mathcal{C}^*(\mathcal{C}_*(X; \mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{G}))$ — аналогичная вялая резольвента дифференциального пучка цепей с коэффициентами в $\mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{G}$. Существует совместимое с дифференциалами сохраняющее полную градуировку естественное преобразование (см. [15, § 5])

$$\alpha \colon \mathcal{C}_*(X; \mathcal{A}) \otimes_\Lambda \mathcal{C}^*(\mathcal{G}) \to \mathcal{C}^*(\mathcal{C}_*(X; \mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{G})), \tag{3.1}$$

которое и определяет $\frown$-умножение гомологий H_p^φ на когомологии H_ψ^q со значениями, вообще говоря, не в гомологиях, а только в $(p - q)$-мерных гипергомологиях (в смысле [6, глава XVII]) дифференциального пучка $\mathcal{C}_*(X; \mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{G})$ для функтора $\Gamma_{\varphi \cap \psi}$ сечений с носителями в семействе $\varphi \cap \psi$. В случае локально компактного X пучки цепей вялые, следовательно $(\varphi \cap \psi)$-ацикличные [3, глава II, теорема 4.4.3], и указанные гипергомологии есть просто $H_{p-q}^{\varphi\cap\psi}(X; \mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{G})$ (см. [4, п. 2.4, замечание 3]). В общем случае пучки только мягкие, следовательно θ-ацикличные лишь для паракомпактифицирующих семейств θ [3, глава II, теорема 4.4.3], и вывод о совпадении гипергомологий с гомологиями справедлив лишь при условии паракомпактифицируемости семейства $\varphi \cap \psi$. При этом оказывается, что результат $\frown$-умножения целиком определяется $\frown$-умножениями на всех (принадлежащих семейству $\varphi \cap \psi$) замкнутых локально компактных подпространствах X с последующим переходом по таким подпространствам к прямому пределу (см. [18, введение; теорема 2.4]). Следовательно, процесс предельного перехода по указанным подпространствам может рассматриваться и как независимый способ определения $\frown$-умножения, применимый уже не только к паракомпактифицирующим (в отличие от первоначального подхода), но и к произвольным семействам носителей, в частности к классическому семейству c компактных множеств (оказывающемуся паракомпактифицирующим, очевидно, лишь в локально компактных пространствах). Этот способ определения $\frown$-умножения намечен перед теоремой 7.11 в [15] и полностью обоснован в [18, § 2] (см. там определение 2.5). Именно этот способ определения применяется ниже.

Заметим, что вместо $\mathcal{C}^*(\mathcal{G})$ при определении $\frown$-умножения можно использовать и некоторые другие резольвенты, являющиеся (вместе с комплексами их сечений) точными функторами аргумента $\mathcal{G}$. Описание некоторого класса пригодных для этой цели резольвент дано в [15, § 3]. В отличие от годемановской они обычно оказываются лишь мягкими или тонкими, гарантированно θ-ацикличными только для паракомпактифицирующих семейств θ.

Для полноты картины обратим внимание также на следующее обстоятельство, вскрывающее общность природы гомологического и когомологического умножений. При замене в конструкции (3.1) пучков цепей $\mathcal{C}_*$ на ацикличные резольвенты $\mathcal{L}^*(\mathcal{A})$ и $\mathcal{L}^*(\mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{G})$ пучков $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{G}$ она автоматически превращается в конструкцию $\smile$-умножения, применявшегося в § 2.

Доказательство теоремы начнём с описания фигурирующей в ней операции $h \frown \tau$. Для этого пусть $\mathcal{G} = \tilde{\pi}^*\mathcal{H}^n(\pi)$ — обратный образ при проекции $\tilde{\pi}$ ориентирующего пучка расслоения и $\mathcal{C}^*(\mathcal{G})$ — его вялая резольвента Годемана. Пусть t — представляющее класс $\tau \in H^n(\tilde{E}, \tilde{E}_0; \tilde{\pi}^*\mathcal{H}^n(\pi)) = H^n(\tilde{E}, i_\infty(X); \tilde{\pi}^*\mathcal{H}^n(\pi))$ сечение этой резольвенты. Поскольку для носителя имеем $|t| \subset \tilde{E} \setminus \tilde{E}_0 = i_0(X)$, в свете данного выше общего описания операции $\frown$-умножения на пространстве $\tilde{E}$ при учёте когомологий $\tilde{E}$ безразлично, какая из пар (E, E_0), $(\tilde{E}, \tilde{E}_0)$ или $(\tilde{E}, i_\infty(X))$ используется в конструкции (пользуемся также тем, что ограничение резольвенты Годемана на открытое подпространство $E \subset \tilde{E}$ остаётся резольвентой Годемана).

Пусть сперва (X, Y) — компактная пара. В этом случае $\tilde{E}$ компактно, следовательно, паракомпактно. Пусть ξ — представляющее $h \in H_m(\tilde{E}, \tilde{F} \cup i_\infty(X); \tilde{\pi}^*\mathcal{A})$ сечение (цикл по модулю $\tilde{F} \cup i_\infty(X)$) вялого дифференциального пучка цепей $\mathcal{C}_*(\tilde{E}, \tilde{\pi}^*\mathcal{A})$ ($|\partial\xi| \subset \tilde{F} \cup i_\infty(X)$). Как освещалось выше, элемент $h \frown \tau$ представляется сечением $\alpha(\xi \otimes t)$, носитель которого, естественно, содержится в $|\xi \otimes t| \subset$ $\subset |t| \subset X = i_0(X)$. Так как $dt = 0$, то $\partial(\xi \otimes t) = \partial\xi \otimes t$ и $|\partial(\xi \otimes t)| \subset |\partial\xi| \cap |t| \subset Y$. Следовательно, $\alpha(\xi \otimes t)$ определяет элемент из $H_{m-n}(X, Y; \mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi))$.

Результат не зависит от выбора представляющего h сечения ξ (независимость от выбора t см. в [15, § 2]). При другом сечении ξ' имеем $\xi' - \xi = \partial\eta + \zeta$, где $|\zeta| \subset \tilde{F} \cup i_\infty(X)$. Но тогда $\xi' \otimes t - \xi \otimes t = \partial(\eta \otimes t) + \zeta \otimes t$ (поскольку $dt = 0$), причём $|\zeta \otimes t| \subset |\zeta| \cap |t| \subset Y$, то есть $\alpha(\xi' \otimes t)$ и $\alpha(\xi \otimes t)$ — гомологичные циклы пары $(X, Y) = i_0((X, Y))$.

Далее пусть $j\colon (X, Y) \subset (X', Y')$ — включение компактных пар и

$$\tilde{\jmath}\colon (\tilde{E}(X), \tilde{E}(Y) \cup i_\infty(X)) \subset (\tilde{E}(X'), \tilde{E}(Y') \cup i_\infty(X')) \;—$$

соответствующее включение в расслоениях. Здесь $E(A) = \tilde{\pi}^{-1}(A)$.

3.3. Лемма[1]**.** $\tilde{\jmath}_*(h) \frown \tau = j_*(h \frown \tau_X)$.

Здесь τ_X — класс Тома для расслоения над X. Для доказательства учтём, что пучок цепей компакта $\tilde{E}(X)$ может быть отождествлён с его прямым образом в $\tilde{E}(X')$, оказывающимся подпучком пучка цепей $\tilde{E}(X')$, так что можно пользоваться включением $\mathcal{C}_*(\tilde{E}(X), \tilde{\pi}^*\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}_*(\tilde{E}(X'), \tilde{\pi}^*\mathcal{A})$ (см. [14, § 5], а также [15, описание цепей после предложения 7.9] для цепей типа Чеха и [15, предложение 7.7] для цепей Масси). Пусть ξ — представляющее элемент h группы $H_m(\tilde{E}(X), \tilde{E}(Y) \cup i_\infty(X); \tilde{\pi}^*\mathcal{A})$ сечение пучка $\mathcal{C}_*(\tilde{E}(X'), \tilde{\pi}^*\mathcal{A})$, $|\xi| \subset \tilde{E}(X)$, $|\partial\xi| \subset \tilde{E}(Y) \cup i_\infty(X)$. Рассматриваемое на $\tilde{E}(X')$ сечение ξ определяет также $\tilde{\jmath}_*(h)$. Элемент $\tilde{\jmath}_*(h) \frown \tau$ определяется сечением $\alpha(\xi \otimes t)$. Для ограничения t' сечения t на $\tilde{E}(X)$ сечение $\xi \otimes t$ — продолжение сечения $\xi \otimes t'$ (рассматриваемого только на $\tilde{E}(X)$), определяющего при отображении α элемент $h \frown \tau_X$. Но это означает, что $\alpha(\xi \otimes t)$ определяет также $j_*(h \frown \tau_X)$. Лемма доказана.

[1] Ср. с [5, глава VII, соотношение 12.6] или с [19, глава 5, § 6, п. 16].

Лемма позволяет осуществить предельный переход по содержащимся в (X,Y) компактным парам. Обсудим сперва, однако, возможности использования вместо $(E, F\cup E_0)$ пар $(\tilde E, \tilde F\cup\tilde E_0)$ и $(\tilde E, \tilde F\cup i_\infty(X))$ (ср. с замечанием к формулировке теоремы). Сделаем это, как и выше, сперва для компактной пары (X,Y).

Для включения $\tilde\imath\colon (\tilde E, \tilde F\cup i_\infty(X))\subset(\tilde E,\tilde F\cup\tilde E_0)$ вложения $i_\infty(X)\subset\tilde E_0$ и $i_\infty(X)\cap\tilde F=i_\infty(Y)\subset\tilde F_0=\tilde E_0\cap\tilde F$ индуцируют изоморфизмы групп гомологий (лемма 3.1). Из отображения точных гомологических последовательностей триад, определяемого включением $(\tilde F\cup i_\infty(X);\tilde F, i_\infty(X))\subset(\tilde F\cup\tilde E_0;\tilde F,\tilde E_0)$, и леммы о пяти изоморфизмах заключаем, что определяемое включением $\tilde F\cup i_\infty(X)\subset\tilde F\cup\tilde E_0$ отображение гомологий — изоморфизм. Применяя лемму о пяти изоморфизмах к отображению гомологических последовательностей пар, индуцированному включением $\tilde\imath$, заключаем, что изоморфизм гомологий индуцируется и включением $\tilde\imath$. В частности, участвовавшее в определении элемента $h\frown\tau$ сечение ξ на $\tilde E$ одновременно является и циклом содержащей $(\tilde E,\tilde F\cup i_\infty(X))$ пары $(\tilde E,\tilde F\cup\tilde E_0)$, так что принадлежащий гомологиям (X,Y) результат $h\frown\tau$ не зависит от того, к гомологиям какой из двух пар включения $\tilde\imath$ отнесён элемент h.

Далее рассмотрим включение $i\colon (E, F\cup E_0)\subset(\tilde E,\tilde F\cup\tilde E_0)$. Короткая точная последовательность цепей с компактными носителями пары (E,F) (интерпретируемых как сечения вялых пучков) содержит в себе аналогичную последовательность пары (E_0,F_0), где $F_0=E_0\cap F$, поэтому комплекс цепей (с компактными носителями) пары $(E,F\cup E_0)$ представляется как фактор-комплекс комплекса $C^{\mathrm c}_*(E)/C^{\mathrm c}_*(E_0)$ по подкомплексу $C^{\mathrm c}_*(F)/C^{\mathrm c}_*(F_0)$. Однако эти комплексы в силу открытости E в $\tilde E$ и вялости пучков цепей изоморфны соответственно $C_*(\tilde E)/C^{\mathrm c}_*(\tilde E_0)$ и $C_*(\tilde F)/C^{\mathrm c}_*(\tilde F_0)$, поэтому i индуцирует изоморфизм не только гомологий, но и определяющих их комплексов цепей. В силу вялости пучков представляющее $h\in H_m(E,F\cup E_0;\pi^*\mathcal A)$ сечение ξ пучка цепей на E продолжается на $\tilde E$, и продолжение является циклом пары $(\tilde E,\tilde F\cup\tilde E_0)$, поэтому, как и в ситуации с включением $\tilde\imath$, результат $h\frown\tau$ не зависит от того, к гомологиям какой из пар включения i относить h.

Заметим, наконец, что по соображениям конфинальности в частично упорядоченном по включению множестве компактных пар подпространств (ср. с леммой 3.1) гомологии с компактными носителями каждой из пар $(E,F\cup E_0)$, $(\tilde E,\tilde F\cup\tilde E_0)$ и $(\tilde E,\tilde F\cup i_\infty(X))$ совпадают с прямыми пределами гомологий соответственно пар $(E(C),E(C')\cup E_0(C))$, $(\tilde E(C),\tilde E(C')\cup\tilde E_0(C))$ и $(\tilde E(C),\tilde E(C')\cup\cup i_\infty(C))$, поэтому

$$H^{\mathrm c}_m(E,F\cup E_0;\pi^*\mathcal A)=H^{\mathrm c}_m(\tilde E,\tilde F\cup\tilde E_0;\tilde\pi^*\mathcal A)=H^{\mathrm c}_m(\tilde E,\tilde F\cup i_\infty(X);\tilde\pi^*\mathcal A). \tag{3.2}$$

В силу леммы 3.3 операция $\frown\tau$ для любого из этих вариантов определяет преобразование степени $-n$ отвечающих всем компактным парам $(C,C')\subset\subset(X,Y)$ индуктивных систем групп гомологий

$$\{H^{\mathrm c}_m(E(C),E(C')\cup E_0(C);\pi^*\mathcal A)\}\to\{H_{m-n}(C,C';\mathcal A\otimes_\Lambda\mathcal H^n(\pi))\}.$$

3.4. Следствие (см. [18, определение 2.5]). *Возникающий при переходе к прямому пределу по компактным парам (C, C') в (X, Y) гомоморфизм $\frown\tau$ любой из групп в (3.2) в группу $H^{\mathrm{c}}_{m-n}(X, Y; \mathcal{A}\otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi))$ задаёт фигурирующее в теореме 3.2 умножение $h \to h\frown\tau$.*

Отметим, что на самом деле применённые аргументы дают следующий более общий результат (гомоморфизм $\frown\tau$ следствия 3.4 получается из него при $Y = \tilde{E}$, $Y' = \tilde{F}$, $A = \tilde{E}_0$, $\mathcal{B} = \tilde{\pi}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{G} = \tilde{\pi}^*\mathcal{H}^n(\pi)$).

3.5. Предложение. *Пусть Y' — произвольное подпространство хаусдорфова пространства Y и A — либо открытое в Y подпространство, либо замкнутое, если Y паракомпактно. В этих условиях для любых локально постоянных пучков $\mathcal{B}$ и $\mathcal{G}$ определено естественное умножение*

$$\frown\colon H^{\mathrm{c}}_m(Y, Y'\cup A; \mathcal{B}) \otimes_\Lambda H^n(Y, A; \mathcal{G}) \to H^{\mathrm{c}}_{m-n}(Y\setminus A, Y'\setminus A; \mathcal{B}\otimes_\Lambda \mathcal{G}).$$

Известна более слабая форма этого результата, а именно наличие аналогичного умножения со значениями в гомологиях содержащей $(Y\setminus A, Y'\setminus A)$ пары (Y, Y'), см. [19, глава 5, § 6] и [5, глава VII, п. 12] для сингулярной теории (при стандартных условиях типа вырезаемости), [8, § 9.5] при подходе Масси. Для замкнутых Y' и A результат предложения — теорема 2.6 в [18]. Требование паракомпактности Y в предложении при замкнутом A необходимо для того, чтобы элементы из $H^n(Y, A; \mathcal{G})$ представлялись сечениями вялой резольвенты $\mathcal{C}^*(\mathcal{G})$ с носителями в $Y\setminus A$ (на паракомпактном пространстве вялые пучки являются мягкими, поэтому сечения-коцепи пары (Y, A) составлены ядром ограничения сечений всей резольвенты на A, см. [3, глава II, теорема 10.4.1 и замечание 10.4.2]).

В силу следствия 3.4 утверждение теоремы 3.2 об изоморфизме достаточно доказать для компактных пар (X, Y). Рассмотрим несколько вспомогательных утверждений.

3.6. Лемма. *Пусть $X = X_1\cup X_2$ — представление локально компактного хаусдорфова пространства X как объединения замкнутых подпространств. Любая цепь пространства X представима в виде $\xi = \xi_1 + \xi_2$, $|\xi_i| \subset X_i$, $i = 1, 2$.*

Пользуемся тем, что ξ является сечением вялого пучка цепей. Ограничим сечение ξ на $X\setminus X_2$ и обозначим через ξ_1 продолжение на X этого ограничения, равное нулю на $X\setminus X_1$. Тогда $|\xi_1| \subset X_1$, $|\xi_2| \subset X_2$, где $\xi_2 = \xi - \xi_1$. Лемма доказана.

Рассмотрим участки гомологической и когомологической последовательностей триады $(X; X_1, X_2)$ с замкнутыми подпространствами X_1 и X_2, покрывающими X:

$$\begin{gathered} \ldots \longrightarrow H_p(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(X_1\cap X_2; \mathcal{A}) \longrightarrow \ldots, \\ \ldots \longleftarrow H^q(X; \mathcal{G}) \xleftarrow[\delta]{} H^{q-1}(X_1\cap X_2; \mathcal{G}) \longleftarrow \ldots. \end{gathered}$$

Пусть j — включение $X_1\cap X_2 \subset X$.

3.7. Лемма. *Если X — паракомпактное локально компактное пространство, то для $h \in H_p(X;\mathcal{A})$ и $\tau \in H^{q-1}(X_1 \cap X_2;\mathcal{G})$ имеет место соотношение*

$$h \frown \delta(\tau) = (-1)^{p+1} j_*(\partial(h) \frown \tau).$$

Доказательство. Пусть ξ — определяющее h сечение (цикл) вялого пучка цепей $\mathcal{C}_*(X;\mathcal{A})$. По лемме 3.6 $\xi = \xi_1 + \xi_2$, $|\xi_i| \subset X_i$. По определению связывающего гомоморфизма ∂ элемент $\partial(h)$ определяется сечением $\partial(\xi_1)$, $|\partial(\xi_1)| \subset X_1 \cap X_2$ (поскольку $\partial(\xi_1) = -\partial(\xi_2)$; здесь можно пользоваться включением $\mathcal{C}_*(X_1 \cap X_2;\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}_*(X;\mathcal{A})$). Пусть t — определяющее τ сечение (коцикл) над $X_1 \cap X_2$ вялой резольвенты $\mathcal{C}^*(\mathcal{G})$ (в силу паракомпактности X её ограничение на $X_1 \cap X_2$ состоит из мягких пучков) и пусть t_1 — продолжение t на X_1 (следствие паракомпактности X и мягкости пучков), $|d(t_1)| \subset X_1 \setminus X_2$. Элемент $\delta(\tau)$ определяется продолжением $\tilde{t}$ сечения $d(t_1)$ нулём на всё X. Элемент $h \frown \delta(\tau)$ определяется образом при преобразовании (3.1) сечения $\xi \otimes \tilde{t} = \xi_1 \otimes \tilde{t}$.

Поскольку ограничение $\tilde{t}$ на $X_1 \cap X_2$ равно нулю, $\tilde{t}$ равно нулю в некоторой окрестности U множества $X_1 \cap X_2$ (носители сечений — замкнутые множества). Пусть t_1' — продолжение t_1 на X. Окрестность U можно считать достаточно малой, чтобы ограничение $d(t_1')$ на неё также обращалось в нуль (пользуемся тем, что $d(t_1') = \tilde{t}$ на X_1). Пусть t_U — ограничение t_1' на U, $d(t_U) = 0$, и τ_U — определяемый t_U класс когомологий в $H^{q-1}(U;\mathcal{G})$, ограничение τ_U на $X_1 \cap X_2$ совпадает с τ. Пусть φ — семейство всех замкнутых в X множеств, содержащихся в U, и пусть h_U — образ $\partial(h)$ в группе $H_p^\varphi(U;\mathcal{A})$. Поскольку ограничение $\mathcal{C}^*(\mathcal{G})$ на U (в отличие от $X_1 \cap X_2$) — каноническая резольвента Годемана ограничения на U пучка $\mathcal{G}$, элемент $h_U \frown \tau_U$ определяется образом при преобразовании α (3.1) сечения $\partial(\xi_1) \otimes t_U$. В соответствии с [18, теорема 2.4] $h_U \frown \tau_U$ — образ $\partial(h) \frown \tau$ при включении $X_1 \cap X_2 \subset U$, поэтому $j_*(\partial(h) \frown \tau)$ — образ $h_U \frown \tau_U$ в $H_{p-q}(X;\mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{G})$. Но сечение $\partial(\xi_1) \otimes t_U$, определяющее $h_U \frown \tau_U$, — ограничение сечения $\partial(\xi_1) \otimes t_1'$. Последнее есть цикл, так как $|\partial(\xi_1)| \cap |d(t_1')| = \varnothing$, и его носитель содержится в $|\partial(\xi_1)| \subset X_1 \cap X_2$. Следовательно, образ этого сечения при преобразовании α определяет $j_*(\partial(h) \frown \tau)$. Имеем, наконец, $\partial(\xi_1 \otimes t_1') = \partial(\xi_1) \otimes t_1' + (-1)^p(\xi_1 \otimes d(t_1'))$, причём $\xi_1 \otimes d(t_1') = \xi_1 \otimes \tilde{t}$. Это означает, что сечения-циклы $\partial(\xi_1) \otimes t_1'$ и $(-1)^{p+1}(\xi_1 \otimes \tilde{t})$ гомологичны. Лемма доказана.

Приступаем к доказательству теоремы. Как отмечено выше, её достаточно доказать для компактной пары (X, Y). Пусть сперва $Y = \varnothing$. В случае, когда расслоение π тривиально, доказательство проведём индукцией по n.

В этом случае $\mathcal{H}^n(\pi)$ — постоянный пучок Λ. При $n = 0$ пара $(\tilde{E}, i_\infty(X))$ после вырезания есть фактически само пространство X, класс τ представляется сечением $t = 1 \in \Lambda \subset \mathcal{C}^0(\Lambda)$, а представляющее $h \in H_m(X;\mathcal{A})$ сечение ξ — сечение дифференциального пучка цепей $\mathcal{C}_*(X;\mathcal{A})$. Тождество $h \frown \tau = h$, исходя из оценки сечения $\alpha(\xi \otimes t)$ (см. преобразование (3.1)) для $t = 1$ очевидно (и является следствием п. 1 теоремы 2.1 и предложения 1.4 в [15], где в качестве $\mathcal{G}$ следует взять Λ и рассмотреть в нём сечение $t = 1$).

Предположим, что утверждение доказано для $X \times S^{n-1} = \tilde{E}^{n-1}$, и пусть $E = X \times S^n$, $S^n = D_1^n \cup D_2^n$, $D_1^n \cap D_2^n = S^{n-1}$, $\tilde{E}_i = X \times D_i^n$, $E_i = \tilde{E}_i \setminus i_\infty(X)$ и $E^{n-1} = \tilde{E}^{n-1} \setminus i_\infty(X)$. Как уже отмечалось, гомологии компактных пар типа $(\tilde{E}, i_\infty(X))$, $(\tilde{E}_i, i_\infty(X))$ (и др.) совпадают с гомологиями второго рода локально компактных пространств E, E_i (и др.). Как и в ситуации леммы 3.1, имеем $H_*(\tilde{E}_i, i_\infty; \tilde{\pi}^*\mathcal{A}) = H_*(E_i; \pi^*\mathcal{A}) = 0$. Для триады $(E; E_1, E_2)$ рассмотрим участки её гомологической и когомологической последовательностей, содержащие связывающие гомоморфизмы. В силу только что сказанного о гомологиях и когомологиях и по аналогичным причинам для когомологий они вырождаются в изоморфизмы

$$H_m(E; \pi^*\mathcal{A}) \xrightarrow[=]{\partial} H_{m-1}(E^{n-1}; \pi^*\mathcal{A}),$$
$$H_c^n(E; \Lambda) \xleftarrow[\delta]{=} H_c^{n-1}(E^{n-1}; \Lambda).$$

Пусть $h \in H_m(\tilde{E}, i_\infty(X); \tilde{\pi}^*\mathcal{A}) = H_m(E; \pi^*\mathcal{A})$ и $\tau' \in H_c^{n-1}(E^{n-1}; \Lambda)$. Тогда $\tau = \delta(\tau')$ и сопоставление $h \to h \frown \tau = h \frown \delta(\tau')$ с точностью до знака (см. лемму 3.7, которой можно пользоваться в силу паракомпактности пространств $X \times \mathbb{R}^n$ для компактных X) совпадает с композицией сопоставлений $h \to \partial(h) \to \partial(h) \frown \tau' \to j_*(\partial(h) \frown \tau')$, где j — включение $E^{n-1} \subset E$. По построению отображений и по предположению индукции первые два отображения в этой композиции — изоморфизмы. Поскольку результаты умножений на τ' и τ принадлежат гомологиям компактного подпространства $i_0(X)$ пространств E и E^{n-1}, можно считать, что j_* — гомоморфизм гомологий H_*^c этих пространств. В силу леммы 3.1 j_* в этих условиях — изоморфизм. Таким образом, соответствие $h \to h \frown \tau = \pm j_*(\partial(h) \frown \tau')$ — изоморфизм.

Далее рассмотрим общее расслоение π над компактным пространством X. Предположим, что $X = X_1 \cup X_2$, X_1 и X_2 замкнуты, и пусть $X_0 = X_1 \cap X_2$, $\tilde{E}(X_i) = \tilde{\pi}^{-1}(X_i)$. Рассмотрим индуцированное преобразованием $\frown \tau$ отображение степени $-n$ гомологической последовательности триады $(\tilde{E}; \tilde{E}(X_1), \tilde{E}(X_2))$

$$\ldots \longrightarrow H_m(\tilde{E}(X_1), i_\infty(X_1); \tilde{\pi}^*\mathcal{A}) \oplus H_m(\tilde{E}(X_2), i_\infty(X_2); \tilde{\pi}^*\mathcal{A}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H_m(\tilde{E}, i_\infty(X); \tilde{\pi}^*\mathcal{A}) \xrightarrow[\partial]{} H_{m-1}(\tilde{E}(X_0), i_\infty(X_0); \tilde{\pi}^*\mathcal{A}) \longrightarrow \ldots$$

в гомологическую последовательность триады $(X; X_1, X_2)$

$$\ldots \longrightarrow H_{m-n}(X_1; \mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)) \oplus H_{m-n}(X_2; \mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H_{m-n}(X; \mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)) \xrightarrow[\partial']{} H_{m-1-n}(X_0; \mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)) \longrightarrow \ldots.$$

Наличие первой из них объясняется тем, что она совпадает с точной последовательностью гомологий второго рода триады $(E; E_1, E_2)$, где $E_i = \tilde{E}(X_i) \setminus i_\infty(X_i)$. В силу леммы 3.3 в возникающей диаграмме отображений коммутируют квадраты, не содержащие связывающие гомоморфизмы.

3.8. Лемма (ср. с [19, глава 5, § 6, п. 20]). $\partial(h) \frown \tau = \partial'(h \frown \tau)$.

Для доказательства пусть ξ — представляющее $h \in H_m(\tilde{E}, i_\infty(X), \tilde{\pi}^*\mathcal{A})$ сечение вялого пучка цепей на $\tilde{E}$, $|\partial(\xi)| \subset i_\infty(X)$. По лемме 3.6 $\xi = \xi_1 + \xi_2$, $|\xi_i| \subset \tilde{E}(X_i)$. Сечение $\partial(\xi_1)$ сосредоточено на $\tilde{E}(X_0) \cup i_\infty(X_1)$ и является циклом пары $(\tilde{E}(X_0), i_\infty(X_0))$. По определению связывающего гомоморфизма в гомологической последовательности триады оно представляет элемент $\partial(h)$. Тем самым $\partial(h) \frown \tau$ определяется образом $\partial(\xi_1) \otimes t$ при преобразовании (3.1), где, как обычно, t — сечение, представляющее τ.

Аналогично, образ сечения $\xi \otimes t$ определяет $h \frown \tau$, причём $\xi \otimes t = \xi_1 \otimes t + \xi_2 \otimes t$, $|\xi_i \otimes t| \subset \tilde{E}(X_i)$, и элемент $\partial'(h \frown \tau)$ определяется образом сечения $\partial(\xi_1 \otimes t)$ (поскольку $\partial\alpha = \alpha\partial$, см. (3.1)). Поскольку $d(t) = 0$, то $\partial(\xi_1 \otimes t) = \partial(\xi_1) \otimes t$. Лемма доказана.

Тем самым в рассматриваемом отображении гомологических последовательностей триад коммутативны все квадраты. В силу леммы о пяти изоморфизмах изоморфизм преобразований в крайних членах указанных последовательностей влечёт изоморфизм их средних членов. Компактное пространство X можно покрыть конечным числом замкнутых подпространств, над каждым из которых расслоение π тривиально. Пользуясь указанными выше отображениями гомологических последовательностей подходящих триад, учитывая изоморфность операции π для каждого из указанных подпространств и проводя очевидную индукцию по числу таких подпространств в X, устанавливаем изоморфизм операции $\frown \tau$ для любого компактного пространства X.

Для доказательства изоморфизма в случае пары компактных пространств (X, Y) рассмотрим определяемое умножением $\frown \tau$ преобразование степени $-n$ гомологических последовательностей пар

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\ldots \arrow[r] & H_m(\tilde{E}, i_\infty(X); \tilde{\pi}^*\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d] & H_m(\tilde{E}, \tilde{F} \cup i_\infty(X); \tilde{\pi}^*\mathcal{A}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & H_{m-1}(\tilde{F}, i_\infty(Y); \tilde{\pi}^*\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H_{m-n}(X; \mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)) \arrow[r] & H_{m-n}(X, Y; \mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)) \arrow[r, "\partial'"'] & H_{m-1-n}(Y; \mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Как и выше, в верхней строке фактически фигурируют гомологии второго рода локально компактной пары (E, F). Из леммы 3.3 следует коммутативность квадратов диаграммы, не содержащих связывающие гомоморфизмы. И в этом случае имеет место соотношение $\partial(h) \frown \tau = \partial'(h \frown \tau)$. Его доказательство аналогично доказательству леммы 3.8: для представляющего h сечения ξ имеем $|\partial(\xi)| \subset \tilde{F} \cup i_\infty(X)$, $\partial(\xi)$ представляет $\partial(h)$, $\partial(h) \frown \tau$ представляется образом при преобразовании (3.1) сечения $\partial(\xi) \otimes t$, $h \frown \tau$ — образом $\xi \otimes t$, $\partial'(h \frown \tau)$ — образом $\partial(\xi \otimes t)$, и $\partial(\xi \otimes t) = \partial(\xi) \otimes t$.

Таким образом, вся диаграмма отображений членов гомологических последовательностей коммутативна и изоморфизм в среднем члене — следствие изоморфизмов в окружающих членах и леммы о пяти изоморфизмах. Этим завершено доказательство теоремы 3.2.

3.9. Замечание. Доказательство теоремы может быть получено и в рамках сингулярной теории с использованием классического $\frown$-умножения при условии существования, конечно, класса Тома τ для неориентируемых расслоений (теоремой 2.1 его существование в сингулярной теории обеспечивается по крайней мере при естественных ограничениях локального характера на базу, см. § 1). Для этого прежде всего должно быть определено само умножение на сингулярных комплексах цепей $S_*(E;\mathcal{A})$ и коцепей $S^*(E;\mathcal{G})$ топологического пространства E, определяемых достаточно мелкими сингулярными симплексами (над которыми пучки $\mathcal{A}$ и $\mathcal{G}$ постоянны). Классическим путём конечной цепи ξ и коцепи η может быть сопоставлена конечная цепь $\xi\frown\eta\in S_{p-q}(E;\mathcal{A}\otimes_\Lambda\mathcal{G})$, возникает совместимое с граничным и кограничным операторами спаривание $S_p(E;\mathcal{A})\otimes_\Lambda S^q(E;\mathcal{G})\to S_{p-q}(E;\mathcal{A}\otimes_\Lambda\mathcal{G})$. Вариант такой операции (даже для локально конечных цепей) представлен после доказательства теоремы 10.11 в [15]. Возникает умножение сингулярных групп

$$\frown\colon H_p^{(s)}(E;\mathcal{A})\otimes_\Lambda H^q_{(s)}(E;\mathcal{G})\to H^{(s)}_{p-q}(E;\mathcal{A}\otimes_\Lambda\mathcal{G}).$$

Далее в качестве $S^q(E;\mathcal{G})$ придётся взять подгруппу $S^n(E,E\backslash U;\pi^*\mathcal{H}^n(\pi))\subset$ $\subset S^n(E;\pi^*\mathcal{H}^n(\pi))$, где U — послойно выпуклая окрестность нулевого сечения (см. доказательство предложения 2.6). Вместо $S_p(E;\mathcal{A})$ следует взять $S_m(E,F\cup(E\setminus U);\pi^*\mathcal{A})$, представляя участвующие в операции умножения элементы этой группы как относительные цепи пространства E. При этих соглашениях результат умножения на τ окажется в группе $S_{p-q}(E;\mathcal{A}\otimes_\Lambda\mathcal{G})=$ $=S_{m-n}(U,F\cap U;\pi^*(\mathcal{A}\otimes_\Lambda\mathcal{H}^n(\pi)))$. Составленный этими группами цепной комплекс в соответствии с леммой 3.1 будет определять группы $H^{(s)}_{m-n}(X,Y;\mathcal{A}\otimes_\Lambda\mathcal{H}^n(\pi))$.

Таким образом, в рамках сингулярной теории возникает преобразование, фигурирующее в теореме 3.2 (для $E_0=E\backslash U$). Его изоморфизм доказывается по той же схеме, что и в случае теоремы 3.2. При этом следует заботиться о вырезаемости используемых в различных конструкциях триад. В частности, подпространства X_1, X_2 в лемме 3.6 должны быть открытыми, а в проводимых на уровне цепей и коцепей рассуждениях — ограничиваться (ввиду отсутствия аппарата теории пучков) сингулярными симплексами некоторого покрытия, определяемого используемыми конструкциями. Хотя сингулярные когомологии и имеют компактные носители, ввиду неопределённости в вопросе существования (сингулярного) класса τ для расслоений над произвольными компактными базами, используемый на каком-то этапе доказательства переход к прямому пределу следует осуществлять не по компактным парам $(C,C')\subset(X,Y)$, как это делалось выше, а по парам вида $(V,V\cap Y)$, где V — всевозможные конечные объединения карт атласа расслоения π, над каждой из которых π и коэффициенты $\mathcal{A}$ постоянны (и потому имеется классический изоморфизм Тома).

Далее пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, H_* — гомологии второго рода (определяемые цепями с любыми замкнутыми носителями), $\mathcal{A}$ — локально постоянные коэффициенты.

3.10. Теорема. *Для n-мерного векторного расслоения $\pi\colon E\to X$ соответствие $h\to h\frown\tau$ реализует изоморфизм $H_m(E;\pi^*\mathcal{A})\to H_{m-n}(X;\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}^n(\pi))$.*

Поскольку гомологии замкнутых пар (X, Y) совпадают с гомологиями дополнений $X \setminus Y$, нет нужды в относительном варианте теоремы. Нет нужды и в специальном варианте теоремы для сингулярной теории (см. введение). Отметим также, что с помощью использованных в доказательстве предложения 2.6 конструкций легко показать, что группы $H_m(E; \pi^*\mathcal{A}) = H_m(\tilde{E}, i_\infty(X); \tilde{\pi}^*\mathcal{A})$ изоморфны $H_m(E, E_0; \pi^*\mathcal{A})$.

Заметим, что носителем представляющего h сечения ξ дифференциального пучка цепей $\mathcal{C}_*(E; \pi^*\mathcal{A})$ является, вообще говоря, всё пространство E, в то время как носитель представляющего τ сечения t лежит в $i_0(X) = X$, поэтому $|\xi \otimes t| \subset X$, и в соответствии с определяющим умножение преобразованием (3.1) операция $\frown\tau$ индуцирует гомоморфизм первой из указанных в теореме групп во вторую.

Доказательство теоремы существенно проще для паракомпактных X, поэтому выделяем этот случай в процессе рассуждений из общего. В силу [2, глава I, § 9, п. 10, теорема 5] паракомпактность локально компактного пространства X эквивалентна тому, что X есть объединение своих попарно не пересекающихся открыто-замкнутых подпространств X_λ, каждое из которых счётно на бесконечности. Пусть $E_\lambda = \pi^{-1}(X_\lambda)$. Для гомологий второго рода $H_p(X; \mathcal{B}) = \prod\limits_\lambda H_p(X_\lambda; \mathcal{B}_\lambda)$ и $H_p(E; \pi^*\mathcal{A}) = \prod\limits_\lambda (E_\lambda; \pi_\lambda^*\mathcal{A}_\lambda)$ — естественные прямые произведения, где $\mathcal{B}_\lambda$, $\mathcal{A}_\lambda$ и π_λ — ограничения коэффициентов $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ и расслоения π на X_λ. Аналогичное представление имеет содержащая τ группа когомологий $H^n(E, E_0; \pi^*\mathcal{H}^n(\pi))$. Сечение-цикл ξ оказывается набором сечений ξ_λ пучков цепей $\mathcal{C}_*(E_\lambda; \pi_\lambda^*\mathcal{A}_\lambda)$, а сечение-коцикл t — набором сечений t_λ на пространствах E_λ вялых резольвент пучков $\pi_\lambda^*\mathcal{H}^n(\pi_\lambda)$. Определяющее $h \frown \tau$ сечение $\xi \otimes t$ в точках $x \in E$ равно $\xi(x) \otimes t(x)$ [23, глава I, § 5], следовательно, также распадается на отдельные сечения $\xi_\lambda \otimes t_\lambda$. То же относится и к определяющему умножение преобразованию (3.1). Таким образом, операция $\frown\tau$ есть прямое произведение операций $\frown\tau_\lambda$, осуществляемых на каждом из открыто-замкнутых подпространств E_λ с результатами в гомологиях $X_\lambda \subset E_\lambda$. Следовательно, если X паракомпактно, теорему достаточно доказать в предположении, что X счётно на бесконечности.

Пусть $\{U_\nu\}$ — направленная по включению система всех открытых подпространств в X, имеющих компактные замыкания, и пусть $E_\nu = \pi^{-1}(U_\nu)$. Поскольку комплексы цепей $C_*(X, X \setminus U_\nu; \mathcal{B}) = C_*(U_\nu; \mathcal{B})$ — комплексы сечений над U_ν вялых дифференциальных пучков, легко заметить, что естественное преобразование $C_*(X; \mathcal{B}) \to \varprojlim\limits_\nu \{C_*(U_\nu; \mathcal{B})\}$ — изоморфизм. По аналогичным причинам для любой направленной по включению подсистемы $\{U_\mu\}$ эпиморфно естественное преобразование $C_*(X; \mathcal{B}) \to \varprojlim\limits_\mu \{C_*(U_\mu; \mathcal{B})\}$. По [25, теорема 1.8] проективная система комплексов $\{C_*(U_\nu; \mathcal{B})\}$ оказывается $\varprojlim$-ацикличной. Аналогичные выводы справедливы для проективной системы $\{C_*(E_\nu; \pi^*\mathcal{A})\}$ и её предела $C_*(E; \pi^*\mathcal{A})$.

Сопоставление $\xi \to \alpha(\xi \otimes t)$, где α — преобразование (3.1), задаёт гомоморфизмы степени $-n$ цепных комплексов $C_*(E_\nu;\pi^*\mathcal{A}) \to C_*(U_\nu;\mathcal{A}\otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi))$ и $C_*(E;\pi^*\mathcal{A}) \to C_*(X;\mathcal{A}\otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi))$, следовательно, морфизм степени $-n$ проективных систем цепных комплексов, эквивалентно — цепных комплексов в категории проективных систем. Это приводит к отображению членов E_2 «вторых» спектральных последовательностей, отвечающих гипергомологиям для функтора $\varprojlim$ этих цепных комплексов, а именно

$$E_2^{p,-q}(E) = \varprojlim_{\nu}{}^p\{H^q(E_\nu;\pi^*\mathcal{A})\} \to \varprojlim_{\nu}{}^p\{H_{q-n}(U_\nu;\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}^n(\pi))\} = E_2^{p,-q}(X).$$

Поскольку гомологии E_ν и U_ν совпадают соответственно с гомологиями пар $(E, E\setminus E_\nu)$ и $(X, X\setminus U_\nu)$, а замыкания U_ν компактны, применив свойство вырезания, можно воспользоваться теоремой 3.2. В силу этой теоремы указанное выше преобразование членов E_2 — изоморфизм. Остаётся убедиться, что это влечёт изоморфизм теоремы 3.10.

Если (паракомпактное) пространство X счётно на бесконечности, то в системе $\{U_\nu\}$ имеется счётная конфинальная часть $\{U_i\}$, в которой каждое U_i с замыканием содержится в U_{i+1} и $X = \bigcup\limits_i U_i$ (это и есть счётность X на бесконечности), аналогично для E и E_i. В этом случае $\varprojlim^p = 0$ при $p \geqslant 2$, обе спектральные последовательности сходятся к соответствующим гомологиям E и X (хотя бы в силу общих условий, сформулированных в [16, теорема 2.9 и примечание к ней]; см. там же примеры нарушения сходимости), следствием чего оказывается нужный изоморфизм.

Поскольку в гомологической теории локально компактных пространств требование паракомпактности никак не используется (см., например, вариант теории для постоянных коэффициентов в [8]), представляет интерес и общий случай. Оказывается, в этом случае (совпадающие с гомологиями E и X) классические гипергомологии Картана—Эйленберга цепных комплексов (в категории проективных систем) $\{C_*(E_\nu;\pi^*\mathcal{A})\}$ и $\{C_*(U_\nu;\mathcal{A}\otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi))\}$ для функтора $\varprojlim$ совпадают с так называемыми «сильными» гипергомологиями, определяемыми тем же способом, что в [6, глава XVII], но с заменой в определении глобального комплекса стандартных прямых сумм (по $p \pm q = \mathrm{const}$) прямыми произведениями. Описание теории сильных гипер(ко)гомологий, их связей с классическими и со стандартными спектральными последовательностями дано в [16]. В частности, отображение цепных комплексов (некоторой степени), индуцирующее изоморфизм членов «вторых» спектральных последовательностей, определяет соответствующий изоморфизм именно сильных гипергомологий этих комплексов (для соответствующего функтора F, см. [16, предложение 2.8]; в формулировке предложения допущена опечатка: $H^p(\mathcal{H}^q)$ следует читать как $F^p(\mathcal{H}^q)$). Заметим, что при этом не утверждается что-либо о самой сходимости спектральных последовательностей.

Указанное выше совпадение гипергомологий проективных систем цепных комплексов для функтора $\varprojlim$ с сильными вытекает из того, что цепи $C_*(E_\nu;\pi^*\mathcal{A})$ и $C_*(U_\nu;\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}^n(\pi))$ суть цепи компактных (после вырезания) пар

$(\tilde{E}, (\tilde{E} \setminus \tilde{\pi}^{-1}(U_\nu)) \cup i_\infty(X))$ и $(X, X \setminus U_\nu)$, и из второй части теоремы 4.1 в [16]. Это завершает доказательство.

Отметим, что при условии счётности X на бесконечности имеют место точные последовательности

$$0 \to \varprojlim_\nu{}^1 \{H_{p+1}(E_\nu; \pi^*\mathcal{A})\} \to H_p(E; \pi^*\mathcal{A}) \to \varprojlim_\nu \{H_p(E_\nu; \pi^*\mathcal{A})\} \to 0$$

и аналогичные последовательности для $H_q(X; \mathcal{B})$ (ср. с началом § 2).

3.11. Замечание. Вложение $i_0 \colon X \to E$ индуцирует изоморфизм гомологий $H_*(X; \mathcal{B}) = H_*^\eta(E; \pi^*\mathcal{B})$, где η — семейство замкнутых множеств, компактных по слою (для любого компактного $C \subset X$ пересечения $\pi^{-1}(C)$ с множествами из η компактны). В самом деле, пусть T — содержащее $i_0(X)$ замкнутое в E подпространство, для которого слои проекции $\pi \colon T \to X$ — компактные множества, стягиваемые в точки $i_0(x)$, $x \in X$ (ср. с § 2). Группы $H_p^\eta(E; \pi^*\mathcal{B})$ совпадают с прямыми пределами групп $H_p(T; \pi^*\mathcal{B})$ по всем таким T, и достаточно установить изоморфизм $H_p(T; \pi^*\mathcal{B}) = H_p(X; \mathcal{B})$. Для компактных $Y \subset X$, над каждым из которых $\mathcal{B}$ и π постоянны, это следствие свойства гомотопии. Сопоставление гомологических последовательностей компактных триад $(X_1 \cup X_2; X_1, X_2)$ и их прообразов в T позволяет доказать, как это уже делалось выше, изоморфизм гомологий для любых компактных $Y \subset X$ и $\pi^{-1}(Y \cap T)$, а также для гомологий аналогичных пар. Далее рассмотрим индуцированное включением i_0 отображение проективных систем цепных комплексов $\{C_*(U_\nu; \mathcal{B})\} \to \{C_*(E_\nu \cap T; \pi^*\mathcal{B})\}$. Применяя к нему аргументы, использованные при доказательстве теоремы 3.10 (в том числе аппарат гипергомологий и спектральных последовательностей), получим требуемый изоморфизм.

В заключение этого параграфа ещё раз вернёмся к общему случаю пары хаусдорфовых пространств. Как отмечено в начале параграфа, определяющие гомологии цепи совпадают с сечениями определяемого ими дифференциального пучка цепей $\mathcal{C}_*(X; \mathcal{A})$. В частности, дифференциальные пучки цепей (Масси, типа Чеха, сингулярных и др.) отличаются тем, что носители любых их сечений локально компактны. Для замкнутого локально компактного подпространства $B \subset X$ вялый дифференциальный пучок цепей $\mathcal{C}_*(B; \mathcal{A})$ после его отождествления с прямым образом в X оказывается подпучком в $\mathcal{C}_*(X; \mathcal{A})$, и $\mathcal{C}_*(X; \mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{C}_*(B; \mathcal{A})$ — объединение таких подпучков по всем указанным $B \subset X$ [15, § 7]. Гомологии $H_q^\varphi(X; \mathcal{A})$, определяемые всеми сечениями с носителями в некотором семействе φ, совпадают с прямым пределом $\varinjlim \{H_q(B; \mathcal{A})\}$ по $B \in \varphi$. Определяемые фактор-комплексом комплекса всех сечений $\mathcal{C}_*(X; \mathcal{A})$ с носителями в φ по подкомплексу сечений, носители которых оказываются в Y, гомологии пары $H_q^\varphi(X, Y; \mathcal{A})$ с носителями в семействе φ в силу точности функтора $\varinjlim$ совпадают с $\varinjlim \{H_q(B, B'; \mathcal{A})\}$ по всем локально компактным $B \in \varphi$ и их замкнутым подпространствам $B' \subset Y$.

Пусть $\theta = \pi^{-1}(\varphi)$ и $F = \pi^{-1}(Y)$. Справедливо следующее обобщение теоремы 3.2.

3.12. Теорема. *Для любой пары (X, Y) хаусдорфовых пространств и любого семейства носителей φ соответствие $h \to h \frown \tau$ определяет изоморфизм $H_m^\theta(E, E_0 \cup F; \pi^*\mathcal{A}) \to H_{m-n}^\varphi(X, Y; \mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi))$.*

Поскольку в силу теоремы 3.10 утверждение справедливо для замкнутых локально компактных пар $(B, B') \subset (X, Y)$, в обосновании нуждается только переход к прямому пределу по таким парам, то есть аналог леммы 3.3. Однако, если $(B, B') \subset (B_1, B_1')$ — замкнутое вложение таких пар, то представляющее $h \in H_m(E(B), E(B'); \pi^*\mathcal{A})$ сечение ξ можно считать сосредоточенным на $E(B) \subset E(B')$ сечением на $E(B_1)$, для которого $|\partial(\xi)| \subset E(B')$ (как обычно, $E(L) = \pi^{-1}(L)$). Сечение $\xi \otimes t$ представляет $\tilde{j}_*(h) \frown \tau$, где $\tilde{j}$ — включение $E(B)$ в $E(B_1)$, и является продолжением сечения на $E(B)$, определяющего $h \frown \tau_B$, то есть представляет также и $j_*(h \frown \tau_B)$, где j — вложение B в B_1. Теорема доказана.

§ 4. Класс Эйлера. Последовательности Гизина

По-прежнему $i_0\colon X \to E$ — нулевое сечение расслоения $\pi\colon E \to X$, $\tau = \tau(\pi)$ — класс Тома. Имеем $i_0^*\pi^*\mathcal{H}^n(\pi) = \mathcal{H}^n(\pi)$ — ориентирующий пучок расслоения. Пусть $j\colon E \subset (E, E_0)$ — вложение.

4.1. Определение. Классом Эйлера $e(\pi) \in H^n(X; \mathcal{H}^n(\pi))$ расслоения π будем называть образ $\tau(\pi)$ при отображении

$$i_0^*j^*\colon H^n(E, E_0; \pi^*\mathcal{H}^n(\pi)) \to H^n(X; \mathcal{H}^n(\pi)).$$

Пусть $\pi\colon E \to X$ и $p\colon G \to Y$ — два n-мерных векторных расслоения, $F\colon E \to G$ — изоморфное в слоях послойное отображение и $f\colon X \to Y$ — соответствующее отображение баз.

4.2. Теорема. *$F^*(\tau(p)) = \tau(\pi)$ и $f^*(e(p)) = e(\pi)$.*

В доказательстве будет использовано следующее утверждение.

4.3. Предложение. *В указанных условиях $\mathcal{H}^n(\pi) = f^*\mathcal{H}^n(p)$ — обратный образ пучка $\mathcal{H}^n(p)$.*

Требование изоморфизма на слоях существенно (в этом можно убедиться на примере поведения касательных расслоений при отображениях неориентируемых многообразий в ориентируемые).

Для доказательства предложения определим изоморфное на слоях отображение $\mathcal{H}^n(\pi) \to \mathcal{H}^n(p)$, накрывающее f. Пусть U — малая окрестность точки $x \in X$ (над которой $\mathcal{H}^n(\pi)$ — прямое произведение). В соответствии с § 2 слой $\mathcal{H}^n(\pi)_x$ в этой точке — это n-мерные когомологии n-мерной сферы, являющейся слоем ассоциированного с π сферического расслоения $\tilde{\pi}$. Отображение F определяет ассоциированное с ним отображение расслоения $\tilde{\pi}$ в $\tilde{p}$, гомеоморфное на слоях. Указанная интерпретация $\mathcal{H}^n(\pi)_x$ обеспечивает наличие определяемого отображением F изоморфизма $\mathcal{H}^n(\pi)_x \to \mathcal{H}^n(p)_{f(x)}$, в свою очередь определяющего требуемое отображение пучков над f. Оно, очевидно, непрерывно. В силу свойства универсальности обратного образа пучка [3, глава II, п. 1.12] имеется гомоморфизм пучков $\mathcal{H}^n(\pi) \to f^*\mathcal{H}^n(p)$, композиция которого с естественным отображением $f^*\mathcal{H}^n(p) \to \mathcal{H}^n(p)$ над f совпадает с построенным выше. Этот гомоморфизм пучков — послойный изоморфизм, и поэтому есть изоморфизм пучков. Предложение доказано.

4.4. Предложение. *В рассматриваемых условиях* $F^*p^*\mathcal{H}^n(p) = \pi^*\mathcal{H}^n(\pi)$.

Действительно, в силу предыдущего предложения $\mathcal{H}^n(\pi) = f^*\mathcal{H}^n(p)$, поэтому утверждение — следствие того, что $pF = f\pi$, и того общего факта, что для отображений $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Y'$ и пучка $\mathcal{A}$ на Y' имеет место $(gf)^*\mathcal{A} = f^*g^*\mathcal{A}$ (в соответствии с [3, глава II, п. 1.12] имеются изоморфные на слоях отображения $f^*g^*\mathcal{A} \to g^*\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ над f и g, композиция которых факторизуется таким же преобразованием $f^*g^*\mathcal{A} \to (gf)^*\mathcal{A}$ над X, оказывающимся изоморфизмом).

Доказательство теоремы. В силу предложения 4.4 имеется индуцированный F гомоморфизм когомологий $F^*\colon H^n(G, G_0; p^*\mathcal{H}^n(p)) \to H^n(E, E_0; \pi^*\mathcal{H}^n(\pi))$ [23, глава II, § 8]. Ограничения F на слои в точках x и $f(x)$ — гомеоморфизмы. Поскольку ограничения $\tau(p)$ и $F^*(\tau(p))$ на слои коммутируют с F, ограничения $\tau(\pi)$ и $F^*(\tau(p))$ на слои совпадают, откуда в силу теоремы 2.1 следует первое утверждение теоремы. Из коммутирования отображений типа i_0 и j с F и f вытекает второе утверждение. Теорема доказана.

Класс $e(\pi)$ обладает теми же свойствами, что и для ориентируемых расслоений.

4.5. Предложение. *Образом* $e(\pi)$ *при изоморфизме Тома служит класс* $\tau \smile \tau \in H^{2n}(E, E_0; \Lambda)$.

Доказательство. Пусть $h \in H^p(E, E_0; \pi^*\mathcal{A}) = H^p(\tilde{E}, i_\infty(X); \tilde{\pi}^*\mathcal{A})$ (см. соотношение (2.2)). Пусть $\mathcal{L}$ — подпучок в $\tilde{\pi}^*\mathcal{A}$, равный $\pi^*\mathcal{A}$ на E и нулю на $i_\infty(X)$. Имеем $H^p(\tilde{E}, i_\infty(X); \tilde{\pi}^*\mathcal{A}) = H^p(\tilde{E}; \mathcal{L})$, причём индуцированный включением $\tilde{\jmath}\colon \tilde{E} \subset (\tilde{E}, i_\infty(X))$ образ $\tilde{\jmath}^*(h) \in H^p(\tilde{E}; \tilde{\pi}^*\mathcal{A})$ элемента h совпадает с образом h при отображении, индуцированном включением пучков $\mathcal{L} \subset \tilde{\pi}^*\mathcal{A}$ [23, глава II, § 12]. Поскольку носитель h содержится в E и равны ограничения на E пучков $\mathcal{L}$ и $\tilde{\pi}^*\mathcal{A}$, в силу естественности $\smile$-умножения по отношению к отображениям пучков коэффициентов ([23, глава II, теорема 7.1], [15, теорема 2.1]) имеем $h \smile \tau = \tilde{\jmath}^*(h) \smile \tau \in H^{p+n}(\tilde{E}, i_\infty(X); \tilde{\pi}^*(\mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi))) = H^{p+n}(E, E_0; \pi^*\mathcal{A} \otimes_\Lambda \pi^*\mathcal{H}^n(\pi))$. Поскольку ограничение $\tilde{\jmath}^*(h)$ на $E \subset \tilde{E}$ совпадает, очевидно, с $j^*(h)$, $h \smile \tau = j^*(h) \smile \tau$. Для $h = \tau$ имеем $j^*(\tau) = \pi^*(e(\pi))$ и $\mathcal{A} = \mathcal{H}^n(\pi)$. Остаётся воспользоваться следствием 2.12, леммой 2.15 и теоремой 2.1. Предложение доказано.

4.6. Следствие. $2e(\pi) = 0$, *если* n *нечётно.*

В самом деле, $\smile$-умножение классов когомологий с коэффициентами в пучках антикоммутативно [23, глава II, § 7, п. (d)], так что этим свойством обладает $\tau \smile \tau$.

Для кольца $\Lambda = \mathbb{Z}$ естественный эпиморфизм на циклическую группу $\mathbb{Z}_2$ определяет сюръекцию ориентирующих пучков $\mathcal{H}^n(\pi) \to \mathcal{H}^n(\pi)_2$ (ср. с леммой 2.7). Поскольку класс Тома однозначно определяется своими ограничениями на слои, а в слоях возникает эпиморфизм когомологий $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$, образом класса Тома τ, отвечающего кольцу $\mathbb{Z}$, оказывается класс Тома τ_2, отвечающий $\Lambda = \mathbb{Z}_2$. Поскольку $\smile$-умножение естественно по отношению к отображениям пучков коэффициентов, тем же свойством обладает и изоморфизм Тома. Поэтому при указанной сюръекции ориентирующих пучков образом $\tau \smile \tau$ оказывается $\tau_2 \smile \tau_2 = \mathrm{Sq}^n(\tau_2)$. Следовательно, в силу предложения 4.5, как и для ориентируемых расслоений, справедливо следующее утверждение (ср. с [9, § 9]).

4.7. Предложение. *При эпиморфизме $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ образом целочисленного класса Эйлера $e(\pi)$ оказывается старший класс Штифеля—Уитни $\omega_n(\pi)$.*

Пусть $\pi\colon E \to X$ и $p\colon G \to Y$ — векторные расслоения со слоями размерности n и m соответственно, с ориентирующими пучками $\mathcal{H}^n(\pi)$ и $\mathcal{H}^m(p)$, классами Тома $\tau(\pi)$ и $\tau(p)$ и классами Эйлера $e(\pi)$ и $e(p)$. Пусть $\pi \times p\colon E \times G \to X \times Y$ — декартово произведение расслоений.

4.8. Теорема. *$\mathcal{H}^{n+m}(\pi \times p) = \mathcal{H}^n(\pi) \mathbin{\widehat{\otimes}_\Lambda} \mathcal{H}^m(p)$, $(\pi \times p)^*\mathcal{H}^{n+m}(\pi \times p) = \pi^*\mathcal{H}^n(\pi) \mathbin{\widehat{\otimes}_\Lambda} p^*\mathcal{H}^m(p)$, $\tau(\pi \times p) = \tau(\pi) \times \tau(p)$ и $e(\pi \times p) = e(\pi) \times e(p)$.*

Здесь $\widehat{\otimes}_\Lambda$ — полное тензорное произведение пучков на декартовом произведении топологических пространств ([3, глава II, п. 2.10] или [23, глава I, § 5]), символ $\times$ означает декартово произведение классов когомологий [3, глава II, п. 6.1].

Доказательство. Перейдём к ассоциированным расслоениям $\tilde{\pi}$ и $\tilde{p}$ на сферы S^n и S^m и рассмотрим расслоение $\tilde{\pi} \times \tilde{p}$ над $X \times Y$ пары

$$(\tilde{E} \times \tilde{G}, i_\infty(X) \times \tilde{G} \cup \tilde{E} \times i_\infty(Y))$$

со слоями

$$(S^n \times S^m, \infty \times S^m \cup S^n \times \infty).$$

Когомологии указанной пары с коэффициентами Λ, как уже отмечалось в аналогичной ситуации выше, совпадают с когомологиями декартова произведения $\tilde{E} \times \tilde{G}$ с коэффициентами в пучке $\tilde{\Lambda}$, совпадающем с Λ на дополнении к $i_\infty(X) \times \tilde{G} \cup \tilde{E} \times i_\infty(Y)$, и нулевом в остальных точках. При этом $\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} \tilde{\Lambda}_2$, где $\tilde{\Lambda}_1$ — пучок на $\tilde{E}$, совпадающий с Λ на $E = \tilde{E} \setminus i_\infty(X)$ и равный нулю на $i_\infty(X)$, $\tilde{\Lambda}_2$ — аналогичный пучок на $\tilde{G}$. Условимся под когомологиями пространств $\tilde{E}$, $\tilde{G}$ и $\tilde{E} \times \tilde{G}$ ниже подразумевать когомологии именно с этими коэффициентами.

Рассматриваем на $X \times Y$ только открытые множества вида $U = U_1 \times U_2$, $U_1 \subset X$ и $U_2 \subset Y$. Имеем канонические отображения

$$H^n(\tilde{\pi}^{-1}(U_1)) \otimes_\Lambda H^m(\tilde{p}^{-1}(U_2)) \to H^{n+m}((\tilde{\pi} \times \tilde{p})^{-1}(U))$$

(см. [3, глава II, п. 6.1, соотношение (2)]). При переходе к пределам по окрестностям U в точках $(x, y) \in X \times Y$ получим отображение пучков Лере

$\mathcal{H}^n(\pi)\,\widehat{\otimes}_\Lambda\,\mathcal{H}^m(p) \;\to\; \mathcal{H}^{n+m}(\pi\times p)$. Поскольку слои участвующих пучков изоморфны основному кольцу Λ, это преобразование — изоморфизм, что доказывает первое утверждение теоремы.

Отображения $\tilde\pi^*\mathcal{H}^n(\pi)\to\mathcal{H}^n(\pi)$ над $\tilde\pi$ и $\tilde p^*\mathcal{H}^m(p)\to\mathcal{H}^m(p)$ над $\tilde p$ индуцируют отображение пучков

$$\tilde\pi^*\mathcal{H}^n(\pi)\,\widehat{\otimes}_\Lambda\,\tilde p^*\mathcal{H}^m(p)\to\mathcal{H}^n(\pi)\,\widehat{\otimes}_\Lambda\,\mathcal{H}^m(p)=\mathcal{H}^{n+m}(\pi\times p)$$

над отображением $\tilde\pi\times\tilde p$. Следовательно (как уже отмечалось — в силу [3, глава II, п. 1.12]), имеется его расщепление в композицию отображений

$$\tilde\pi^*\mathcal{H}^n(\pi)\,\widehat{\otimes}\,\tilde p^*\mathcal{H}^m(p)\to(\tilde\pi\times\tilde p)^*\mathcal{H}^{n+m}(\pi\times p)\to\mathcal{H}^{n+m}(\pi\times p),$$

первое из которых — отображение пучков над $\tilde E\times\tilde G$, изоморфное на слоях, и, следовательно, изоморфизм. Ограничивая участвующие пучки на E, G и $E\times G$, получаем второе утверждение теоремы.

В соответствии с определением декартова произведения классов когомологий, содержащимся, например, в [3, глава II, п. 6.1], в слоях расслоения $\tilde\pi\times\tilde p$ над точками (x,y) для фундаментальных классов когомологий слоёв $\tilde\pi^{-1}(x)$ и $\tilde p^{-1}(y)$ имеет место тождество $\tau(x,y)=\tau(x)\times\tau(y)$. Поскольку класс Тома $\tau(\pi\times p)$ определяется своими ограничениями на слои, следствием является соотношение $\tau(\pi\times p)=\tau(\pi)\times\tau(p)$. Ограничивая это равенство с пары $(E\times G, E_0\times G\cup E\times G_0)$ на пространство $E\times G$, а затем и на его нулевое сечение $X\times Y$, в силу естественности декартова умножения $\times$ получаем указанное в теореме соотношение для классов Эйлера. Теорема доказана.

4.9. Замечание. Приведённое доказательство проще, чем доказательства аналогичных соотношений в ориентируемом случае в терминах сингулярной теории (см., например, [9, § 9, 10 и приложение A]). Поскольку в его основе лежат другие конструкции когомологий и умножения, следует убедиться в эквивалентности полученных разными методами декартовых умножений классов когомологий. Для этого учтём, что операция $\mathcal{A}\,\widehat{\otimes}_\Lambda\,\mathcal{B}$ совпадает с обычным тензорным умножением пучков вида $\pi_X^*\mathcal{A}\otimes_\Lambda\pi_Y^*\mathcal{B}$, где π_X, π_Y — проекции $X\times Y$ на X и Y (достаточно сравнить определение $\widehat{\otimes}$ в [3, глава II, п. 2.10] с определением обратного образа пучка в п. 1.12 там же; см. также [23, глава I, § 5]). С учётом этого $\times$-умножение сводится к $\smile$-умножению как $h_X\times h_Y=\pi_X^*(h_X)\smile\pi_Y^*(h_Y)$, достаточно сравнить определение отображения f^* когомологий, индуцированного непрерывным отображением f топологических пространств [3, глава II, п. 4.16], с определением умножений $\times$ и $\smile$ ([3, глава II, п. 6.1 и 6.6]; см. также [23, глава II, § 7]). Через $\smile$-умножение операция $\times$ определяется и в [9, приложение A]. Таким образом, задача сводится к единственности $\smile$-умножения. Такая единственность обеспечивается теоремой 7.1 главы II в [23] и содержанием § 4 в [15] (см. введение).

Далее в условиях теоремы 4.8 пусть $Y=X$. Ограничением $\pi\times p$ на диагональ $\Delta(X)\subset X\times X$ определяется сумма Уитни $\pi\oplus p$ расслоений. Пусть $E\circ G$ — тотальное пространство $\pi\oplus p$, $E\circ G\subset E\times G$. Сопоставление определения $\pi\oplus p$

и леммы 3.2 в [9] с определением индуцированного расслоения в § 3 там же вместе со следующей коммутативной диаграммой расслоений

$$\begin{tikzcd} E \circ G \arrow[r, "p^*\pi"] \arrow[d, "\pi^* p"'] \arrow[dr, "\pi\oplus p"] & G \arrow[d, "p"] \\ E \arrow[r, "\pi"'] & X \end{tikzcd}$$

показывает, что $E \circ G$ — тотальное пространство расслоений $\pi^* p$ над E и $p^*\pi$ над G, причём $\pi \oplus p = \pi \cdot \pi^* p = p \cdot p^* \pi$ — композиция расслоений. Кроме того, $p^*\pi$ — это отображение пространств m-расслоений над π и $\pi^* p$ — отображение пространств n-расслоений над p.

Ориентирующим пучком расслоения $\pi^* p$ над E является $\pi^* \mathcal{H}^m(p)$ (предложение 4.3), а его классом Тома $\tau(\pi^* p)$ — класс $(p^*\pi)^*(\tau(p)) \in H^m(E \circ G, E \circ G_{0p}; (\pi^* p)^* \pi^* \mathcal{H}^m(p))$ (теорема 4.2). Здесь $E \circ G_{0p}$ означает дополнение к нулевому сечению $E \to E \circ G$ расслоения $\pi^* p$. Поскольку отображение $p^*\pi$ имеет ацикличные прообразы точек, то так же, как в § 2, убеждаемся, что оно индуцирует изоморфизм когомологий. Кроме того, с учётом аргументов, применявшихся в предложении 4.4, $(\pi^* p)^* \pi^* \mathcal{H}^m(p) = (\pi \cdot \pi^* p)^* \mathcal{H}^m(p) = (\pi \oplus p)^* \mathcal{H}^m(p)$. Таким образом, $\tau(\pi^* p) = (p^*\pi)^*(\tau(p))$ — образ $\tau(p)$ при изоморфизме $H^m(E \circ G, E \circ G_{0p}; (\pi \oplus p)^* \mathcal{H}^m(p)) = H^m(G, G_0; p^* \mathcal{H}^m(p))$. Аналогично, $\tau(p^*\pi) = (\pi^* p)^*(\tau(\pi))$ — образ $\tau(\pi)$ при изоморфизме $H^n(E \circ G, E \circ G_{0\pi}; (\pi \oplus p)^* \mathcal{H}^n(\pi)) = H^n(E, E_0; \pi^* \mathcal{H}^n(\pi))$, где $E \circ G_{0\pi}$ — дополнение к нулевому сечению $G \to E \circ G$ расслоения $p^*\pi$.

4.10. Теорема. *$\mathcal{H}^{n+m}(\pi \oplus p) = \mathcal{H}^n(\pi) \otimes_\Lambda \mathcal{H}^m(p)$, $(\pi \oplus p)^* \mathcal{H}^{n+m}(\pi \oplus p) = (\pi^* p)^* \pi^* \mathcal{H}^n(\pi) \otimes_\Lambda (p^*\pi)^* p^* \mathcal{H}^m(p)$, $\tau(\pi \oplus p) = (\pi^* p)^*(\tau(\pi)) \smile (p^*\pi)^*(\tau(p))$ и $e(\pi \oplus p) = e(\pi) \smile e(p)$.*

Последнее соотношение для ориентируемых расслоений содержится в [9, свойство 9.6] и в [1, предложение 12.5].

Доказательство. Ограничения операций $\widehat{\otimes}$ и $\times$ на $\Delta(X) \subset X \times X$ суть операции $\otimes$ и $\smile$, поэтому первое и последнее соотношения — следствия соответствующих соотношений теоремы 4.8. Второе соотношение — следствие первого и леммы 2.15, поскольку участвующие в его записи композиции символов, означающих обратные образы пучков, совпадают с $(\pi \oplus p)^*$. Носители классов когомологий, участвующих в правой части третьего соотношения, принадлежат соответственно дополнениям к $E \circ G_{0p}$ и $E \circ G_{0\pi}$, причём $E \circ G_{0p} \cup E \circ G_{0\pi} = E \circ G_0$. Поэтому результат их умножения принадлежит когомологиям пары $(E \circ G, E \circ G_0)$ с коэффициентами в $(\pi \oplus p)^*(\mathcal{H}^n(\pi) \otimes_\Lambda \mathcal{H}^m(p)) = (\pi \oplus p)^* \mathcal{H}^n(\pi) \otimes_\Lambda (\pi \oplus p)^* \mathcal{H}^m(p)$. В силу замечания 4.9 третье соотношение теоремы 4.8 на $E \times G$ представляется в виде $\tau(\pi \times p) = \pi_E^*(\tau(\pi)) \smile \pi_G^*(\tau(p))$, где π_E и π_G — проекции $E \times G$ на E и G. При его ограничении на $E \circ G$ получается третье соотношение доказываемой теоремы: проекции π_E и π_G совпадают на $E \circ G$ с $\pi^* p$ и $p^*\pi$, а расслоение $\pi \times p$ — с $\pi \oplus p$.

4.11. Предложение. *Если расслоение допускает сечение, отличное от нуля в каждой точке, то* $e(\pi) = 0$.

Доказательство такое же, как для ориентируемых расслоений (см. [9, свойство 9.7]).

Последовательности типа Гизина обычно рассматриваются для расслоений на сферы S^{n-1}, $n \geqslant 1$. Всякое такое расслоение можно считать подрасслоением расслоения $E_0 \to X$ с теми же гомологиями и когомологиями, в свою очередь являющегося подрасслоением n-мерного векторного расслоения $\pi\colon E \to X$. Остановимся именно на такой форме описания точных последовательностей обсуждаемого типа.

4.12. Теорема. *Для любого пучка* $\mathcal{A}$ *на* X *и любого семейства носителей* φ *в* X *имеет место точная последовательность Тома—Гизина*

$$\begin{aligned} \ldots \longrightarrow H^{m-n}_{\varphi}(X; \mathcal{A} \otimes_{\Lambda} \mathcal{H}^n(\pi)) \xrightarrow{\alpha} H^m_{\varphi}(X; \mathcal{A}) \longrightarrow \\ \xrightarrow{\beta} H^m_{\theta}(E_0; \pi^*\mathcal{A}) \xrightarrow{\gamma} H^{m+1-n}_{\varphi}(X; \mathcal{A} \otimes_{\Lambda} \mathcal{H}^n(\pi)) \longrightarrow \ldots, \end{aligned}$$

в которой $\alpha(h) = h \smile e(\pi)$, β *— композиция изоморфизма* π^* *и гомоморфизма, индуцированного включением* $E_0 \subset E$, *в точной последовательности когомологий пары* (E, E_0) *и* γ *— композиция связывающего гомоморфизма в когомологической последовательности пары* (E, E_0) *и изоморфизма Тома.*

Как обычно, $\theta = \pi^{-1}(\varphi)$. В соответствии с теоремой 2.1 и замечанием к ней фигурирующей выше точной последовательности можно придать и следующий вид:

$$\begin{aligned} \ldots \longrightarrow H^{m-n}_{\varphi}(X; \mathcal{A}) \longrightarrow H^m_{\varphi}(X; \mathcal{A} \otimes_{\Lambda} \mathcal{H}^n(\pi)) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^m_{\theta}(E_0; \pi^*(\mathcal{A} \otimes_{\Lambda} \mathcal{H}^n(\pi))) \longrightarrow H^{m+1-n}_{\varphi}(X; \mathcal{A}) \longrightarrow \ldots. \end{aligned}$$

В такой форме она эквивалентна последовательности (24) в [23, глава IV, п. 7.9 в новой редакции]. Точная последовательность теоремы — следствие точной последовательности когомологий пары (E, E_0) с коэффициентами в $\pi^*\mathcal{A}$ и с носителями в θ. Форма гомоморфизма α — следствие того, что элементу h при изоморфизме Тома отвечает элемент $\pi^*(h) \smile \tau \in H^m_{\theta}(E, E_0; \pi^*\mathcal{A})$, который при дальнейшем ограничении в группу $H^m_{\theta}(E; \pi^*\mathcal{A}) = H^p_{\varphi}(X; \mathcal{A})$ (в силу естественности операции $\smile$) превращается в $h \smile e(\pi)$.

Очевидным следствием такого устройства α является соотношение $\alpha(h_1 \smile h_2) = h_1 \smile \alpha(h_2)$ (ср. с [19, глава 5, § 7, теорема 11] для ориентируемого случая).

Далее пусть $\mathcal{A}$ — локально постоянный пучок и φ — некоторое семейство замкнутых локально компактных носителей в X (см. конец § 3). Для $B \in \varphi$ пусть $\eta(B)$ — содержащееся в $\pi^{-1}(B)$ семейство всех замкнутых множеств, компактных по слою (см. замечание 3.11), и пусть $\eta(\varphi) = \bigcup_{B \in \varphi} \eta(B)$. В этом случае для общих гомологий, рассматриваемых в конце § 3, $H_m^{\eta(\varphi)}(E;\pi^*\mathcal{A}) = H_m^{\varphi}(X;\mathcal{A})$. В самом деле,

$$H_m^{\eta(\varphi)}(E;\pi^*\mathcal{A}) = \varinjlim_{F\in\eta(\varphi)} \{H_m(F;\pi^*\mathcal{A})\} = \\ = \varinjlim_{B\in\varphi}\Big\{\varinjlim_{F\in\eta(B)} \{H_m(F;\pi^*\mathcal{A})\}\Big\} = \varinjlim_{B\in\varphi}\{H_m(B;\mathcal{A})\}$$

(см. замечание 3.11), последний же предел как раз и есть $H_m^{\varphi}(X;\mathcal{A})$. Учитываем, что $H_m^{\eta(\varphi)}(E_0;\pi^*\mathcal{A})$ — это гомологии E_0 с носителями в $\eta(\varphi)$, содержащимися в E_0. Поскольку вблизи $i_0(X) = E\setminus E_0$ рассматриваемое семейство не отличается от $\pi^{-1}(\varphi)$, в соответствии с теоремой 3.12 имеет место изоморфизм Тома $H_{m-n}^{\varphi}(X;\mathcal{A}\otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)) = H_m^{\eta(\varphi)}(E,E_0;\pi^*\mathcal{A})$. С учётом всего сказанного следствием точной последовательности гомологий пары (E,E_0) с носителями в $\eta(\varphi)$ и с коэффициентами в $\pi^*\mathcal{A}$ оказывается следующий результат.

4.13. Теорема. *Для любого локально постоянного пучка $\mathcal{A}$ и семейства носителей φ в X имеет место точная последовательность Тома—Гизина*

$$\ldots \longrightarrow H_m^{\varphi}(X;\mathcal{A}) \xrightarrow{\alpha'} H_{m-n}^{\varphi}(X;\mathcal{A}\otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)) \longrightarrow \\ \xrightarrow{\beta'} H_{m-1}^{\eta(\varphi)}(E_0;\pi^*\mathcal{A}) \xrightarrow{\gamma'} H_{m-1}^{\varphi}(X;\mathcal{A}) \longrightarrow \ldots,$$

в которой $\alpha'(h) = h\frown e(\pi)$, β' — композиция изоморфизма Тома и связывающего гомоморфизма в гомологической последовательности пары (E,E_0) и γ' — композиция с π_* гомоморфизма гомологий, индуцированного включением $E_0\subset E$.

В частности, когда $\varphi = c$, то и $\eta(\varphi) = c$, возникает последовательность для обычных гомологий с компактными носителями. Такая последовательность была известна пока что только для сингулярных гомологий с постоянными коэффициентами ориентируемых расслоений ($\mathcal{H}^n(\pi) = \Lambda$). Форма отображения α' известна для расслоений над многообразиями (см. [5, глава VIII, предложение 12.1]).

Как и в предыдущей теореме, последовательности Тома—Гизина можно придать и следующий вид:

$$\ldots \longrightarrow H_m^{\varphi}(X;\mathcal{A}\otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)) \longrightarrow H_{m-n}^{\varphi}(X;\mathcal{A}) \longrightarrow \\ \longrightarrow H_{m-1}^{\eta(\varphi)}(E_0;\pi^*(\mathcal{A}\otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi))) \longrightarrow H_{m-1}^{\varphi}(X;\mathcal{A}\otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)) \longrightarrow \ldots.$$

Указанная форма гомоморфизма α' объясняется следующим образом. Элемент $h\in H_m^{\varphi}(X;\mathcal{A})$ может рассматриваться как элемент изоморфной группы $H_m^{\eta(\varphi)}(E;\pi^*\mathcal{A})$ с носителем в $i_0(X)$, и элемент $\alpha'(h)$ может быть получен как принадлежащий группе $H_{m-n}^{\eta(\varphi)}(E;\pi^*(\mathcal{A}\otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)))$ результат умножения $j_*(h)\frown\tau$, где $j\colon E\subset (E,E_0)$ — вложение. Представляющее τ (при определении операции $\frown\tau$ в § 3) сечение-коцикл пучка коцепей является не только коциклом для пары (E, E_0), но и коциклом пространства E, представляющим, очевидно, класс $e(\pi)$. Операция же $j_*(h) \frown \tau$, помимо сказанного о τ, определяется представляющим $j_*(h)$ циклом пространства E. Поэтому $j_*(h) \frown \tau = h \frown e(\pi)$.

Следствием такого представления α' является соотношение $\alpha'(h \frown u) = h \frown \alpha(u)$, в котором α — отображение из теоремы 4.12, а u — некоторый класс когомологий (ср. [19, глава 5, § 7, теорема 11]). Действительно, $\alpha'(h \frown u) = h \frown u \frown e(\pi) = h \frown (u \smile e(\pi))$ (см. [15, теорема 2.3]).

В следующей теореме X — клеточный комплекс и $\Lambda = \mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел.

4.14. Теорема. *Класс Эйлера $e(\pi) \in H^n(X; \mathcal{H}^n(\pi))$ совпадает с препятствием к существованию над n-мерным остовом X отличного от нуля в каждой точке сечения расслоения π.*

Для ориентируемого расслоения это теорема 12.5 в [9]. В неориентируемом случае известен некоторый аналог этого утверждения по модулю 2 [9, теорема 12.1].

Доказательство близко к тому, что дано в [9] для ориентируемого расслоения. Именно, рассмотрим начало последовательности Тома—Гизина теоремы 4.12

$$\ldots \longrightarrow H^0(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} H^n(X; \mathcal{H}^n(\pi)) \xrightarrow{\beta} H^n(E_0; \pi^*\mathcal{H}^n(\pi)) \longrightarrow \ldots .$$

Ясно, что $\beta = \pi_0^*$, где π_0 — ограничение π на E_0. В силу предложения 4.3 $\pi^*\mathcal{H}^n(\pi)$ — ориентирующий пучок расслоения $\pi_0^*\pi$. Поскольку расслоение $\pi_0^*\pi$ имеет на E_0 не обращающееся в нуль сечение, препятствующий существованию на n-мерном остове E_0 такого сечения класс когомологий $o_n(\pi_0^*\pi) \in H^n(E_0; \pi^*\mathcal{H}^n(\pi))$ обращается в нуль. Следовательно, $\pi_0^*(o_n(\pi)) = o_n(\pi_0^*\pi) = 0$, $o_n(\pi) \in H^n(X; \mathcal{H}^n(\pi))$. Из точной последовательности $o_n(\pi) = \lambda \smile e(\pi) = \lambda \cdot e(\pi)$, где $\lambda \in H^0(X; \mathbb{Z})$ — локально постоянное сечение постоянного пучка $\mathbb{Z}$ на X.

В качестве π можно взять универсальное расслоение γ^n над (связным) многообразием Грассмана, получим $o_n(\gamma^n) = \lambda_n \cdot e(\gamma^n)$, $\lambda_n \in \mathbb{Z}$ — постоянное сечение. В силу [9, теоремы 5.6 и 5.7] расслоение π индуцируется некоторым отображением f пространства X в многообразие Грассмана, $\pi = f^*\gamma^n$. В этом случае $o_n(\pi) = f^*(o_n(\gamma^n))$ [9] и $e(\pi) = f^*(e(\gamma^n))$ (теорема 4.2). Следовательно, указанное сечение γ постоянно и равно γ_n (не зависит от π). При стандартном переходе от коэффициентов $\mathbb{Z}$ к $\mathbb{Z}_2$ из $o_n(\gamma^n)$ получим класс Штифеля—Уитни $\omega_n(\gamma^n)$ [9, теорема 12.1], аналогично для $e(\gamma^n)$ (предложение 4.7), поэтому $\omega_n(\gamma^n) = \lambda_n \cdot \omega_n(\gamma^n)$. В силу [9, теорема 7.1] $\omega_n(\gamma^n) \neq 0$. Следовательно, число λ_n нечётно.

Если n нечётно, то $e(\pi)$ имеет порядок 2 (следствие 4.6), поэтому $o_n(\pi) = e(\pi)$. Если же n чётно, то $\lambda_n = 1$ для касательного расслоения над n-мерной сферой (см. доказательство теоремы 12.5 в [9]). Теорема доказана.

§ 5. Расслоения над многообразиями. Двойственность

В этом параграфе $X = M$ — многообразие, $m = \dim M$ и n — размерность слоя расслоения $\pi\colon E \to X$.

Особое место среди расслоений над многообразиями занимают касательные расслоения. Размерность слоя касательного расслоения $t\colon TM \to M$ равна размерности базы M, а ориентирующий пучок $\mathcal{H}^n(t)$ расслоения совпадает с ориентирующим пучком $\mathcal{H}_n(M)$ многообразия, образованным локальными группами гомологий $H_n(M, M \setminus x; \Lambda)$, $x \in M$ (формальное определение $\mathcal{H}_n(M)$ см., например, в [5, глава VIII, § 2], совпадение $\mathcal{H}^n(t)$ с $\mathcal{H}_n(M)$ фактически устанавливается в [9, лемма 11.6]). В связи с этим расслоениям, для которых $n = m$ и $\mathcal{H}^n(\pi) = \mathcal{H}_n(M)$, будет уделено особое внимание. Совпадение пучков $\mathcal{H}^n(\pi)$ и $\mathcal{H}_n(M)$ эквивалентно ориентируемости глобального многообразия E (см. лемму 5.3).

5.1. Теорема. *Пусть $\pi\colon E \to M$ — векторное расслоение над связным триангулируемым многообразием M размерности $m = n$. Если M не компактно, π обладает не обращающимися в нуль сечениями (гладкими в случае гладкого расслоения). Для компактных M такие сечения существуют по крайней мере на дополнениях к точкам.*

В частности, на некомпактных гладких (связных) многообразиях всегда существуют векторные поля без особенностей, на компактных — не более чем с одной особенностью. Теорема усиливает предложение 11.14 в [1], утверждающее наличие ненулевого сечения гладкого расслоения на дополнении к конечному множеству точек в компактном многообразии.

Доказательство. Существование не обращающегося в нуль сечения обеспечивается обращением в нуль класса Эйлера (теорема 4.14). Достаточно рассмотреть первый случай, в котором достаточно установить, что $H^n(M; \mathcal{H}^n(\pi)) = 0$. В силу двойственности Пуанкаре [23, глава V, п. 9.6 и 9.7] $H^n(M; \mathcal{G}) = H_0(M; \mathcal{G} \otimes_\Lambda \mathcal{H}_n(M))$ — нульмерные сингулярные гомологии, определяемые всеми локально конечными сингулярными цепями. Покажем, что $H_0(M; \mathcal{B}) = 0$ для любых локально постоянных коэффициентов $\mathcal{B}$.

Для этого заметим, что любое компактное подмножество K некомпактного связного многообразия M содержится в компактном множестве L, для которого $M \setminus L$ есть объединение конечного числа попарно не пересекающихся связных некомпактных множеств. В самом деле, пусть $\{K_\lambda\}$ — все связные компоненты дополнения $M \setminus K$ и U — содержащее K открытое множество с компактным замыканием $\bar{U}$. В силу связности K_λ условие $K_\lambda \cap (M \setminus U) \neq \varnothing$ влечёт $K_\lambda \cap (\bar{U} \setminus U) \neq \varnothing$, поэтому все K_λ, кроме конечного числа, содержатся в U (иначе в некоторой точке компактного множества $\bar{U} \setminus U$ нарушится свойство локальной связности M). Тем самым в качестве L можно взять объединение K со всеми K_λ, содержащимися в U.

В силу этого M можно представить в виде счётного объединения $\bigcup_i K_i$ компактных подпространств, для которых $K_i \subset K_{i+1}$, а дополнения к которым суть конечные несвязные суммы связных открытых множеств. Пусть $\{b_j x_j\}$ — локально конечный нульмерный сингулярный цикл, в котором b_j — элементы слоёв $\mathcal{B}$ над точками $x_j \in M$. В каждом множестве K_i содержится только конечное число точек x_j. Для каждой точки $x_j \in K_1$ выберем путь из неё, заканчивающийся в $K_2 \setminus K_1$. Для возникших конечных точек и точек x_j в $K_2 \setminus K_1$ выберем пути из этих точек в $K_3 \setminus K_2$, содержащиеся в связных компонентах множества $M \setminus K_1$. В компонентах $M \setminus K_2$ аналогичные пути проведём из точек $K_3 \setminus K_2$ в точки $K_4 \setminus K_3$. Продолжение этого процесса обеспечит наличие путей, начинающихся в точках x_j и уходящих в бесконечность. Начинающиеся в точках b_j накрывающие пути в $\mathcal{B}$ определяют собой одномерную локально конечную сингулярную цепь с границей $\{b_j x_j\}$. Теорема доказана.

Итак, классы Эйлера n-мерных расслоений над n-мерными многообразиями представляют интерес только для компактных M. Для таких M класс Эйлера $e(\pi) \in H^n(M; \mathcal{H}^n(\pi))$ может быть реализован как число при отмеченном выше условии, что $\mathcal{H}^n(\pi) = \mathcal{H}_n(M)$ (в частности, для касательных расслоений $\pi = t$ и для любых ориентируемых расслоений над ориентируемыми многообразиями (ср. с [1, § 11])). В самом деле, в силу указанной выше двойственности Пуанкаре для связного многообразия $H^n_{\mathrm{c}}(M; \mathcal{H}_n(M)) = H_0^{\mathrm{c}}(M; \Lambda) = \Lambda$, поэтому в случае, когда Λ — кольцо целых чисел или поле вещественных (или рациональных) чисел, класс Эйлера компактного многообразия оказывается числом.

Для ориентируемых M это число совпадает с эйлеровой характеристикой ([22, глава 17, теорема 7.2], [19, глава 6, § 10, теорема 2], [9, следствие 11.12], [1, § 11] и др.). В неориентируемом случае фактически можно считать известным совпадение по модулю 2 [9, следствие 11.12]. На самом деле имеет место более полный результат.

5.2. Теорема. *Класс Эйлера $e(t)$ касательного расслоения любого гладкого компактного многообразия M совпадает (для указанных выше Λ) с его эйлеровой характеристикой $\chi(M)$.*

В самом деле, пусть $f\colon \tilde{M} \to M$ — двукратное накрытие M ориентируемым многообразием $\tilde{M}$. Имеем $f^*t = \tilde{t}$ — касательное расслоение над $\tilde{M}$, $f^*\mathcal{H}^n(t) = \mathcal{H}^n(\tilde{t}) = \Lambda$ (предложение 4.3), поэтому есть отображение когомологий $\Lambda = H^n(M; \mathcal{H}^n(t)) \xrightarrow{f^*} H^n(\tilde{M}; \Lambda) = \Lambda$, являющееся удвоением. Таким образом, $f^*(e(t)) = 2e(t)$, и утверждение теоремы — следствие того, что $f^*(e(t)) = e(\tilde{t})$ (теорема 4.2).

Заметим, что число $e(\pi)$ определено с точностью до знака, зависящего только от выбора ориентации всего многообразия E (но не M, как это дополнительно утверждается в [1, § 11]), так как при сохранении ориентации E ориентации пучков $\mathcal{H}^n(\pi) = \mathcal{H}_n(M)$ согласованы (ср. с леммой 5.3). Однако в случае касательного расслоения $\pi = t$, в том числе для неориентируемых M, на E

определена каноническая ориентация, так что число $e(t)$ определено однозначно (и равно эйлеровой характеристике M).

В дальнейшем будет использоваться следующее наблюдение.

5.3. Лемма. $\mathcal{H}_{m+n}(E) = \pi^*(\mathcal{H}_m(M) \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi))$.

Доказательство. Как отмечено выше, ориентирующие пучки многообразия и его касательного расслоения совпадают, поэтому $\mathcal{H}_{m+n}(E) = \mathcal{H}^{m+n}(t_E)$, где t_E — касательное расслоение многообразия E. В силу предложения 4.3 этот пучок равен $\pi^*\mathcal{H}^{m+n}(t_E|M)$. В силу следствия 3.4 в [9] $t_E|M = t \oplus \nu = t \oplus \pi$, где $\nu = \pi$ — нормальное расслоение M в E, поэтому в силу теоремы 4.10 $\mathcal{H}^{m+n}(t|E) = \mathcal{H}^m(t) \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi) = \mathcal{H}_m(M) \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)$. Лемма доказана.

Так как многообразия паракомпактны, расслоения над ними можно считать евклидовыми в смысле [9, § 2]. В частности, можно пользоваться наличием подрасслоения $S \subset E_0$, составленного единичными $(n-1)$-мерными сферами слоёв π. Через T будем обозначать содержащее S пространство, составленное единичными дисками слоёв. Когомологическая последовательность пары (E, E_0) отождествляется с последовательностью пары (T, S)

$$\ldots \longrightarrow H^{n-1}(S; \pi^*\mathcal{H}^n(\pi)) \longrightarrow H^n(T, S; \pi^*\mathcal{H}^n(\pi)) \longrightarrow H^n(T; \pi^*\mathcal{H}^n(\pi)) \longrightarrow \ldots.$$

Классы $\tau(\pi)$ и $e(\pi)$ принадлежат в ней второму и третьему членам выше.

Напомню, что в силу двойственности Пуанкаре в многообразии M (размерности m) группа $H_m(M; \mathcal{H}^m(M))$ отождествляется с $H^0(M; \Lambda)$, поэтому для любого многообразия определён фундаментальный класс гомологий $\mu \in H_m(M; \mathcal{H}_m(M))$ [23, глава V, § 10]. Следующий результат позволяет интерпретировать $\tau(\pi)$ как фундаментальный класс μ многообразия M, а $e(\pi)$ — как некоторое гомологическое препятствие к сдвигу M в $T \setminus M$.

5.4. Теорема. *Когомологическая последовательность выше естественно изоморфна точной последовательности гомологий (второго рода) пары (T, S)*

$$\ldots \longrightarrow H_m(S; \pi^*\mathcal{H}_m(M)) \longrightarrow H_m(T; \pi^*\mathcal{H}_m(M)) \longrightarrow H_m(T, S; \pi^*\mathcal{H}_m(M)) \longrightarrow \ldots.$$

Классу $\tau(\pi)$ в ней соответствует фундаментальный класс $\mu \in H_m(M; \mathcal{H}_m(M)) = H_m(T; \pi^*\mathcal{H}_m(M))$, а классу $e(\pi)$ — образ μ в группе $H_m(T, S; \pi^*\mathcal{H}_m(M))$.

Доказательство. Воспользуемся двойственностью Пуанкаре—Лефшеца в $(m+n)$-мерном многообразии E (как она представлена в [23, глава V, § 9] или в [12, § 3]). Коэффициенты $\pi^*\mathcal{H}^n(\pi)$ должны быть заменены на $\pi^*\mathcal{H}^n(\pi) \otimes_\Lambda \mathcal{H}_{m+n}(E)$. В силу лемм 5.3 и 2.15 $\mathcal{H}_{m+n}(E) = \pi^*\mathcal{H}_m(M) \otimes_\Lambda \pi^*\mathcal{H}^n(\pi)$. Так как $\pi^*\mathcal{H}^n(\pi) \otimes_\Lambda \pi^*\mathcal{H}^n(\pi) = \Lambda$, коэффициентами в гомологической последовательности оказывается пучок $\pi^*\mathcal{H}_m(M)$. Степень p в когомологической последовательности в соответствующих гомологических членах заменяется на $m+n-p$. В частности, группа $H^{n-1}(S; \pi^*\mathcal{H}^n(\pi))$ превращается в $H_{m+1}(E, E \setminus S; \pi^*\mathcal{H}_m(M))$. Гомологии подпространства $E \setminus S$ определяются локально конечными цепями E, содержащимися в $E \setminus S$, поэтому после деформаций и вырезаний $(E, E \setminus S)$ превратится в $(S \times [0,1], S \times \{0\} \cup S \times \{1\})$. Таким образом, $H_{m+1}(E, E\setminus S; \pi^*\mathcal{H}_m(M)) = H_m(S; \pi^*\mathcal{H}_m(M))$. Когомологии (T,S) совпадают с когомологиями многообразия $T\setminus S$ с носителями в семействе η всех замкнутых в E подмножеств $T\setminus S$, поэтому их заменой будут гомологии $H^{\eta}_m(T\setminus S; \pi^*\mathcal{H}_m(M)) = H_m(M; \mathcal{H}_m(M)) = H_m(T; \pi^*\mathcal{H}_m(M))$, см. замечание 3.11. Наконец, вместо когомологий T возникнут гомологии пары $(E, E\setminus T)$, а после вырезания — гомологии пары (T,S). Теорема доказана.

В соответствии с [20, глава II, теорема 4.5] нулевое сечение $M = i_0(M)$ гладкого расслоения $\pi\colon E\to M$ небольшой деформацией можно превратить в многообразие M', трансверсальное к M. Более того, можно считать, что M' — гладкое сечение расслоения π (см. доказательство предложения 11.14 в [1]). Тем самым, как и $(T, T\setminus M)$, пара $(T, T\setminus M')$ гомотопически эквивалентна (T,S) (или (E,E_0)). Если $M_0 = M\cap M' = \varnothing$, то $e(\pi) = 0$ (предложение 4.11). В противном случае M_0 — гладкое $(m-n)$-мерное многообразие. Ниже будут рассмотрены гомологические свойства включения M_0 в M, по существу — некоторые интерпретации классов Тома и Эйлера, отражающие, в частности, свойства M_0 как множества нулей трансверсальных сечений расслоения (ср. с картиной для ориентируемых расслоений над ориентируемыми многообразиями в [1, § 12]).

Ниже $\nu = \pi$ и ν' — нормальные расслоения M и M' в E, ν_0 — нормальное расслоение M_0. Условимся через ν и ν' обозначать также ограничения ν и ν' на M_0. Следующее утверждение усиливает предложение 12.7 в [1].

5.5. Лемма. *Трансверсальность M и M' влечёт соотношение $\nu_0 = \nu\oplus\nu'$. При этом ν и ν' — также нормальные расслоения M_0 соответственно в M' и M.*

Доказательство. Очевидно, $\nu_0 = \tilde\nu\oplus\tilde\nu'$, где $\tilde\nu$ и $\tilde\nu'$ — нормальные расслоения M_0 в M и M' (ср. с [9, лемма 3.2]). Рассмотрим диаграмму с точными строками, образованную расслоениями над M_0:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & TM_0 & \longrightarrow & TM|M_0 & \longrightarrow & \tilde\nu & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \cap & & \downarrow i & & \\
0 & \longrightarrow & TM_0 & \longrightarrow & TE|M_0 & \longrightarrow & \nu_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \cap & & \| & & \downarrow j & & \\
0 & \longrightarrow & TM|M_0 & \longrightarrow & TE|M_0 & \longrightarrow & \nu & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

Используем формальное определение нормального расслоения из [9, § 11]. В диаграмме i — мономорфизм, j — эпиморфизм и $\operatorname{Im} i = \operatorname{Ker} j$, поэтому расслоение ν изоморфно $\tilde\nu'$. Аналогично изоморфны ν' и $\tilde\nu$. Лемма доказана.

5.6. Лемма. *Ограничения ν и ν' на M_0 изоморфны.*

Доказательство. Сдвиг сечения $f\colon M\to M'$ продолжается до диффеоморфизма $T\to T$ трубчатой окрестности M и M'. В силу [9, теорема 11.1] это обеспечивает наличие отображения над f расслоённых пространств ν и ν'. В силу [9, лемма 3.1] $\nu = f^*\nu'$. Поскольку f — диффеоморфизм, расслоения ν и ν' изоморфны, поэтому изоморфны и их ограничения на M_0. Лемма доказана.

5.7. Лемма. *Ограничение $\mathcal{H}_{m+n}(E)$ на M_0 — ориентирующий пучок $\mathcal{H}_{m-n}(M_0)$ многообразия M_0. Нормальное расслоение ν_0 многообразия M_0 в E ориентируемо ($\mathcal{H}^{2n}(\nu_0) = \Lambda$).*

Доказательство. В силу леммы 5.5 и теоремы 4.10 $\mathcal{H}^{2n}(\nu_0) = \mathcal{H}^n(\nu) \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\nu')$, поэтому в силу леммы 5.6 и следствия 2.12 $\mathcal{H}^{2n}(\nu_0) = \Lambda$. В силу [9, теорема 11.1] трубчатая окрестность M_0 в E диффеоморфна пространству расслоения ν_0, но в силу леммы 5.3 в ней $\mathcal{H}_{m+n}(E) = \nu_0^*(\mathcal{H}_{m-n}(M_0) \otimes_\Lambda \mathcal{H}^{2n}(\nu_0)) = \nu_0^*\mathcal{H}_{m-n}(M_0)$. Лемма доказана.

5.8. Следствие. *Ориентируемость многообразия E влечёт ориентируемость M_0.*

Для ориентируемых M это утверждение содержится в [1, предложение 12.7].

Носитель представляющего класс $\tau(\pi) \in H^n(E, E_0; \nu^*\mathcal{H}^n(\pi))$ сечения-коцикла вялой резольвенты пучка $\nu^*\mathcal{H}^n(\pi)$ содержится в $M = E \setminus E_0$. Аналогичный носитель для класса $\tau(\nu')$ содержится в M'. В соответствии с применяемой конструкцией $\smile$-умножения (см. § 2) носителем класса $\tau(\pi) \smile \tau(\nu')$ при такой реализации представляющих коциклов оказывается M_0. Таким образом, $\tau(\pi) \smile \tau(\nu') \in H^{2n}(E, E \setminus M_0; \Lambda)$ (коэффициенты содержащих $\tau(\pi)$ и $\tau(\nu')$ групп когомологий изоморфны, поэтому их тензорное произведение равно Λ). Поскольку расслоение ν_0 ориентируемо (лемма 5.7), это означает, что произведение $\tau(\pi) \smile \tau(\nu')$ принадлежит той же группе, что и класс $\tau(\nu_0)$. Для каждой компоненты M_{0i} многообразия M_0 в силу теоремы 2.1 $H^{2n}(E, E \setminus M_{0i}; \Lambda) = H^0(M_{0i}; \Lambda) = \Lambda$, и группа $H^{2n}(E, E \setminus M_0; \Lambda)$ — произведение экземпляров Λ по числу компонент M_{0i}.

5.9. Теорема. *$\tau(\pi) \smile \tau(\nu') = \tau(\nu_0) \in H^{2n}(E, E \setminus M_0; \Lambda)$ — класс Тома нормального расслоения M_0 в E. Его образ при естественном гомоморфизме $H^{2n}(E, E \setminus M_0; \Lambda) \to H^{2n}(E, E_0; \Lambda)$ совпадает с $\tau(\pi) \smile \tau(\pi)$.*

Поскольку при изоморфизме $H^{2n}(E, E_0; \Lambda) = H^n(M; \mathcal{H}^n(\pi))$ классу $\tau \smile \tau$ отвечает класс $e(\pi)$ (предложение 4.5), теорема в определённой степени позволяет интерпретировать классы $\tau(\pi)$ и $e(\pi)$ расслоения π соответственно как $\tau(\nu_0)$ и образ $\tau(\nu_0)$ в группе $H^{2n}(E, E_0; \Lambda)$. Заметим, что эта интерпретация не зависит от свойств ориентируемости π или M.

Доказательство. Пары (E, E_0) и $(E, E \setminus M')$ гомотопически эквивалентны (T, S), и можно считать, что $\tau \smile \tau$ принадлежит $H^{2n}(T, S; \Lambda)$. Второе утверждение теоремы — следствие естественности операции $\smile$ и того, что образом $\tau(\nu')$ при вложении $(T, S) \subset (T, T \setminus M')$ служит $\tau(\pi)$. Для доказательства первого утверждения заметим, что при ограничении расслоения $\nu = \pi$ на подмногообразие M_0 в соответствии с теоремой 4.2 образом $\tau(\pi)$ оказывается класс расслоения ν с базой M_0 (см. соглашение перед леммой 5.5). Аналогичное заключение справедливо по отношению к $\tau(\nu')$. Остаётся воспользоваться леммой 5.5 и теоремой 4.10.

В силу двойственности Пуанкаре в многообразии E (ср. с теоремой 5.4) и в силу равенства $\mathcal{H}_{m+n}(E)|M_0 = \mathcal{H}_{m-n}(M_0)$ (лемма 5.7) имеет место следствие.

5.10. Следствие. *Фигурирующий в теореме 5.9 гомоморфизм когомологий $H^{2n}(E, E\setminus M_0;\Lambda)\to H^{2n}(E, E_0;\Lambda)$ отождествляется с отображением гомологий $H_{m-n}(M_0;\mathcal{H}_{m-n}(M_0))\to H_{m-n}(M;\mathcal{H}_{m+n}(E))$. При этом классу $\tau(\nu_0)$ отвечает фундаментальный класс гомологий M_0 (ср. с теоремой 5.4), а классу $e(\pi)$ — его образ.*

Заметим, что поскольку M не предполагается компактным, фигурирующие когомологии — второго рода. По двойственности Пуанкаре внутри самого M_0 имеем $H_{m-n}(M_0;\mathcal{H}_{m-n}(M_0)) = H^0(M_0;\Lambda)$, поэтому утверждение о совпадении $\tau(\nu_0)$ с фундаментальным классом M_0 — следствие аргументов, приведённых перед теоремой 5.9 (ср. также с теоремой 5.4).

Для ориентируемых расслоений над ориентируемыми многообразиями утверждение следствия — это фактически предложение 18.8 в [1]. Как и в случае теоремы 5.9, в приведённой выше интерпретации $\tau(\pi)$ и $e(\pi)$ никак не проявляют себя свойства ориентируемости π или M (но естественным образом участвует ориентирующий пучок E).

В частном случае, когда $m = n$, многообразие M_0 — дискретное множество точек, теорема 5.9 и её следствие позволяют дать оценку числа точек $|M_0|$ трансверсального самопересечения многообразия M в пространстве E.

5.11. Следствие. *При $m = n$ и $\mathcal{H}^n(\pi) = \mathcal{H}_n(M)$ (в частности, для касательного расслоения $\pi = t$) для компактного M всегда $|M_0| \geqslant |e(\pi)|$ (см. обсуждение $e(\pi)$ перед теоремой 5.2). При $\mathcal{H}^n(\pi) \neq \mathcal{H}_n(M)$ и $e(\pi) \neq 0$ число $|M_0|$ (для связного M) всегда нечётно. При $e(\pi) = 0$ (например, в случае некомпактного связного M, для нечётного n при $\mathcal{H}^n(\pi) = \mathcal{H}_n(M)$) множество M_0 можно сделать пустым.*

Большинство утверждений — непосредственные следствия теорем 5.1 и 5.9 (и следствия 5.10). В случае $\mathcal{H}^n(\pi) = \mathcal{H}_n(M)$ при нечётном n пользуемся следствием 4.6. При $\mathcal{H}^n(\pi) \neq \mathcal{H}_n(M)$ в следствии 5.10 $H_0(M;\mathcal{H}_{2n}(E)) = \mathbb{Z}_2$, так как ограничение $\mathcal{H}_{2n}(E)$ на M отлично от $\mathbb{Z}$ (лемма 5.3) и M компактно. Для ориентируемых расслоений над компактными ориентируемыми многообразиями утверждения следствия вытекают также из [1, теоремы 11.16 и 11.17].

Рассмотрим детальнее расслоения π над компактным многообразием M размерности $m = n$, для которых $\mathcal{H}^n(\pi) = \mathcal{H}_n(M)$. Будем пользоваться интерпретацией $e(\pi)$, даваемой теоремой 5.9. В этом случае E — ориентируемое многообразие, $e(\pi)$ — число, однозначно определяемое ориентацией E. Нормальный пучок одноточечного многообразия M_{0i} есть сумма Уитни нормальных пучков M_{0i} в M и M' (лемма 5.5), поэтому смена знака у одного из классов $\tau(\pi)$ или $\tau(\nu')$ (смена «ориентации») влечёт смену знака у другого (см. замечания к теореме 5.2). Таким образом, знак числа $\tau(\pi)\smile\tau(\nu') = \pm 1$ в точке M_{0i} определяется только расположением в точке $M_{0i} \in M \cap M'$ многообразия M' по отношению к слою π.

Имеется очевидная связь указанных чисел с локальными степенями нулей отвечающего M' сечения. Пусть $s\colon M \to E$ — гладкое (или даже просто непрерывное) сечение с изолированным нулём $a \in M$ и D — достаточно малый

n-мерный диск в M, для которого $a \in \operatorname{int} D$ — единственный нуль сечения s. Ограничение π на D — прямое произведение, поэтому ограничением s определено отображение $S^{n-1} = \partial D \to E(D)_0 \sim S^{n-1}$, где $E(D)_0 = \pi^{-1}(D) \cap E_0$ — гомотопически эквивалентное сфере S^{n-1} подпространство в E. Степень этого отображения $\deg_a s$ будем называть степенью нуля a сечения s. Так как многообразие E ориентируемо, число $\deg_a s$ однозначно определяется ориентацией E (ориентации D и слоя π согласованы, смена одной из них влечёт смену другой). В частности, это даёт возможность сравнивать степени нулей s в разных точках. В случае трансверсального в точке a сечения $\deg_a s = \pm 1$ и знак определяется положением касательной плоскости к $M' = s(M)$ в точке a по отношению к слою π (ср. выше).

5.12. Теорема. *Пусть $\pi\colon E \to M$ — гладкое расслоение над компактным многообразием M, для которого $n = m$ и $\mathcal{H}^n(\pi) = \mathcal{H}_n(M)$. Существует трансверсальное сечение $s\colon M \to E$, имеющее только $|e(\pi)|$ нулей (степени $e(\pi)/|e(\pi)|$ каждый).*

Доказательство. Рассмотрим сперва произвольное трансверсальное сечение. Достаточно считать, что M связно. В силу следствия 5.11 число нулей сечения не меньше $|e(\pi)|$. Если их больше, найдутся два, a и b, для которых $\deg_a s \cdot \deg_b s = -1$. Ниже будет показано, что выбранное сечение может быть заменено новым трансверсальным сечением с прежним множеством нулей, из которого удалены точки a и b. Ясно, что повторение (в случае надобности) этого процесса обеспечит нужный результат.

Обоснование этого процесса сводится к следующему. Пусть a, b — два нуля некоторого сечения s. Существует диффеоморфное n-мерному диску подмножество $D \subset M$, содержащее a, b в своей внутренней части (и не содержащее других нулей s). Пусть $\partial D = S_0^{n-1}$.

5.13. Лемма. $\deg(s|S_0^{n-1}) = \deg_a s + \deg_b s$.

Доказательство. Пусть S_1^{n-1}, S_2^{n-1} — окружающие a и b непересекающиеся сферы, содержащиеся в $\operatorname{int} D$, и I — соединяющий их путь, $\Gamma = S_1^{n-1} \cup S_2^{n-1} \cup I$. Диффеоморфизм (степени 1) стандартной сферы S^{n-1} на S_1^{n-1} гомотопен отображению $\gamma_1\colon S^{n-1} \to \Gamma_1$, где Γ_1 — объединение S_1^{n-1} с первой половиной пути I (от S_1^{n-1} к S_2^{n-1}). Аналогичный диффеоморфизм S^{n-1} на S_2^{n-1} гомотопен отображению $\gamma_2\colon S^{n-1} \to \Gamma_2$, где Γ_2 — замкнутое дополнение к Γ_1 в Γ. Пусть $\gamma\colon S^{n-1} \vee S^{n-1} \to \Gamma$ — определяемое γ_1 и γ_2 отображение букета. Отображение $s\gamma$ определяет элемент $\deg_a s + \deg_b s$ гомотопической группы $\pi_{n-1}(E(D)_0) = \pi_{n-1}(S^{n-1})$. При стандартной реализации Γ вложение $S_0^{n-1} \subset M$ гомотопно (почти изотопно) отображению $S_0^{n-1} \to \Gamma$, которое можно представить как композицию $S_0^{n-1} \to S^{n-1} \vee S^{n-1} \to \Gamma$. Таким образом, отображение s на S_0^{n-1} гомотопно композиции $s\gamma j$. Лемма доказана.

Для точек a, b, для которых $\deg_a s \cdot \deg_b s = -1$, ограничение s на S_0^{n-1}, имея степень нуль, гомотопно постоянному. Пользуясь тем, что ограничение π

на D — прямое произведение, можно изменить сечение s на D отображением $D \to E_0$. Это завершает доказательство теоремы.

Аналогичным образом, изменив s внутри окружающей их сферы S_0^{n-1} (см. лемму), можно заменить два нуля a и b сечения s одним суммарной степени. Для этого, сузив содержащую a и b область D до аналогичной $\tilde{D}$, изменим s на $D \setminus \operatorname{int} \tilde{D}$ таким образом, чтобы ограничение нового сечения на $\partial\tilde{D}$ оказалось некоторым стандартным отображением $S^{n-1} \to S^{n-1}$ суммарной степени, продолжающимся до гладкого отображения $\tilde{D}$ в шар слоя π и имеющим только один нуль. Тем же способом любой (изолированный) нуль сечения s можно «раздвоить», превратив в два нуля нового сечения с любыми степенями, сумма которых равна исходной. Наконец, в соответствии с аргументацией, использованной при определении трансверсального самопересечения M_0 многообразия M, любой изолированный нуль сечения s локальным изменением s можно заменить на $|\deg_a s|$ трансверсальных нулей. Так как сумма степеней трансверсальных нулей равна $e(\pi)$, из всего сказанного вытекает

5.14. Следствие. *Пусть π — гладкое расслоение над компактным многообразием, для которого $m = n$ и $\mathcal{H}^n(\pi) = \mathcal{H}_n(M)$. Сумма локальных степеней любого сечения $s\colon M \to E$ с изолированными нулями равна $e(\pi)$. Для любого натурального числа $k \geqslant 1$ и любого набора целых чисел $d_1, \ldots, d_k$, сумма которых равна $e(\pi)$, существует сечение s, имеющее k нулей со степенями $d_1, \ldots, d_k$.*

Для ориентируемых расслоений над ориентируемыми многообразиями первое утверждение следствия — теоремы 11.16 и 11.17 в [1]. Результаты справедливы, в частности, для векторных полей на многообразиях (для которых $e(\pi) = \chi(M)$). Первое утверждение следствия для этого случая — обобщение на неориентируемые многообразия теоремы Хопфа об индексе [1, теорема 11.25].

Далее воспользуемся двойственностью Пуанкаре в многообразии M. Коэффициенты изменятся посредством операции $\otimes_\Lambda \mathcal{H}_m(M)$. Так как $\mathcal{H}_{n+m}(E) = \mathcal{H}_m(M) \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)$, то $\mathcal{H}_{n+m}(E) \otimes_\Lambda \mathcal{H}_m(M) = \mathcal{H}^n(\pi)$ (равенства на M).

5.15. Следствие. *Гомоморфизм в следствии 5.10 отождествляется с отображением когомологий*

$$H^n(M; M \setminus M_0; \mathcal{H}^n(\pi)) \to H^n(M; \mathcal{H}^n(\pi)).$$

Заметим, что пара $(M, M \setminus M_0)$ представляет нормальное расслоение $\tilde{\nu}$ многообразия M_0 в M, причём в силу лемм 5.5 и 5.6 пучок $\mathcal{H}^n(\pi)$ вблизи M_0 как раз и есть $\tilde{\nu}^*\mathcal{H}^n(\tilde{\nu})$. Таким образом, класс $e(\pi)$ расслоения π может быть интерпретирован и как образ в $H^n(M; \mathcal{H}^n(\pi))$ класса Тома $\tau(\tilde{\nu}) \in H^n(M, M \setminus M_0; \tilde{\nu}^*\mathcal{H}^n(\tilde{\nu}))$ нормального расслоения M_0 в M. В частности, условие $e(\pi) = 0$ влечёт $e(\tilde{\nu}) = 0$, $e(\tilde{\nu}) \in H^n(M_0; \mathcal{H}^n(\tilde{\nu})) = H^n(M_0; \mathcal{H}^n(\pi))$.

Ещё раз воспользуемся двойственностью Пуанкаре в многообразии E, коэффициенты изменятся посредством операции $\otimes_\Lambda \mathcal{H}_{n+m}(E)$. Так как $\mathcal{H}_{n+m}(E) = \pi^*\mathcal{H}_m(M) \otimes_\Lambda \pi^*\mathcal{H}^n(\pi)$, то $\pi^*\mathcal{H}^n(\pi) \otimes_\Lambda \mathcal{H}_{n+m}(E) = \pi^*\mathcal{H}_m(M)$. При переходе к гомологиям вложенные в E пару $(M, M \setminus M_0)$ и многообразие M следствия 5.15

надлежит заменить на дополнительные пары $(E_0 \cup M_0, E_0)$ и (E, E_0) (см., например, [13, глава 8, п. 5.8]). Вторая из них гомотопически эквивалентна (T, S). Легко убедиться, что первая в процессе гомотопии и вырезания становится эквивалентной паре $(T \cap \pi^{-1}(M_0), S \cap \pi^{-1}(M_0))$.

5.16. Следствие. *Отображение в следствии* 5.15 *отождествляется с гомоморфизмом гомологий*

$$H_m(T \cap \pi^{-1}(M_0), S \cap \pi^{-1}(M_0); \pi^*\mathcal{H}_m(M)) \to H_m(T, S; \pi^*\mathcal{H}_m(M)).$$

Заметим, что, как и в следствии 5.10, здесь фигурируют гомологии второго рода. Применение к участвующим группам гомологической версии изоморфизма Тома, представленной в теореме 3.10, превращает отображение в следствии в гомоморфизм следствия 5.10. Следствие 5.16 даёт, очевидно, ещё одну интерпретацию классов $\tau(\pi)$ и $e(\pi)$. Интерпретация $e(\pi)$ здесь такая же, как в теореме 5.4.

В случае расслоений, базами которых служат (топологические) многообразия, в конструкциях, связанных с изоморфизмом Тома и его применениями, типично использование двойственности Пуанкаре или её непосредственных следствий (см., например, [5, глава VIII], [1, § 6, 7, 11, 12 и др.]). Это видно и на материале настоящего параграфа. Такая картина не случайна. Оказывается, в обсуждаемых условиях изоморфизмы Тома целиком могут быть получены исходя только из двойственности Пуанкаре.

Как известно, двойственность Пуанкаре в M (или в E) осуществляется (в том числе для гомологий и когомологий с носителями в паракомпактифицирующих семействах) операцией $h \to \mu \frown h$ (соответственно $h \to \mu_E \frown h$), где h — отвечающий ситуации класс когомологий, а $\mu \in H_m(M; \mathcal{H}_m(M))$ (соответственно $\mu_E \in H_{n+m}(E; \mathcal{H}_{n+m}(E))$) — фундаментальный класс гомологий многообразия (см. в связи с этим [23, глава V, следствие 10.2], [13, глава 8, п. 5.3], [18, предложение 4.3]). Устанавливаемая ниже связь между μ и μ_E, хотя и может быть получена в качестве одного из следствий изоморфизма Тома для гомологий (ср. с теоремой 3.10), от общей теории изоморфизмов Тома не зависит и скорее есть просто одно из свойств фундаментальных классов гомологий подмногообразий, связанное с операцией $\frown$-умножения.

5.17. Лемма. *$\mu = \mu_E \frown \tau$.*

Доказательство. Пусть F — замкнутое множество в M и h' — образ класса гомологий h многообразия M (или E) в гомологиях пары (M, F) (соответственно $(E, \pi^{-1}(F))$), совпадающих в силу локальной компактности M (и E) с гомологиями $M \setminus F$ (соответственно $E \setminus \pi^{-1}(F)$). В этих обозначениях имеем соотношение $(\mu_E \frown \tau)' = \mu'_E \frown \tau$. В самом деле, если ξ — представляющее класс гомологий h сечение-цикл пучка цепей, то класс h' определяется ограничением ξ на дополнение к F (или к $\pi^{-1}(F)$). Если t — представляющее τ сечение-коцикл пучка коцепей, то $h \frown \tau$ определяется (на первом этапе, см. § 3) сечением $\xi\otimes t$ тензорного произведения соответствующих пучков, которое определяется тензорными произведениями элементов в слоях, определяемых сечениями соответствующих пучков, при тензорном перемножении слоёв. Поэтому ограничение $\xi\otimes t$ на $E\setminus\pi^{-1}(F)$ совпадает с тензорно умноженным на (ограничение) t ограничением на $E\setminus\pi^{-1}(F)$ самого ξ, следствием чего является нужное соотношение.

Двойственный по Пуанкаре к $1\in\Lambda=H^0(E;\Lambda)$ класс μ_E определяется его образами μ'_E в гомологиях любых связных открытых подмножеств E (в частности, вида $\pi^{-1}(M\setminus F)$), аналогично для μ и подмножеств в M. Таким образом, в силу указанного выше соотношения лемму достаточно доказать для ограничения π на шарообразную окрестность $U\subset M$, считая, что это ограничение тривиально. Доказательство проведём индукцией по $m=\dim M$. Утверждение очевидно при $m=0$. Предположим, что лемма верна для прямых произведений $U\times\mathbb{R}^n$ при $\dim U\leqslant m-1$. По сказанному выше она верна тогда и для произведения $S^{m-1}\times\mathbb{R}^n$ (поскольку можно считать, что $U=S^{m-1}\setminus F$).

Пусть D^m — шар и $U=D^m\setminus S^{m-1}$ — дополнение к краю. Пусть $T==D^m\times D^n$, $S=D^m\times S^{n-1}$, $T'=S^{m-1}\times D^n$ и $S'=S\cap T'$. Считаем, что $\mu_E\in\in H_{m+n}(T,S\cup T';\Lambda)$, $\tau\in H^n(T,S;\Lambda)$ и $\mu\in H_m(U;\Lambda)=H_m(D^m,S^{m-1};\Lambda)$. Рассмотрим изоморфизмы $\partial\colon H_m(U;\Lambda)\to H_{m-1}(S^{m-1};\Lambda)$ и $\partial_E\colon H_{m+n}(T,S\cup T';\Lambda)==H_{m+n}(T\setminus S,T'\setminus S';\Lambda)\to H_{m+n-1}(T'\setminus S';\Lambda)=H_{m+n-1}(T',S';\Lambda)$ (учитываем, что здесь $H_{m+n}(T\setminus S;\Lambda)=H_{m+n}(\mathbb{R}^n;\Lambda)=0$ при $m>0$). Заметим, что $\partial(\mu)$ и $\partial_E(\mu_E)$ — фундаментальные классы гомологий S^{m-1} и $S^{m-1}\times\mathbb{R}^n$, причём в силу индуктивного предположения $\partial(\mu)=\partial_E(\mu_E)\frown\tau$. Поэтому нужное соотношение $\mu=\mu_E\frown\tau$ вытекает теперь из соотношения $\partial(\mu_E\frown\tau)=\partial_E(\mu_E)\frown\tau$, которое можно рассматривать как одно из общих свойств операции $\frown$-умножения (оно следует из равенств $\partial(\xi\otimes t)=\partial(\xi)\otimes t\pm\xi\otimes d(t)$ и $d(t)=0$ для представляющих μ_E и τ сечения ξ пучка цепей на T (цикла пары $(T,S\cup T')$) и сечения-коцикла t пучка коцепей на T). Лемма доказана.

5.18. Теорема. *В случае, когда база расслоения $\pi\colon E\to M$ — топологическое многообразие, для локально постоянных коэффициентов изоморфизмы Тома, в том числе для гомологий и когомологий с любыми носителями, — следствия двойственности Пуанкаре. При этом изоморфизмы для когомологий* (§ 2) *отождествляются с изоморфизмами для гомологий* (§ 3). *По крайней мере для паракомпактифицирующих семейств носителей следствием двойственности Пуанкаре оказывается и сама форма изоморфизмов Тома* (*то есть их реализация посредством умножений на τ*).

Доказательство. Как уже отмечалось, расслоение можно считать евклидовым и вместо (E,E_0) использовать пару (T,S), в которой T — подрасслоение на диски, а S — граница T. Пусть $\theta=\pi^{-1}(\varphi)$. Группа $H^k_\theta(T,S;\pi^*\mathcal{A})$, как тоже не раз отмечалось и использовалось выше, изоморфна когомологиям $T\setminus S$ с носителями в части θ, содержащейся в $T\setminus S$. По двойственности Пуанкаре в многообразии $T\setminus S$ она совпадает с $(n+m-k)$-мерными гомологиями $T\setminus S$ с теми же носителями и с коэффициентами в $\pi^*\mathcal{A}\otimes_\Lambda\mathcal{H}_{n+m}(E)$, в конечном итоге — с гомологиями базы $H^{\varphi}_{n+m-k}(M;\mathcal{A}\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}_{n+m}(E))$ (ср. с рассуждениями к теореме 4.13). По двойственности Пуанкаре в M последняя группа есть $H^{k-n}_{\varphi}(M;\mathcal{A}\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}_{n+m}(E)\otimes\mathcal{H}_m(M)) = H^{k-n}_{\varphi}(M;\mathcal{A}\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}^n(\pi))$ (на M имеем $\mathcal{H}_{n+m}(E)\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}_m(M)=\mathcal{H}_m(M)\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}^n(\pi)\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}_m(M)=\mathcal{H}^n(\pi)$). Этим установлен изоморфизм Тома для когомологий.

Имеем $H^{\theta}_k(T,S;\pi^*\mathcal{A}) = H^{m+n-k}_{\theta}(E\setminus S, E\setminus T;\pi^*\mathcal{A}\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}_{n+m}(E))$ (двойственность в многообразии E) $= H^{n+m-k}_{\theta}(T\setminus S;\pi^*\mathcal{A}\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}_{n+m}(E)) = H^{n+m-k}_{\varphi}(M;\mathcal{A}\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}_{n+m}(E))$ (см. начало § 2). По двойственности в M последняя группа есть $H^{\varphi}_{k-n}(M;\mathcal{A}\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}_{n+m}(E)\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}_m(M)) = H^{\varphi}_{k-n}(M;\mathcal{A}\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}^n(\pi))$. Этим установлен изоморфизм Тома для гомологий.

Пусть $q = m+2n-k$. Как только что показано, $H^k_{\theta}(T,S;\pi^*\mathcal{A}) = H^{\varphi}_{q-n}(M;\mathcal{B}\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}^n(\pi))$, где $\mathcal{B} = \mathcal{A}\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}_{n+m}(E)\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}^n(\pi)$. Аналогично, выше показано, что $H^{\theta}_q(T,S;\pi^*\mathcal{B}) = H^{k-n}_{\varphi}(M;\mathcal{B}\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}_{n+m}(E)) = H^{k-n}_{\varphi}(M;\mathcal{A}\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}^n(\pi))$ (поскольку $\mathcal{B}$ имеет указанный вид). Таким образом, изоморфизм $H^k_{\theta}(T,S;\pi^*\mathcal{A}) = H^{k-n}_{\varphi}(M;\mathcal{A}\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}^n(\pi))$ отождествляется с $H^{\varphi}_{q-n}(M;\mathcal{B}\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}^n(\pi)) = H^{\theta}_q(T,S;\pi^*\mathcal{B})$.

В частном случае для когомологий $H^n(T,S;\pi^*\mathcal{H}^n(\pi)) = H^0(M;\Lambda)=\Lambda$ (для связного M), причём этот изоморфизм совместим с переходом к малым (открытым и замкнутым) связным окрестностям точек M и даже к самим точкам $x\in M$. Это означает наличие класса Тома $\tau\in H^n(T,S;\pi^*\mathcal{H}^n(\pi))$.

Сохраняя прежнее значение символов q и $\mathcal{B}$ (ограничение $\mathcal{B}$ на M есть $\mathcal{A}\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}_m(M)$), рассмотрим следующую диаграмму отображений:

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{l} H^{k-n}_{\varphi}(M;\mathcal{A}\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}^n(\pi)) = \\ = H^{k-n}_{\theta}(T;\pi^*(\mathcal{A}\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}^n(\pi))) \end{array} \arrow[r, "\smile\tau"] \arrow[d, "\mu_E\frown"'] \arrow[dr, "\mu\frown"] & H^k_{\theta}(T,S;\pi^*\mathcal{A}) \arrow[d, "\mu_E\frown"] \\
H^{\theta}_q(T,S;\pi^*\mathcal{A}) \arrow[r, "\frown\tau"'] & H_{q-n}(M;\mathcal{B}\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}^n(\pi))
\end{tikzcd}$$

Равенство групп сверху обеспечивается, например, теоремой Вьеториса—Бегла, см. [23, глава II, теорема 11.7, теорема 11.2 в первом издании]. Вертикальные стрелки — только что установленные изоморфизмы двойственности Пуанкаре в E, диагональная — аналогичный изоморфизм в M (так как $(k-n)+(q-n)=m$ и $\mathcal{B}\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}^n(\pi) = (\mathcal{A}\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}^n(\pi))\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}_m(M)$). Как отмечено выше перед леммой 5.17, по крайней мере для паракомпактифицирующих носителей эти изоморфизмы реализуются операциями $\mu_E\frown$ и $\mu\frown$. Композиции отображений по сторонам квадрата совпадают: для элемента $h\in H^{k-n}_{\theta}(T;\pi^*(\mathcal{A}\otimes_{\Lambda}\mathcal{H}^n(\pi)))$ имеем $\mu_E\frown(h\smile\tau) = (\mu_E\frown h)\frown\tau$ (общее свойство операций $\smile$ и $\frown$, см. [15, теорема 2.3]). В соответствии с леммой 5.17 $\mu\frown h = (\mu_E\frown\tau)\frown h = \mu_E\frown(\tau\smile h) = \pm\mu_E\frown(h\smile\tau)$. Таким образом, указанные композиции — изоморфизмы (с точностью до знака совпадающие с диагональным). Так как вертикальные отображения — тоже изоморфизмы, изоморфизмами оказываются и отображения по горизонтали. Теорема доказана.

Двойственность Пуанкаре — это не только естественные изоморфизмы, но с позиций теории пучков — тождественные совпадения: в случае многообразия вялые пучки цепей с коэффициентами в локально постоянном пучке $\mathcal{A}$, занумерованные в обратном порядке, представляют собой вялую резольвенту пучка $\mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{H}_m(M)$, так что гомологии самого многообразия M и любых пар подпространств M с коэффициентами в $\mathcal{A}$ совпадают с когомологиями в дополнительных размерностях самого M и дополнительных пар в M с коэффициентами в $\mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{H}_m(M)$ (см., например, [13, глава 8, п. 5.8]). Разумеется, такое отождествление — лишь с позиций теории пучков, с классических позиций фундаментальный класс гомологий многообразия M_0 в следствии 5.10, например, отличается от класса Тома в теореме 5.9. При указанном отождествлении операции $\frown h$ и $\smile h$ умножения на некоторый класс когомологий h отождествляемых классов гомологий и когомологий совпадают (по крайней мере для паракомпактифицирующих семейств носителей, см. [23, глава V, теорема 10.1] и [18, предложение 4.2]). В частности, при таком подходе изоморфизмы Тома в верхней и нижней строках диаграммы выше совпадают. Как показывает следующая теорема, совпадают в обсуждаемой ситуации и соответствующие последовательности Тома—Гизина.

Так как расслоения можно считать евклидовыми, вместо подпространства $E_0 \subset E$ будем рассматривать подрасслоение $S \subset E_0$ на $(n-1)$-мерные сферы.

5.19. Теорема. *Для любого локально постоянного пучка $\mathcal{B}$ на M и семейства носителей φ последовательность Тома—Гизина теоремы* 4.12

$$\ldots \longrightarrow H_\varphi^{k-n}(M; \mathcal{B} \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)) \xrightarrow{\smile e} H_\varphi^k(M; \mathcal{B}) \longrightarrow H_\theta^k(S; \pi^*\mathcal{B}) \longrightarrow \ldots$$

совпадает с гомологической последовательностью Тома—Гизина теоремы 4.13

$$\ldots \longrightarrow H^\varphi_{q+n}(M; \mathcal{A}) \xrightarrow{\frown e} H^\varphi_q(M; \mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)) \longrightarrow H^\theta_{q+n-1}(S; \pi^*\mathcal{A}) \longrightarrow \ldots,$$

в которой $\mathcal{A} = \mathcal{B} \otimes_\Lambda \mathcal{H}_m(M) \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)$ и $q = m - k$.

Заметим, что в качестве $\mathcal{A}$ могут быть получены произвольные локально постоянные коэффициенты (достаточно в качестве $\mathcal{B}$ взять $\mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{H}_m(M) \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)$).

Доказательство. Из двойственности в M имеем

$$H_\varphi^{k-n}(M; \mathcal{B} \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)) = H^\varphi_{q+n}(M; \mathcal{B} \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi) \otimes_\Lambda \mathcal{H}_m(M)).$$

Аналогично,

$$H_\varphi^k(M; \mathcal{B}) = H^\varphi_q(M; \mathcal{B} \otimes_\Lambda \mathcal{H}_m(M)) = H^\varphi_q(M; \mathcal{A} \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi)).$$

Заметим, что если пользоваться двойственностью в многообразии E, придём к гомологиям пары (T, S), изоморфным полученным выше при изоморфизме Тома.

Ориентирующим пучком $(n+m-1)$-мерного многообразия S является ограничение на S пучка $\pi^*(\mathcal{H}_m(M) \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi))$, поэтому (по двойственности в S)

$$H_\theta^k(S; \pi^*\mathcal{B}) = H^\theta_{q+n-1}(S; \pi^*\mathcal{B} \otimes_\Lambda \pi^*(\mathcal{H}_m(M) \otimes_\Lambda \mathcal{H}^n(\pi))) = H^\theta_{q+n-1}(S; \pi^*\mathcal{A}).$$

Как уже отмечалось, для двойственных по Пуанкаре классов операции $\smile e(\pi)$ и $\frown e(\pi)$ совпадают (по крайней мере для паракомпактифицирующих носителей). Теорема доказана.

Заметим, что последовательность для обычных когомологий отождествляется с последовательностью гомологий второго рода и, наоборот, когомологии второго рода (с компактными носителями) — с классическими гомологиями.

§ 6. Добавление

Выбор класса Тома $\tau(\pi)$ имеет прозрачную геометрическую интерпретацию в случае, когда база X расслоения π локально связна. Условимся рассматривать локальные координатные системы $f_U\colon U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$ расслоения только над связными открытыми множествами $U \subset X$. Будем считать также, что эти множества U малы настолько, что расслоение π оказывается прямым произведением не только на любом U, но и над объединением всех V, пересекающихся с U (это допущение реально по крайней мере, когда X паракомпактно). При таком условии функции перехода для локальных координатных систем ориентирующего пучка $\mathcal{H}^n(\pi)$ принимают только значения 1 и -1 (из кольца Λ). В соответствии с этим две локальные координатные системы будем считать одинаково ориентированными или имеющими разные ориентации.

Под оснащённой локальной координатной системой расслоения π условимся понимать пару (f_U, s_U): некоторую локальную координатную систему f_U и s_U — постоянное сечение пучка $\mathcal{H}^n(\pi)$ над U, принимающее значение 1 или -1 кольца Λ как слоя $\mathcal{H}^n(\pi)$. Две такие системы (f_U, s_U) и (f_V, s_V) будем считать согласованными, если $U \cap V \neq \varnothing$ и ограничения s_U и s_V на $U \cap V$ совпадают или отличаются знаком в зависимости от того, совпадают или нет ориентации f_U и f_V. Заметим, что это относится и к тому частному случаю, когда $U = V$.

Под ориентирующим координатным атласом расслоения π будем понимать набор оснащённых координатных систем, согласованных между собой и покрывающих X. Будем считать при этом, что вместе с локальной координатной системой f_U в атласе содержится система для множества U противоположной ориентации. Ориентирующие координатные атласы существуют. Для построения такого атласа нужно взять одну из координатных систем f_U, снабдить её оснащением s_U (одним из двух способов), после чего, переходя последовательно к соседним локальным координатным системам, снабжать их подходящими оснащениями. В случае связного X таким образом будут согласованно оснащены все карты (для несвязного X процесс проводится на каждой из компонент независимо). Процесс фактически мало отличается от процедуры построения ориентирующего атласа многообразия.

Очевидно, если X связно, для расслоения π можно построить два (с точностью до эквивалентных) ориентирующих координатных атласа. Очевидно, что ориентирующий координатный атлас отвечает классу τ расслоения (сечения s_U

определяются ограничениями τ на U), так как ориентирующий пучок определяется когомологиями пар $(\pi^{-1}(U), E_0 \cap \pi^{-1}(U))$. Ясно, что выбор τ равносилен выбору ориентирующего координатного атласа.

Без условия локальной связности оснащённые координатные системы (f_U, s_U) определяются так же, но согласованными следует считать пары, для которых совпадение на $U \cap V$ сечений s_U и s_V понимается с учётом координатных функций перехода между f_U и f_V. Дать описание множества «ориентаций» такого расслоения, по-видимому, намного сложнее (в том числе и для ориентируемого расслоения в целом, ср. [23, глава IV, п. 7.9]).

Литература

[1] Ботт Р., Ту Л. В. Дифференциальные формы в алгебраической топологии. — М.: Наука, 1988.

[2] Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. — М.: Наука, 1968.

[3] Годеман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. — М.: ИЛ, 1961.

[4] Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. — М.: ИЛ, 1961.

[5] Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. — М.: Мир, 1976.

[6] Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. — М.: ИЛ, 1960.

[7] Кузьминов В. И. О производных функторах функтора проективного предела // Сиб. мат. журн. — 1967. — Т. 8, № 2. — С. 333—345.

[8] Масси У. Теория гомологий и когомологий. — М.: Мир, 1981.

[9] Милнор Дж., Сташеф Дж. Характеристические классы. — М.: Мир, 1979.

[10] Рудяк Ю. Б. Об изоморфизме Тома—Дольда для неориентируемых расслоений // ДАН СССР. — 1980. — Т. 255, № 6. — С. 1323—1325.

[11] Свитцер Р М. Алгебраическая топология — гомотопии и гомологии. — М.: Наука, 1985.

[12] Скляренко Е. Г. К теории обобщённых многообразий // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1971. — Т. 35, № 4. — С. 831—843.

[13] Скляренко Е. Г. Гомологии и когомологии общих пространств // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 50. — М.: ВИНИТИ, 1989. — С. 129—266.

[14] Скляренко Е. Г. Гомологии и когомологии связи между множествами. Гомологии и когомологии окружения замкнутого множества // Изв. РАН. Сер. мат. — 1992. — Т. 56, № 5. — С. 1040—1071.

[15] Скляренко Е. Г. О природе гомологических умножений и двойственности // Успехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, № 1. — С. 141—198.

[16] Скляренко Е. Г. Гипер(ко)гомологии для точных слева ковариантных функторов и теория гомологий топологических пространств // Успехи мат. наук. — 1995. — Т. 50, № 3. — С. 109—146.

[17] Скляренко Е. Г. О когомологиях с носителями // Успехи мат. наук. — 1996. — Т. 51, № 1. — С. 167—168.

[18] Скляренко Е. Г. О гомологических умножениях // Изв. РАН. Сер. мат. — 1997. — Т. 61, № 1. — С. 157—176.

[19] Спаньер Э. Алгебраическая топология. — М.: Мир, 1971.

[20] Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970.

[21] Харлап А. Э. Локальные гомологии и когомологии, гомологическая размерность и обобщённые многообразия // Мат. сборник. — 1975. — Т. 96, № 3. — С. 347—373.

[22] Хьюзмоллер Д. Расслоённые пространства. — М.: Мир, 1970.

[23] Bredon G. E. Sheaf theory. Second edition. — Springer, 1997. (Первая редакция: Бредон Г. Э. Теория пучков. — М.: Наука, 1988.)

[24] Cartan H. Cohomologie des groups, suite spectral, faisceaux. — Seminaire, École Normal Sup., 1950—1951.

[25] Jensen C. U. Les foncteours dérivés de $\varprojlim$ et leurs applications en théorie des modules. — Lect. Notes Math. Vol. 254. — Berlin, New York: Springer, 1972.