Вполне замкнутые отображения и их приложения

В. В. ФЕДОРЧУК
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: vitaly@gtopol.math.msu.su

УДК 515.12

Ключевые слова: вполне замкнутое отображение, послойное произведение отображений, обратный спектр, спектральное дерево, развёртываемый спектр, резольвента, абсолют, многообразие.

Аннотация

Обзор посвящён теории вполне замкнутых отображений и их приложениям. Теоретическая часть включает в себя систематическое исследование взаимоотношений вполне замкнутых отображений с послойными произведениями, обратными спектрами, резольвентами. Изучены проективные свойства вполне замкнутых отображений. Приложения связаны, как правило, с размерностью и кардинальными инвариантами. Кроме результатов автора, приводятся, в основном, результаты его учеников.

Abstract

V. V. Fedorchuk, Fully closed mappings and their applications, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 4, pp. 105—235.

The survey is devoted to the theory of fully closed mappings and their applications. The theoretical part includes a systematic study of relations between fully closed mappings and fiber products, inverse systems, and resolutions. The projective properties of fully closed mappings are studied. The applications are largely related to dimension and cardinal functions. The results are mainly due to the author and his students.

Содержание

Введение

Вполне замкнутые отображения были определены в 1968 г. [49]. Но они присутствуют в общей топологии фактически с момента её зарождения. Так, вполне замкнуто отображение канторова совершенного множества на отрезок, состоящее в отождествлении концов смежных интервалов. Вполне замкнуты и естественные проектирования «двух стрелок» и «двух окружностей» Александрова (примеры A_7 и A_2 из «Мемуара» П. С. Александрова и П. С. Урысона [4]) на отрезок и окружность соответственно. Таковым является и проектирование лексикографического квадрата на отрезок. Вполне замкнутые отображения в неявном или явном виде присутствуют в работах многих авторов, как до 1968 г., так и после. Богатую информацию об этом можно найти в [126].

Но именно выделение класса вполне замкнутых отображений в качестве самостоятельного объекта исследований привело к систематическому применению их в общей топологии. Этому способствовала в первую очередь их простая структура: вполне замкнутое отображение является послойным произведением отображений, каждое из которых имеет только один неодноточечный прообраз. Следствием этого явилось то, что вполне замкнутые отображения не понижают размерность, если размерность слоёв меньше размерности отображаемого пространства. Рассмотрение вполне замкнутых отображений как способа построения прообраза (резольвенты) при данном образе наряду с привлечением кольцевых отображений дало мощный способ «убивания» сходящихся последовательностей в исходном пространстве. Всё это вместе с применением техники обратных спектров позволило решить целый ряд трудных вопросов общей топологии, касающихся размерности и кардинальных инвариантов.

Данная статья состоит из трёх глав. Первая глава имеет чисто вспомогательный характер. В ней собраны простейшие понятия и факты общей топологии, используемые в основном при доказательствах утверждений из второй главы.

Вторая глава посвящена собственно теории вполне замкнутых отображений, в частности развёртываемым спектрам. Большинство результатов этой главы содержится в различных статьях автора. При этом многие из этих результатов приводятся там без доказательства. Теоретическое обоснование метода вполне замкнутых отображений составляет пятую главу спецкурса автора «Произведения и спектры топологических пространств», прочитанного на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова ещё в 1976/77 учебном году. На русском языке имеется ротапринтное издание этого спецкурса [64]. Но это издание не известно западному читателю. Более того, именно пятая глава этого спецкурса (за исключением § 2) не вошла в учебник [72]. Поэтому эта глава малодоступна и русскоязычному читателю. Сказанное послужило основным мотивом к написанию этой статьи. При переработке пятой главы вышеупомянутого спецкурса часть результатов была обобщена. В первую очередь это относится к эквивалентности различных определений полной замкнутости (II.1.6.), где удалось освободиться от условия бикомпактности отображения.

Новым (по сравнению со спецкурсом) в главе II является § 4. Он посвящён структуре множества неприводимых совершенных вполне замкнутых отображений на данное регулярное пространство X. Доказывается существование наибольшего элемента faX этого множества (вполне замкнутого абсолюта). Для нормального пространства X приводится полное описание пространства faX. Большинство результатов этого параграфа в неопубликованном виде объявлено в [51]. К новым результатам относится, в частности, теорема II.4.59 о существовании бикомпакта X, для которого операция взятия вполне замкнутого абсолюта не является идемпотентной, т. е. такого бикомпакта X, что $fa(faX) \neq faX$.

Третья глава в основном посвящена приложениям вполне замкнутых отображений. Начинается она с описания резольвент, которые, будучи рассматриваемы как отображения, представляют собой наиболее важный с точки зрения приложений и вместе с тем почти исчерпывающий подкласс класса вполне замкнутых отображений. Во втором параграфе исследуется размерность вполне замкнутых отображений. Изложенные здесь результаты носят теоретический характер, но они оказываются весьма важными с точки зрения дальнейших приложений. Собственно приложения содержатся в § 3. Ввиду обилия имеющихся приложений, изложение носит здесь конспективный характер: результаты перечисляются, иногда комментируются и сопровождаются вопросами. В редких случаях приводятся фрагменты построения. Новым результатом является теорема III.27.5 о существовании инициально k-компактного пространства (для сколь угодно большого k), в котором характеры различных точек различны.

Автор привёл здесь в основном собственные результаты и результаты своих учеников. Некоторые не упомянутые результаты других авторов можно найти в цитированной литературе. Много приложений вполне замкнутых отображений приведено также в [126]. Здесь же можно найти и целый ряд интересных вопросов. Относящиеся к этой тематике вопросы содержатся и в [63].

Несмотря на стремление автора к самодостаточности статьи, предполагается, что читатель знаком с такими элементарными понятиями и фактами наивной теории множеств, как: вполне упорядоченные множества, порядковые и кардинальные числа, регулярные кардинальные числа, трансфинитная индукция, аксиома выбора, теорема Цермело, лемма Цорна, формула $\tau^2 = \tau$ для бесконечного кардинального числа τ. Кардинальные числа отождествляются с наименьшими порядковыми числами данной мощности, поэтому вместо $\aleph_\alpha$ применяется, как правило, обозначение ω_α. Через $|A|$ обозначается мощность множества A.

Пространством называется топологическое пространство. Замыкание множества $A \subseteq X$ в пространстве X обозначается через $[A]_X$ или $[A]$, внутренность — через $\operatorname{Int}_X A$ или $\operatorname{Int} A$. Отметим также, что в самом конце статьи через $[L]$ обозначается тип продолжения, определяемый симплициальным комплексом L. Символы Ox и OA используются для обозначения открытых, как правило, окрестностей точки x и множества A. Отображения предполагаются непрерывными. Под n-мерным пространством подразумевается пространство, лебегова размерность $\dim$ которого равна n.

Формулы нумеруются в пределах одного параграфа. Ссылка «см. II.6.26» означает «смотри вторую главу, шестой параграф, пункт 26»; «см. 1.12» означает «смотри первый параграф данной главы, пункт 12».

В дополнении для каждого гладкого компактного n-многообразия M строится неметризуемый однородный сепарабельный бикомпакт с первой аксиомой счётности RM размерности $n-1$. На бикомпакте RM транзитивно действует группа $\operatorname{Diff} M$.

I. Предварительные сведения из общей топологии

§ 1. Топологические пространства и непрерывные отображения

1.1. Семейство $\mathcal{B}$ открытых подмножеств пространства X называется (открытой) *базой* пространства X, если всякое открытое множество пространства X есть объединение некоторых элементов из $\mathcal{B}$.

Эквивалентное определение базы состоит в том, что для всякой точки $x \in X$ и всякой её окрестности Ox существует такой элемент $U \in \mathcal{B}$, что $x \in U \subseteq Ox$.

Наименьшее кардинальное число, являющееся мощностью какой-либо базы пространства X, называется *весом* пространства X и обозначается через wX.

1.2. Семейство $\mathcal{B}$ открытых подмножеств пространства X называется (открытой) *предбазой* пространства X, если всевозможные конечные пересечения элементов семейства $\mathcal{B}$ образуют базу пространства X.

Ясно, что семейство $\mathcal{B}$ является предбазой пространства X тогда и только тогда, когда для всякой точки $x \in X$ и всякой её окрестности Ox существует такой конечный набор $\{U_1, \ldots, U_k\} \subseteq \mathcal{B}$, что $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i \subseteq Ox$.

1.3. Предложение. *Для непрерывности отображения $f\colon X \to Y$ достаточно, чтобы были открыты прообразы $f^{-1}U$ элементов U некоторой предбазы $\mathcal{B}$ пространства Y.*

1.4. Пусть $\mathcal{B}$ есть семейство подмножеств множества X, удовлетворяющее следующим условиям:

а) всякая точка $x \in X$ принадлежит некоторому элементу $U \in \mathcal{B}$;

б) если $x \in U_1 \cap U_2$ и $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$, то существует такой элемент $U_3 \in \mathcal{B}$, что $x \in U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$.

Тогда семейство $\mathcal{B}$ является, как легко видеть, базой некоторой (однозначно определённой) топологии на множестве X. Таким образом, мы можем задавать топологию на множестве X посредством семейств $\mathcal{B}$, удовлетворяющих условиям а) и б).

1.5. Пусть $\mathcal{B}$ — произвольное семейство подмножеств множества X, являющееся *покрытием* множества X, т. е. $\bigcup \mathcal{B} = X$. Тогда $\mathcal{B}$ является предбазой некоторой топологии на X, поскольку семейство конечных пересечений элементов семейства $\mathcal{B}$ удовлетворяет условиям а) и б) из 1.4.

1.6. Пусть $f_\alpha\colon Y \to Y$, $\alpha \in A$, — семейство отображений из множества X в пространства Y_α. Тогда семейство $\{f_\alpha^{-1}U\colon U$ открыто в $Y_\alpha\}$ согласно 1.5 является предбазой топологии $\mathcal{T}$ на X. Относительно этой топологии все отображения f_α непрерывны, причём $\mathcal{T}$ — наименьшая топология на множестве X, обладающая этим свойством. Будем называть $\mathcal{T}$ *слабой топологией относительно семейства* $\{f_\alpha\colon \alpha \in A\}$.

1.7. Отображение $f\colon X \to Y$ будем называть *сюръективным* отображением, *эпиморфизмом* или *отображением «на»*, если $fX = Y$. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение пространства X на множество Y. Тогда семейство $\mathcal{T} = \{U \subseteq Y\colon f^{-1}U$ открыто$\}$ является топологией на множестве Y, очевидно сильнейшей среди всех топологий, для которых отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно. Будем называть $\mathcal{T}$ *факторной топологией*, $(Y, \mathcal{T})$ — *фактор-пространством* пространства X, а f — *факторным отображением*.

Факторные отображения естественно возникают при так называемых факторизациях пространства X по некоторому его *разбиению*. Под разбиением пространства понимается дизъюнктная система d его замкнутых непустых подмножеств, покрывающих X. Если определено разбиение d, то определено и естественное отображение $f\colon X \to d$, состоящее в том, что каждой точке $x \in X$ ставится в соответствие единственное содержащее точку x множество

$D \in d$. Это множество d превращается в фактор-пространство описанным выше способом.

1.8. Пространство X удовлетворяет *аксиоме отделимости* T_1, или, что то же самое, является T_1-*пространством*, если всякое одноточечное множество в X замкнуто.

Пространство X называется *хаусдорфовым*, или T_2-*пространством*, если для всякой пары различных точек из X существуют их непересекающиеся окрестности.

Пространство X называется T_3-*пространством*, если для всякой точки $x \in X$ и всякого не содержащего её замкнутого множества F существуют непересекающиеся окрестности Ox и OF.

Пространство, одновременно удовлетворяющее аксиомам T_1 и T_3, называется *регулярным*. Всякое регулярное пространство X хаусдорфово.

Пространство X называется T_4-*пространством*, если любую дизъюнктную пару замкнутых в X множеств можно заключить в непересекающиеся окрестности. Легко проверить, что это условие эквивалентно следующему: для всякого замкнутого множества F и всякой его окрестности OF существует другая окрестность O_1F, такая что $[O_1F] \subseteq OF$.

Другое эквивалентное условие: любую дизъюнктную пару замкнутых множеств можно заключить в окрестности с непересекающимися замыканиями.

Пространство, одновременно удовлетворяющее аксиомам T_1 и T_4, называется *нормальным*.

Всякое нормальное пространство регулярно, поскольку из аксиом T_1 и T_4 вытекает T_3.

1.9. Если аксиомы T_1, T_2, T_3 и регулярность наследуются при переходе к подпространству, то для нормальности это уже не так. Но замкнутое подмножество нормального пространства нормально.

Пространство, всякое подпространство которого нормально, называется *наследственно нормальным*.

1.10. Предложение. *Если всякое открытое подмножество пространства X нормально, то X наследственно нормально.*

1.11. Подмножество топологического пространства X, являющееся суммой счётного числа замкнутых в X множеств, называется F_σ-*множеством* пространства X. Счётные пересечения открытых множеств будем называть G_δ-*множествами*.

1.12. Предложение. *Всякое F_σ-подмножество нормального пространства X нормально.*

1.13. Нормальное пространство X называется *совершенно нормальным*, если всякое открытое его подмножество есть F_σ-множество, или, что то же самое, всякое замкнутое его подмножество есть G_δ-множество.

Оправданием такого определения служит следующее вытекающее из предложений 1.10 и 1.12 утверждение.

1.14. Предложение. *Всякое совершенно нормальное пространство наследственно нормально.*

Кроме того, само свойство совершенной нормальности наследуется при переходе к подпространству. Это вытекает из того, что если P есть F_σ-подмножество пространства X и $Y \subseteq X$, то $P \cap Y$ есть F_σ-подмножество пространства Y.

1.15. Лемма Урысона. *Для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств F_0 и F_1 нормального пространства X существует такая непрерывная на X функция φ, что*

$$\varphi F_0 = 0, \quad \varphi F_1 = 1 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \varphi x \leqslant 1 \text{ для всех } x \in X.$$

1.16. Замечание. Ясно, что вместо отрезка $[0;1]$ в формулировке леммы Урысона можно взять произвольный отрезок $[a;b]$ числовой прямой.

1.17. Теорема Брауэра—Титце—Урысона о продолжении непрерывных функций. *Пусть Φ — замкнутое подмножество нормального пространства X, и пусть $\varphi\colon \Phi \to \mathbb{R}$ — непрерывная ограниченная функция. Тогда существует такая непрерывная функция $\psi\colon X \to \mathbb{R}$, что $\psi|\Phi = \varphi$ и $\sup|\psi| = \sup|\varphi|$.*

1.18. Замечание. Теорема 1.17 верна и для неограниченных функций.

1.19. Топологическое пространство называется *бикомпактным*, если из всякого его покрытия открытыми множествами (такие покрытия будем называть открытыми) можно выделить конечное подпокрытие. Хаусдорфовы бикомпактные пространства называются *бикомпактами*.

1.20. Точка x называется *предельной точкой* множества $A \subseteq X$, если во всякой окрестности точки x содержится бесконечно много точек множества A. Точка x называется *точкой полного накопления* множества $A \subseteq X$, если для всякой её окрестности Ox множества A и $Ox \cap A$ равномощны.

1.21. Топологическое пространство называется *счётно компактным*, если из всякого его счётного открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

1.22. Теорема. *Топологическое T_1-пространство X счётно компактно тогда и только тогда, когда всякое его бесконечное подмножество имеет предельную точку.*

1.23. Топологическое пространство называется *финально компактным*, или *линделёфовым*, если из всякого его открытого покрытия можно выделить счётное подпокрытие.

Таким образом, бикомпактность слагается из счётной компактности и финальной компактности. Отсюда и происходит слово «бикомпактность».

1.24. Предложение. *В финально компактном пространстве X всякое несчётное множество регулярной мощности имеет точку полного накопления.*

1.25. Предложение. *Топологическое пространство бикомпактно тогда и только тогда, когда всякое его бесконечное подмножество имеет точку полного накопления.*

1.26. Система непустых подмножеств топологического пространства X называется *центрированной*, если для любых двух её элементов A_1, A_2 существует третий элемент, лежащий в пересечении $A_1 \cap A_2$.

Пусть $\mathcal{B}$ — некоторое семейство подмножеств множества X. Центрированная подсистема $\Phi \subseteq \mathcal{B}$ называется *фильтром* (в семействе $\mathcal{B}$), если для любого множества $F \in \Phi$ всякий элемент F_1 системы $\mathcal{B}$ со свойством $F_1 \supset F$ принадлежит системе Φ. В частности, получаем определения *открытого фильтра, замкнутого фильтра* и просто *фильтра*, если в качестве $\mathcal{B}$ берём семейство всех открытых подмножеств пространства X, всех замкнутых его подмножеств и всех подмножеств множества X соответственно. Максимальные (по включению) фильтры называются *ультрафильтрами*.

1.27. Теорема. *Для топологического пространства X эквивалентны следующие условия:*

а) *X бикомпактно;*

б) *всякая центрированная система замкнутых множеств в X имеет непустое пересечение;*

в) *всякий замкнутый в X ультрафильтр имеет непустое пересечение;*

г) *для всякого ультрафильтра $\mathcal{A}$ в X множество $\bigcap\{[A]\colon A \in \mathcal{A}\}$ не пусто.*

1.28. Предложение. *Свойства счётной компактности, финальной компактности и, следовательно, бикомпактности наследуются при переходе к замкнутому подпространству.*

1.29. Предложение. *Регулярное финально компактное пространство X нормально.*

1.30. Предложение. *Всякий бикомпакт нормален.*

1.31. Предложение. *Непрерывный образ бикомпактного пространства бикомпактен.*

Из характеристики компактных подмножеств прямой и 1.31 получаем следующее следствие.

1.32. Следствие. *Всякая непрерывная на бикомпакте функция принимает наибольшее и наименьшее значения.*

1.33. Предложение. *Бикомпакт замкнут во всяком объемлющем его хаусдорфовом пространстве.*

1.34. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *замкнутым* (*открытым*), если образ fA всякого замкнутого (открытого) в X множества A замкнут (открыт) в пространстве Y. Из 1.28, 1.31 и 1.33 вытекает, что всякое непрерывное отображение бикомпактного пространства в хаусдорфово замкнуто.

Всякое замкнутое непрерывное взаимно-однозначное отображение является, очевидно, гомеоморфизмом. Поэтому справедливо следующее утверждение.

1.35. Предложение. *Непрерывное взаимно-однозначное отображение бикомпакта на хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.*

1.36. Предложение. *Пусть* $f\colon X \to Y$ — *замкнутое отображение и* $Z \subseteq Y$. *Тогда отображение* $f|f^{-1}Z\colon f^{-1}Z \to Z$ *также замкнуто.*

1.37. Предложение. *Пусть* $f\colon X \to Y$ — *замкнутое отображение и* $Z \subseteq X$ — *замкнутое подпространство. Тогда отображение* $f|Z\colon Z \to Y$ *также замкнуто.*

1.38. Для отображения $f\colon X \to Y$ обозначим через $f^{\#}A$ *малый образ множества* $A \subseteq X$, т. е. $f^{\#}A = \{y \in Y\colon f^{-1}y \subseteq A\} = Y \setminus f(X \setminus A)$. Отображение $f\colon X \to Y$, как легко видеть, замкнуто тогда и только тогда, когда для всякого открытого множества $U \subseteq X$ множество $f^{\#}U$ открыто. Поэтому для замкнутого отображения $f\colon X \to Y$, произвольного множества $Z \subseteq Y$ и всякой окрестности $Of^{-1}Z$ множество $f^{\#}Of^{-1}Z$ является окрестностью множества Z.

Из 1.38 вытекает ещё один критерий замкнутости отображений.

1.39. Предложение. *Отображение* $f\colon X \to Y$ *замкнуто тогда и только тогда, когда для всякой точки* $y \in Y$ *и произвольной окрестности* $Of^{-1}y$ *множество* $f^{\#}Of^{-1}y$ *является окрестностью точки* y.

§ 2. Произведения топологических пространств

2.1. Пусть $\prod\{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — декартово произведение некоторого множества множеств, т. е. множество всех таких отображений $x\colon A \to \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, что $x(\alpha) \in X_\alpha$.

Если $B \subseteq A$, то определена естественная проекция

$$p_B\colon \prod\{X_\alpha\colon \alpha \in A\} \to \prod\{X_\alpha\colon \alpha \in B\},$$

ставящая в соответствие точке произведения x (отображению $x\colon A \to \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$) её ограничение на множество B. Эту проекцию будем иногда обозначать также через p^A_B. Если множество B состоит из одного элемента α, то отображение p_B будем обозначать через p_α.

Если $x \in \prod\{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$, то $x(\alpha)$ будем называть α-й координатой точки x и обозначать её иногда через x_α.

2.2. Пусть теперь сомножители X_α произведения $X = \prod\{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$ являются топологическими пространствами. Тогда на множестве X можно рассмотреть наименьшую топологию, относительно которой все проекции $p_\alpha\colon X \to X_\alpha$ непрерывны (см. 1.6). Множество X с этой топологией и называется *топологическим*, или *тихоновским*, или просто произведением пространств X_α.

Согласно 1.6 предбазу пространства X образуют всевозможные множества вида $p_\alpha^{-1}U$, где U открыто в пространстве X_α, а базу, следовательно, — всевозможные конечные их пересечения $p_{\alpha_1}^{-1}U_1 \cap \ldots \cap p_{\alpha_s}^{-1}U_s$.

2.3. Предложение. *Пусть* X — *топологическое произведение пространств* X_α, $\alpha \in A$, *и пусть* $f\colon Y \to X$ — *такое отображение, что все композиции* $p_\alpha \circ f\colon Y \to X_\alpha$ *непрерывны. Тогда отображение* f *также непрерывно.*

2.4. Понятие категории. Пусть $C = \{\mathcal{O}, \mathcal{M}\}$ — класс элементов двух сортов. Элементы из $\mathcal{O}$ называются *объектами*, а элементы из $\mathcal{M}$ — *морфизмами*. Для каждого морфизма f определена единственная упорядоченная пара (X, Y) объектов, и f называется морфизмом из X в Y. В этой ситуации X иногда обозначают через $\operatorname{dom} f$, а Y — через $\operatorname{rng} f$. Семейство всех морфизмов из X в Y обозначается через $[X, Y]$.

Семейство $C = \{\mathcal{O}, \mathcal{M}\}$ называется *категорией*, если выполнены следующие условия:

а) для каждой пары морфизмов f и g с $\operatorname{rng} f = \operatorname{dom} g$ определён единственный морфизм h с $\operatorname{dom} h = \operatorname{dom} f$ и $\operatorname{rng} h = \operatorname{rng}\ g$, называемый *композицией морфизмов* f и g и обозначаемый через $g \circ f$;

б) для каждого объекта $X \in \mathcal{O}$ существует единственный морфизм из X в X, обозначаемый через id_X, такой что
$$\mathrm{id}_Y \circ f = f = \mathrm{id}_X \circ f$$
для всякого морфизма $f\colon X \to Y$;

в) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ для всякой тройки морфизмов с $\operatorname{rng} f = \operatorname{dom} g$ и $\operatorname{rng}\ g = \operatorname{dom} h$.

2.5. Примерами категорий являются топологические пространства и непрерывные отображения, группы и гомоморфизмы, линейные пространства и линейные отображения и т. д. Во всех этих категориях id_X — это тождественное отображение объекта X, а композиции морфизмов суть обычные композиции отображений.

2.6. Пусть $\{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — некоторое множество объектов категории C. Объект $X \in C$ и множество морфизмов $p_\alpha\colon X \to X_\alpha$, $\alpha \in A$, категории C называется (*категорным*) *произведением* множества $\{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$, если для всякого набора $\{Y, q_\alpha\colon Y \to X_\alpha\} \subseteq C$ в категории C существует такой единственный морфизм $h\colon Y \to X$, что $p_\alpha \circ h = q_\alpha$ для всех $\alpha \in A$.

2.7. Из определения вытекает *единственность* категорного произведения с точностью до *изоморфизма*, т. е. морфизма $f\colon X \to Y$, для которого существует такой морфизм $g\colon Y \to X$, что $g \circ f = \mathrm{id}_X$ и $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

В самом деле, предположив существование двух категорных произведений $\{X, p_\alpha\}$ и $\{Y, q_\alpha\}$, получаем существование таких морфизмов $g\colon X \to Y$ и $h\colon Y \to X$, что $p_\alpha \circ h = q_\alpha$ и $q_\alpha \circ g = p_\alpha$. Рассмотрим композицию $k = h \circ g\colon X \to X$. Это такой морфизм, что $p_\alpha \circ k = p_\alpha \circ (h \circ g) = (p_\alpha \circ h) \circ g = q_\alpha \circ g = p_\alpha$. Но по определению произведения существует единственный морфизм k со свойством $p_\alpha \circ k = p_\alpha$. В то же время ясно, что таким морфизмом является id_X. Значит, $h \circ g = \mathrm{id}_X$. Аналогично, $g \circ h = \mathrm{id}_Y$, чем единственность произведения доказана.

В то же время произведение существует не во всякой категории. Одним из простейших примеров является категория, состоящая из двух пространств — «связного» и «слипшегося» двоеточий — и всех их непрерывных отображений.

2.8. Предложение. *В категории Top всех топологических пространств и всех их непрерывных отображений категорное произведение существует и совпадает с тихоновским.*

2.9. Предложение. *Произведение подпространств $Y_\alpha \subseteq X_\alpha$, $\alpha \in A$, совпадает с подпространством $\bigcap\limits_{\alpha\in A} (p_\alpha^{-1} Y_\alpha)$ произведения $\prod\{X_\alpha \colon \alpha \in A\}$.*

2.10. Пусть $f_\alpha \colon X_\alpha \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, — отображения. Тогда отображение $f \colon \prod X_\alpha \to \prod Y_\alpha$, определяемое равенствами $f(x)(\alpha) = f_\alpha x(\alpha)$, называется *произведением отображений* f_α и обозначается через $\prod\limits_{\alpha\in A} f_\alpha$.

Произведение f непрерывных отображений f_α непрерывно в силу 2.3, поскольку $q_\alpha \circ f = f_\alpha \circ p_\alpha$, где $q_\beta \colon \prod Y_\alpha \to Y_\beta$ — проектирование произведения на сомножитель.

2.11. Пусть $f_\alpha \colon X \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, — отображения. Тогда отображение $f \colon X \to \prod Y_\alpha$, определяемое равенствами $f(x)(\alpha) = f_\alpha x$, называется *диагональным произведением отображений* f_α и обозначается через $\mathop{\Delta}\limits_{\alpha\in A} f_\alpha$.

Диагональное произведение f непрерывных отображений f_α непрерывно согласно 1.3, поскольку $q_\alpha \circ f = f_\alpha$.

2.12. Первая теорема Тихонова. *Произведение любого числа бикомпактных пространств бикомпактно.*

2.13. Предложение. *Произведение хаусдорфовых* (*регулярных*) *пространств хаусдорфово* (*соответственно регулярно*).

Из 2.12 и 2.13 вытекает следующее утверждение.

2.14. Следствие. *Произведение бикомпактов есть бикомпакт.*

2.15. Предложение. *Произведение $\tau \geqslant \omega_0$ штук пространств X_α веса $wX_\alpha \leqslant \tau$ имеет вес $\leqslant \tau$.*

2.16. Бикомпакт I^τ, являющийся произведением $\tau \geqslant \omega_0$ экземпляров отрезка $I = [0;1]$ числовой прямой, называется *тихоновским кубом веса* τ. Легко видеть, что на самом деле вес тихоновского куба I^τ равен τ.

2.17. Топологическое пространство X называется T_ρ-*пространством*, если для всякой точки $x \in X$ и всякого не содержащего её непустого замкнутого множества $F \subseteq X$ существует такая непрерывная функция $\varphi \colon X \to I$, что $\varphi x = 0$ и $\varphi F = 1$.

2.18. Топологическое пространство, одновременно удовлетворяющее аксиомам T_1 и T_ρ, называется *вполне регулярным*, или *тихоновским*. Всякое вполне регулярное пространство регулярно, поскольку T_ρ влечёт T_3.

Из леммы Урысона вытекает следующее утверждение.

2.19. Предложение. *Всякое нормальное пространство вполне регулярно.*

2.20. Вторая теорема Тихонова. *Всякое тихоновское пространство X веса τ гомеоморфно подмножеству тихоновского куба I^τ.*

Следующее утверждение очевидно.

2.21. Предложение. *Всякое подпространство тихоновского пространства является тихоновским.*

Из второй теоремы Тихонова и предложений 1.30, 2.19 и 2.21 вытекает следующая теорема.

2.22. Теорема. *Следующие свойства топологического пространства X равносильны для бесконечного кардинального числа τ:*

1) *X — тихоновское пространство веса $\leqslant \tau$,*
2) *X гомеоморфно подпространству тихоновского куба I^τ,*
3) *X гомеоморфно всюду плотному подпространству бикомпакта веса $\leqslant \tau$,*
4) *X гомеоморфно подпространству нормального пространства веса $\leqslant \tau$.*

Из 2.9, 2.12, 2.20 и 2.21 вытекает следующее утверждение.

2.23. Предложение. *Произведение тихоновских пространств является тихоновским пространством.*

2.24. Пространство Y, содержащее пространство X в качестве всюду плотного подпространства, называется *расширением* пространства X. Таким образом, теорема 2.22 утверждает, в частности, что всякое тихоновское пространство имеет *бикомпактное расширение*. Произвольное бикомпактное расширение пространства X обозначается обычно через bX. Отметим, что у тихоновского пространства X существует, как правило, много бикомпактных расширений. Далее под бикомпактным расширением тихоновского пространства понимаем *хаусдорфово бикомпактное расширение*.

Следующее утверждение достаточно очевидно.

2.25. Предложение. *Пусть $f_i\colon X \to Y$, $i = 1, 2$, — непрерывные отображения в хаусдорфово пространство Y. Тогда множество $\{x \in X\colon f_1(x) = f_2(x)\}$ замкнуто в пространстве X.*

Из предложения 2.25 вытекает следующее утверждение.

2.26. Предложение. *Два непрерывных отображения в хаусдорфово пространство, совпадающие на всюду плотном множестве, совпадают всюду.*

2.27. Непрерывное отображение $f\colon b_1X \to b_2X$ между бикомпактными расширениями одного и того же (тихоновского) пространства X назовём *натуральным*, если $f(x) = x$ для всякой точки $x \in X$. Всякое натуральное отображение сюръективно, поскольку бикомпакт $f(b_1X)$ замкнут в объемлющем его хаусдорфовом пространстве. Согласно предложению 2.26 может существовать не более одного натурального отображения $f\colon b_1X \to b_2X$. Скажем, что расширение b_1X следует за расширением b_2X, и будем писать $b_2X \leqslant b_1X$, если существует натуральное отображение $f\colon b_1X \to b_2X$.

Предположим, что $b_2X \leqslant b_1X$ и $b_1X \leqslant b_2X$, т. е. существуют натуральные отображения $f_1\colon b_1X \to b_2X$ и $f_2\colon b_2X \to b_1X$. Тогда $f_2 \circ f_1 = \mathrm{id}_{b_1X}$ и

$f_1 \circ f_2 = \mathrm{id}_{b_2X}$ согласно предложению 2.26. Поэтому отображения f_1 и f_2 — взаимно обратные гомеоморфизмы. Следовательно, расширения b_1X и b_2X топологически неразличимы: одно расширение связано с другим единственным отображением, которое является гомеоморфизмом. Такие расширения назовём эквивалентными и в дальнейшем не будем их различать, понимая под бикомпактным расширением весь класс эквивалентных бикомпактных расширений. После этой оговорки введённое отношение $\leqslant$ превращается в отношение частичного порядка в семействе $\mathcal{B}_X$ всех бикомпактных расширений данного тихоновского пространства X.

2.28. Стоун-чеховское расширение βX. Семейство $\mathcal{B}_X$ оказывается множеством, в котором имеется наибольший элемент βX. А. Н. Тихонов в своей работе 1929 г., где были доказаны его знаменитые теоремы, вложил вполне регулярное пространство X веса $\leqslant \tau$ в тихоновский куб I^τ посредством диагонального произведения специально выбранного им семейства мощности $\leqslant \tau$ непрерывных функций $\varphi\colon X \to [0,1]$.

Э. Чех в 1937 г. посредством диагонального произведения всех непрерывных функций $\varphi\colon X \to [0,1] = I_\varphi$ вложил тихоновское пространство X в тихоновский куб $\prod\limits_\varphi I_\varphi$. Замыкание пространства X в этом кубе и есть расширение βX. В своей знаменитой работе того же года М. Стоун построил наибольшее бикомпактное расширение с применением булевых алгебр и колец непрерывных функций. Наибольшее бикомпактное расширение βX тихоновского пространства X называется его *стоун-чеховским расширением* (*компактификацией*).

Сказанное выше можно резюмировать следующим образом.

2.29. Теорема. *Для произвольного бикомпактного расширения bX тихоновского пространства X равносильны следующие условия:*

1) *bX натурально гомеоморфно расширению βX,*
2) *всякая непрерывная функция $\varphi\colon X \to I$ может быть продолжена на bX,*
3) *всякое непрерывное отображение $f\colon X \to B$ в бикомпакт может быть продолжено на bX,*
4) *расширение bX обладает натуральным отображением на любое бикомпактное расширение пространства X.*

2.30. Александровская компактификация αX. Исследуем вопрос о существовании наименьшего элемента в множестве $\mathcal{B}_X$. Если множество $bX \setminus X$, называемое *наростом* пространства X в расширении bX, содержит по крайней мере две точки x_1 и x_2, то расширение bX не является наименьшим, поскольку эти точки можно склеить, получив меньшее расширение. Таким образом, для небикомпактного тихоновского пространства X наименьшее бикомпактное расширение bX может иметь нарост, состоящий в точности из одной точки. В этом случае пространство X открыто в бикомпакте bX и, следовательно, *локально бикомпактно*, т. е. всякая точка $x \in X$ имеет окрестность Ox с бикомпактным замыканием.

Верно и обратное: всякое небикомпактное локально бикомпактное хаусдорфово пространство X можно превратить в бикомпакт αX прибавлением одной «бесконечно удалённой» точки ξ, объявляя X открытым множеством в пространстве αX и считая окрестностями точки ξ множества вида $\{\xi\} \cup (X \setminus B)$, где B — бикомпактное подмножество пространства X. Пространство αX и называется *александровской компактификацией* локально бикомпактного пространства X. Ясно, что αX является наименьшим элементом в множестве $\mathcal{B}_X$ и, следовательно, вес расширения αX совпадает с весом пространства X.

2.31. Определение. Замкнутое отображение $f\colon X \to Y$ называется *совершенным*, если оно *бикомпактно*, т. е. прообраз $f^{-1}y$ всякой точки $y \in Y$ бикомпактен.

Следующие два утверждения достаточно очевидны.

2.32. Предложение. *Пусть $X \times B$ — произведение пространства X на бикомпактное пространство B. Тогда проектирование $p_X\colon X \times B \to X$ является совершенным отображением.*

2.33. Предложение. *Пусть $f\colon X \to Y$ — совершенное отображение и $Z \subseteq X$ — замкнутое множество. Тогда отображение $f|Z$ также совершенно.*

Из предложений 2.32 и 2.33 вытекает следующее утверждение.

2.34. Предложение. *Пусть $Y \times B$ — произведение пространства Y на бикомпактное пространство B и $X \subseteq Y \times B$ — замкнутое множество. Тогда отображение $p_Y|X\colon X \to Y$ совершенно.*

Для отображений тихоновских пространств имеет место и обратное утверждение.

2.35. Предложение. *Пусть $f\colon X \to Y$ — совершенное отображение тихоновского пространства X. Тогда существуют такой бикомпакт B и такое замкнутое вложение $i\colon X \to Y \times B$, что $f = p_Y \circ i$.*

В качестве B можно взять, например, любое бикомпактное расширение пространства X. Тогда отображение i можно определить, например, следующим образом: $i(x) = (y, x)$. Хаусдорфовость пространства B нужна для замкнутости множества $i(X) \subseteq Y \times B$.

§ 3. Обратные спектры топологических пространств и их связь с произведениями

3.1. Категория $C = (\mathcal{O}, \mathcal{M})$ (см. 2.4) называется *малой*, если семейство $\mathcal{O}$ её объектов и всякое семейство $[X, Y]$ являются множествами.

3.2. Если $C(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ — категория, то на семействе $\mathcal{O}$ её объектов имеется естественный *предпорядок*, т. е. бинарное отношение, которое рефлексивно и транзитивно, а именно
$$X \leqslant Y \iff [Y, X] \neq \varnothing.$$

3.3. Малая категория $C(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ называется *обратным спектром*, если:

а) предпорядок на множестве $\mathcal{O}$ является частичным порядком,

б) частично упорядоченное множество $\mathcal{O}$ *направлено вверх*, т. е. для любых двух объектов $X, Y \in \mathcal{O}$ существует такой объект $Z \in \mathcal{O}$, что $X \leqslant Z$ и $Y \leqslant Z$,

в) множество $[X, Y]$ содержит не более одного элемента.

3.4. Если категория $C = (\mathcal{O}, \mathcal{M})$ является обратным спектром, то её объекты называются *элементами*, а морфизмы — *проекциями* спектра C.

Если $X, Y \in \mathcal{O}$ и $X \leqslant Y$, то в силу 3.3в) существует единственная проекция из Y в X, которую мы будем обозначать через π_X^Y или иногда через ρ_X^Y. Поскольку обратный спектр есть категория, то при $X \leqslant Y \leqslant Z$ имеем $\pi_X^Z = \pi_X^Y \circ \pi_Y^Z$.

Часто более удобным оказывается обозначать элементы спектра одной буквой, например X, индексированной элементами α некоторого частичного упорядоченного множества. При этом проекции из X_α в $X_{\alpha'}$ обозначаются через $\pi_{\alpha'}^\alpha$. Наконец, сам спектр обозначается через

$$S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \mathcal{A}\}.$$

Это обозначение предполагает, что индексы $\alpha \leqslant \beta$ принимают всевозможные значения из множества $\mathcal{A}$.

Ниже обратные спектры мы будем называть просто *спектрами*.

3.5. Пусть спектр $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \mathcal{A}\}$ является *подкатегорией* некоторой категории $\mathcal{B}$, т. е. все элементы X_α спектра C являются объектами категории $\mathcal{B}$, а проекции π_β^α — её морфизмами. Тогда объект $X \in \mathcal{B}$ и семейство морфизмов $\pi_\alpha \colon X \to X_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$, категории $\mathcal{B}$ называется *пределом спектра* S в категории $\mathcal{B}$, если

$$\pi_\beta^\alpha \circ \pi_\alpha = \pi_\beta \quad \text{для всех} \quad \alpha, \beta \in \mathcal{A}, \quad \beta \leqslant \alpha,$$

и для любого другого объекта $Y \in \mathcal{B}$ и семейства морфизмов $f_\alpha \colon Y \to X_\alpha$ из $\mathcal{B}$ со свойством

$$\pi_\beta^\alpha \circ f_\alpha = f_\beta$$

в категории $\mathcal{B}$ существует такой единственный морфизм $f \colon Y \to X$, что $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}$.

Обозначается этот предел через $\lim\limits_{\mathcal{B}} S$ или просто через $\lim S$. Объект X при этом также называется *пределом спектра* S, а морфизмы π_α — *сквозными проекциями* спектра S.

3.6. *Единственность предела спектра* доказывается так же, как и единственность произведения (см. 2.7). Предел спектра, так же как и произведение, *существует не всегда*.

3.7. Теперь мы будем рассматривать *топологические спектры*, т. е. спектры S, элементы которых суть топологические пространства, а проекции — непрерывные отображения. Под пределом топологического спектра мы всегда будем понимать предел в категории *Top* всех топологических пространств и всех непрерывных отображений.

3.8. Теорема. *Предел топологического спектра S существует всегда.*

Не доказывая этой теоремы, мы дадим только определение предела. Пусть $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \mathcal{A}\}$. Мы построим пространство X и проекции $\pi_\alpha\colon X \to X_\alpha$, образующие предел. Точку $x \in \prod\{X_\alpha\colon \alpha\nu\mathcal{A}\}$ назовём *нитью спектра* S, если при $\beta \leqslant \alpha$ имеем $p_\beta x = \pi^\alpha_\beta p_\alpha x$, где p_α, как всегда, проектирование произведения на сомножитель. Подпространство произведения $\prod\limits_\alpha X_\alpha$, состоящее из всех нитей спектра S, обозначим через X. Далее положим $\pi_\alpha = p_\alpha|X$.

3.9. Предложение. *Базу в пределе* $\lim S$ *спектра* $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \mathcal{A}\}$ *образуют множества вида* $\pi^{-1}_\alpha U$, *где* U *открыто в* $X_\alpha \in S$.

3.10. Предложение. *Предел спектра из T_i-пространств, $i = 1, 2, 3, \rho$, есть T_i-пространство. Предел спектра из (вполне) регулярных пространств есть (вполне) регулярное пространство.*

Утверждение вытекает из 3.8, поскольку вышеперечисленные свойства сохраняются как при произведениях, так и при переходе к подпространствам.

3.11. Предложение. *Предел спектра из хаусдорфовых пространств X_α замкнут в произведении $\prod\limits_\alpha X_\alpha$.*

Из 3.10, 3.11 и первой теоремы Тихонова вытекает следующее утверждение.

3.12. Предложение. *Предел спектра из бикомпактов является бикомпактом.*

3.13. Теорема Куроша. *Предел спектра S из непустых бикомпактов X_α не пуст.*

3.14. Предложение. *Если множество* Φ *замкнуто в пределе* $\lim S$ *спектра* $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \mathcal{A}\}$, *то* $\Phi = \bigcap\limits_\alpha \pi^{-1}_\alpha \pi_\alpha \Phi$.

3.15. Пусть $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'}, \mathcal{A}\}$ и $S' = \{Y_\beta, \rho^\beta_{\beta'}, \mathcal{A}'\}$ — два спектра. Пусть $m\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — сохраняющее порядок ($\alpha' \leqslant \alpha \implies m(\alpha') \leqslant m(\alpha)$) отображение множества $\mathcal{A}$ на конфинальное в $\mathcal{A}'$ подмножество. Тогда семейство непрерывных отображений $F = \{f_\alpha\colon X_\alpha \to Y_{m(\alpha)}\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ называется *морфизмом спектра S в спектр S'*, если

$$f_{\alpha'} \circ \pi^\alpha_{\alpha'} = \rho^{m(\alpha)}_{m(\alpha')} \circ f_\alpha$$

для всех $\alpha, \alpha' \in \mathcal{A}$, $\alpha' \leqslant \alpha$.

Морфизм $F\colon S \to S'$ называется *изоморфизмом* между спектрами S и S', которые в этом случае называются *изоморфными*, если $m\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ есть изоморфизм частично упорядоченных множеств и всякое отображение $f_\alpha \in F$ является гомеоморфизмом.

Как правило, мы будем рассматривать лишь такие морфизмы $F\colon S \to S'$, при которых $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ и m является тождественным вложением множества $\mathcal{A}$ в множество $\mathcal{A}'$.

Спектры и так определённые морфизмы, очевидно, образуют категорию.

3.16. Функтор. Пусть $C = (\mathcal{O}, \mathcal{M})$ и $C' = (\mathcal{O}', \mathcal{M}')$ — две категории. Отображение $\mathcal{F}\colon C \to C'$, переводящее объекты в объекты, а морфизмы в морфизмы, называется *ковариантным* (*контравариантным*) *функтором* из категории C в категорию C', если выполнены следующие условия.

1°. Для всякого морфизма $f\colon X \to Y$ из категории C морфизм $\mathcal{F}(f)$ действует из $\mathcal{F}(X)$ в $\mathcal{F}(Y)$ (из $\mathcal{F}(Y)$ в $\mathcal{F}(X)$ соответственно).

2°. $\mathcal{F}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(X)}$ для всякого $X \in \mathcal{A}$.

3°. $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$ ($\mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$ соответственно).

Мы увидим сейчас, что предел спектра можно дополнить до ковариантного функтора из категории спектров в категорию топологических пространств.

3.17. Предложение. *Для любого морфизма $F\colon S \to S'$ существует единственное такое непрерывное отображение $f\colon \lim S \to \lim S'$, называемое пределом морфизма F и обозначаемое через $\lim F$, что $\rho_\alpha f = f_\alpha \pi_\alpha$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}$, где π_α и ρ_α — сквозные проекции спектров S и S' соответственно.*

Легко видеть, что предел $\lim$ является ковариантным функтором из категории обратных спектров в категорию топологических пространств.

3.18. Предложение. *Если морфизм $f\colon S \to S'$ состоит из гомеоморфизмов $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y_\alpha$, то его предел $f = \lim F$ также является гомеоморфизмом.*

3.19. Следствие. *Пределы спектра и конфинального подспектра совпадают.*

3.20. Предложение. *Пусть $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'}, \mathcal{A}\}$ — спектр и $f_\alpha\colon Y \to X_\alpha$ — такие непрерывные отображения, что $f_{\alpha'} = \pi^\alpha_{\alpha'} f_\alpha$ для всех $\alpha' \leqslant \alpha$. Тогда существует такое единственное непрерывное отображение $f\colon Y \to \lim S = X$, называемое пределом $\lim f_\alpha$ отображений f_α, что $f_\alpha = \pi_\alpha f$, причём*

1) *если $f_\alpha Y$ плотно в X_α, то fY плотно в X,*
2) *если Y и все X_α — бикомпакты и $f_\alpha Y = X_\alpha$, то $fY = X$.*

3.21. Предложение. *Пусть $F\colon S \to S'$ — такой морфизм спектра $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'}, \mathcal{A}\}$ в спектр $S' = \{Y_\alpha, \rho^\alpha_{\alpha'}, \mathcal{A}\}$, что всякий его элемент $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y_\alpha$ является вложением. Тогда $\pi_\alpha = \rho_\alpha | X_\alpha$ и $\lim S = \bigcap\limits_\alpha \rho_\alpha^{-1} X_\alpha$.*

Из предложений 3.14 и 3.21 вытекает следующее утверждение.

3.22. Предложение. *Пусть $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'}, \mathcal{A}\}$ — спектр и Φ — замкнутое подмножество его предела $\lim S$. Тогда $\Phi = \lim S_\Phi$, где $S_\Phi = \{\pi_\alpha \Phi, \pi^\alpha_{\alpha'} | \pi_\alpha \Phi, \mathcal{A}\}$.*

В частности, от спектра $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'}\}$ можно перейти к «меньшему» спектру $S_X = \{\pi_\alpha X, \pi^\alpha_{\alpha'} | \pi_\alpha X\}$, где $X = \lim S$, с тем же пределом X, но с сюръективными сквозными проекциями.

3.23. Предложение. *Если $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'}\}$ — спектр из бикомпактов с проекциями «на», то его сквозные проекции $\pi_\alpha\colon \lim S \to X_\alpha$ также являются эпиморфизмами.*

3.24. Предложение. *Если F_1, F_2 — непересекающиеся замкнутые подмножества предела спектра S и одно из них, например F_1, бикомпактно, то $\pi_\alpha F_1 \cap \pi_\alpha F_2 = \varnothing$ для некоторого α.*

3.25. Спектр $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'}, \mathcal{A}\}$ называется *вполне упорядоченным*, если множество $\mathcal{A}$ его индексов вполне упорядоченное. При этом, как правило, будет предполагаться, что множество $\mathcal{A}$ есть некоторый начальный отрезок $[0;\beta)$ порядковых чисел.

3.26. Если $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'} \colon \alpha < \beta\}$ — вполне упорядоченный спектр и $\gamma < \beta$, то через $S|\gamma$ будет обозначаться ограничение спектра S на γ, т. е. $S|\gamma = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'} \colon \alpha < \gamma\}$.

3.27. Вполне упорядоченный спектр $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'} \colon \alpha < \beta\}$ будет называться *непрерывным*, если для всякого предельного числа $\gamma < \beta$ существующее согласно 3.20 предельное отображение

$$\lim_{\alpha<\gamma} \pi^\gamma_\alpha \colon X_\gamma \to \lim(S|\gamma)$$

является гомеоморфизмом.

3.28. Предложение. *Всякий вполне упорядоченный спектр изоморфен конфинальной части непрерывного спектра.*

3.29. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольное множество и $\mathcal{D} = \{D\}$ — некоторое семейство его подмножеств. Семейство $\mathcal{D}$ называется *направлением в множестве* $\mathcal{A}$, если: 1) всякий элемент $\alpha \in \mathcal{A}$ содержится в некотором множестве $D \in \mathcal{D}$, 2) семейство $\mathcal{D}$ направлено отношением включения, т. е. для любых множеств $D, D' \in \mathcal{D}$ существует содержащее их множество $D'' \in \mathcal{D}$.

Если направления рассматривать как покрытия множества $\mathcal{A}$, то среди них существует *мельчайшее* направление, т. е. направление $\mathcal{D}$, вписанное во всякое другое направление $\mathcal{D}'$. Это направление $\mathcal{D}$ состоит из всех конечных подмножеств множества $\mathcal{A}$.

Другое направление получим, если рассмотрим некоторое полное упорядочение множества $\mathcal{A} = \{\alpha \colon \alpha < \beta\}$ и положим $D_\alpha = \{\gamma \colon \gamma < \alpha\}$. Семейство $\mathcal{D} = \{D_\alpha \colon \alpha < \beta\}$ также является направлением, которое будем называть *вполне упорядоченным направлением*.

3.30. Пусть $\{X_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$ — множество топологических пространств и $\mathcal{D}$ — направление в множестве $\mathcal{A}$. Для всякого $D \in \mathcal{D}$ положим $X_D = \prod\limits_{\alpha \in D} X_\alpha$ и для $D, D' \in \mathcal{D}$, $D' \subseteq D$, обозначим через $p^D_{D'} \colon X_D \to X_{D'}$ естественную проекцию произведения на подпроизведение (см. 2.1). Семейство $\{X_D, p^D_{D'} \colon D \in \mathcal{D}\}$ является обратным спектром, который будем называть *спектром над направлением* $\mathcal{D}$ и обозначать через $S_\mathcal{D}$.

3.31. Теорема. *Если $\{X_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$ — множество топологических пространств и $\mathcal{D}$ — направление в множестве $\mathcal{A}$ индексов, то предел спектра $S_\mathcal{D}$ над направлением $\mathcal{D}$ совпадает с произведением $\prod\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$, а сквозные проекции спектра $S_\mathcal{D}$ —*

с проекциями p_D произведения. При этом для вполне упорядоченного направления $\mathcal{D}$ спектр $S_{\mathcal{D}}$ непрерывен.

II. Вполне замкнутые отображения и развёртываемые спектры

§ 1. Вполне замкнутые отображения

1.1. В этой главе все исходные отображения, если не оговорено противное, предполагаются сюръективными. Напомним, что определение совершенного отображения и простейшие связанные с ним факты можно найти в § 2 первой главы: I.2.31—I.2.35.

1.2. Предложение. *Совершенный образ регулярного пространства регулярен.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — совершенное отображение регулярного пространства. В силу замкнутости отображения f пространство Y является T_1-пространством как замкнутый образ T_1-пространства X. Пусть теперь множество F замкнуто в Y и $y \notin F$. В силу регулярности пространства X и бикомпактности отображения f множества $f^{-1}y$ и $f^{-1}F$ можно заключить в непересекающиеся окрестности U и V. Тогда множества $f^{\#}U$ и $f^{\#}V$ будут открытыми, в силу замкнутости отображения f, непересекающимися окрестностями точки y и множества F соответственно. Предложение доказано. $\square$

1.3. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *вполне замкнутым в точке $y \in Y$*, если для всякого конечного покрытия её прообраза $f^{-1}y$ открытыми в X множествами $U_1, \ldots, U_s$ множество $\{y\} \cup \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{s} f^{\#}U_i\Big)$ является окрестностью точки y. Мы будем также говорить, что отображение f *вполне замкнуто в точке $x \in X$*, если f вполне замкнуто в точке fx. Если $f\colon X \to Y$ вполне замкнуто в каждой точке $y \in Y$, то отображение f называется *вполне замкнутым*. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *почти вполне замкнутым* (в точке $y \in Y$), если условие полной замкнутости выполнено для $s \leqslant 2$.

1.4. Ограничиваясь в определении 1.3 лишь одноэлементными покрытиями, из I.1.39 получаем, что всякое (почти) вполне замкнутое отображение замкнуто.

Заметим, кроме того, что если отображение f вполне замкнуто, то множество $\{y\} \cup \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{s} f^{\#}U_i\Big)$ из определения 1.3 автоматически открыто, являясь суммой открытой окрестности точки y и открытых множеств $f^{\#}U_i$.

1.5. Для непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ и произвольного множества $M \subset Y$ положим

$$M^f = \{f^{-1}y\colon y \in Y \setminus M\} \cup \{\{x\}\colon x \in f^{-1}M\}.$$

Семейство M^f является разбиением пространства X (см. I.1.7). Фактор-пространство по отношению к этому разбиению обозначим через Y_f^M, а соответствующее фактор-отображение пространства X на Y_f^M — через f^M. Поскольку разбиение M^f измельчает разбиение, соответствующее отображению f, существует единственное такое отображение $\pi_f^M\colon Y_f^M \to Y$, что $f = \pi_f^M \circ f^M$. Из непрерывности отображения f и факторности f^M вытекает непрерывность отображения π_f^M. Если множество M состоит из одной точки y, то будем обозначать пространство Y_f^M и отображения f^M и π_f^M через Y_f^y, f^y и π_f^y соответственно. Иногда мы будем обозначать пространство Y_f^y и отображение π_f^y просто через Y^y и π^y соответственно.

Простейшие примеры (проектирование квадрата на отрезок) показывают, что пространства Y^y (и тем более Y^M) далеко не всегда хаусдорфовы. Следующее утверждение обнаруживает тесную связь между отделимостью этих пространств и полной замкнутостью отображений.

1.6. Эквивалентные определения полной замкнутости. *Для замкнутого отображения $f\colon X \to Y$ регулярного пространства X на регулярное пространство Y эквивалентны следующие условия:*

1) *f вполне замкнуто,*
2) *f почти вполне замкнуто,*
3) *для всякого открытого покрытия $\{U_1, U_2\}$ пространства X множество $\{y\} \cup f^{\#}U_1 \cup f^{\#}U_2$ является окрестностью произвольной точки $y \in Y$,*
4) *для любых непересекающихся замкнутых множеств $F_1, F_2 \subset X$ множество $fF_1 \cap fF_2$ дискретно,*
5) *для всякого открытого множества $U \subset X$ и любой точки $y \in Y$ множество $U^y \equiv (f^{-1}y \cap U) \cup f^{-1}f^{\#}U$ открыто,*
6) *для всякого множества $M \subset Y$ пространство Y^M регулярно,*
7) *для любой точки $y \in Y$ пространство Y^y регулярно.*

Доказательство. Импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидны.

Проверим импликацию 3) $\Longrightarrow$ 4). Множества $X \setminus F_1$ и $X \setminus F_2$ образуют открытое покрытие пространства X. Следовательно, множество $V = \{y\} \cup f^{\#}(X \setminus F_1) \cup f^{\#}(X \setminus F_2)$ является окрестностью произвольной точки $y \in Y$. Но множество $V = \{y\} \cup (Y \setminus fF_1) \cup (Y \setminus fF_2) = \{y\} \cup (Y \setminus fF_1 \cap fF_2)$ пересекается с множеством $fF_1 \cap fF_2$ самое большое по одной точке y. Значит, множество $fF_1 \cap fF_2$ дискретно.

Теперь проверим импликацию 4) $\Longrightarrow$ 5). Так как отображение f непрерывно и замкнуто, множество $f^{-1}f^{\#}U$ открыто. Поэтому надо проверить, что у всякой точки $x \in f^{-1}y \cap U$ имеется окрестность, лежащая в U^y. В силу регулярности пространства X существует такая окрестность Ox, что $[Ox] \subset U$. Множества $[Ox]$ и $X \setminus U$ замкнуты и не пересекаются. Согласно условию 4) множество $F = f[Ox] \cap f(X \setminus U)$ дискретно, и значит, множество $V = \{y\} \cup (Y \setminus F)$ открыто. Покажем, что множество $O_1x \equiv Ox \cap f^{-1}V$ является искомой окрестностью точки x, т. е. $O_1x \subset U^y$. Имеем

$$Y \setminus F = Y \setminus f[Ox] \cap f(X \setminus U) = (Y \setminus f[Ox] \cup (Y \setminus f(X \setminus U)) = f^\#(X \setminus [Ox]) \cup f^\# U.$$

Поэтому окрестность Ox является суммой трёх слагаемых: $Ox \cap f^{-1}y$, $Ox \cap \cap f^{-1}f^\#(X \setminus [Ox])$ и $Ox \cap f^{-1}f^\# U$. Первое из этих слагаемых содержится в $U \cap f^{-1}y$, третье — в $f^{-1}f^\# U$, а второе пусто, т. е. $O_1x \subset U^y$.

Проверим импликацию 5) $\Longrightarrow$ 6). Сначала мы покажем, что отображение f^M замкнуто. Пусть $z \in Y^M$ и U — окрестность прообраза $(f^M)^{-1}z$. Положим $y = \pi^M z$. Если $y \notin M$, то $(f^M)^{-1}z = f^{-1}y$ и в силу I.1.39 множество $f^\# U$ является окрестностью точки y. Тогда множество $(\pi^M)^{-1}f^\# U$ является окрестностью точки $(\pi^M)^{-1}y = z$. Но $f^\# U = (\pi^M \circ f^M)^\# U = (\pi^M)^\#(f^M)^\# U$. Поэтому $(\pi^M)^{-1}f^\# U = (\pi^M)^{-1}(\pi^M)^\#(f^M)^\# U \subset (f^M)^\# U$. Значит, множество $(f^M)^\# U$ тем более является окрестностью точки z. Пусть теперь $y \in M$. Тогда множество $(f^M)^{-1}z$ состоит из одной точки $x \in f^{-1}y$. Согласно условию 3) множество U^y является окрестностью точки x. Но по определению множества U^y оно является полным прообразом относительно отображения f^M, т. е. $U^y = (f^M)^{-1}(f^M)^\# U^y$. Тогда в силу факторности отображения f^M множество $(f^M)^\# U^y$ открыто и, значит, является окрестностью точки $z = f^M x$. Тем более окрестностью точки будет множество $(f^M)^\# U$. Итак, в силу I.1.39 отображение f^M замкнуто.

Пусть теперь $F \subseteq Y^M$ — замкнутое множество и $z \in Y^M \setminus F$. Предположим сначала, что $\pi^M z \in Y \setminus M$. В этом случае z является точкой взаимной однозначности отображения π^M. Значит, $\pi^M z \in Y \setminus \pi^M F$. Но отображение π^M замкнуто как левый делитель замкнутого отображения $f = \pi^M \circ f^M$. Поэтому у точки $\pi^M z$ и не содержащего её замкнутого множества $\pi^M F$ в регулярном пространстве Y существуют непересекающиеся окрестности U и V соответственно. Тогда множества $(\pi^M)^{-1}U$ и $(\pi^M)^{-1}V$ будут непересекающимися окрестностями точки z и множества F. Если же $\pi^M z \in M$, то z является точкой взаимной однозначности отображения f^M. В регулярном пространстве X у точки $(f^M)^{-1}z$ и замкнутого множества $(f^M)^{-1}F$ существуют непересекающиеся окрестности U и V соответственно. В силу замкнутости отображения f^M множества $(f^M)^\# U$ и $(f^M)^\# V$ будут открыты. Кроме того, из-за сюръективности отображения f^M они не пересекаются и, очевидно, содержат точку z и множество F соответственно.

Импликация 6) $\Longrightarrow$ 7) очевидна.

Теперь проверим импликацию 7) $\Longrightarrow$ 1). Отображение $f\colon X \to Y$ вполне замкнуто во всякой точке y своей взаимной однозначности. Пусть теперь $|f^{-1}y| \geqslant \geqslant 2$ и $\{U_1, \ldots, U_s\}$ — покрытие множества $f^{-1}y$ открытыми в X множествами. Если множество $\{y\} \cup \Bigl(\bigcup\limits_{i=1}^{s} f^\# U_i\Bigr)$ не является окрестностью точки y, то она является точкой прикосновения дополнительного множества $A = Y \setminus \{y\} \cup \cup \Bigl(\bigcup\limits_{i=1}^{s} f^\# U_i\Bigr)$. Тогда множество $B = (\pi^y)^{-1}y \cap [(\pi^y)^{-1}A]$ не пусто в силу замкнутости отображения π^y (отображение π^y замкнуто как левый делитель замкнутого отображения $f = \pi^y \circ f^y$). Пусть $z \in B$ — произвольная точка и $x = (f^y)^{-1}z$. Существует такое $i_0 \leqslant s$, что $x \in U_{i_0}$. Положим $F = f^{-1}y \setminus U_{i_0}$ и обозначим через Φ гомеоморфное F множество $f^y F \subset (\pi^y)^{-1} y$. Множество Φ замкнуто в слое $(\pi^y)^{-1} y$ и, следовательно, замкнуто в Y^y. Существуют непересекающиеся окрестности G и H точки z и замкнутого в регулярном пространстве Y^y множества Φ. Множество $U = U_{i_0} \cup (f^y)^{-1} H$ является окрестностью множества $f^{-1} y$. Тогда в силу замкнутости отображения f множество $f^{\#} U$ будет окрестностью точки y, а множество $V = (\pi^y)^{-1} f^{\#} U = (f^y)^{\#} U$ будет окрестностью множества $(\pi^y)^{-1} y$. Положим $Oz = G \cap V$. Поскольку $G \cap H = \varnothing$, то $(f^y)^{-1} Oz \cap (f^y)^{-1} H = \varnothing$ и, значит,

$$(f^y)^{-1} Oz \subset (f^y)^{-1} V \setminus (f^y)^{-1} H = f^{-1} f^{\#} U \setminus (f^y)^{-1} H \subset U_{i_0}.$$

Тогда

$$Oz \subset (f^y)^{\#} U_{i_0} \subset (\pi^y)^{-1} y \cup (\pi^y)^{-1} f^{\#} U_{i_0}.$$

Это противоречит тому, что всякая окрестность точки z пересекается с множеством

$$(\pi^y)^{-1} A = Y^y \setminus \left((\pi^y)^{-1} y \cup \left(\bigcup_{i=1}^{s} (\pi^y)^{-1} f^{\#} U_i \right) \right).$$

Доказательство эквивалентности определений полностью завершено. □

1.7. Предложение. *Пусть $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — отображения, композиция gf которых вполне замкнута. Тогда отображение g также вполне замкнуто.*

Доказательство. Для открытого в пространстве Y покрытия $\{U_1, \ldots, U_s\}$ прообраза $g^{-1} z$ точки z семейство $\{f^{-1} U_1, \ldots, f^{-1} U_s\}$ будет открытым в пространстве X покрытием прообраза $(gf)^{-1} z$ точки z относительно отображения gf. Далее воспользуемся полной замкнутостью отображения gf. □

1.8. Предложение. *Замкнутое отображение $f\colon X \to Y$ регулярного пространства X вполне замкнуто в точке $y \in Y$ тогда и только тогда, когда для всякого открытого множества $U \subset X$ множество U^y открыто.*

Доказательство. Пусть отображение f вполне замкнуто в точке y. Так как отображение f непрерывно и замкнуто, множество $f^{-1} f^{\#} U$ открыто. Поэтому надо проверить, что у всякой точки $x \in f^{-1} y \cap U$ имеется окрестность, лежащая в U^y. В силу регулярности пространства X существует такая окрестность Ox, что $[Ox] \subset U$. Множество $V = \{y\} \cup f^{\#} U \cup f^{\#}(X \setminus [Ox])$ является окрестностью точки y. Покажем, что открытое множество $W = Ox \cap f^{-1} V$ является искомым, т. е. $W \subseteq U^y$. Достаточно проверить, что если $x \in W \setminus f^{-1} y$, то $fx \in f^{\#} U$. Но это вытекает из определения множества V, поскольку $f Ox \cap f^{\#}(X \setminus [Ox]) = \varnothing$.

Теперь пусть U^y открыто для любого открытого множества $U \subseteq X$. Возьмём конечное семейство $U_1, \ldots, U_s$ открытых в X множеств, покрывающих слой $f^{-1} y$. Открытое множество $V = U_1^y \cup \ldots \cup U_s^y$ содержит слой $f^{-1} y$. В силу замкнутости отображения f множество $f^{\#} V$ является окрестностью точки y. Но по определению множеств U_i^y имеем $V = f^{-1}(\{y\} \cup f^{\#} U_1 \cup \ldots \cup f^{\#} U_s)$. Предложение доказано. □

1.9. Предложение. *Пусть $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — такие замкнутые отображения, что X регулярно и gf вполне замкнуто в точке $z \in Z$, и пусть $y \in g^{-1}z$. Тогда если y является точкой взаимной однозначности либо отображения g, либо отображения f, то f вполне замкнуто в точке y.*

Доказательство. Если y является точкой взаимной однозначности отображения f, то оно вполне замкнуто в этой точке в силу своей замкнутости. Пусть теперь $y = g^{-1}z$. Тогда для открытого в пространстве X множества U имеем

$$U^y = (U \cap f^{-1}y) \cup f^{-1}f^{\#}U \supset (U \cap (gf)^{-1}z) \cup f^{-1}g^{-1}g^{\#}f^{\#}U = U^z.$$

Множество U^z является окрестностью всякой точки $x \in U \cap (gf)^{-1}z = U \cap f^{-1}y$ в силу 1.8. Большее множество U^y тем более является окрестностью множества $U \cap f^{-1}y$, и значит, U^y открыто. Следовательно, отображение f вполне замкнуто в точке y согласно 1.8. Предложение доказано. $\square$

1.10. Предложение. *Пусть $f\colon X \to Y$ — вполне замкнутое сюръективное отображение между регулярными пространствами, и пусть $M \subset Y$. Тогда отображение $f^M\colon X \to Y^M$ также вполне замкнуто.*

Доказательство. При проверке импликации 5) $\Longrightarrow$ 6) из 1.6 было показано, что отображение f^M замкнуто. Поэтому утверждение вытекает из 1.6 и 1.9. $\square$

1.11. Замечание. Из 1.6 вытекает, что вполне замкнутые отображения образуют достаточно специфический подкласс класса замкнутых отображений. Особенно ярко эта специфичность проявляется, если мы ограничимся отображениями бикомпактов (в этом случае все отображения замкнуты). Так, ни композиция, ни произведение вполне замкнутых отображений бикомпактов не обязаны быть вполне замкнутыми.

1.12. Примеры.

1. $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ вполне замкнуты, а gf нет.

Пространство X состоит из двух непересекающихся сходящихся последовательностей $\{x_1, x_2, \ldots, x_0\}$ и $\{y_1, y_2, \ldots, y_0\}$, пространство Y получается из X отождествлением предельных точек x_0 и y_0, а пространство Z получается из Y попарным отождествлением остальных элементов x_k и y_k этих последовательностей.

2. $f_1\colon X_1 \to Y_1$ и $f_2\colon X_2 \to Y_2$ вполне замкнуты, а $f_1 \times f_2$ нет.

$X_1 = \{0, 1\}$, $Y_1 = \{0\}$, f_2 — тождественное отображение отрезка числовой прямой.

1.13. Лемма. *Пусть $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — такие вполне замкнутые совершенные отображения регулярных пространств, что gf также вполне замкнуто. Тогда для всякой точки $z \in Z$ отображение $g^z f\colon X \to Z_g^z$ также вполне замкнуто.*

Доказательство. Пусть $x \in Z_g^z$. Если $|(\pi_g^z)^{-1}\pi_g^z x| = 1$, то отображение $g^z f$ вполне замкнуто в точке x согласно 1.9. Если же $|(\pi_g^z)^{-1}\pi_g^z x| \geqslant 2$, то по определению 1.5 множество $(g^z)^{-1}x$ состоит из одной точки, которую обозначим через y.

В силу 1.5 справедливы следующие равенства:

$$f = (\pi_f^y \colon Y_f^y \to Y) \circ (f^y \colon X \to Y_f^y), \tag{1}$$

$$g = (\pi_g^z \colon Z_g^z \to Z) \circ (g^z \colon Y \to Z_g^z). \tag{2}$$

Поскольку отображение $gf = (g\pi_f^y)f^y$ вполне замкнуто, отображение $h \equiv \equiv g \circ \pi_f^y$ вполне замкнуто согласно 1.7. Из 1.5 вытекает равенство

$$h = (\pi_h^z \colon Z_h^z \to Z) \circ (h^z \colon Y_f^y \to Z_h^z). \tag{3}$$

Разбиение пространства Y_f^y, порождаемое отображением h^z, мельче, чем разбиение, порождаемое отображением $g^z \circ \pi_f^y$. Поэтому существует такое единственное отображение $k\colon Z_h^z \to Z_g^z$, что $\pi_h^z = \pi_g^z \circ k$. Таким образом, из определения отображения h и равенств (2) и (3) вытекает равенство

$$g^z \circ \pi_f^y = k \circ h^z. \tag{4}$$

Все пространства в равенствах (1)—(4) регулярны, а отображения совершенны в силу 1.6 и 1.10.

Теперь мы готовы к доказательству полной замкнутости отображения $g^z f$ в точке $x = g^z y$. Пусть $\{U_1, \ldots, U_s\}$ — конечное покрытие множества $(g^z f)^{-1} x = = f^{-1} y$ открытыми в пространстве X множествами. По определению 1.5 отображение $f^y | f^{-1} y$ взаимно-однозначно. Следовательно, открытое в пространстве Y^y семейство $\{(f^y)^{\#} U_i \colon i = 1, \ldots, s\}$ является покрытием множества $(\pi_f^y)^{-1} y = (g^z \pi_f^y)^{-1} x = (kh^z)^{-1} x$. Далее, $(\pi_f^y)^{-1} y \subset h^{-1} z$, следовательно, отображение $h^z | (\pi_f^y)^{-1} y$ взаимно-однозначно. Значит, открытое в пространстве Z_h^z семейство $\{(h^z)^{\#}(f^y)^{\#} U_i \colon i = 1, \ldots, s\}$ покрывает множество $h^z (\pi_f^y)^{-1} x = k^{-1} x$. Отображение k вполне замкнуто, поскольку оно замкнуто и имеет не более одного неодноточечного прообраза (им может быть только $k^{-1} x$). Следовательно, множество $\{x\} \cup \Bigl(\bigcup\limits_{i=1}^{s} k^{\#}(h^z)^{\#}(f^y)^{\#} U_i\Bigr)$ открыто. Но $kh^z f^y = g^y f$ (см. равенства (1)—(4)) и $k^{\#}(h^z)^{\#}(f^y)^{\#} = (kh^z f^y)^{\#}$. Значит, отображение $g^z f$ вполне замкнуто в точке x. Лемма доказана. □

1.14. Предложение. *Пусть $f\colon X \to Y$ — вполне замкнутое отображение и Z — подмножество пространства X, которое либо замкнуто, либо является полным прообразом. Тогда отображение $f|Z \colon Z \to fZ$ вполне замкнуто.*

Доказательство. Пусть Z замкнуто и $y \in fZ$. Тогда $(f|Z)^{-1} y = Z \cap \cap f^{-1} y$. Пусть $\{U_1, \ldots, U_s\}$ — открытое в пространстве Z семейство, покрывающее множество $(f|Z)^{-1} y$. Положим $V_i = U_i \cup (X \setminus Z)$. Тогда семейство $\{V_1, \ldots, V_s\}$ открыто в пространстве X и покрывает множество $f^{-1} y$. Множество $\{y\} \cup \Bigl(\bigcup\limits_{i=1}^{s} f^{\#} V_i\Bigr)$ открыто в пространстве Y. Его след на множестве fZ равен $\{y\} \cup \Bigl(\bigcup\limits_{i=1}^{s} (fZ \cap f^{\#} V_i)\Bigr)$. Но $fZ \cap f^{\#} V_i = (f|Z)^{\#} U_i$. В самом деле, включение $\supset$ очевидно. С другой стороны, если $z \in fZ \cap f^{\#} V_i$, то $f^{-1} z \subset V_i$ и

$(f|Z)^{-1}z = Z \cap f^{-1}z \subset Z \cap V_i = U_i$. Значит, $z \in (f|Z)^{\#}U_i$. Итак, в случае замкнутого множества Z полная замкнутость отображения $f|Z$ доказана. Во втором случае доказательство проще. □

§ 2. Послойное (веерное) произведение отображений

2.1. Определение. Пусть дано семейство непрерывных отображений $f_\alpha \colon X_a \to Y$, $\alpha \in \mathcal{A}$, на пространство Y. В произведении $Y^{\mathcal{A}}$ рассмотрим диагональ

$$\Delta(Y^{\mathcal{A}}) = \{y = \{y_\alpha\} \in Y^{\mathcal{A}} \colon y_\alpha = y_\beta \text{ для любых } \alpha, \beta \in \mathcal{A}\}.$$

Обозначим через X прообраз диагонали $\Delta(Y^{\mathcal{A}})$ относительно отображения $\prod\{f_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$, а через $f_{\mathcal{A}}$ — ограничение этого отображения на множество X. Естественный гомеоморфизм диагонали $\Delta(Y^{\mathcal{A}})$ на пространство Y обозначим через $\delta_Y^{\mathcal{A}}$ (отображение $\delta_Y^{\mathcal{A}}$ ставит в соответствие точке $\{y_\alpha\} \in \Delta(Y^{\mathcal{A}})$ любую из её координат). Композицию $\delta_Y^{\mathcal{A}} \circ f_{\mathcal{A}}$ обозначим через f. Будем называть пространство X *веерным произведением* пространств X_α относительно семейства отображений $\{f_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$ и обозначать его через $\prod\{X_\alpha, f_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$. Если пространство Y одноточечно, то веерное произведение совпадает с обычным. Отображение f будем называть *веерным произведением* семейства отображений $\{f_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$ и обозначать, как правило, через $\prod\{f_\alpha \colon X_\alpha \to Y \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$. Ограничения $\pi_\beta \colon X \to X_\beta$ проекций $p_\beta \colon \prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha \to X_\beta$ будем называть *проекциями веерного произведения* X в сомножители X_β.

2.2. Предложение. *В обозначениях предыдущего пункта $f = f_\alpha\pi_\alpha$ для любого $\alpha \in \mathcal{A}$.*

Доказательство. Пусть $x = \{x_\beta\} \in X$. Тогда $f_\alpha\pi_\alpha(x) = f_\alpha(x_\alpha)$. С другой стороны, $f_{\mathcal{A}}(x) = \{f_\beta(x_\beta)\}$, а отображение $\delta_Y^{\mathcal{A}}$ переводит эту точку в любую из её координат, например в $f_\alpha(x_\alpha)$. Итак, $f(x) = \delta_Y^{\mathcal{A}} f_{\mathcal{A}}(x) = f_\alpha(x_\alpha)$. Предложение доказано. □

Так как топология в пространстве X индуцируется топологией произведения $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$, то с учётом 2.2 получаем следующее утверждение.

2.3. Предложение. *Для любой точки $y \in Y$ её прообраз $f^{-1}y$ совпадает с произведением $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha^{-1}y$. Для любой точки $x_\alpha \in X_\alpha$ её прообраз $\pi_\alpha^{-1}x_\alpha$ совпадает с произведением $\{x_\alpha\} \times \prod\limits_{\beta\neq\alpha} f_\beta^{-1} f_\alpha x_\alpha$.*

Итак, *слои* (полные прообразы точек) отображения f являются произведениями слоёв отображений f_α. Поэтому более естественным названием отображения f является *послойное произведение*, а не веерное. Ниже мы будем называть отображение f послойным произведением отображений f_α, оставив название «веерное произведение» за пространством X.

2.4. Категория M_Y. *Объектами* этой категории являются непрерывные отображения на данное пространство Y. *Морфизмом*, связывающим два объекта $f_1\colon X_1 \to Y$ и $f_2 = X_2 \to Y$, является такое, не предполагаемое эпиморфизмом, отображение $g\colon X_1 \to X_2$, что $f_2 g = f_1$. Тождественным отображением объекта $f\colon X \to Y$ является тождественное отображение id_X.

2.5. Теорема. *Послойное произведение сюръективных отображений $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y$ является произведением в категории M_Y.*

Доказательство. Заметим, что $f\colon X \to Y$ — отображение на пространство Y в силу 2.3. Пусть $g\colon Z \to Y$ — объект и $\{q_\alpha\colon Z \to X_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ — семейство морфизмов этого объекта в объекты $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y$. Из I.2.8 вытекает существование такого единственного непрерывного отображения $h'\colon Z \to \prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$, что $p_\alpha \circ h' = q_\alpha$. Пусть $X = \prod\{X_\alpha, f_\alpha\colon \alpha \in \mathcal{A}\}$. Поскольку q_α — морфизм из g в f_α, имеем $g = f_\alpha \circ q_\alpha$. Тогда

$$f_\alpha \circ p_\alpha \circ h' = f_\alpha \circ q_\alpha = g \tag{1}$$

для любого $\alpha \in \mathcal{A}$. Значит, для всякого $z \in Z$ имеем

$$h'(z) \in \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} (p_\alpha^{-1} f_\alpha^{-1} g(z)) = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha^{-1} g(z). \tag{2}$$

Таким образом, $h'Z \subset X$ согласно 2.3. Отображение h', рассматриваемое как отображение в пространство X, обозначим через h. Тогда равенства (1) превращаются в равенства $f_\alpha \circ \pi_\alpha \circ h = g$, а с учётом 2.2 имеем $f \circ h = g$. Кроме того, равенство $p_\alpha \circ h' = q_\alpha$ превращается в равенство $\pi_\alpha \circ h = q_\alpha$. Итак, построен морфизм h из g в f, удовлетворяющий условию категорного произведения (см. I.2.6).

Проверим его единственность. Пусть отображение $k\colon Z \to X$ таково, что

$$fk = g \tag{3}$$

и

$$\pi_\alpha k = q_\alpha. \tag{4}$$

Обозначим через k' композицию отображения $k\colon Z \to X$ и вложения $X \subset \prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$. Тогда равенство (4) даст нам $p_\alpha k' = q_\alpha$ и в силу категорности топологического произведения $k = h'$, а следовательно, и $k = h$. Теорема доказана. □

Из определения топологии тихоновского произведения легко вытекает следующая лемма.

2.6. Лемма. *Пусть C_α — бикомпактное подмножество пространства X_α. Тогда для произвольной окрестности U множества $C = \prod\limits_\alpha C_\alpha$ в произведении $\prod\limits_\alpha X_\alpha$ существуют такие индексы $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ и такие окрестности U_{α_i} множеств C_{α_i}, что $\bigcap\limits_{i=1}^{s} p_{\alpha_i}^{-1} U_{\alpha_i} \subset U$.*

2.7. Предложение. *Пусть $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$, — совершенные отображения. Тогда их произведение $f = \prod X_\alpha \to \prod Y_\alpha$ также совершенно.*

Доказательство. Надо проверить замкнутость отображения f. Воспользуемся предложением I.1.39. Пусть $y = \{y_\alpha\} \in \prod\limits_\alpha Y_\alpha$, и пусть U — произвольная окрестность множества $f^{-1}y = \prod\limits_\alpha f_\alpha^{-1} y_\alpha$. Согласно 2.6 существуют такие индексы $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ и окрестности U_{α_i} множеств $f_{\alpha_i}^{-1} y_{\alpha_i}$, что $\bigcap\limits_{i=1}^{s} p_{\alpha_i}^{-1} U_{\alpha_i} \subset U$. В силу замкнутости отображений f_{α_i} множества $f_{\alpha_i}^{\#} U_{\alpha_i}$ будут окрестностями точек y_{α_i}. Тогда

$$f^{\#} U \supset f^{\#} \bigcap_{i=1}^{s} p_{\alpha_i}^{-1} U_{\alpha_i} = \bigcap_{i=1}^{s} q_{\alpha_i}^{-1} f_{\alpha_i}^{\#} U_{\alpha_i},$$

где q_{α_i} — проекции произведения $\prod\limits_\alpha Y_\alpha$. Предложение доказано. □

Из теоремы I.1.27 легко выводится следующее утверждение.

2.8. Предложение. *Если отображение $f\colon X \to Y$ совершенно и пространство Y бикомпактно, то пространство X также бикомпактно.*

2.9. Теорема. *Композиция непрерывных отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ регулярных пространств совершенна тогда и только тогда, когда совершенны оба отображения f и g.*

Доказательство. Пусть отображения f и g совершенны. Тогда отображение gf замкнуто и надо проверить только бикомпактность этого отображения. Но она вытекает из I.1.36 и 2.8.

Пусть теперь отображение gf совершенно. Сначала проверим совершенность отображения g. Пусть множество A замкнуто в пространстве Y. Тогда множество $f^{-1}A$ замкнуто в пространстве X и в силу замкнутости отображения gf множество $gff^{-1}A$ замкнуто. Но f — отображение «на», поэтому $ff^{-1}A = A$. Значит, множество gA замкнуто.

Теперь проверим бикомпактность отображения g. Для $z \in Z$ имеем $g^{-1}z = ff^{-1}g^{-1}z$. Множество $f^{-1}g^{-1}z$ бикомпактно в силу бикомпактности отображения gf, а $g^{-1}z$ — как непрерывный образ бикомпактного множества $f^{-1}g^{-1}z$.

Осталось проверить совершенность отображения f. Бикомпактность отображения f вытекает из бикомпактности отображения gf и T_1-отделимости пространства Y. Проверим замкнутость отображения f. Пусть для некоторого замкнутого множества $A \subset X$ множество fA не замкнуто и $y \in [fA] \setminus fA$. Пусть $z = gy$. Тогда $z \in gfA$. В самом деле, в противном случае в силу замкнутости множества gfA у точки z существовала бы окрестность Oz, не пересекающаяся с множеством gfA, и окрестность $g^{-1}Oz$ точки y не пересекалась бы с множеством fA в противоречии с тем, что $y \in [fA]$.

Положим $B = A \cap f^{-1}g^{-1}z$ и $C = fB$. В силу бикомпактности отображения gf множество B бикомпактно, значит, бикомпактно и множество C. В силу регулярности пространства Y существует замкнутая окрестность Γ точки y, не пересекающаяся с множеством C. Тогда замкнутое множество $A \cap f^{-1}\Gamma$ не пересекается с множеством $f^{-1}g^{-1}z$. В самом деле, если $x \in A \cap f^{-1}\Gamma \cap f^{-1}g^{-1}z$, то $fx \in \Gamma \cap fA \cap g^{-1}z \subset \Gamma \cap fB = \Gamma \cap C$, что противоречит дизъюнктности множеств Γ и C.

В силу замкнутости отображения gf существует такая окрестность Oz точки z, что множество $f^{-1}g^{-1}Oz$ не пересекается с множеством $A \cap f^{-1}\Gamma$. Положим $Oy = \Gamma \cap g^{-1}Oz$. Тогда $f^{-1}Oy \cap A = A \cap f^{-1}\Gamma \cap f^{-1}g^{-1}Oz = \varnothing$, значит, $Oy \cap fA = \varnothing$, что противоречит включению $y \in [fA]$. Теорема доказана. □

2.10. Предложение. *Пусть $f_\alpha \colon X_\alpha \to Y$, $\alpha \in \mathcal{A}$, — совершенные отображения регулярных пространств. Тогда их послойное произведение f и проекции $\pi_\alpha \colon X \to X_\alpha$ веерного произведения также совершенны.*

Доказательство. Согласно 2.7 совершенно произведение $\prod\limits_\alpha f_\alpha$. Тогда в силу I.1.36 совершенно отображение $f_{\mathcal{A}}$, а отображение f совершенно как композиция совершенного отображения $f_{\mathcal{A}}$ и гомеоморфизма $\delta_Y^{\mathcal{A}}$. Наконец, из равенств $f = f_\alpha \pi_\alpha$ в силу 2.9 вытекает совершенность отображения π_α. Предложение доказано. □

2.11. *Категория* M_Y^p для регулярного пространства Y — это подкатегория категории M_Y, состоящая из совершенных отображений $f \colon X \to Y$ регулярных пространств и совершенных морфизмов. Согласно 2.9 семейство M_Y^p в самом деле будет подкатегорией категории M_Y.

2.12. Теорема. *Послойное произведение является произведением в категории M_Y^p.*

Утверждение вытекает из 2.10, 2.5 и 2.9.

2.13. Пусть $f \colon X \to Y$ — послойное произведение отображений $f_\alpha \colon X_\alpha \to Y$, $\alpha \in \mathcal{A}$, и $A \subset \mathcal{A}$. Обозначим через $f^A \colon X_A \to Y$ послойное произведение семейства отображений $\{f_\alpha \colon \alpha \in A\}$. Если $B \subset A$ и $p_B^A \colon \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \to \prod\limits_{\alpha \in B} X_\alpha$ — проектирование, то непосредственная проверка показывает, что $p_B^A(X_A) \subset X_B$. Обозначив через $\pi_B^A \colon X_A \to X_B$ ограничение отображения p_B^A на пространство X_A, также непосредственно убеждаемся в том, что $f^A = f^B \circ \pi_B^A$. Будем обозначать $p_A^{\mathcal{A}}$ через π_A. При $A = \{\alpha\}$, очевидно, $\pi_A = \pi_\alpha$. В силу 2.3 отображения π_B^A и π_A являются эпиморфизмами.

2.14. Пусть $\mathcal{D}$ — направление в множестве $\mathcal{A}$ (см. I.3.29). Положим $S_{\mathcal{D}}^\theta = \{X_A, \pi_B^A \colon A \in \mathcal{D}\}$. Поскольку при $A \supset B \supset C$ имеем $\pi_C^A = \pi_C^B \pi_B^A$, семейство $S_{\mathcal{D}}^\theta$ является обратным спектром. Положим $S_Y = \{Y_A, i_B^A \colon A \in \mathcal{D}\}$, где $Y_A = Y$, а $i_B^A = \mathrm{id}_Y$. Через $F_{\mathcal{D}}$ обозначим морфизм спектра $S_{\mathcal{D}}^\theta$ в спектр S_Y, состоящий из отображений $f^A \colon X_A \to Y_A$.

2.15. Теорема. *Пусть $\{f_\alpha \colon X_\alpha \to Y \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ — семейство отображений на хаусдорфово пространство Y и $\mathcal{D}$ — направление в множестве $\mathcal{A}$. Тогда предел* *спектра* $S^\theta_{\mathcal{D}}$ *совпадает с веерным произведением* X *пространств* X_α *относительно* f_α, *сквозные проекции спектра* $S^\theta_{\mathcal{D}}$ *совпадают с отображением* f^A *и послойное произведение* f *отображений* f_α *совпадает с отображением* $\lim F_{\mathcal{D}}$.

Доказательство. Заметим сначала, что диагональ $\Delta(Y^{\mathcal{A}})$ замкнута в произведении хаусдорфовых пространств. Поэтому пространство X замкнуто в произведении $\prod\limits_\alpha X_\alpha$. Теперь, применяя последовательно I.3.31 и I.3.22, получаем первые два утверждения нашей теоремы. Последнее утверждение следует из отмеченного в 2.13 равенства $f^{\mathcal{A}} = f^A \circ \pi^{\mathcal{A}}_A$, совпадающего с равенством $f = f^A \circ \pi_A$, и только что доказанного (π_A — сквозные проекции спектра $S^\theta_{\mathcal{D}}$) равенства $\lim F_{\mathcal{D}} = f^{\mathcal{A}} \circ \pi_{\mathcal{A}}$. Теорема доказана. □

2.16. Послойное произведение отображений согласно теореме 2.5 является произведением объектов категории M_Y. Но в категории M_Y, как и в категории *Top* (см. I.2.10), существует и произведение морфизмов.

2.17. Предложение. *Пусть* $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y$, $g_\alpha\colon Z_\alpha \to Y$ — *объекты категории* M_Y, $\alpha \in \mathcal{A}$. *Пусть для каждого* α *дан морфизм* h_α *из* f_α *в* g_α, *т. е. такое отображение* $h_\alpha\colon X_\alpha \to Z_\alpha$, *что* $f_\alpha = g_\alpha \circ h_\alpha$. *Пусть* f *и* g — *послойные произведения отображений* f_α *и* g_α. *Тогда в категории* M_Y *существует единственный морфизм* h *из* f *в* g, *удовлетворяющий условию*

$$\xi_\alpha \circ h = h_\alpha \circ \psi_\alpha, \tag{5}$$

где $\psi_\alpha\colon X \to X_\alpha$ *и* $\xi_\alpha\colon Z \to Z_\alpha$ — *проекции веерных произведений пространств* X_α *и* Z_α *относительно отображений* f_α *и* g_α *соответственно на сомножители.*

В самом деле, единственность вытекает из теоремы 2.5, согласно которой отображение g является категорным произведением отображений. Что касается существования, можно взять

$$h = \prod_\alpha h_\alpha | X. \tag{6}$$

§ 3. Обратные спектры, послойные произведения и вполне замкнутые отображения

Ниже до конца параграфа все пространства, если они не возникают в результате каких-нибудь построений, предполагаются регулярными.

3.1. Предложение. *Для того чтобы сквозная проекция* $\pi_{\alpha_0}\colon \lim S \to X_{\alpha_0}$ *обратного спектра* $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta\}$ *с совершенными проекциями была вполне замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы все проекции вида* $\pi^\alpha_{\alpha_0}$ *были вполне замкнуты.*

Доказательство. Необходимость вытекает из 1.7. Проверим достаточность. Из 2.8, I.3.12 и I.3.22 вытекает бикомпактность сквозных проекций. Пусть теперь $x \in X_{\alpha_0}$ и $\{U_1, \ldots, U_s\}$ — покрытие бикомпакта $\pi^{-1}_{\alpha_0} x$ открытыми в пространстве $\lim S$ множествами. Согласно I.3.9 для всякой точки $y \in \pi^{-1}_{\alpha_0} x$

существует такой индекс α_y и такое открытое в X_{α_y} множество V_{α_y}, что $y \in \pi_{\alpha_y}^{-1} V_{\alpha_y} \equiv V_y$ и V_y содержится в одном из множеств U_i. Из покрытия $\{V_y \colon y \in \pi_{\alpha_0}^{-1} x\}$ бикомпакта $\pi_{\alpha_0}^{-1} x$ выберем конечное подпокрытие $\{V_{y_1}, \dots, V_{y_k}\}$. Пусть $\alpha \geqslant \alpha_{y_i}$, $i = 1, \dots, k$. Положим $V_i = (\pi^{\alpha}_{\alpha_{y_i}})^{-1} V_{\alpha_{y_i}}$. Тогда семейство $\{V_1, \dots, V_k\}$ будет покрытием бикомпакта $(\pi^{\alpha}_{\alpha_0})^{-1} x$. В силу полной замкнутости отображения $\pi^{\alpha}_{\alpha_0}$ множество $V = \{x\} \cup \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} (\pi^{\alpha}_{\alpha_0})^{\#} V_i\right)$ будет окрестностью точки x. Но

$$V = \{x\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \pi^{\#}_{\alpha_0} V_{y_i}\right) \subset \{x\} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{s} \pi^{\#}_{\alpha_0} U_j\right) \equiv U.$$

Значит, множество U тем более является окрестностью точки x. Предложение доказано. □

3.2. Предложение. *Если S — обратный спектр с совершенными проекциями, то все его сквозные проекции $\pi_\alpha \colon \lim S \to X_\alpha$ также совершенны. Если при этом проекции спектра S являются эпиморфизмами, то сквозные проекции также эпиморфизмы.*

Доказательство первой части аналогично доказательству предложения 3.1 и несколько проще. Вторая часть следует из того, что предел спектра из непустых бикомпактов не пуст.

3.3. Предложение. *Пусть S_1, S_2 — обратные спектры с совершенными проекциями над одним и тем же частично упорядоченным множеством, и пусть $F \colon S_1 \to S_2$ — морфизм, состоящий из совершенных отображений. Тогда отображение $\lim F \colon \lim S_1 \to \lim S_2$ также совершенно. Если при этом все входящие в S_1, S_2 и F отображения суть эпиморфизмы, то $\lim F$ также эпиморфизм.*

Доказательство. Пусть π^i_α — сквозные проекции спектров S_i и $f_\alpha \in F$. Тогда для отображения $f = \lim F$ имеем $\pi^2_\alpha f = f_\alpha \pi^1_\alpha$. Итак, композиция $\pi^2_\alpha f$ совершенна как композиция совершенных отображений f_α и π^1_α (совершенность π^i_α следует из 3.2). В этих условиях из совершенности π^2_α и доказательства 2.9 вытекает совершенность отображения f (в последней части доказательства 2.9 эпиморфность отображения f не используется). Предложение доказано. □

3.4. Теорема. *Послойное произведение вполне замкнутых совершенных отображений вполне замкнуто.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай двух сомножителей. Пусть равенства

$$(f \colon X \to Y) = (f_i \colon X_i \to Y) \circ (p_i \colon X \to X_i), \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

описывают послойное произведение отображений f_i (проекции веерного произведения здесь удобнее обозначать через p_i, а не через π_i), а равенства

$$(g \colon Z \to Y) = (\pi^y_i \colon Y^y_i \to Y) \circ (p^y_i \colon Z \to Y^y_i), \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

описывают послойное произведение отображений $\pi_i^y \equiv \pi_{f_i}^y$, где y — произвольная точка из Y. По категорному свойству послойного произведения (см. 2.12) существует единственное такое совершенное отображение $h\colon X \to Z$, что имеют место равенства

$$h \circ p_i^y = f_i^y \circ p_i, \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Теперь рассмотрим пространство Y_f^y и отображения $f^y\colon X \to Y_f^y$ и $\pi_f^y\colon Y_f^y \to Y$. Легко увидеть, что разбиения пространства X, определяемые отображениями h и f^y, совпадают. Поэтому существует такое взаимно-однозначное отображение $k\colon Y_f^y \to Z$, что $h = k \circ f^y$. В силу факторности отображения f^y отображение k непрерывно, а в силу замкнутости отображения h отображение k замкнуто (см. доказательство теоремы 2.9). Итак, k — вложение, значит, пространство Y_f^y регулярно. Согласно 1.6 отображение f вполне замкнуто.

Итак, послойное произведение двух, а следовательно, и любого конечного числа вполне замкнутых совершенных отображений вполне замкнуто. Но послойное произведение бесконечного числа совершенных отображений является сквозной проекцией обратного спектра из конечных подпроизведений (см. 2.15). Поэтому применение предложения 3.1 завершает доказательство. □

3.5. Определение. Факторное отображение $f\colon X \to Y$ называется *элементарным*, если прообразы всех точек из Y, за исключением, может быть, одной точки, одноточечны. Таким образом, пространство Y получается из пространства X сжиманием в точку некоторого замкнутого множества $A \subset X$.

Следующее утверждение достаточно очевидно (и нами уже неявно использовалось).

3.6. Предложение. *Всякое элементарное отображение вполне замкнуто.*

3.7. Теорема. *Бикомпактное отображение $f\colon X \to Y$ вполне замкнуто тогда и только тогда, когда оно является послойным произведением элементарных отображений.*

Доказательство. Достаточность вытекает из 3.4 и 3.6. Чтобы доказать необходимость, мы покажем, что отображение f совпадает с послойным произведением $g\colon Z \to Y$ отображений $\pi_f^y\colon Y_f^y \to Y$, $y \in Y$. Согласно 1.6 пространства Y_f^y регулярны. Тогда по категорному свойству послойного произведения (2.12) существует такое совершенное отображение $h\colon X \to Z$, что $f = g \circ h$. Имеют место равенства

$$g = (\pi_f^y\colon Y_f^y \to Y) \circ (p^y\colon Z \to Y_f^y), \tag{4}$$

$$f^y = p^y \circ h, \tag{5}$$

где p^y — проекция веерного произведения на сомножитель. Отображение f^y взаимно-однозначно на множестве $f^{-1}y$. Тогда в силу равенства (5) отображение h взаимно-однозначно на множестве $f^{-1}y$ при любом $y \in Y$. Итак, отображение взаимно-однозначно и совершенно, т. е. h — гомеоморфизм. Теорема доказана. □

3.8. Теорема. *Всякое бикомпактное вполне замкнутое отображение $f\colon X \to Y$ разлагается в непрерывный вполне упорядоченный спектр, в котором все соседние проекции элементарны, а их неодноточечные слои гомеоморфны слоям отображения f.*

Доказательство. Пусть $A \subset Y$ — множество всех точек y с неодноточечными прообразами. Тогда из доказательства теоремы 3.7 следует, что отображение f совпадает с послойным произведением отображений $\pi_f^y\colon Y_f^y \to Y$, $y \in A$, каждое из которых имеет не более одного неодноточечного слоя, а именно слоя $(\pi_f^y)^{-1}y$, гомеоморфного слою $f^{-1}y$. Вполне упорядочим множество A и рассмотрим направление $\mathcal{D}$, состоящее из начальных интервалов множества A. Теперь, пополнив спектр $S_{\mathcal{D}}^{\theta}$ (см. 2.14) пространством Y и проекцией $\pi_f^{y_0}\colon Y_f^{y_0} \to Y$, где y_0 — наименьший элемент множества A, получим вполне упорядоченный спектр S. Согласно 2.15 имеем $X = \lim S_{\mathcal{D}}^{\theta} = \lim S$, и сквозная проекция $\pi_0\colon X \to Y_f^{y_0} \equiv X_0$ спектра $S_{\mathcal{D}}^{\theta}$ совпадает с отображением f^{y_0}. Тогда сквозная проекция $X \to Y$ спектра S совпадает с отображением $\pi_f^{y_0} f^{y_0} = f$, т. е. отображение f разлагается в спектр S. Спектр S непрерывен, поскольку для неограниченного множества $B \subset A$ элемент X_B этого спектра, в силу той же теоремы 2.15, совпадает с пределом спектра $S_{\mathcal{D}(B)}^{\theta}$, где $\mathcal{D}(B)$ — ограничение направления $\mathcal{D}$ на множество B. Наконец, соседняя проекция $\pi_\alpha^{\alpha+1}\colon X_{\alpha+1} \to X_\alpha$ берётся из равенства

$$(\pi_f^{y_\alpha}\colon Y_f^{y_\alpha} \to Y)\circ(p^\alpha\colon X_{\alpha+1} \to Y_f^{y_\alpha}) = (p_0^\alpha\colon X_\alpha \to Y)\circ(\pi_\alpha^{\alpha+1}\colon X_{\alpha+1} \to X_\alpha), \quad (6)$$

определяющего послойное произведение отображений $\pi_f^{y_\alpha}$ и p_0^α, где p_0^α — послойное произведение отображений $\pi_f^{y_\beta}$, $\beta < \alpha$. Если $y = y_\alpha$, то $(p_0^\alpha)^{-1}y = \prod\limits_{\beta<\alpha} (\pi_f^{y_\beta})^{-1}y$ в силу 2.3. Но относительно отображений $\pi_f^{y_\beta}$ только точка y_β может иметь неодноточечный прообраз. Значит, множество $(p_0^\alpha)^{-1}y$ состоит из одной точки, которую обозначим через x_0. Тогда для отличной от x_0 точки $x \in X$ в силу второго утверждения предложения 2.3 имеем $(\pi_\alpha^{\alpha+1})^{-1}x = \{x\} \times (\pi_f^{y_\alpha})^{-1}p_0^\alpha(x)$. Но $p_0^\alpha(x) \neq y_\alpha$, значит, множество $(\pi_\alpha^{\alpha+1})^{-1}x$ состоит из одной точки. Таким образом, только точка x_0 может иметь неодноточечный прообраз относительно отображения $\pi_\alpha^{\alpha+1}$, и этот прообраз гомеоморфен слою $f^{-1}y_\alpha$. Теорема доказана. □

3.9. Предложение. *Пусть $S = \{X_\alpha, p_\beta^\alpha, \gamma\}$ — непрерывный вполне упорядоченный спектр из бикомпактов и эпиморфизмов и ни одна из его проекций p_β^α не является гомеоморфизмом. Тогда если бикомпакт $X = \lim S$ метризуем, то длина γ спектра S счётна, а его соседние проекции $p_\alpha^{\alpha+1}$ имеют метризуемые слои.*

Доказательство. Бикомпакт $(p_\alpha^{\alpha+1})^{-1}x$ метризуем, поскольку он является непрерывным образом метризуемого бикомпакта $p_\alpha^{-1}x$. Предположим, что $\gamma \geqslant \omega_1$. Переходя к спектру $S|\omega_1$, можно считать, что $\gamma = \omega$. Пусть $\mathcal{B} \in \{B_i\}$ — счётная база бикомпакта X. Из всякой базы бикомпакта X можно выбрать базу мощности wX. Поэтому считаем, что множества B_i «отмечены», т. е. $B_i = p_{\alpha_i}^{-1}(U_i)$. Пусть $\alpha = \sup \alpha_i$. Тогда предельная проекция $p_\alpha \colon X \to X_\alpha$ разделяет точки бикомпакта X и, будучи сюръективной согласно предложению I.3.23, является гомеоморфизмом. Тогда гомеоморфизмом будет и проекция $p_\alpha^{\alpha+1}$, являющаяся левым делителем гомеоморфизма $p_\alpha = p_\alpha^{\alpha+1} \circ p_{\alpha+1}$, правый делитель которого эпиморфен. Получили противоречие с тем, что спектр S не содержит гомеоморфизмов в качестве проекций. Предложение доказано. $\square$

3.10. Предложение. *Пусть f — вполне замкнутое отображение бикомпакта X на бикомпакт Y. Тогда для метризуемости бикомпакта X необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *бикомпакт Y метризуем,*
2) *всякий слой $f^{-1}y$ отображения f метризуем,*
3) *только счётное число слоев $f^{-1}y$ может содержать более одной точки.*

Доказательство. Необходимость условий 1) и 2) очевидна. Условие 3) вытекает из теоремы 3.8 и предложения 3.9. Достаточность вытекает из (доказательства) теоремы 3.7 и метризуемости веерного произведения счётного числа метризуемых бикомпактов. $\square$

§ 4. Проективные свойства вполне замкнутых отображений и абсолюты

В этом параграфе мы не предполагаем, что заданные отображения сюръективны.

4.1. Определение. Напомним, что замкнутое сюръективное отображение $f \colon X \to Y$ называется *неприводимым*, если для всякого собственного замкнутого подмножества $F \neq X$ имеем $fF \neq Y$.

Из определения 4.1 и формулы $f^\# A = Y \setminus f(X \setminus A)$ непосредственно вытекает следующее утверждение.

4.2. Предложение. *Замкнутое сюръективное отображение $f \colon X \to Y$ неприводимо тогда и только тогда, когда для всякого непустого открытого множества $U \subseteq X$ его малый образ $f^\# U$ не пуст.*

Следующее утверждение общеизвестно и легко доказывается с помощью леммы Цорна.

4.3. Предложение. *Пусть $f \colon X \to Y$ — совершенное сюръективное отображение. Тогда существует такое замкнутое множество $X_0 \subseteq X$, что $f(X_0) = Y$ и отображение $f|X_0$ неприводимо.*

4.4. Предложение. *Композиция $g \circ f$ замкнутых отображений f и g неприводима тогда и только тогда, когда неприводимы оба отображения f и g.*

Доказательство достаточно очевидно. При проверке необходимости надо только иметь в виду, что сюръективность отображения f не заложена в условие.

4.5. Предложение. *Пусть $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y$, $\alpha \in \mathcal{A}$, — совершенные неприводимые отображения регулярных пространств, $\{f\colon X \to Y, \pi_\alpha\colon X \to X_\alpha, \mathcal{A}\}$ — послойное произведение отображений f_α. Тогда существует такое замкнутое множество $X_0 \subseteq X$, что отображения $\varphi_\alpha \equiv \pi_\alpha\colon X_0 \to X_\alpha$ совершенны и неприводимы.*

Доказательство. Согласно предложению 2.10 отображения f и π_α совершенны. В силу 4.3 существует такое замкнутое множество $X_0 \subseteq X$, что $fX_0 = Y$ и отображение $f_0 \equiv f|X_0$ неприводимо. Из предложения I.2.33 вытекает, что отображение f_0 совершенно.

Покажем, что X_0 — искомое множество. Из предложения 2.2 вытекает, что

$$f_\alpha \circ \varphi_\alpha = f_0, \quad \alpha \in \mathcal{A}. \tag{1}$$

Поэтому с учётом равенства (1) неприводимость отображения φ_α вытекает из предложения 4.4, а его совершенность — из теоремы 2.9 и отмеченной выше совершенности отображения f_0. Предложение доказано. □

Из предложений 1.14, 4.4, 4.5 и теоремы 3.4 вытекает следующее утверждение.

4.6. Предложение. *Пусть $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y$ — совершенные, вполне замкнутые и неприводимые отображения регулярных пространств, $\alpha \in \mathcal{A}$. Пусть $\{f\colon X \to Y, \pi_\alpha\colon X \to X_\alpha, \mathcal{A}\}$ — послойное произведение этих отображений. Тогда существует такое замкнутое множество $X_0 \subseteq X$, что $fX_0 = Y$ и отображение $f_0 \equiv f|X_0$ совершенно, вполне замкнуто и неприводимо.*

4.7. Напомним, что наименьшая из мощностей всюду плотных подмножеств топологического пространства X называется его *плотностью* и обозначается через dX. Мы, как правило, будем рассматривать плотности только бесконечных пространств. Для конечного T_1-пространства, очевидно, $dX = wX = |X|$.

4.8. Предложение. *Если $f\colon X \to Y$ — неприводимое отображение, то $dX = dY$.*

Это утверждение хорошо известно и вытекает из следующей очевидной характеристики неприводимых отображений.

4.9. Предложение. *Замкнутое сюръективное отображение $f\colon X \to Y$ неприводимо тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующему условию: если для произвольного множества $A \subseteq X$ множество fA всюду плотно в пространстве Y, то A всюду плотно в пространстве X.*

4.10. Обозначим через $\mathcal{P}(X)$ множество всех подмножеств множества X. Из определения топологии $\mathcal{T}$ на множестве X как семейства его (открытых) подмножеств вытекает, что $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.

Пусть теперь X — топологическое пространство и X_0 — его всюду плотное подмножество. Каждой точке $x \in X$ пространства X поставим в соответствие множество $o(x) = \{Ox \cap X_0 \colon Ox$ — окрестность точки $x\}$. Ясно, что

$o(x) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X_0))$. Таким образом, получаем отображение $o\colon X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X_0))$. Легко видеть, что для хаусдорфова пространства отображение o инъективно.

Из рассуждений этого пункта вытекает следующее утверждение.

4.11. Предложение. *Мощность хаусдорфова пространства X плотности $dX = \tau$ не превосходит $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\tau))|$. Семейство всех хаусдорфовых пространств данной плотности τ является множеством мощности $\leqslant |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\tau))))|$.*

4.12. Замечание. Естественно, что здесь под топологическим пространством X понимается класс всех пространств, гомеоморфных пространству X.

4.13. Замечание. Для T_1-пространств утверждение предложения 4.11 не имеет места. В самом деле, возьмём множество X произвольной бесконечной мощности τ. На множестве X существует слабейшая T_1-топология. Непустые открытые множества в этой топологии обладают тем свойством, что их дополнения в X конечны. Таким образом, всякое бесконечное подмножество пространства X будет всюду плотно в X. Следовательно, $dX = \omega_0$ и τ не обязано удовлетворять неравенству $\tau \leqslant |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega_0))| = 2^{\mathbf{c}}$.

Обозначим через $I_p(Y)$ семейство всех совершенных неприводимых отображений регулярных пространств на данное регулярное пространство Y. При этом мы не различаем *гомеоморфные* отображения, т. е. отображения $f_i\colon X_i \to Y$, $i = 1, 2$, для которых существует гомеоморфизм $h\colon X_1 \to X_2$ с условием $f_1 = f_2 \circ h$.

Через $I_{fp}(Y)$ обозначим семейство, состоящее из всех вполне замкнутых отображений из $I_p(Y)$. Из предложений 4.8 и 4.11 вытекает следующее утверждение.

4.14. Предложение. *Семейство $I_p(Y)$ и, значит, семейство $I_{fP}(Y)$ являются множествами.*

4.15. На семействе объектов категории M_Y (см. 2.4) рассмотрим следующее бинарное отношение $\leqslant$. Пусть $f_i\colon X_i \to Y$, $i = 1, 2$, — объекты категории M_Y. Будем писать $f_1 \leqslant f_2$ и говорить, что f_2 *накрывает* f_1, если в категории M_Y существует морфизм $g\colon X_2 \to X_1$, связывающий объекты $f_2\colon X_2 \to Y$ и $f_1\colon X_1 \to Y$ и являющийся факторным отображением.

Легко видеть, что отношение $\leqslant$ рефлексивно и транзитивно. В то же время оно не антисимметрично, т. е. не является отношением частичного порядка, даже если мы не различаем гомеоморфные отображения. Особенно отчётливо это видно на примере одноточечного пространства Y: любой бесконечный нульмерный метризуемый компакт можно отобразить на себя посредством эпиморфизма, не являющегося гомеоморфизмом.

4.16. Теорема. *Для произвольного регулярного пространства Y в множестве $I_p(Y)$ (в множестве $I_{fp}(Y)$) существует максимальный элемент, т. е. отображение, накрывающее все отображения из $I_p(Y)$ (соответственно из $I_{fp}(Y)$). При этом накрытия являются совершенными неприводимыми отображениями.*

Доказательство. В случае множества $I_p(Y)$ применяем предложение 4.5. Максимальным элементом будет отображение $f_0 \equiv f|X_0$, накрытиями — отображения φ_α. Пространство X_0 регулярно, поскольку регулярность сохраняется как при произведении пространств, так и при переходе к подпространствам. В случае множества $I_{fp}(Y)$ применяем предложение 4.6. Накрытиями будут отображения $\psi_\alpha \equiv \pi_\alpha|X_0$. Неприводимость и совершенность отображений ψ_α вытекает из (доказательства) предложения 4.5. Теорема доказана. □

Следующее утверждение практически непосредственно вытекает из определения неприводимого отображения или, что равносильно, предложения 4.2.

4.17. Предложение. *Если $f\colon X \to Y$ — неприводимое отображение, а $U \subseteq X$ — открытое множество, то*

1) *множество $f^{-1}f^{\#}U$ всюду плотно в U,*
2) *множество $f^{\#}U$ всюду плотно в fU,*
3) *$f[U] = [f^{\#}U]$.*

При проверке равенства 3) используется равенство $f[A] = [fA]$, характеризующее замкнутость отображения f (множество $A \subseteq X$ произвольно).

4.18. Напомним, что топологическое пространство X называется *экстремально несвязным*, если замыкание любого его открытого подмножества открыто. Легко видеть, что это свойство равносильно следующему: для любых двух непересекающихся открытых подмножеств пространства X их замыкания не пересекаются.

4.19. Теорема. *Пусть Y — регулярное пространство. Тогда для отображения $(f\colon X \to Y) \in I_p(Y)$ равносильны следующие условия:*

1) *f является максимальным элементом множества $I_p(Y)$,*
2) *пространство X экстремально несвязно,*
3) *всякое совершенное неприводимое отображение $g\colon Z \to X$ является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $(f\colon X \to Y)$ — максимальный элемент в множестве $I_p(Y)$. Пусть $U \subseteq X$ — открытое множество со свойством $[U] \neq X$. Положим

$$V_0 = f^{\#}U, \quad V_1 = Y \setminus [V_0].$$

В силу неприводимости отображения f множества V_i открыты в Y и не пусты. Кроме того, из их определения вытекает, что

$$Y = [V_0] \cup [V_1]. \tag{2}$$

В произведении $Y \times \{0, 1\}$ рассмотрим замкнутое подпространство $X_1 = A_0 \cup A_1$, где $A_i = [V_i] \times \{i\}$. Обозначим через $f_1\colon X_1 \to Y$ ограничение проектирования $p_Y\colon Y \times \{0, 1\} \to Y$ на множество X_1. Согласно равенству (2) отображение f_1 сюръективно. Из предложения I.2.34 вытекает совершенность отображения f_1. Неприводимость отображения f_1 следует из того, что множество $A = V_0 \times \{0\} \cup V_1 \times \{1\}$ открыто и всюду плотно в X_1, а отображение $f_1|A$ гомеоморфно отображает множество A на $V_0 \cup V_1$.

Таким образом, $f_1 \in I_p(Y)$. Так как f — максимальный элемент множества $I_p(Y)$, существует такое факторное отображение $\psi_1 \colon X \to X_1$, что $f = f_1 \circ \psi_1$. Множества $B_i = \psi_1 A_i$, $i = 0, 1$, образуют открыто-замкнутое дизъюнктное покрытие пространства X. Далее, эти множества содержат открытые подмножества $f^{-1}V_i$, которые в сумме дают всюду плотное множество в X в силу неприводимости отображения f. Отсюда вытекает, что $B_i = [f^{-1}V_i]$. Но множество $f^{-1}V_0 = f^{-1}f^{\#}U$ всюду плотно в U согласно предложению 4.17. Следовательно, $B_0 = [U]$. Итак, замыкание множества U открыто. Значит, пространство X экстремально несвязно.

Теперь проверим импликацию 2) $\implies$ 3). Предположим, что существует неприводимое отображение $g \colon Z \to X$ хаусдорфова пространства Z на X, не являющееся гомеоморфизмом. Тогда существуют такие различные точки $z_1, z_2 \in Z$, что $gz_1 = gz_2$. Пусть U_1, U_2 — непересекающиеся окрестности точек z_1, z_2 соответственно. В силу замкнутости отображения f множества $g^{\#}U_1$ и $g^{\#}U_2$ будут непересекающимися открытыми подмножествами пространства X. В то же время согласно предложению 4.17 пересечение их замыканий содержит точку $gz_1 = gz_2$, что противоречит определению 4.18 экстремальной несвязности пространства X.

Наконец, проверим импликацию 3) $\implies$ 1). Возьмём существующий по теореме 4.16 максимальный элемент $h \colon Z \to Y$ множества $I_p(Y)$. Существует такое факторное отображение $g \colon Z \to Y$, что $h = f \circ g$. Отображение g неприводимо по предложению 4.4 и совершенно в силу теоремы 2.9. Тогда согласно нашему условию 3) g — гомеоморфизм. В силу равенства $h = f \circ g$ гомеоморфизм g является изоморфизмом категории M_Y. Таким образом, отображение f — максимальный элемент множества $I_p(Y)$. Теорема доказана. □

4.20. Замечание. Теорема 4.19 не только даёт топологическую классификацию максимального элемента $f \colon X \to Y$ (экстремальную несвязность пространства X), но и устанавливает единственность с точностью до эквивалентности этого максимального элемента. Таким образом, в множестве $I_p(Y)$ существует наибольший элемент $\pi_{aY} \colon aY \to Y$. Пространство aY называется *абсолютом Глисона—Пономарёва* регулярного пространства Y. Пространство aY вполне регулярно. Более того, точки и замкнутые множества в aY можно разделить посредством непрерывных функций, принимающих лишь два значения: 0 и 1.

4.21. Лемма. *Пусть $f \colon X \to Y$ — вполне замкнутое отображение на Y, и пусть $F \subseteq X$ — такое замкнутое множество, что $fF = Y$. Тогда для всякой точки $y \in Y$ множество $f^{-1}y \setminus F$ открыто в пространстве X.*

Доказательство. Возьмём такую окрестность Ox точки $x \in f^{-1}y \setminus F$, что $[Ox] \cap F = \varnothing$. Положим $U = X \setminus F$, $V = X \setminus [Ox]$. Поскольку отображение f

вполне замкнуто, множество $\{y\}\cup f^{\#}U\cup f^{\#}V$ открыто. Но $f^{\#}U = Y\setminus f(X\setminus U) = Y \setminus fF = \varnothing$. Следовательно, открыто множество $W = f^{-1}y \cup f^{-1}f^{\#}V$. Значит, множество $Ox\cap W$ является окрестностью точки x. Но $Ox\cap f^{-1}f^{\#}V = \varnothing$. Поэтому множество $Ox \cap f^{-1}y$ является окрестностью точки x. Лемма доказана. □

Из предложения 4.2 и леммы 4.21 легко выводится следующий критерий неприводимости вполне замкнутых отображений.

4.22. Теорема. *Вполне замкнутое сюръективное отображение $f\colon X \to Y$ неприводимо тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:*

1) $|f^{-1}y| = 1$ *для всякой изолированной точки* $y \in Y$,
2) $\mathrm{Int}_X\, f^{-1}y = \varnothing$ *для всякой неизолированной точки* $y \in Y$.

4.23. Предложение. *Если $f\colon X \to Y$ — вполне замкнутое отображение на пространство Y и прообраз $f^{-1}y$ всякой изолированной точки $y \in Y$ одноточен, то существует и единственно такое замкнутое множество $X_0 \subseteq X$, что отображение $f_0 \equiv f|X_0\colon X_0 \to Y$ неприводимо.*

Доказательство. Предположим, что $X_0 \subseteq X$ — такое замкнутое множество, что отображение $f_0 \equiv f|X_0$ неприводимо. Пусть $y \in Y$ — произвольная неизолированная точка. Предположим, что $G = X_0 \cap \mathrm{Int}_X\, f^{-1}y \neq \varnothing$. Множество G открыто в пространстве X_0, и $f(X_0 \setminus G) = Y$, так как y — неизолированная точка. Следовательно, из неприводимости отображения f_0 необходимо вытекает, что

$$X_0 \subseteq X \setminus \bigcup\{\mathrm{Int}_X\, f^{-1}y\colon y\in Y \text{— неизолированная точка}\} \equiv F.$$

Остаётся показать, что отображение $f_1 \equiv f|F\colon F \to Y$ неприводимо. Отображение f_1, очевидно, сюръективно. Согласно предложению I.1.37 отображение f_1 замкнуто. Покажем, что отображение f_1 неприводимо. Возьмём замкнутое множество $F_1 \subseteq F$, для которого $f(F_1) = Y$. Согласно лемме 4.21 для произвольной точки $y \in Y$ имеем $f^{-1}y \setminus F_1 \subseteq \mathrm{Int}_X\, f^{-1}y$, откуда $F_1 = F$. Предложение доказано. □

Из предложения 4.23 и его доказательства вытекает следующее утверждение.

4.24. Следствие. *Если $f\colon X \to Y$ — вполне замкнутое отображение на пространство Y без изолированных точек, то существует и единственно такое замкнутое множество $X_0 \subseteq X$, что отображение $f_0 \equiv f|X_0\colon X_0 \to Y$ неприводимо. При этом*

$$X_0 = X \setminus \bigcup\{\mathrm{Int}_X\, f^{-1}y\colon y \in Y\}.$$

4.25. Замечание. При доказательстве теоремы 4.16 был предъявлен достаточно конкретный максимальный элемент множества $I_{fp}(Y)$. Он однозначен с точностью до произвола, допускаемого при выборе множества X_0 в предложении 4.6. Но произвола никакого на самом деле нет согласно предложению 4.23.

Обозначим этот максимальный элемент через $\pi_{faY}\colon faY \to Y$ и назовём его *вполне замкнутым абсолютом* или, кратко, *в. з. абсолютом* регулярного пространства Y. В отличие от обычного абсолюта aY, в. з. абсолют не обладает его основным свойством $a(aY) = aY$, вытекающим из условия 3) теоремы 4.19. Это связано с тем, что композиция вполне замкнутых отображений не обязана быть вполне замкнутым отображением. Пример бикомпакта Y с неравенством $fa(faY) \neq faY$ будет приведён в 4.59.

4.26. Скажем, что бикомпактное элементарное отображение $f\colon X \to Y$ (см. 3.5) *y-элементарно*, где $y \in Y$, если $|f^{-1}y'| = 1$ для всякой точки $y' \in Y \setminus \{y\}$.

Анализ доказательства теоремы 3.7 показывает, что она может быть сформулирована следующим образом.

4.27. Теорема. *Бикомпактное сюръективное отображение $f\colon X \to Y$ вполне замкнуто тогда и только тогда, когда оно является послойным произведением y-элементарных отображений $\pi_f^y\colon Y_f^y \to Y$, $y \in Y$.*

4.28. *Рангом* отображения $f\colon X \to Y$ назовём множество

$$r(f) = \{y \in Y\colon |f^{-1}y| \geqslant 2\}.$$

Семейство отображений $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y$, $\alpha \in A$, назовём *независимым*, если семейство $\{r(f_\alpha)\colon \alpha \in A\}$ дизъюнктно.

4.29. Теорема. *Послойное произведение независимого семейства совершенных неприводимых отображений неприводимо.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай двух сомножителей $f_1\colon X_1 \to Y$ и $f_2\colon X_2 \to Y$. Пусть $f\colon X \to Y$ — послойное произведение отображений f_1 и f_2. Отображение f совершенно и, в частности, замкнуто согласно предложению 2.10. Кроме того, оно сюръективно. Пусть $U \subseteq X$ — непустое открытое множество. Возьмём точку $x = (x_1, x_2) \in U$. Существуют такие окрестности U_i точек x_i, что $(U_1 \times U_2) \cap X \subseteq U$. Точка $y = f_1x_1 = f_2x_2$ по условию является точкой взаимной однозначности по крайней мере одного из отображений f_i, пусть, например, f_1. Тогда множество $f_1^{\#}U_1$ является окрестностью точки y ввиду замкнутости отображения f_1. Поскольку отображение f_2 неприводимо, множество $f_2^{\#}U_2$ пересекается с этой окрестностью согласно предложению 4.17, 3). Пусть $y_1 \in f_1^{\#}U_1 \cap f_2^{\#}U_2$. Тогда $f_1^{-1}y_1 \times f_2^{-1}y_1 \subseteq (U_1 \times U_2) \cap X \subseteq U$ и, следовательно, $y_1 \in f^{\#}U$. По предложению 4.2 отображение f неприводимо.

В силу ассоциативности послойного произведения доказанное утверждение распространяется на случай конечного числа сомножителей. Наконец, в случае произвольного числа сомножителей $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y$, $\alpha \in A$, рассмотрим мельчайшее направление $\mathcal{D}$ в множестве A, т. е. семейство всех конечных подмножеств множества A. Тогда, применяя теорему 2.15, получаем, что послойное произведение f отображений f_α является пределом спектра из конечных подпроизведений. А предел спектра из совершенных неприводимых отображений неприводим. Теорема доказана. □

4.30. Неприводимое y-элементарное отображение $X \to Y$ будем, как правило, обозначать символом e_y или его модификациями e'_y, e^1_y, e^2_y и т. д. Если $e_y\colon X \to Y$ — неприводимое y-элементарное отображение и y — неизолированная точка в пространстве Y, то бикомпакт $e_y^{-1}y$ нигде не плотен в пространстве X, а отображение $e_y|X \setminus e_y^{-1}(y)$ взаимно-однозначно и, в силу его замкнутости, является гомеоморфизмом пространства $X \setminus e_y^{-1}(y)$ на $Y \setminus \{y\}$. Таким образом, пространство X является расширением пространства $Y \setminus \{y\}$ с бикомпактным наростом, которое мы будем обозначать символом $\varepsilon_y Y$ или одной из его модификаций. Отображение $e_y\colon \varepsilon_y Y \to Y$ будем называть *y-расширением* пространства Y. Легко видеть, что верно и обратное: если для расширения $e(Y\setminus\{y\})$ с бикомпактным наростом натуральное отображение $e(Y \setminus \{y\}) \to X$ факторно, то оно является y-расширением. Это обозначение и название мы оставим и для случая изолированной точки $y \in Y$, когда отображение e_y необходимо является гомеоморфизмом. Впрочем, отображение e_y может быть гомеоморфизмом и для неизолированной точки y. В этом случае отображение e_y будем называть *минимальным* (или *наименьшим*) *y-расширением* пространства $Y \setminus \{y\}$.

4.31. Теорема. *Отображение $f\colon X \to Y$ вполне замкнуто, совершенно и неприводимо тогда и только тогда, когда оно является послойным произведением независимого семейства y-расширений пространства Y.*

Доказательство. Достаточность вытекает из теоремы 3.4, предложения 3.6 и теоремы 4.29. Пусть теперь отображение f вполне замкнуто, совершенно и неприводимо. По теореме 4.27 отображение f является послойным произведением y-элементарных отображений $\pi^y\colon Y^y \to Y$. Но отображение π^y неприводимо как левый делитель неприводимого отображения $f = \pi^y \circ f^y$. Следовательно, из 4.30 вытекает, что π^y является y-расширением пространства Y. Теорема доказана. □

4.32. Итак, всякое y-расширение $e_y\colon \varepsilon_y Y \to Y$ пространства Y, рассматриваемое с точностью до эквивалентности, является элементом множества $I_{fp}(Y)$. Для фиксированной точки $y \in Y$ обозначим через $I^y_{fp}(Y)$ множество всех y-расширений пространства Y.

4.33. Предложение. *Ограничение бинарного отношения $\leqslant$, введённого в 4.15, на множество $I^y_{fp}(Y)$ является отношением частичного порядка.*

Доказательство. Если $y \in Y$ — изолированная точка, то множество $I^y_{fp}(Y)$ вообще состоит из одного элемента. Если же y — неизолированная точка, то $e_y\colon \varepsilon_y Y \to Y$ является натуральным отображением расширения пространства $Y \setminus \{y\}$ на Y. Предположим, что $e^1_y \leqslant e^2_y$ и $e^2_y \leqslant e^1_y$. Тогда существуют накрытия $g^2_1\colon \varepsilon^2_y Y \to \varepsilon^1_y Y$ и $g^1_2\colon \varepsilon^1_y Y \to \varepsilon^2_y Y$ отображений e^1_y и e^2_y отображениями e^2_y и e^1_y соответственно. Это означает, что $e^1_y \circ g^2_1 = e^2_y$ и $e^2_y \circ g^1_2 = e^1_y$. Следовательно, $e^1_y \circ g^2_1 \circ g^1_2 = e^1_y$. Поэтому отображение $g^2_1 \circ g^1_2\colon \varepsilon^1_y Y \to \varepsilon^1_y Y$ является гомеоморфизмом на множестве $Y \setminus \{y\}$, всюду плотном в хаусдорфовом пространстве $\varepsilon^1_y Y$. Значит, $g^2_1 \circ g^1_2$ является тождественным гомеоморфизмом согласно предложению I.2.26. Поэтому g^2_1 является гомеоморфизмом, удовлетворяющим условию

$e_y^1 \circ g_1^2 = e_y^2$. Таким образом, отображение g_1^2 есть изоморфизм категории M_Y. Предложение доказано. $\square$

4.34. Предложение. *В частично упорядоченном множестве $I_{fp}^y(Y)$ существует наибольший элемент.*

В самом деле, согласно предложению 4.33 достаточно показать, что в множестве $I_{fp}^y(Y)$ существует элемент, накрывающий все остальные элементы этого множества. Для этого поступаем, как и при доказательстве теоремы 4.16, т. е. применяем предложение 4.6 для множества всех отображений из $I_{fp}^y(Y)$. Накрывающее отображение f_0 будет принадлежать множеству $I_{fp}^y(Y)$ согласно предложению 2.3.

Наибольший элемент множества $I_{fp}^y(Y)$ обозначим через $\pi_{faY}^y \colon f^y aY \to Y$.

Из предложения I.2.26 вытекает следующее утверждение.

4.35. Предложение. *Если $e_y^1, e_y^2 \in I_{fp}^y(Y)$ и $e_y^1 \leqslant e_y^2$, то существует единственное накрытие $(g_1^2)_y$ отображения e_y^1 отображением e_y^2.*

В обозначениях пункта 1.5 имеет место следующее утверждение.

4.36. Предложение. *Пусть $f_1 \colon X_1 \to Y$ и $f_2 \colon X_2 \to Y$ — совершенные вполне замкнутые отображения на пространство Y, пусть $g_1^2 \colon X_2 \to X_1$ — накрытие отображения f_1 отображением f_2, являющееся совершенным отображением, и пусть $y \in Y$. Тогда существует единственное такое совершенное отображение $(g_1^2)_y \colon Y_{f_2}^y \to Y_{f_1}^y$, что*

$$f_1^y \circ g_1^2 = (g_1^2)_y \circ f_2^y. \tag{3}$$

Доказательство. Из определения отображений f_1^y, f_2^y и равенства $f_2 = f_1 \circ g_1^2$ вытекает, что разбиение $d_{f_2^y}$ пространства X_2, определяемое отображением f_2^y, вписано в разбиение $d_{(f_1^y \circ g_1^2)}$ этого же пространства. Отсюда вытекает единственность и существование отображения $(g_1^2)_y$ (мы ещё не знаем, непрерывного или нет), удовлетворяющего условию (3). Пространство $Y_{f_2}^y$ регулярно согласно утверждению 1.6. Отображение f_1^y совершенно в силу предложения 1.10. Тогда из теоремы 2.9 вытекает совершенность композиции $f_1^y \circ g_1^2$ и, следовательно, её левого делителя $(g_1^2)_y$. Предложение доказано. $\square$

4.37. Теорема. *Если $f_1 \colon X_1 \to Y$ и $f_2 \colon X_2 \to Y$ — совершенные вполне замкнутые отображения на пространство Y, то $f_1 \leqslant f_2$ тогда и только тогда, когда $\pi_{f_1}^y \leqslant \pi_{f_2}^y$ для всякого $y \in Y$.*

Доказательство. Если $f_1 \leqslant f_2$, то, применяя обозначения предложения 4.36, записывая равенство (3) в обратном порядке и умножая его слева на отображение $\pi_{f_1}^y$, имеем

$$\pi_{f_1}^y \circ (g_1^2)_y \circ f_2^y = \pi_{f_1}^y \circ f_1^y \circ g_1^2 \overset{\text{согласно } 1.5}{=} f_1 \circ g_1^2 = f_2.$$

Таким образом,

$$\pi_{f_1}^y \circ (g_1^2)_y \circ f_2^y = f_2. \tag{4}$$

Но в силу 1.5 $\pi^y_{f_2}$ является единственным отображением, удовлетворяющим условию $\pi^y_{f_2} \circ f^y_2 = f_2$. Следовательно, из равенства (4) получаем $\pi^y_{f_2} = \pi^y_{f_1} \circ (g^2_1)_y$ и, значит, $\pi^y_{f_1} \leqslant \pi^y_{f_2}$.

Наоборот, пусть неравенство $\pi^y_{f_1} \leqslant \pi^y_{f_2}$ выполнено для каждого $y \in Y$. Следовательно, существует отображение $(g^2_1)_y \colon Y^y_{f_2} \to Y^y_{f_1}$, удовлетворяющее условию

$$\pi^y_{f_2} = \pi^y_{f_1} \circ (g^2_1)_y. \tag{5}$$

По теореме 4.27 отображение f_i является послойным произведением отображений $\pi^y_{f_i}$, $y \in Y$, $i = 1, 2$. Поэтому равенства (5) позволяют применить предложение 2.17, согласно которому в категории M_Y существует морфизм из отображения f_2 в отображение f_1. Но последнее и означает, что f_2 накрывает f_1. Теорема доказана. $\square$

4.38. Теорема. *Ограничение введённого в* 4.15 *бинарного отношения* $\leqslant$ *на множество* $I_{fp}(Y)$ *является отношением частичного порядка, относительно которого в* $I_{fp}(Y)$ *существует наибольший элемент.*

Доказательство. Если $f_1, f_2 \in I_{fp}(Y)$ и $f_1 \leqslant f_2$, то из теоремы 4.38 вытекает, что $\pi^y_{f_1} \leqslant \pi^y_{f_2}$ для каждого $e \in Y$. Из разложения $f_i = \pi^y_{f_i} \circ f^y_i$ и теоремы 2.9 вытекает совершенность отображений $\pi^y_{f_i}$ и f^y_i. Поэтому отображение $\pi^y_{f_i}$ неприводимо согласно предложению 4.4. Следовательно, отображение $\pi^y_{f_i}$ является y-расширением пространства Y (см. 4.30). Из предложения 4.35 вытекает единственность накрытия отображения $\pi^y_{f_1}$ отображением $\pi^y_{f_2}$. Поэтому из теоремы 4.27 и предложения 2.17 вытекает существование единственного накрытия отображения f_1 отображением f_2. А это в силу хаусдорфовости рассматриваемых пространств и означает антисимметричность отношения $\leqslant$.

Что касается наибольшего элемента множества $I_{fp}(Y)$, им будет в. з. абсолют $\pi_{faY} \colon fay \to Y$ из замечания 4.25, поскольку согласно только что доказанной частичной упорядоченности множества $I_{fp}(Y)$ все максимальные элементы этого множества изоморфны между собой. Теорема доказана. $\square$

4.39. Пусть $(O_\alpha, \leqslant_\alpha)$ — частично упорядоченное множество, $\alpha \in \mathcal{A}$. *Прямым произведением* множеств $(O_\alpha, \leqslant_\alpha)$ назовём множество $O = \prod\{O_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$, наделённое следующим частичным порядком $\leqslant$:

$$(o_\alpha) = o \leqslant o' = (o'_\alpha) \text{ тогда и только тогда, когда } o_\alpha \leqslant_\alpha o'_\alpha \text{ для всякого } \alpha \in \mathcal{A}.$$

4.40. Предложение. *Частично упорядоченное множество* $I_{fp}(Y)$ *изоморфно прямому произведению частично упорядоченных множеств* $I^y_{fp}(Y)$.

В самом деле, отображение, сопоставляющее всякому отображению $e \in I_{fp}(Y)$ набор отображений $\{\pi^y_e \colon y \in Y\}$, является, в силу теоремы 4.27 и неприводимости отображений π^y_e для неприводимого отображения e, биекцией множества $I_{fP}(Y)$ на произведение $\prod\{I^y_{fp}(Y) \colon y \in Y\}$. Биекция эта является изоморфизмом частично упорядоченных множеств согласно теореме 4.37 и определению 4.39.

4.41. Пусть Y — бикомпакт. Тогда y-расширением пространства Y для неизолированной точки $y \in Y$ является натуральное отображение $b_y \colon b(Y \setminus \{y\}) \to Y$ обычного бикомпактного расширения пространства $Y \setminus \{y\}$ на Y. Если точка y изолированная, то y-расширение единственно и совпадает с id_Y. Для неизолированной точки $y \in Y$ через C_y обозначим частично упорядоченное множество всех бикомпактных расширений пространства $Y \setminus \{y\}$. Через Y' обозначим *производное множество* пространства Y, т. е. подпространство пространства Y, состоящее из всех его неизолированных точек.

Из теоремы 4.31 и предложения 4.40 вытекает следующее утверждение.

4.42. Теорема. *Для бикомпакта Y множество $I_{fp}(Y)$ состоит из послойных произведений натуральных отображений $b_y \colon b(Y \setminus \{y\}) \to Y$, $y \in Y'$. Как частично упорядоченное множество, $I_{fp}(Y)$ изоморфно прямому произведению $\prod\{C_y \colon y \in Y'\}$.*

4.43. Следствие. *Вполне замкнутый абсолют faY бикомпакта Y совпадает с веерным произведением стоун-чеховских компактификаций $\beta(Y \setminus \{y\})$, $y \in Y'$, относительно их натуральных отображений на Y.*

Для дальнейшего нам придётся напомнить ещё несколько элементарных фактов общей топологии.

4.44. Предложение. *Если $f \colon X \to Y$ — совершенное отображение на финально компактное пространство Y, то пространство X также финально компактно.*

Из леммы Урысона и теоремы I.2.29 вытекает следующее утверждение.

4.45. Предложение. *Если $F_1, F_2 \subseteq X$ — замкнутые непересекающиеся подмножества нормального пространства X, то*

$$[F_1]_{\beta X} \cap [F_2]_{\beta X} = \varnothing.$$

4.46. Множество $Z \subseteq X$ называется C_b-вложенным в пространство X, если всякая ограниченная непрерывная функция $\varphi \colon Z \to \mathbb{R}$ может быть продолжена на X. При этом ясно, что если образ $\varphi(Z)$ лежит в некотором отрезке $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, то продолжение $\bar{\varphi} \colon X \to \mathbb{R}$ можно выбрать с тем же свойством $\bar{\varphi}(X) \subseteq [a, b]$.

Из теоремы I.2.29 вытекает следующее утверждение.

4.47. Предложение. *Если Z — множество, C_b-вложенное в тихоновское пространство X, то бикомпакт $[Z]_{\beta X}$ натурально гомеоморфен стоун-чеховской компактификации βZ.*

Из теоремы I.1.17 о продолжении функций и предложения 4.47 вытекает следующее утверждение.

4.48. Следствие. *Если F — замкнутое подмножество нормального пространства X, то $\beta F = [F]_{\beta X}$.*

Если $Z \subseteq X \subseteq \beta Z$, то из теоремы I.2.29 вытекает C_b-вложенность множества Z в пространство X. Поэтому следствием предложения 4.47 является следующее утверждение.

4.49. Предложение. *Если $Z \subseteq X \subseteq \beta Z$, то $\beta X = \beta Z$.*

4.50. Теорема. *Существует нормальное пространство Y, для которого $fa(faY) \neq faY$.*

Доказательство. В полуинтервале $Z = (0,1]$ рассмотрим последовательность $Z_0 = \{n^{-1}\colon n \geqslant 1\}$. Согласно следствию 4.48 имеем $\beta Z_0 \subseteq \beta Z$. Возьмём некоторую точку $y \in \beta Z_0$ и обозначим через Y подпространство бикомпакта βZ, получающееся добавлением точки y к полуинтервалу $(0,1] = Z$. Пространство Y, очевидно, финально компактно и, следовательно, нормально.

Теперь докажем, что
$$|(\pi_{faY})^{-1}y| = 1. \tag{6}$$
Из теорем 4.31 и 4.37 вытекает, что множество $(\pi_{faY})^{-1}y$ гомеоморфно множеству $(\pi^y_{faY})^{-1}y$. Поэтому если условие (6) не выполняется, то
$$|(\pi^y_{faY})^{-1}y| \geqslant 2. \tag{7}$$
Возьмём две различные точки $x_1, x_2 \in (\pi^y_{fay})^{-1}y \subseteq f^y aY \equiv X$. В силу регулярности пространства X у точек x_1 и x_2 существуют окрестности U_1 и U_2 с непересекающимися замыканиями. Пространство X согласно 4.30 является расширением пространства $Y \setminus \{y\} = Z$. Поэтому можно считать, что $Z \subseteq X$. Положим $V_i = U_i \cap Z$. Поскольку отображение $\pi^y_{faY}\colon X \to Y$ неприводимо, согласно предложению 4.17 имеем
$$y \in [V_1]_Y \cap [V_2]_Y. \tag{8}$$
С другой стороны, из $[U_1]_X \cap [U_2]_X = \varnothing$ вытекает
$$[V_1]_Z \cap [V_2]_Z = \varnothing. \tag{9}$$
Но пространство Z нормально. Поэтому из предложения 4.45 и условия (9) следует, что
$$[V_1]_{\beta Z} \cap [V_2]_{\beta Z} = \varnothing.$$
Но это противоречит условию (8). Таким образом, равенство (6) установлено.

Остаётся показать, что существует вполне замкнутое совершенное неприводимое отображение $g\colon T \to faY$, для которого
$$|g^{-1}(x)| \geqslant 2, \tag{10}$$
где $\{x\} = (\pi_{faY})^{-1}y$.

Положим
$$Z_i = \bigcup\{[(2n+i)^{-1}, (2n-1+i)^{-1}]\colon n \geqslant 1\}, \quad i = 1,2.$$
Ясно, что множества Z_i замкнуты в Z, $Z_1 \cap Z_2 = Z_0$, $Z_1 \cup Z_2 = Z$. По выбору точки $y \in \beta Z_0$ имеем
$$[Z_i]_Y = \{y\} \cup Z_i, \quad i = 1,2.$$

Таким образом, множества $K_i \equiv [Z_i]_Y$ являются канонически замкнутыми подмножествами пространства Y, для которых

$$K_1 \cup K_2 = Y, \quad \operatorname{Int} K_1 \cap \operatorname{Int} K_2 = \varnothing. \tag{11}$$

Положим $W_i = \operatorname{Int} K_i$ и

$$S_i = [(\pi_{faY})^{-1} W_i], \quad i = 1, 2. \tag{12}$$

Из определения множеств S_1 и S_2, предложения 4.17 и условия (11) вытекает, что S_1 и S_2 являются канонически замкнутыми множествами пространства faY, удовлетворяющими условию

$$S_1 \cup S_2 = faY, \quad \operatorname{Int} S_1 \cap \operatorname{Int} S_2 = \varnothing. \tag{13}$$

Покажем, что

$$S_1 \cap S_2 = \{x\}. \tag{14}$$

Следуя доказательству импликации 1) $\implies$ 2) теоремы 4.19, в произведении $Y \times \{1, 2\}$ рассмотрим замкнутое подмножество $L = L_1 \cup L_2$, где $L_i = K_i \times \{i\}$. Обозначим через $h\colon L \to Y$ ограничение проектирования $p_Y\colon Y \times \{1, 2\} \to Y$ на множество L. Как и в 4.19, отображение h неприводимо и совершенно. Кроме того, оно гомеоморфно отображает множество $W_i \times \{i\}$ на множество W_i, $i = 1, 2$. В частности, $h \in I_p(Y)$. Обозначим через M фактор-пространство пространства L относительно разбиения, единственным неодноточечным элементом которого является множество $\{y\} \times \{1, 2\}$. Факторное отображение $L \to M$ обозначим через q. Существует единственное (автоматически непрерывное) отображение $h_1\colon M \to Y$, для которого $h = h_1 \circ q$. По теореме 2.9 отображения q и h совершенны, а по предложению 4.4 — замкнуты.

Отображение q, будучи элементарным, вполне замкнуто. Отображение h_1 также вполне замкнуто. В самом деле, полную замкнутость отображения h_1 достаточно проверить в точках его неоднозначности. Но ими являются точки $z \in Z_0$. Каждая такая точка z имеет в Y окрестность, не пересекающуюся с другими точками из Z_0, откуда полная замкнутость отображения h_1 в точке z и вытекает.

Поскольку отображение $\pi_{faY}\colon faY \to Y$ является в. з. абсолютом, существует такое совершенное неприводимое отображение $k\colon faY \to M$, что

$$\pi_{faY} = h_1 \circ k. \tag{15}$$

Теперь перейдём непосредственно к доказательству равенства (14). Пусть $x_1 \in S_1 \cap S_2$. Поскольку S_i — канонически замкнутое множество, имеем $x_1 \in \in [\operatorname{Int} S_i]$. Следовательно, $k(x_1) \in [k^{\#}(\operatorname{Int} S_i)]$ согласно предложению 4.17, 3). Поэтому в силу предложения 4.17, 1)

$$k(x_1) \in [h_1^{-1}(\pi^{\#}_{fay)}(\operatorname{Int} S_i)]. \tag{16}$$

Но открытые множества $(\pi_{fay})^{\#}(\operatorname{Int} S_1 f)$ и $(\pi_{faY})^{\#}(\operatorname{Int} S_2)$ не пересекаются и согласно (12) содержат канонически открытые множества W_1 и W_2, дающие в сумме всюду плотное в Y множество. Значит,

$$(\pi_{faY})^{\#}(\operatorname{Int} S_i) = W_i.$$

Следовательно, в силу (16)

$$k(x_1) \in [h_1^{-1} W_i].$$

Но из равенств $h = h_1 \circ q$ и $h^{-1} W_i = W_i \times \{i\}$ вытекает, что

$$[h_1^{-1} W_i] \subseteq q L_i.$$

Значит,

$$k(x_1) \in qL_1 \cap qL_2 = q(h^{-1} y). \tag{17}$$

Поэтому

$$\pi_{faY}(x_1) \overset{(15)}{=} (h_1 \circ k)(x_1) \overset{(17)}{\in} h_1 \circ q(h^{-1} Y) = (h_1 \circ q = h) = \{y\}.$$

Таким образом, $x_1 = x$, поскольку y является точкой взаимной однозначности отображения π_{faY} согласно равенству (6). Итак, равенство (14) проверено.

Теперь в произведении $faY \times \{1, 2\}$ рассмотрим замкнутое подпространство $T = T_1 \cup T_2$, где $T_i = S_i \times \{i\}$, и положим $g = p_{faY}|T$. Тогда $|g^{-1}(x)| = 2$ и точка x, в силу равенства (14), является единственной точкой с неодноточечным прообразам. Следовательно, отображение g вполне замкнуто, будучи элементарным. Оно совершенно как ограничение совершенного отображения $faY \times \{1, 2\} \to faY$ на замкнутое подпространство T. Наконец, отображение g неприводимо, поскольку является гомеоморфизмом на всюду плотном в T множестве $g^{-1}(faY \setminus \{x\})$. Теорема 4.50 доказана. □

4.51. Предложение. *Пусть $f\colon X \to Y$ — совершенное отображение хаусдорфова пространства X на регулярное пространство Y. Тогда пространство X также регулярно.*

Доказательство. Надо заключить в непересекающиеся окрестности замкнутое множество $F \subseteq X$ и точку $x \in X \setminus F$. В силу замкнутости отображения f и регулярности пространства Y достаточно рассмотреть случай $fx \in fF$. В хаусдорфовом пространстве X существуют непересекающиеся окрестности U и V точки x и бикомпакта $F \cap f^{-1} fx$ соответственно. В регулярном пространстве Y существуют непересекающиеся окрестности Ofx и W точки fx и не содержащего её замкнутого множества $f(F \setminus V)$. Полагая $Ox = U \cap f^{-1} Ofx$ и $OF = V \cup f^{-1} W$, получаем непересекающиеся окрестности точки x и множества F. Предложение доказано. □

4.52. Предложение. *Пусть $f\colon X \to Y$ — элементарное бикомпактное отображение хаусдорфова пространства X на нормальное пространство Y. Тогда пространство X также нормально.*

Доказательство. Согласно предложению 3.6 отображение f совершенно. Следовательно, в силу предложения 4.51 пространство X регулярно. Пусть $y_0 \in Y$ — единственная точка нетривиальности отображения f. Бикомпакт

$f^{-1}(y_0)$ обозначим через B. Пусть $F_1, F_2 \subseteq X$ — непересекающиеся замкнутые множества. Положим $B_i = F_i \cap B$. В силу регулярности пространства X существуют такие окрестности OB_i, что

$$OB_1 \cap OB_2 = \varnothing = [OB_1] \cap F_2 = [OB_2] \cap F_1. \tag{18}$$

Положим $C = B \setminus OB_1 \cup OB_2$. Существует такая окрестность OC, что

$$[OC] \cap (F_1 \cup F_2) = \varnothing.$$

Положим $OB = OB_1 \cup OC \cup OB_2$ и $\Phi_i = F_i \setminus OB$. Множества $f(\Phi_1)$ и $f(\Phi_2)$ являются непересекающимися замкнутыми подмножествами нормального пространства X. Пусть U_1, U_2 — непересекающиеся окрестности этих множеств. Положим

$$V_1 = f^{-1}(U_1) \cup OB_1 \setminus [OB_2],$$
$$V_2 = f^{-1}(U_2) \cup OB_2 \setminus [OB_1].$$

Множество V_i открыто и содержит F_i согласно (18). Ясно также, что $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Предложение доказано. □

Поскольку произведение нормальных пространств вполне регулярно, из теоремы 3.7 и предложения 4.52 вытекает следующее утверждение.

4.53. Теорема. *Если хаусдорфово пространство X может быть отображено на нормальное пространство Y посредством совершенного вполне замкнутого отображения, то пространство X вполне регулярно.*

4.54. Предложение. *Пусть $f\colon X \to Y$ — замкнутое сюръективное отображение между регулярными пространствами. Пусть $Y_0 \subseteq Y$ — такое подпространство, что отображение $f|X \setminus f^{-1}(Y_0)$ взаимно-однозначно, а отображение $f_0 \equiv f|f^{-1}(Y_0)$ вполне замкнуто. Тогда отображение f вполне замкнуто.*

Доказательство. Пусть $F_1, F_2 \subseteq X$ — замкнутые непересекающиеся множества. Положим $\Phi_i = F_i \cap f^{-1}(Y_0)$. Поскольку отображение f_0 вполне замкнуто, множество $Z = f_0(\Phi_1) \cap f_0(\Phi_2)$ дискретно в пространстве Y_0 согласно 1.6. Из того, что отображение $f|X \setminus f^{-1}(Y_0)$ взаимно-однозначно, вытекает, что $Z = f(F_1) \cap f(F_2)$. Замкнутость отображения f влечёт замкнутость множества Z. Следовательно, оно дискретно и во всём пространстве Y. Применение того же утверждения 1.6 завершает доказательство нашего предложения. □

4.55. Теорема. *Пусть $f\colon X \to Y$ — совершенное вполне замкнутое отображение хаусдорфова пространства X на нормальное пространство Y. Тогда существует такое хаусдорфово бикомпактное расширение bX и такое вполне замкнутое отображение $f_b\colon bX \to \beta Y$, что $f = f_b|X$.*

Доказательство. По теореме 4.53 пространство X вполне регулярно. Возьмём продолжение $f_\beta\colon \beta X \to \beta Y$ отображения f и рассмотрим следующее разбиение d бикомпакта βX:

$$d = \{\{x\}\colon x \in X\} \cup \{(f_\beta)^{-1}(\eta)\colon \eta \in \beta Y \setminus Y\}.$$

Обозначим через bX фактор-пространство пространства βX по разбиению d и через $q\colon \beta X \to bX$ — соответствующее факторное отображение. Ясно, что $q|X$ — гомеоморфизм. Следовательно, пространство bX является бикомпактным расширением пространства $q(X) = X$. Покажем, что оно хаусдорфово.

По определению разбиения d оно вписано в разбиение d_{f_β}, соответствующее отображению f_β. Следовательно, существует единственное отображение $f_b\colon bX \to bY$, для которого

$$f_\beta = f_b \circ q. \tag{19}$$

Из (19) и факторности отображения q вытекает непрерывность отображения f_b. Далее, оно взаимно-однозначно на $bX \setminus q(X)$. Следовательно, в пространстве bX достаточно найти непересекающиеся окрестности $O\xi_1$ и $O\xi_2$ у таких точек $\xi_1, \xi_2 \in q(X)$, что $f_b(\xi_1) = f_b(\xi_2) = y$.

Множество $q^{-1}(\xi_i)$ состоит из одной точки x_i. Пусть U_1, U_2 — такие окрестности точек x_1, x_2 в бикомпакте βX, что

$$[U_1] \cap [U_2] = \varnothing.$$

Положим $V_i = U_i \cap X$ и $F_i = f([V_i]_X)$. Поскольку f вполне замкнуто, множество $F_1 \cap F_2$ дискретно в Y согласно 1.6. Уменьшая окрестности U_i, можно считать, что

$$F_1 \cap F_2 = \{y\}. \tag{20}$$

Пусть Oy — произвольная окрестность точки y в пространстве βY. Из (20) вытекает, что

$$(F_1 \setminus Oy) \cap (F_2 \setminus Oy) = \varnothing.$$

Отсюда в силу нормальности пространства Y получаем

$$[F_1 \setminus Oy]_{\beta Y} \cap [F_2 \setminus Oy]_{\beta Y} = \varnothing. \tag{21}$$

Ввиду открытости множества Oy равенство (21) можно переписать в виде

$$[F_1]_{\beta Y} \cap [F_2]_{\beta Y} \setminus Oy = \varnothing.$$

Следовательно,

$$[F_1]_{\beta Y} \cap [F_2]_{\beta Y} = \{y\}.$$

Из определения множеств F_i и очевидного равенства $[U_i] = [V_i]$ вытекает

$$f_\beta[U_i] = [F_i]_{\beta Y} \tag{22}$$

и, значит,

$$f_\beta[U_1] \cap f_\beta[U_2] = \{y\}. \tag{23}$$

Далее, множества $q(V_1)$ и $q(V_2)$ являются непересекающимися окрестностями точек ξ_1 и ξ_2 в пространстве $q(X)$. Обозначим через W_i наибольшее открытое в bX множество, для которого $q(V_i) = W_i \cap q(X)$. Поскольку $q(X)$ всюду плотно в пространстве bX, имеем

$$W_i \subseteq [q(V_i)]_{bX}. \tag{24}$$

Из (22) вытекает, что
$$[q(V_i)]_{bX} \subseteq f_b^{-1}(f_\beta[U_i]).$$
Следовательно, согласно (23) и (24) имеем
$$W_1 \cap W_2 \subseteq f_b^{-1}(y).$$
Но $f^{-1}(y) \subseteq q(X)$. Поэтому
$$W_i \cap f_b^{-1}(y) = q(V_i) \cap f_b^{-1}(y).$$
Значит,
$$W_1 \cap W_2 = q(V_1) \cap q(V_2) \cap f_b^{-1}(y) = \varnothing.$$
Таким образом, пространство bX хаусдорфово. Применение предложения 4.54 завершает доказательство теоремы. □

4.56. Предложение. *Ограничение неприводимого отображения на прообраз всюду плотного множества неприводимо.*

Доказательство. Пусть отображение $f\colon X \to Y$ неприводимо, $Y_0 \subseteq Y$ — всюду плотное в Y множество и $f_0 = f|f^{-1}Y_0\colon f^{-1}Y_0 \to Y_0$. Поскольку отображение f_0 замкнуто и сюръективно, согласно предложению 4.2 достаточно проверить, что $f_0^{\#}U \neq \varnothing$ для произвольного непустого открытого множества $U \subseteq f^{-1}Y_0$. Возьмём какое-нибудь открытое множество $V \subseteq X$, подчинённое условию $V \cap f^{-1}Y_0 = U$. В силу того же предложения 4.2 имеем $f^{\#}V \neq \varnothing$. Поскольку Y_0 всюду плотно в Y, имеем $Y_0 \cap f^{\#}V \neq \varnothing$. Но $f_0^{\#}U = Y_0 \cap f^{\#}V$. Предложение доказано. □

4.57. Теорема. *Пусть Y — нормальное пространство. Тогда его в. з. абсолют π_{faY} совпадает с отображением $\pi_{fa\beta Y}|(\pi_{fa\beta Y})^{-1}Y$.*

Доказательство. Пусть $X = faY$. Согласно теореме 4.55 существуют такое бикомпактное расширение bX и такое вполне замкнутое отображение $g\colon bX \to \beta Y$, что $\pi_{faY} = g|X$. Из неприводимости отображения π_{faY} вытекает неприводимость отображения g. Поскольку $\pi_{fa\beta Y}$ является в. з. абсолютом бикомпакта βY, существует такое отображение $h\colon fa\beta Y \to bX$, что $\pi_{fa\beta Y} = g \circ h$. Отображение $\pi_{fa\beta Y}|(\pi_{fa\beta Y})^{-1}Y$ неприводимо согласно предложению 4.56 и вполне замкнуто по предложению 1.14. Оно накрывает в. з. абсолют π_{faY} пространства Y посредством отображения $h|h^{-1}X$. Следовательно, $h|h^{-1}X$ — гомеоморфизм. Теорема доказана. □

4.58. Лемма. *Пусть Z — нормальное пространство, $Y = \beta Z$, $Y_0 = \{y_0\} \cup Z$, где $y_0 \in \beta Z \setminus Z$. Предположим, что в. з. абсолют faY_0 нормален, $|(\pi_{faY_0})^{-1}y_0| = 1$ и $|(\pi_{fa(faY_0)})^{-1}(\pi_{faY_0})^{-1}y_0| \geqslant 2$. Тогда $faY \neq fa(faY)$.*

Доказательство. Введём следующие сокращающие обозначения:
$$p_1 = \pi_{faY_0}, \quad p_2 = \pi_{fa(faY_0)}, \quad \pi_1 = \pi_{faY}, \quad \pi_2 = \pi_{fa(faY)}.$$

Согласно теореме 4.57 имеем
$$p_1 = \pi_1|\pi_1^{-1}Y_0 \to Y_0,$$
$$p_2 = \pi_2|\pi_2^{-1}\pi_1^{-1}Y_0 \to \pi_1^{-1}Y_0.$$
Следовательно, из условий леммы вытекает, что
$$|\pi_1^{-1}y_0| = 1, \quad |\pi_2^{-1}\pi_1^{-1}y_0| \geqslant 2.$$
Поэтому отображение π_2 не может быть гомеоморфизмом. Лемма доказана. □

4.59. Теорема. *Существует бикомпакт Y, для которого $fa(faY) \neq faY$.*

Доказательство. Положим $Y = \beta Z$, где $Z = (0,1]$ — пространство из доказательства теоремы 4.50. Остаётся применить лемму 4.58. Для этого надо подобрать точку $y_0 \in \beta Z \setminus Z$ с указанными в условиях леммы свойствами. В качестве такой точки берём точку $y \in \beta Z_0$ из доказательства теоремы 4.50. Условия на прообразы точки $y_0 = y$ извлекаются из доказательства теоремы 4.50 (равенство (6) и основное свойство отображения g). Наконец, пространство faY_0 нормально, будучи финально компактным согласно предложению 4.4. Теорема доказана. □

Из следствия 4.43 и теоремы 4.57 вытекает следующее утверждение.

4.60. Теорема. *Вполне замкнутый абсолют π_{faY} нормального пространства Y топологически совпадает с послойным произведением натуральных отображений $\beta(\beta Y \setminus \{y\}) \to \beta Y$, $y \in Y'$, ограниченным на полный прообраз пространства Y.*

4.61. Следствие. *Для всякой неизолированной точки y нормального пространства Y множество $(\pi_{faY})^{-1}y$ гомеоморфно наросту $\beta(\beta Y \setminus \{y\}) \setminus (\beta Y \setminus \{y\})$.*

4.62. Замечание. В случае тихоновского пространства Y ситуация осложняется. С одной стороны, существуют примеры совершенных неприводимых отображений тихоновских пространств на пространства, не являющиеся тихоновскими (см. [99, пример 2.4.21, примечание к теореме 3.7.20]). С другой стороны, существует элементарное бикомпактное отображение не тихоновского пространства на тихоновское (см. [110]). В связи с этим возникают следующие вопросы.

4.63. Вопрос. Обязан ли быть тихоновским совершенный вполне замкнутый образ тихоновского пространства?

4.64. Вопрос. Будет ли тихоновским вполне замкнутый абсолют тихоновского пространства?

В силу упомянутого в замечании 4.62 примера Исбелла и Хенриксена по крайней мере один из этих вопросов имеет отрицательный ответ.

В связи с вопросом 4.63 сто́ит отметить следующее утверждение, доказательство которого легко и приятно.

4.65. Предложение. *Образ тихоновского пространства при простом бикомпактном отображении является тихоновским пространством.*

Простым отображением здесь называется композиция конечного числа элементарных отображений, или, что то же самое, факторное отображение, при котором только у конечного числа точек могут быть неодноточечные прообразы.

4.66. Для тихоновского пространства Y и его неизолированной точки y через $\pi^y_{f_0aY}$ обозначим ограничение натурального отображения $\beta(\beta Y \setminus \{y\}) \to \beta Y$ на полный прообраз $f^y_0 aY$ пространства Y. Для нормального пространства Y отображение $\pi^y_{f_0aY}$ совпадает с наибольшим элементом π^y_{faY} множества $I^y_{fp}(Y)$ в силу предложения 4.40 и теоремы 4.60.

Но даже если ответ на вопрос 4.64 положителен, неясным остаётся ответ на следующий вопрос.

4.67. Вопрос. Совпадают ли отображения $\pi^y_{f_0aY}$ и π^y_{faY} для тихоновского пространства Y?

И совсем уже туманным представляется ответ на следующий вопрос.

4.68. Вопрос. Что можно сказать о бикомпакте, являющемся наростом y-расширения $f^y aY \setminus (Y \setminus \{y\})$ регулярного пространства Y? Посредством каких отождествлений он получается из подмножества $(\pi_{aY})^{-1}y$ абсолюта aY пространства Y?

В связи с теоремами 4.50 и 4.59 возникает следующий вопрос.

4.69. Вопрос. Существует ли нормальное (бикомпактное) пространство Y, для которого $fa(fa(faY))\neg fa(faY)$?

§ 5. Спектральное дерево и его свёртка

Все пространства предполагаются регулярными, все отображения — совершенными.

5.1. *Полурешёткой* называется направленное вниз (см. I.3.3) частично упорядоченное множество с наименьшим элементом. *Деревом* называется такая полурешётка $\mathcal{O}$, что для каждого $X \in \mathcal{O}$ интервал $(-\infty, X)$ вполне упорядочен. Порядковый тип множества $(-\infty, X)$ будем обозначать через $h(X)$ и называть *высотой элемента* X. Минимальное порядковое число $\alpha \equiv h(\mathcal{O})$, такое что $h(X) < \alpha$ для всех $X \in \mathcal{O}$, будем называть *высотой дерева* $\mathcal{O}$.

5.2. Определение. *Топологическая категория* $T = (\mathcal{O}, P)$ (подкатегория категории *Top* (см. I.3.7)) называется *спектральным деревом*, если

1) $|[X, Y]| \leqslant 1$ для всех $X, Y \in \mathcal{O}$,
2) предпорядок на $\mathcal{O}$ (см. I.3.2) является частичным порядком, относительно которого $\mathcal{O}$ является деревом.

5.3. Если $|[X, Y]| = 1$, то единственный морфизм из пространства X в пространство Y будем обозначать через π^X_Y, ρ^X_Y и т. д. и называть *проекцией спектрального дерева* T. *Высотой* $h(T)$ спектрального дерева $T = (\mathcal{O}, P)$ будем называть высоту дерева $\mathcal{O}$. Если ξ — максимальная *цепь* (линейно упорядоченное подмножество) дерева $\mathcal{O}$ и α меньше порядкового типа ξ, то существует такой единственный элемент $X \in \xi$, что $h(X) = \alpha$. Иногда нам будет удобно обозначать этот элемент через X^{ξ}_{α}. Если $X \in \mathcal{O}$ и высота $h(X)$ изолированная, то единственный предшественник элемента X в дереве $\mathcal{O}$ обозначается через ^{-}X.

5.4. Для $\alpha \leqslant h(T)$ обозначим через $T|\alpha$ множество $\{X \in \mathcal{O}, \pi^X_Y : h(X) < \alpha\}$. Ясно, что $T|\alpha$ — спектральное дерево высоты α. Если $X \in T$, то через $T|X$ обозначаем множество $\{Y \in \mathcal{O}, \pi^Y_Z \in P : Y < X\}$. Из 5.2 и 5.1 вытекает, что множество $T|X$ является вполне упорядоченным обратным спектром.

5.5. Определение. Спектральное дерево T называется *непрерывным*, если для каждого объекта $X \in T$ спектр $T|X$ непрерывен. Кроме того, мы потребуем, чтобы наименьший объект дерева T состоял из одной точки.

5.6. Определение. Пусть дано семейство отображений $\{f_\alpha : X \to X_\alpha, g_\alpha : Y_\alpha \to X_\alpha : \alpha \in A\}$. Тогда *веерным произведением* этого семейства называется такое семейство отображений $\{g : Y \to X, h_\alpha : Y \to Y_\alpha : \alpha \in A\}$, что имеют место все равенства

$$f_\alpha \circ g = g_\alpha \circ h_\alpha \tag{1}$$

и для каждого такого семейства отображений $\{\hat{g} : \hat{Y} \to X, \hat{h}_\alpha : \hat{Y} \to Y_\alpha : \alpha \in A\}$, что справедливо каждое из равенств

$$f_\alpha \circ \hat{g} = g_\alpha \circ \hat{h}_\alpha, \tag{2}$$

существует единственное такое отображение $h : \hat{Y} \to Y$, не обязанное быть эпиморфизмом, что $\hat{g} = gh$ и $\hat{h}_\alpha = h_\alpha h$ для всех $\alpha \in A$.

5.7. Теорема. *Каждое семейство* $\{f_\alpha : X \to X_\alpha, g_\alpha : Y_\alpha \to X_\alpha : \alpha \in A\}$ *имеет единственное веерное произведение.*

Доказательство. Сначала проверим единственность. Пусть $\{g : Y \to X, h_\alpha : Y \to Y_\alpha\}$ и $\{\hat{g} : \hat{T} \to X, \hat{h}_\alpha : \hat{Y} \to Y_\alpha\}$ — веерные произведения одного семейства. Пусть $h : \hat{Y} \to Y$ и $h' : Y \to \hat{Y}$ — единственные отображения, удовлетворяющие определению 5.6 веерного произведения. Тогда $ghh' = g$ и $h_\alpha hh' = g_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$. Но согласно 5.6 существует единственное отображение $k : Y \to Y$, такое что $gk = g$ и $h_\alpha k = h_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$. Следовательно, $hh' = \mathrm{id}_Y$. Аналогично, $h'h = \mathrm{id}_{\hat{Y}}$. Единственность доказана.

Теперь убедимся в существовании. Пусть равенство

$$f_\alpha \circ (p_\alpha : Z_\alpha \to X) = g_\alpha \circ (q_\alpha : Z_\alpha \to Y_\alpha) \tag{3}$$

описывает послойное произведение двух отображений f_α и g_α. Пусть теперь $\{r_\alpha : Y \to Z_\alpha : \alpha \in A\}$ — послойное произведение семейства отображений $\{p_\alpha : Z_\alpha \to X : \alpha \in A\}$. Положим $h_\alpha = g_\alpha r_\alpha$ и $g = p_\alpha r_\alpha$. Тогда h_α и g — эпиморфизмы как композиции проекций p_α, g_α, r_a веерных произведений (см. 2.3). Кроме того,

$$f_\alpha g = f_\alpha p_\alpha r_\alpha = g_\alpha q_\alpha r_\alpha = g_\alpha h_\alpha.$$

Пусть теперь $\{\hat{g} : \hat{Y} \to X, \hat{h}_\alpha : \hat{Y} \to Y_\alpha : \alpha \in A\}$ — такое произвольное семейство, что $f_\alpha \hat{g} = g_\alpha \hat{h}_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$. Согласно категорному свойству послойного произведения (2.12) существуют такие единственные отображения $\hat{r}_\alpha\colon \hat{Y} \to z_\alpha$, что $p_\alpha \hat{r}_\alpha = \hat{g}$ и $q_\alpha \hat{r}_\alpha = \hat{h}_\alpha$ для всех $\alpha \in A$. По тому же свойству существует такое единственное отображение $h\colon \hat{Y} \to Y$, что $r_\alpha h = \hat{r}_\alpha$. Следовательно,

$$\hat{g} = p_\alpha \hat{r}_\alpha = p_\alpha r_\alpha h = gh$$

и

$$\hat{h}_\alpha = q_\alpha \hat{r}_\alpha = q_\alpha r_\alpha h = h_\alpha h.$$

Теорема доказана. □

5.8. Предложение. *Пусть* $\{g_\alpha\colon Y \to X, h_\alpha\colon Y \to Y_\alpha\colon \alpha \in A\}$ *— веерное произведение семейства* $\{f_\alpha\colon X \to X_\alpha, g_\alpha\colon Y_\alpha \to X_\alpha\colon \alpha \in A\}$, *и пусть* $x \in X$. *Тогда множество* $g^{-1}x$ *гомеоморфно произведению* $\prod\{g_\alpha^{-1} f_\alpha x\colon \alpha \in A\}$.

Доказательство. Мы следуем доказательству теоремы 4.7. Обращаясь к равенству (3), из 2.3 получаем, что множество $p_\alpha^{-1}x$ гомеоморфно множеству $g_\alpha^{-1} f_\alpha x$. Снова применяя 2.3, получаем, что множество $g^{-1}x$ гомеоморфно множеству $\prod h_\alpha^{-1} x$, которое в свою очередь гомеоморфно произведению $\prod g_\alpha^{-1} f_\alpha x$. Предложение доказано. □

5.9. Определение. Пусть T — непрерывное спектральное дерево высоты α. Семейство $R = \{S, \pi_X\colon X \in T\}$, где $S = \{Y_\beta, \pi_{\dot\beta}^{\beta}\colon \beta < \alpha\}$ — непрерывный спектр и $\pi_X\colon Y_{h(X)} \to X$ — эпиморфизм, будет называться *накрытием* спектрального дерева T, если $\pi_X \pi_{h(X)}^{h(X')} = \pi_X^{X'} \pi_{X'}$ для всех $X, X' \in T$, $X \leqslant X'$.

5.10. Определение. Пусть $\beta < h(T)$, и пусть R — накрытие спектрального дерева $T|\beta$. Накрытие R' дерева T называется *продолжением накрытия R на дерево T*, если $R'|\beta = R$, где $R'|\beta = \{S|\beta, \pi_X \in R\colon h(X) < \beta\}$.

5.11. Лемма. *Пусть T — непрерывное спектральное дерево высоты α, и пусть $\beta < \alpha$. Тогда для накрытия R дерева $T|\beta$ существует его продолжение R' на дерево T.*

Доказательство. Трансфинитной рекурсией по γ, где $\beta < \gamma \leqslant \alpha$, будем строить такие накрытия R_γ спектральных деревьев $T|\gamma$, что $R_\gamma|\beta = R$ и $R_\gamma|\delta = R_\delta$ для $\beta < \delta \leqslant \gamma$. Надо сделать три перехода: 1) к предельному γ, 2) от предельного γ к $\gamma + 1$, 3) от $\gamma + 1$ к $\gamma + 2$. В первом случае полагаем $R_\gamma = \bigcup\limits_{\delta<\gamma} R_\delta$. Пусть во втором случае $R_\gamma = \{S_\gamma, \pi_X\colon X \in T|\gamma\}$. Тогда обозначим через $S_{\gamma+1}$ пополнение спектра S_γ его пределом Y_γ и сквозными проекциями π_β^γ. Согласно 3.2 проекции спектра $S_{\gamma+1}$ — совершенные эпиморфизмы. Далее для $X \in T|\gamma+1$, $h(X) = \gamma$, положим $F_X = \{\pi_Y \in R_\gamma\colon Y < X\}$. Тогда очевидно, что семейство F_X будет морфизмом спектра S_γ в спектр $T|X$. Положим $\pi_X = \lim F_X$. Тогда в силу непрерывности дерева T и предложения 3.3 π_X будет совершенным эпиморфизмом.

Наконец, в третьем случае полагаем

$$\{\pi_\gamma^{\gamma+1}\colon Y_{\gamma+1} \to Y_\alpha, \pi_X\colon Y_{\gamma+1} \to X\colon X \in T,\ h(X) = \gamma + 1\}$$

равным веерному произведению семейства

$$\{\pi_{-X}\colon Y_y \to {}^{-}X, \pi^{X}_{-X}\colon X \to X\colon X \in T,\ h(X) = \gamma + 1\}.$$

Тогда из 5.7 вытекает, что, пополнив накрытие $R_{\gamma+1}$ вновь построенными отображениями $\pi_{\gamma}^{\gamma+1}$, π_X и пространством $Y_{\gamma+1}$, получим искомое накрытие $R_{\gamma+2}$. Лемма доказана. □

5.12. Определение. Накрытие R спектрального дерева T называется *свёрткой* дерева T, если для любого накрытия $\hat{R} = \{\hat{S}, \hat{\pi}_X\colon X \in T\}$ существует такой единственный морфизм $F = \{f_\beta\}\colon \hat{S} \to S$ (f_β не обязаны быть эпиморфизмами), что $\hat{\pi}_X = \pi_X f_{h(X)}$ для всех $X \in T$.

5.13. Построение. Применяя рекурсивное построение из 5.11, начинающееся с накрытия R_1 одноточечного пространства $T|1$ одноточечным пространством Y_0, получим накрытие $R(T) = \{S, \pi_X\colon X \in T\}$ непрерывного спектрального дерева T.

5.14. Определение. Для произвольной категории $\mathcal{A}$ обозначим через $\overline{\mathcal{A}}$ пополнение категории $\mathcal{A}$ пределами и сквозными проекциями обратных спектров, содержащихся в $\mathcal{A}$.

Из построения накрытия $R(T)$ непосредственно вытекают следующие свойства операции R.

5.15. Свойства операции *R*.

1. $R(T|\alpha) = R(T)|\alpha$.
2. Если $h(T)$ предельно, то $R(T) = \bigcup\{R(T|\alpha)\colon \alpha < \beta\}$.
3. $\overline{R(T)} = R(\overline{T})$.
4. $R(T|\alpha{+}2)$ получается из $R(T|\alpha{+}1)$ операцией веерного произведения 4.6.

5.16. Теорема. *Накрытие $R(T)$ является единственной свёрткой непрерывного спектрального дерева T.*

Доказательство. Единственность вытекает из определения свёртки. Мы покажем, что накрытие $R(T)$ является свёрткой дерева T индукцией по высоте дерева T. При $h(T) = 1$ это очевидно. Предположим, что для всякого непрерывного спектрального дерева высоты $\alpha' < \alpha$ накрытие $R(T)$ является свёрткой дерева T.

Пусть $h(T) = \alpha$, и пусть $R = \{S', \rho_X\colon X \in T\}$ — накрытие дерева T. Согласно первому свойству 5.15 для всякого $\gamma < \alpha$ существует такой единственный морфизм $F_\gamma = \{f^\gamma_\beta\}\colon S'|\gamma \to S|\gamma$, что $\pi_X f^\gamma_{h(X)} = \rho_X$ для всех элементов $X \in T|\gamma$. В силу единственности морфизма F_γ последовательность морфизмов $\{F_\gamma\colon \gamma < \alpha\}$ возрастает и, значит, $f^\gamma_\beta = f^{\gamma+1}_\beta = \ldots = f_\beta$.

Если α предельно, то $F = \{f_\beta\}\colon S' \to S$ — единственный такой морфизм, что $\pi_X f_{h(X)} = \rho_X$ для всех $X \in T$.

Пусть теперь $\alpha = (\alpha - 1) + 1$, где $\alpha - 1$ предельно. Из непрерывности спектров S' и S вытекает, что морфизм $F_{\alpha-1}\colon S'|\alpha - 1 \to S|\alpha - 1$ единственным отображением $f_{\alpha-1}\colon Z_{\alpha-1} \to Y_{\alpha-1}$ может быть дополнен до морфизма $F\colon S' \to S$, и при этом $\pi_X f_{\alpha-1} = \rho_X$ для всех элементов $X \in T$ высоты $\alpha - 1$.

Наконец, пусть $\alpha = (\alpha - 2) + 2$. В этом случае единственность продолжения морфизма $F_{\alpha-1}$ до морфизма $F\colon S' \to S$ вытекает из четвёртого свойства 5.15 и определения 5.6. Теорема доказана. □

5.17. Замечание. Если $R(T) = \{S, \pi_X \colon X \in T\}$, то непрерывный спектр $S = S(T)$ также будем называть *свёрткой* дерева T.

§ 6. Развёртываемые спектры и развёртка

Все пространства в этом параграфе — бикомпакты.

6.1. Определение. Непрерывный спектр $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'} \colon \alpha < \beta\}$ называется *простым*, если

1) для всех α с $\alpha + 1 < \beta$ в X_α *отмечена* точка $\bar{x}_\alpha$ так, что $|(\pi^{\alpha+1}_\alpha)^{-1} x| = 1$ для всех $x \neq \bar{x}_\alpha$,
2) $\pi^{\alpha'}_\alpha \bar{x}_{\alpha'} = \bar{x}_\alpha$.

6.2. Определение. Пусть $S = \{Y_\alpha, \rho^\alpha_{\alpha'} \colon \alpha < \beta\}$ и $S' = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'} \colon \alpha < \beta\}$ — непрерывные спектры одной длины, причём спектр S' прост. Скажем, что спектр S *доминирует над* спектром S', если существует такой морфизм $F = \{d_\alpha\} \colon S \to S'$, называемый *доминированием*, что

а) d_α — эпиморфизм,
б) $|d^{-1}_\alpha \bar{x}_\alpha| = 1$,
в) $d_{\alpha+1}|(\rho^{\alpha+1}_\alpha)^{-1} d^{-1}_\alpha \bar{x}_\alpha$ — гомеоморфизм.

Семейство $\xi = \{d^{-1}_\alpha \bar{x}_\alpha \colon \alpha+1 < \beta\}$ является нитью спектра ${}^{-}S \equiv \{Y_\alpha \rho^\alpha_{\alpha'} \colon \alpha+1 < < \beta\}$, т. е. $\xi \in \lim {}^{-}S \equiv \lim_0 S$. Мы будем говорить, что спектр S *доминирует* над спектром S' *относительно* ξ.

Следующее утверждение доказывается непосредственной расшифровкой определений.

6.3. Лемма. *Если* $F\colon S \to S'$ — *доминирование относительно* ξ, *то* $F|\alpha\colon S|\alpha \to S'|\alpha$ — *доминирование относительно* ${}_0\pi_\alpha \xi$, *где* ${}_0\pi_\alpha \colon \lim_0 S \to \to \lim_0(S|\alpha)$ — *естественная проекция.*

6.4. Лемма. *Доминирование* $F\colon S \to S'$ *относительно* $\xi \in \lim_0 S$ *единственно.*

Доказательство. Из того что доминирование F является морфизмом, вытекает равенство

$$d_\alpha \circ \rho^{\alpha+1}_\alpha = \pi^{\alpha+1}_\alpha \circ d_{\alpha+1}. \tag{1}$$

Положим $X = X_{\alpha+1}$, $Y = X_\alpha$, $f = d_\alpha \rho^{\alpha+1}_\alpha$ и $y = \bar{x}_\alpha$. Тогда условия 1), 2) и а), б), в) из 6.1 и 6.2 влекут равенства $X_{\alpha+1} = Y^y$, $d_{\alpha+1} = f^y$ и $\pi^{\alpha+1}_\alpha = \pi^y$ (см. 1.5). В самом деле, надо только заметить, что разбиения пространства $Y_{\alpha+1}$, порождённые отображениями $d_{\alpha+1}$ и f^y, совпадают. Вместе с непрерывностью спектра S' это даёт нам единственность F. Лемма доказана. □

6.5. Определение. Непрерывный спектр S называется *развёртываемым*, если для всякого $\xi \in \lim_0 S$ существует единственное доминирование $F_\xi\colon S \to S_\xi$ относительно ξ.

Из лемм 6.3 и 6.4 вытекает следующее утверждение.

6.6. Лемма. *Если S — развёртываемый спектр длины β, то для всякого $\alpha < \beta$ спектр $S|\alpha$ также развёртываем.*

6.7. Построение. Пусть $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'}\colon \alpha < \beta\}$ — развёртываемый спектр. Положим $L_\alpha(S) = \lim_0(S|\alpha+1)$ для каждого $\alpha < \beta$. Будем обозначать через ${}^0\pi^\alpha_{\alpha'}$ естественную проекцию $L_\alpha(S) \to L_{\alpha'}(S)$. Проекцию $\lim_0 S \to L_\alpha(S)$ будем обозначать через ${}^0\pi_\alpha$. Итак, мы имеем ${}^0\pi_\alpha = {}_0\pi_{\alpha+1}$ (см. 5.3).

Если α предельно, то $L_\alpha(S) = X_\alpha$, а если $\alpha = (\alpha-1)+1$, то $L_\alpha(S) = X_{\alpha-1}$.

Пусть $x \in L_{\alpha'}(S)$, $y \in L_\alpha(S)$. Будем считать $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $\alpha' \leqslant \alpha$ и $x = {}^0\pi^\alpha_{\alpha'} y$. По отношению к этому упорядочению множество $L(S) = \bigcup\{L_\alpha(S)\colon \alpha < \beta\}$ является деревом.

Пусть теперь $s \in L_\alpha(S)$, и пусть $F_{\xi_i} = \{d^{\xi_i}_{\alpha'}\}\colon S \to S_{\xi_i} = \{X^{\xi_i}_{\alpha'}, {}^{\xi_i}\pi^{\alpha'}_{\alpha''}\colon \alpha' < \beta\}$ — такие доминирования, что ${}^0\pi_\alpha\xi_1 = {}^0\pi_\alpha\xi_2 = s$. По лемме 6.3 морфизм $F_{\xi_i}|\alpha+1$ является доминированием относительно ${}_0\pi_{\alpha+1}\xi_i$. Но ${}_0\pi_{\alpha+1} = {}^0\pi_\alpha$. Значит, из единственности доминирования имеем $S_{\xi_1}|\alpha+1 = S_{\xi_2}|\alpha+1$ и $F_{\xi_1}|\alpha+1 = F_{\xi_2}|\alpha+1$. В частности, $X^{\xi_1}_\alpha = X^{\xi_2}_\alpha$ и $d^{\xi_1}_\alpha = d^{\xi_2}_\alpha$. Иногда мы будем обозначать пространство X^ξ_α через X^s или X^s_α, а отображение d^ξ_α — через d^s или d^s_α, где $s = {}^0\pi_\alpha\xi$.

В множестве $T(S) = \bigcup\{S_\xi\colon \xi \in \lim_0 S\}$ произведём обоснованные выше отождествления: если ${}^0\pi_\alpha\xi = {}^0\pi_\alpha\zeta$, то $X^\xi_{\alpha'} = X^\zeta_{\alpha'}$ и ${}^\xi\pi^{\alpha'}_{\alpha''} = {}^\zeta\pi^{\alpha'}_{\alpha''}$ для всех $\alpha' \leqslant \alpha$. По отношению к этому отождествлению множество $T(S)$ является непрерывным спектральным деревом. Более того, если $T(S) = \{X, \pi^X_Y\colon X, Y \in \mathcal{A}\}$, то дерево $\mathcal{A}$ изоморфно $L(S)$.

6.8. Определение. Построенное выше спектральное дерево $T(S)$ будем называть *развёрткой* спектра S.

6.9. Определение. Непрерывное спектральное дерево $T = \{X, \pi^X_Y\colon X, Y \in \mathcal{A}\}$ будем называть *спектральным деревом с отмеченными точками*, если для каждой пары $X, Y \in \mathcal{A}$, $X < Y$, отмечена точка $x_{(X,Y)} \in X$ так, что

(i) если $X < Y < Z$, то $\pi^Y_X x_{(Y,Z)} = x_{(X,Z)} = x_{(X,Y)}$.

6.10. Определение. Спектральное дерево T с отмеченными точками назовём *простым*, если

(ii) $x_{(X,Y)} \neq x_{(X,Z)}$ для всех X, Y, Z с $X = {}^-Y = {}^-Z$ и $Y \neq Z$,

(iii) $|(\pi^Y_X))^{-1}x| = 1$ для всех $x \neq x_{(X,Y)}$,

(iv) длина каждой максимальной цепи из T равна высоте дерева T,

(v) множество $(\pi^X_{-X})^{-1}x_{(-X,X)}$ состоит из отмеченных точек для всех элементов $X \in T$ непредельной высоты.

Ясно, что всякий простой спектр является простым спектральным деревом.

6.11. Лемма. *Если T — простое спектральное дерево, $X \in T$, $h(X)$ предельно и у X существует последователь в T (непосредственно следующий за X элемент), то все отмеченные в X точки совпадают, а этот последователь один.*

Доказательство. Предположим, что $x_{(X,Y)} \neq x_{(X,Z)}$. В силу непрерывности дерева T существует такое $U \in T$, что $U < X$ и $\pi_U^X x_{(X,Z)} \neq \pi_U^X x_{(X,Y)}$. С другой стороны, из (i) получаем $\pi_U^X x_{(X,Z)} = x_{(U,X)} = \pi_U^X x_{(X,Y)}$. Это противоречие и доказывает лемму. □

6.12. Теорема. *Если S — развёртываемый спектр, то семейство $R = \{S, d^s\colon s \in L(S)\}$ является свёрткой спектрального дерева $T(S)$.*

Доказательство. Сначала мы заметим, что R является накрытием дерева $T(S)$. Пусть теперь $S = \{X_\alpha, \pi_{\alpha'}^\alpha\colon \alpha < \beta\}$, и пусть $\hat{R} = \{\hat{S}, \hat{\pi}_s\colon s \in L(S)\}$, где $\hat{S} = \{\hat{X}_\alpha, \pi_{\alpha'}^\alpha\colon \alpha < \beta\}$ — произвольное накрытие дерева $T(S)$. Докажем, что существует единственный морфизм $F = \{f_\alpha\}\colon \hat{S} \to S$, для которого $\hat{\pi}_s = d^s f_\alpha$ для всех $s \in L_\alpha(S)$, $\alpha < \beta$, индукцией по длине спектра S. Если $l(S) = 1$, то утверждение тривиально: S и $T(S)$ содержат только одну точку. Поскольку $S|\alpha$ — развёртываемый спектр и $T(S|\alpha) = T(S)|\alpha$ для всех $\alpha < \beta$, можно сделать индуктивный переход к предельному β. Непрерывность спектров S, $\hat{S}$ и спектрального дерева $T(S)$ позволяет осуществить переход от $\beta - 1$ к β для предельного $\beta - 1$.

Пусть теперь $\beta = (\beta - 2) + 2$. Надо доказать единственность такого отображения $f_{\beta-1}$, что имеют равенства

$$f_{\beta-2} \circ \hat{\pi}_{\beta-2}^{\beta-1} = \pi_{\beta-2}^{\beta-1} \circ f_{\beta-1}, \tag{2}$$

$$\hat{\pi}_s = d^s \circ f_{\beta-1} \tag{3}$$

для всех $s \in L_{\beta-1}(S)$.

Для $z \in \hat{X}_{\beta-1}$ положим $y = f_{\beta-2}\hat{\pi}_{\beta-2}^{\beta-1} z$. Так как $X_{\beta-2} = L_{\beta-1}(S)$, то $y \in L_{\beta-1}(S)$. Пусть $u \in L_{\beta-2}(S)$ — предшественник точки y. Поскольку семейство R является накрытием дерева $T(S)$, имеет место равенство

$$d^u \circ \pi_{\beta-2}^{\beta-1} = \pi_u^y \circ d^y. \tag{4}$$

Точка $v = d^u y$ отмечена в пространстве X^u и отображение $d^y\colon (\pi_{\beta-2}^{\beta-1})^{-1} y \to (\pi_u^y)^{-1} v$ взаимно-однозначно и обладает свойством в) из 6.2. Поэтому равенство $\hat{\pi}_y z = d^y f_{\beta-1} z$ даёт нам единственность $f_{\beta-1}$ и равенство $\pi_{\beta-2}^{\beta-1} f_{\beta-1} = f_{\beta-2}\hat{\pi}_{\beta-2}^{\beta-1}$. Теперь покажем, что $\hat{\pi}_s z = d^s f_{\beta-1} z$ для всякого $s \in L_{\beta-1}(S)$ при условии $s \neq y$. Пусть $t \in L_{\beta-2}$ — предшественник элемента s. Согласно свойству б) из 6.2 точка $d^t y$ не отмечена, поэтому множество $(\pi_t^s)^{-1} d^t y$ состоит из одной точки. С другой стороны, $d^s f_{\beta-1} z \in (\pi_t^s)^{-1} d^t y$ и $\hat{\pi}_s z \in (\pi_f^s)^{-1} d^t y$. Поэтому $\pi_s z = d^s f_{\beta-1} z$.

Наконец, отображение $f_{\beta-1}$ непрерывно в силу замкнутости отображения d^s и свойства в) определения 6.2. Теорема доказана. □

Из определения и единственности доминирования и из определения свёртки получаем два утверждения.

6.13. Лемма. *Если $\{S_\alpha\}$ — возрастающая последовательность развёртываемых спектров, то их объединение S также развёртываемо и*

$$T(S) = \bigcup_\alpha T(S_\alpha).$$

6.14. Лемма. *Если S — развёртываемый спектр предельной длины, то его пополнение $\overline{S}$ также развёртываемо и $T(\overline{S}) = \overline{T(S)}$.*

6.15. Лемма. *Развёртка $T(S)$ развёртываемого спектра $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'} : \alpha < \beta\}$ является простым спектральным деревом.*

Доказательство. Определим отмеченные точки. Пусть $X, Y \in T(S)$ и $X < Y$. Существует такое $\xi \in \lim_0 S$, что $X = X^\xi_\alpha$ и $Y = X^\xi_{\alpha'}$ для некоторых $\alpha, \alpha' < \beta$. Спектр S_ξ прост. Значит, существует единственная отмеченная точка $\bar{x}^\xi_\alpha \in X^\xi_\alpha$. Положим $x_{(X,Y)} = \bar{x}^\xi_\alpha$. Надо проверить корректность этого определения. Возьмём другую точку $\zeta \in \lim_0 S$, такую что $X = X^\xi_\alpha$ и $Y = X^\zeta_{\alpha'}$. Мы имеем ${}^0\pi_{\alpha'}\xi = {}^0\pi_{\alpha'}\zeta$ и, значит, ${}^0\pi_{\alpha+1}\xi = {}^0\pi_{\alpha+1}\zeta = x \in X_\alpha$. Но $\bar{x}^\xi_\alpha = d^\xi_\alpha x$ по определению доминирования. Следовательно, равенство $d^\xi_\alpha = d^\zeta_\alpha$ влечёт равенство $\bar{x}^\xi_\alpha = \bar{x}^\zeta_\alpha$. Итак, определённые выше отмеченные точки удовлетворяют условию (i).

Пусть теперь $\xi, \zeta \in \lim_0 S$, $X^\xi_\alpha = X^\zeta_\alpha$ и $X^\xi_{\alpha+1} \neq X^\zeta_{\alpha+1}$. Это означает, что ${}^0\pi_\alpha\xi = {}^\alpha\pi_0\zeta$, но ${}^0\pi_{\alpha+1}\xi \neq {}^0\pi_{\alpha+1}\zeta$. Следовательно,

$$\bar{x}^\xi_\alpha = d^\xi_\alpha \pi_{\alpha+1}\xi \neq d^\xi_\alpha({}^0\pi_{\alpha+1}\zeta) = d^\zeta_\alpha({}^0\pi_{\alpha+1}\zeta) = \bar{x}^\zeta_\alpha,$$

и поэтому условие (ii) выполнено.

Простота спектра S_ξ даёт нам условие (iii). Условие (iv) тривиально. Наконец, условие в) из 6.2 влечёт (v). Лемма доказана. □

6.16. Теорема. *Свёртка $R(T) = \{S(T), \pi_X : X \in T\}$ простого спектрального дерева T развёртываема, и $T(S(T)) = T$.*

Доказательство. Индукция по высоте дерева T. Если $h(T) = 1$, то очевидно, что $T = S(T) = T(S(T))$. Предположим, что утверждение верно для всех простых спектральных деревьев высоты $<\beta$. Пусть $h(T) = \beta$.

Предположим сначала, что β предельно. Тогда согласно 4.15 последовательность $\{S(T|\alpha)\} = \{S(T)|\alpha\}$ возрастает. Поэтому спектр $S(T) = \bigcup\{S(T|\alpha) : \alpha < \beta\}$ развёртываем в силу 5.13. Кроме того, из свойств свёртки вытекает, что $T(S(T)) = \bigcup\{T(S(T|\alpha)) : \alpha < \beta\}$ и $T(S(T|\alpha)) = T|\alpha$. Поэтому $T(S(T)) = T$.

Пусть теперь $\beta = (\beta - 1) + 1$, где $\beta - 1$ предельно. Тогда $S(T) = \overline{S(T|\beta-1)}$ по свойству 3) свёртки. Согласно 6.14 спектр $S(T)$ развёртываем. Значит,

$$T(S(T)) = T\overline{(S(T)|\beta-1)} = \overline{T(S(T)|\beta-1)} = \overline{T(S(T|\beta-1))} = \overline{T|\beta-1} = T$$

согласно свойствам свёртки и предположению индукции.

Пусть, наконец, $\beta = (\beta - 2) + 2$. Пусть $S(T) = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'} \colon \alpha < \beta\}$, и пусть $x \in X_{\beta-2} = \lim_0 S(T)$. По индуктивному предположению спектр $S(T)|\beta - 1 = S(T|\beta - 1)$ развёртываем. Для точки $\xi \in {}_0\pi_{\beta-1}x \in \lim_0(S(T)|\beta - 1)$ существует единственный простой спектр $S_\xi = \{X^\xi_\alpha, {}^\xi\pi^\alpha_{\alpha'} \colon \alpha < \beta - 1\}$ и единственное доминирование $f_\xi = \{d^\xi_\alpha\} \colon S(T)|\beta - 1 \to S_\xi$. Кроме того, спектр S_ξ является продолжением максимальной цепи спектрального дерева $T|\beta - 1$.

Покажем, что $y = d^\xi_{\beta-2}x$ — отмеченная в $X^\xi_{\beta-2}$ точка. Если $\beta = (\beta - 3) + 3$, то $\xi \in X_{\beta-3}$ и $y \in ({}^\xi\pi^{\beta-2}_{\beta-3})^{-1} d^\xi_{\beta-3}\xi$ и, значит, точка y отмечена по свойству (v). Если $\beta - 2$ предельно, то по определению доминирования отмечена всякая точка вида ${}^\xi\pi^{\beta-2}_\beta y = d^\xi_\alpha({}^0\rho_\alpha\xi)$, где $\alpha < \beta - 2$ и ${}^0\rho_\alpha \colon \lim_0(S(T)|\beta - 1) \to X_\alpha$ — естественная проекция. С другой стороны, по свойству (iv) у пространства $X = X^\xi_{\beta-2}$ имеется последователь Y. По свойству (i) имеем

$$ {}^\xi\pi^{\beta-2}_\alpha x_{(X,Y)} = {}^\xi\pi^{\alpha+1}_\alpha {}^\xi\pi^{\beta-2}_{\alpha+1} x_{(X,Y)} = {}^\xi\pi^{\alpha+1}_\alpha x_{(X^\xi_{\alpha+1}, Y)} = x_{X^\xi_\alpha, X^\xi_{\alpha+1}} = \bar{x}^\xi_\alpha = \pi^{\beta-2}_\alpha y. $$

Значит, $x_{(X,Y)} = y$ согласно непрерывности спектра S_ξ. По свойству (ii) имеется единственное пространство $Y \in T$, для которого $y = x_{(X,Y)}$. Это пространство $Y = X^x_{\beta-1}$ определяет максимальную цепь $S_x = S_\xi \cup \{X^x_{\beta-1}, {}^x\pi^{\beta-1}_{\beta-2}\}$ дерева T.

Пусть $x' \in X_{\beta-2}$ и $x' \neq x$. Если $\xi' = {}_0\pi_{\beta-1}x' \neq {}_0\pi_{\beta-1}x = \xi$, то $S_{\xi'} \neq S_\xi$ и, значит, $S_x \neq S_{x'}$. Если $\xi' = \xi$, то $d^\xi_{\beta-2}x \neq d^\xi_{\beta-2}x'$ по свойству в) доминирования, и поэтому $S_x \neq S_{x'}$ (эти простые спектры имеют различные отмеченные точки на уровне $\beta - 2$).

Пусть теперь S_ζ — максимальная цепь в дереве T. По свойству (iv) спектр S_ζ имеет высоту β. Положим $y = x_{(X^\zeta_{\beta-2}, X^\zeta_{\beta-1})} \in X^\zeta_{\beta-2}$. Существует единственная такая точка $\xi \in \lim_0(S(T)|\beta - 1)$, что спектр $S(T)|\beta - 1$ доминирует над спектром $S_\zeta|\beta - 1$ относительно точки ξ. Если мы положим $x = (d^\xi_{\beta-2})^{-1}y$, то $S_x = S_\zeta$ согласно определению цепи S_x.

Итак, мы построили взаимно-однозначное соответствие между пространством $X_{\beta-2} = \lim_0 S(T)$ и множеством всех максимальных цепей S_x спектрального дерева T. Остаётся только показать, что ограничение F_x свёртки $R(T)$ на S_x является доминированием для всякого $x \in X_{\beta-2}$. Свойство а) выполнено по определению свёртки. Свойство б) выполнено по определению S_x. Наконец, семейство

$$ \{\pi^{\beta-1}_{\beta-2} \colon X_{\beta-1} \to X_{\beta-2}, d^x_{\beta-1} \colon X_{\beta-1} \to X^x_{\beta-1} \colon x \in X_{\beta-2}\} $$

является веерным произведением семейства

$$ \{d^x_{\beta-2} \colon X_{\beta-2} \to X^x_{\beta-2}, {}^x\pi^{\beta-1}_{\beta-2} \colon X^x_{\beta-1} \to X^x_{\beta-2} \colon x \in X_{\beta-2}\} $$

по построению свёртки $R(T)$. Следовательно, множество $(\pi^{\beta-1}_{\beta-2})^{-1}x$ гомеоморфно произведению

$$ \prod\{({}^{x'}\pi^{\beta-1}_{\beta-2})^{-1} d^{x'}_{\beta-2}x \colon x' \in X_{\beta-2}\} $$

согласно 4.8. Но $(d^{x'}_{\beta-2})^{-1} d^{x'}_{\beta-2}x' = x'$. Значит, точка $d^x_{\beta-2}x$ не отмечена для спектра $S_{x'}$ при $x \neq x'$. Поэтому из свойства (iii) мы получаем

$|({}^{x'}\pi^{\beta-1}_{\beta-2})^{-1}d^{x'}_{\beta-2}x| = 1$ для $x \neq x'$. Итак, множество $(\pi^{\beta-1}_{\beta-2})^{-1}x$ гомеоморфно множеству $({}^{x}\pi^{\beta-1}_{\beta-2})^{-1}d^{x}_{\beta-2}x$. Теорема доказана. □

Из 6.12, 6.15 и 6.16 вытекает следующее утверждение.

6.17. Теорема. *Развёртываемые спектры и только они суть свёртки простых спектральных деревьев.*

6.18. Предложение. *Всякий спектр $S = \{X_n, \pi^n_m \colon \gamma \leqslant \omega\}$ длины $\leqslant \omega$ с вполне замкнутыми проекциями развёртываем.*

Доказательство. Пусть $\xi \in \lim_0 S$. Мы уже знаем (из доказательства леммы 5.4), как строить спектр S_ξ и доминирование $F_\xi \colon S \to S_\xi$. Надо только проверить, что этот спектр хаусдорфов. Согласно 1.6 достаточно доказать, что отображение $d_n\pi^{n+1}_n$ вполне замкнуто в каждой точке $d_n x$, где $x = {}^0\pi_{n+1}\xi \in L_{n+1}(S) = X_n$. Проведём индукцию по n. Переход от n к $n+1$ обеспечивает 1.13. Предложение доказано. □

6.19. Теорема. *Всякий развёртываемый спектр $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'} \colon \alpha < \beta\}$ имеет вполне замкнутые проекции. Более того, для каждого $s \in L_\alpha(S)$ отображения $d^s\pi^{\alpha'}_\alpha$ и d^s вполне замкнуты.*

Доказательство. Полная замкнутость отображений $d^s\pi^{\alpha'}_\alpha$ и d^s доказывается индукцией по α'. Если $\alpha = \alpha' = 0$, то d^s — тривиальный гомеоморфизм. Предположим, что для всех $\alpha, \alpha'' < \alpha'$, $\alpha \leqslant \alpha''$ отображения $d^s\pi^{\alpha''}_\alpha$ и d^s вполне замкнуты. Пусть $\alpha' = (\alpha' - 1) + 1$. Для $s' \in L_{\alpha'}(S)$ положим $s = {}^0\pi^{\alpha'}_{\alpha'-1}s'$. Равенство (4) из доказательства теоремы 6.12 в наших условиях превращается в равенство

$$d^s \circ \pi^{\alpha'}_{\alpha'-1} = \pi^{s'}_s \circ d^{s'}. \tag{5}$$

Отображение $d^{s'}$ вполне замкнуто согласно 1.9, поскольку отображения $\pi^{\alpha'}_{\alpha'-1}$ и d^s вполне замкнуты, а отображение $d^s\pi^{\alpha'}_{\alpha'-1}$ вполне замкнуто в точке $d^s x$, где $x = s' \in L_{\alpha'}(S) = X_{\alpha'-1}$.

Пусть теперь $\alpha + 1 < \alpha'$ и $s \in L_\alpha(S)$. Берём $s' \in L_{\alpha'}(S)$ так, что $s = {}^0\pi^{\alpha'}_\alpha s'$. Снова имеем равенство

$$d^s \circ \pi^{\alpha'}_\alpha = \pi^{s'}_s \circ d^s.$$

Мы уже доказали, что отображение $d^s\pi^{\alpha'}_\alpha$ вполне замкнуто в точке $d^s x$, где $x = {}^0\pi^{\alpha'}_{\alpha+1}s' \in L_{\alpha+1}(S) = X_\alpha$. Пусть теперь $y \in X^s$, $y \neq d^s x$. Согласно определению развёртки и определениям 6.1 и 6.2 отображение $\pi^{s'}_s$ является локальным гомеоморфизмом в точке y. С другой стороны, отображение $d^{s'}$ вполне замкнуто. Поэтому отображение $\pi^{s'}_s d^{s'} = d^s\pi^{\alpha'}_\alpha$ вполне замкнуто в точке y.

Пусть теперь α' предельно и $\alpha < \alpha'$. Для всех α'', удовлетворяющих условию $\alpha \leqslant \alpha'' < \alpha'$, отображения $d^s\pi^{\alpha''}_\alpha$ вполне замкнуты. Тогда отображение $d^s\pi^{\alpha'}_\alpha$ вполне замкнуто согласно 3.1.

Уже доказано, что отображение $d^{s'}\pi^{\alpha'_{}}_{\alpha'}$ вполне замкнуто в точке $d^{s'}x$, где ${}^0\pi^{\alpha'+1}_{\alpha'}x = s'$. Пусть теперь $y \in X^{s'}$, $y \neq d^{s'}x$. Как и выше, $\pi^{s'}_s$ — локальный гомеоморфизм в точке y для некоторого $\alpha < \alpha'$ и $s = {}^0\pi_\alpha^{\alpha'} s'$. Следовательно, отображение $d^{s'}$ вполне замкнуто в точке y, поскольку отображение $d^s\pi_\alpha^{\alpha'}$ вполне замкнуто в точке $\pi_s^{s'} y$.

Итак, все отображения $d^s\pi_\alpha^{\alpha'}$ вполне замкнуты. Теперь $\pi_\alpha^{\alpha'}$ вполне замкнуто в точке $y \in X_\alpha$, поскольку y есть точка взаимной однозначности для некоторого d^s, отображение $d^s\pi_\alpha^{\alpha'}$ вполне замкнуто и имеет место 1.9. Теорема доказана. □

Из 6.18 и 6.19 вытекает следующее утверждение.

6.20. Теорема. *Для спектров длины $\leqslant \omega$ свойство развёртываемости эквивалентно полной замкнутости их проекций.*

6.21. Пример не развёртываемого спектра S длины $\omega + 2$ с вполне замкнутыми проекциями. Пусть $X_n = \{x_0, x_1, \dots, x_{2n+1}\}$, π_n^{n+1} — ретракции, переводящие x_{2n+2} в x_{2n-1} и x_{2n+3} в x_{2n+1}. Из непрерывности спектра S следует, что X_ω — сходящаяся последовательность $\{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots, x_\infty\}$. Отображение π_n^ω тождественно на X_n, посылает множество $\{x_{2n+3}, \dots, x_\infty\}$ в точку x_{2n+1}, а точку x_{2n+2} — в точку x_{2n-1}. Наконец, $X_{\omega+1} = \{x_0, x_1, \dots, x_n, x_\infty^-, x_\infty^+\}$, где множества $\{x_0, x_2, x_4, \dots, x_{2n}, \dots, x_\infty^-\}$ и $\{x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2n+1}, \dots, x_\infty^+\}$ — сходящиеся последовательности. Отображение $\pi_\omega^{\omega+1}$ посылает точки x_∞^-, x_∞^+ в точку x_ω. Все отображения вполне замкнуты: $\pi_\omega^{\omega+1}$ элементарно, а $\pi_n^{\omega+1}$ — отображение в конечное и, значит, дискретное пространство.

Предположим, что существует доминирование $F_\xi\colon S \to S_\xi = \{Y_\alpha, \rho_{\alpha'}^\alpha\}$ относительно точки $\xi = x_\infty \in \lim_0 S$. Имеют место равенства $Y_n = \{y_0, y_1, \dots, y_{n+1}\}$, $Y_\omega = \{y_0, y_1, \dots, y_n, \dots, y_\omega\}$, $Y_{\omega+1} = \{y_0, y_1, \dots, y_n, \dots, y_\infty^-, y_\infty^+\}$. Отображение $f = d_\omega \pi_\omega^{\omega+1}\colon x_{\omega+1} \to Y_\omega$ совпадает с проектированием $p\colon \alpha N \times \{0,1) \to \alpha N$, где αN — сходящаяся последовательность. Поэтому отображение f не вполне замкнуто, что противоречит теореме 6.19.

III. Вполне замкнутые отображения, размерность и кардинальные инварианты

§ 1. Резольвенты

1.1. Пусть даны пространство X, пространства Y_x и непрерывные отображения $h_x\colon X \setminus \{x\} \to Y_x$ для каждой точки $x \in X$. *Резольвентой* (множества) X (в каждой точке x в пространство Y_x посредством отображения h_x) называется множество

$$R(X, Y_x, h_x) = \bigcup \{\{x\} \times Y_x \colon x \in X\}.$$

Теперь определим топологию на этом множестве. Для каждой пары (U, V), где U — открытое подмножество пространства X, а V — открытое подмножество пространства Y_x при $x \in U$, полагаем

$$U \otimes_x V = \{x\} \times V \cup \Big(\bigcup\{\{x'\} \times Y_{x'} \colon x' \in U \cap h_x^{-1}V\}\Big). \tag{1}$$

Семейство всех таких множеств образует базу некоторой топологии на множестве $R(X, Y_x, h_x)$, называемой *топологией резольвенты*. Как правило, мы будем опускать символы Y_x и h_x и обозначать резольвенту с только что определённой топологией через $R(X)$. Мы будем предполагать, что пространства X и Y_x вполне регулярны, причём Y_x, как правило, бикомпактны. В дальнейшем множество $U \otimes_x V$ будем обозначать через $U \otimes V$, предполагая, что из контекста ясно, о какой точке x идёт речь.

Отображение $\pi \colon R(X) \to X$, переводящее пару (x, y) в точку x, будем называть *отображением резольвенты* или просто *резольвентой*. Легко видеть, что отображение π непрерывно. Для каждой точки $x \in X$ отображение $y \to (x, y)$ является вложением пространства Y_x в $R(X)$. Таким образом, резольвента $R(X)$ получается из пространства X заменой каждой его точки x пространством Y_x.

1.2. Предложение. *Если все пространства Y_x бикомпактны, то резольвента $\pi \colon R(X) \to X$ является вполне замкнутым отображением.*

Доказательство. Пусть $\{W_1, \ldots, W_s\}$ — покрытие множества $\pi^{-1}x = \{x\} \times Y_x$ открытыми в $R(X)$ множествами. Впишем в него покрытие базисными множествами вида $U \otimes V$. Из этого покрытия, в силу бикомпактности пространства Y_x, можно выбрать конечное подпокрытие

$$\{U_i \otimes V_i \colon i = 1, \ldots, k\}. \tag{2}$$

Из равенства (1) вытекает

$$\pi^{\#}(U_i \otimes V_i) \setminus \{x\} = U_i \cap h_x^{-1} V_i. \tag{3}$$

Множество $U = \bigcap\{U_i \colon i \leqslant k\}$ является окрестностью точки x. Из равенства (3) получаем

$$\bigcup\{\pi^{\#}(U_i \otimes V_i) \colon i \leqslant k\} \supset \bigcup\{U \cap h_x^{-1} V_i \colon i \leqslant k\} = \\ = U \cap \Big(\bigcup\{h_x^{-1} V_i \colon i \leqslant k\}\Big) = U \cap (X \setminus \{x\}).$$

Таким образом, условие полной замкнутости выполнено для базисного покрытия (2). Тем более оно выполнено для покрытия $\{W_1, \ldots, W_s\}$. Предложение доказано. □

Из предложения II.2.8 и предложения 1.2 вытекает следующее утверждение.

1.3. Предложение. *Если пространства X и Y_x бикомпактны, то резольвента $R(X)$ также бикомпактна.*

1.4. Замечание. В определении резольвенты не обязательно предполагать, чтобы отображение h_x было определено на множестве $X \setminus \{x\}$. Достаточно, чтобы оно было определено на множестве $U \setminus \{x\}$, где $U = U(x)$ — некоторая окрестность точки x. При этом остаются верными предложение 1.2 и вытекающие из него следствия. В дальнейшем мы будем пользоваться этим более общим определением резольвенты.

1.5. Предложение 1.2 довольно часто допускает обращение. Для непрерывного сюръективного отображения $f\colon Z \to X$, точки $x \in X$ и содержащего её множества $U \subseteq X$ положим $X_U^x = (\pi^x)^{-1}U$, где $\pi^x = \pi_f^x\colon X_f^x \to X$ — отображение, определённое в II.1.5. Если мы отождествим слои $f^{-1}x$ и $(\pi^x)^{-1}x$, то имеет место следующее утверждение.

1.6. Предложение. *Пусть $f\colon Z \to X$ — бикомпактное вполне замкнутое отображение. Предположим, кроме того, что для каждой точки $x \in X$ существует такая её окрестность U, для которой существует ретракция $r_x\colon X_U^x \to f^{-1}x$. Тогда отображение f совпадает с резольвентой*

$$\pi\colon R(X, f^{-1}x, r_x|U \setminus \{x\}) \to X.$$

Доказательство. Отождествление пространства Z с резольвентой $R(X)$ и отображения f с отображением π происходит естественным образом: отображение $g\colon Z \to R(X)$ определяется равенством $g(z) = (fz, z)$. Ясно, что g — биекция и $f = \pi \circ g$. Остаётся показать только, что g — гомеоморфизм. Для этого согласно теореме II.2.9 достаточно показать, что отображение g непрерывно. Но это вытекает из непосредственно проверяемого равенства

$$g^{-1}(W \otimes V) = (f^x)^{-1}((r_x^{-1}V) \cap (\pi^x)^{-1}W),$$

где $V \subseteq f^{-1}x$ — произвольное открытое множество, а $W \subseteq U$ — окрестность точки x. Предложение доказано. □

Следствием предложения 1.6 является следующее утверждение.

1.7. Предложение. *Если все слои вполне замкнутого отображения f между бикомпактами являются абсолютными ретрактами, то f есть резольвента.*

1.8. Особый интерес представляют резольвенты, соответствующие семействам $\{h_x\}_{x\in X}$, в которых все отображения, кроме одного — h_{x_0}, постоянны. Возникающее при этом согласно предложению 1.2 вполне замкнутое отображение элементарно, а сама резольвента может быть описана как следующее подмножество произведения $X \times Y_{x_0}$:

$$R(X) = \{x_0\} \times Y_{x_0} \cup \operatorname{Gr} h_{x_0}, \tag{4}$$

где $\operatorname{Gr} g$ — график отображения $g\colon S \to T$, т. е.

$$\operatorname{Gr} g = \{(s, gs)\colon s \in S\} \subseteq S \times T.$$

Отображением резольвенты $R(X) \to X$ является ограничение проектирования $p_1\colon X \times Y_{x_0} \to X$ на $R(X)$. Такая резольвента называется *элементарной*.

Типичным примером элементарной резольвенты является знаменитый «синус $1/x$»: полагаем $X = [0,1]$, $Y_0 = [-1,1]$ и $h_0(x) = \sin(1/x)$.

Из теоремы II.3.7 и предложения 1.2 вытекает следующее утверждение.

1.9. Предложение. *Всякая резольвента с бикомпактными слоями является послойным произведением элементарных резольвент.*

1.10. Элементарная резольвента (4) ретрагируется на слой $\{x_0\} \times Y_{x_0}$ посредством отображения r_{x_0}, тождественного на $\{x_0\} \times Y_{x_0}$ и переводящего точку $(x, h_{x_0}x) \in \operatorname{Gr} h_{x_0}$ в точку $h_{x_0}x \in Y_{x_0}$. Вместе с предложением 1.9 это показывает, что имеет место следующее обращение предложения 1.6.

1.11. Предложение. *Если бикомпактное вполне замкнутое отображение $f\colon Z \to X$ является резольвентой, то для каждой точки $x \in X$ существует такая её окрестность U, что пространство X_U^x ретрагируется на слой $f_x^{-1} = (\pi^x)^{-1}x$.*

1.12. Это утверждение даёт большой запас вполне замкнутых отображений, не являющихся резольвентами. Так, например, элементарное отображение $Z \to X$, состоящее в том, что некоторое замкнутое множество $F \subseteq Z$ склеивается в точку, может быть резольвентой только при наличии ретракции некоторой окрестности OF на множество F. Поэтому элементарное отображение абсолютного ретракта (например, отрезка) может быть резольвентой только тогда, когда нетривиальный слой является абсолютным окрестностным ретрактом.

1.13. Наиболее употребим в приложениях случай, когда каждый неодноточечный слой вполне замкнутого отображения гомеоморфен отрезку I или n-мерному кубу I^n и, следовательно, отображение является резольвентой согласно предложению 1.7.

Если же все слои Y_x резольвенты гомеоморфны одному пространству Y, то $R(X)$ совпадает с произведением $X \times Y$ как множество. При этом равенство (1) принимает вид

$$U \otimes V = \{x\} \times V \cup (U \cap h_x^{-1}V) \times Y. \tag{1'}$$

Такие резольвенты будем называть *стандартными со слоем Y*.

1.14. Важную роль в приложениях вполне замкнутых отображений и резольвент играет класс так называемых кольцевых отображений. Чтобы его ввести, нам понадобится понятие перегородки. Пусть в (нормальном) пространстве X даны два замкнутых непересекающихся множества A и B. Напомним, что замкнутое множество $P \subseteq X$ называется *перегородкой* в X между A и B, если $X \setminus P$ можно представить в виде дизъюнктной суммы открытых множеств U и V, где $A \subseteq U$ и $B \subseteq V$.

Отображение $f\colon X \to Y$ называется *кольцевым*, если для всякой точки $x \in X$ и любых окрестностей Ox и Ofx множество $Ofx \cap f^{\#}Ox$ содержит перегородку между fx и $Y \setminus Ofx$.

Легко и приятно убедиться в том, что при кольцевом отображении на плоскую область для точки x с $|f^{-1}fx| \geqslant 2$ множество $f^{\#}Ox$ содержит последовательность колец, сходящихся к точке x.

1.15. Всякое замкнутое кольцевое отображение $f\colon X \to Y$ на связное неодноточечное пространство Y неприводимо. Более того, оно наследственно, или *связно неприводимо*, в том смысле, что если для замкнутого множества $A \subseteq X$ множество fA связно и содержит более одной точки, то

$$A = f^{-1}fA. \tag{5}$$

Отображения со свойством (5) называются ещё *атомными*.

В основе многих приложений лежит следующее утверждение.

1.16. Лемма (о стандартной резольвенте). *Пусть X — бикомпакт с первой аксиомой счётности. Тогда существует стандартная резольвента $R_n(X)$ со слоем I^n, $1 \leqslant n \leqslant \infty$, обладающая следующими свойствами:*

1) *$R_n(X)$ — бикомпакт с первой аксиомой счётности,*
2) *отображение резольвенты $\pi\colon R_n(X) \to X$ является кольцевым.*

Если, кроме того, для каждой неизолированной точки $x \in X$ зафиксировано счётное семейство множеств $c_x^k \subseteq X \setminus \{x\}$, $k \in \omega$, со свойством $x \in [c_x^k]$, то резольвенту $R_n(X)$ можно выбрать так, что она удовлетворяет следующему условию:

3) *если $Z \subseteq R_n(X)$ и $\pi Z = c_x^k$, то $\pi^{-1}x \subseteq [Z]$.*

Доказательство. Свойство 1) выполняется для любой стандартной резольвенты $R(X)$ со слоем Y, являющимся бикомпактом с первой аксиомой счётности. В самом деле, пространство $R(X)$ бикомпактно по предложению 1.3. Что касается первой аксиомы счётности, то она выполняется во всяком бикомпакте B, отображающемся на бикомпакт X с первой аксиомой счётности посредством отображения f, слои $f^{-1}x$ которого являются бикомпактами с первой аксиомой счётности.

Теперь покажем, как выбрать отображения $h_x\colon X \setminus \{x\} \to I^n$, чтобы выполнялось свойство 2). Если x является точкой нульмерности бикомпакта X, т. е. точкой, у которой существует база из открыто-замкнутых окрестностей, то отображение π будет кольцевым в точке x вне зависимости от отображения h_x. Если у точки x нет базы открыто-замкнутых окрестностей, то поступаем следующим образом. Поскольку X удовлетворяет первой аксиоме счётности, у точки x существует такая фундаментальная последовательность окрестностей $O_m x$, $m \in \omega$, что $[O_{m+1}x] \subseteq O_m x$. Полагаем $F_m^x = \operatorname{Bd} O_m x$ и $F^x = \bigcup\{F_m^x\colon m \in \omega\}$. В нашем случае ($\operatorname{ind}_x X \neq 0$) без ограничения общности можно считать, что все множества F_m^x не пусты. В кубе I^n берём счётное всюду плотное множество $\{t_m\colon m \in \omega\}$ и определяем отображение $\varphi_x\colon F^x \to I^n$, полагая $\varphi_x F_m^x = t_m$. Отображение φ непрерывно, поскольку семейство $\{F_m^x\colon m \in \omega\}$ дискретно в F^x. Пространство $X \setminus \{x\}$ является суммой счётного числа бикомпактов $X \setminus O_m x$. Поэтому оно финально компактно и, следовательно, нормально. Множество F^x замкнуто в пространстве $X \setminus \{x\}$. Значит, по теореме Брауэра—Титце—Урысона отображение φ_x можно продолжить до отображения $h_x\colon X \setminus \{x\} \to I^n$. Для базисного открытого множества $W = U \otimes V \subseteq R_n(X)$ его малый образ $\pi^{\#}W$ содержит все перегородки вида F_m^x, для которых $x \in U$, $F_m^x \subseteq U$, $t_m \in V$. Поэтому отображение π является кольцевым.

Для того чтобы выполнялось условие 3), отображения h_x надо строить более специальным образом. В каждом множестве c_x^k можно взять последовательность s_x^k, сходящуюся к точке x. Причём это можно сделать так, что множество $s_x = \bigcup\{s_x^k\colon k \in \omega\}$ также будет последовательностью, сходящейся к точке x.

Более того, можно считать, что $s_x \cap F^x = \varnothing$. Теперь определяем отображение $\varphi\colon s_x \cup F^x \to I^n$. По-прежнему полагаем $\varphi_x F^x_m = t_m$. На множестве s_x отображение φ_x определяется так, чтобы

$$\varphi_x s^k_x = \{t_m : m \in \omega\} \quad \text{для каждого} \quad k \in \omega. \tag{6}$$

Множество $s_x \cup F^x$ замкнуто в пространстве $X \setminus \{x\}$. Поэтому можно повторить рассуждения из предыдущего абзаца. Равенство (6) гарантирует выполнение условия 3). Лемма доказана. □

1.17. Итерированные резольвенты. Процесс построения резольвент можно итерировать. Обозначив $\pi\colon R(X) \to X$ через $\pi^1_0\colon R^1(X) \to X$, по индукции определяем n-итерацию $R^n(X)$ резольвенты равенством

$$(\pi^n_{n-1}\colon R^n(X) \to R^{n-1}(X)) = (\pi\colon R(R^{n-1}(x)) \to R^{n-1}(X)).$$

Переходя к пределу обратного спектра $S = \{R^n(X), \pi^{n+1}_n,\ n \in \omega\}$, получаем ω-итерацию резольвенты $R^\omega(X)$. Теоретически можно построить итерации $R^\alpha(X)$ для любого порядкового числа α, но содержательными, как правило, оказываются лишь итерации $R^\alpha(X)$ при $\alpha \leqslant \omega_1$. Дело в том, что если начать с «хорошего» бикомпакта X с первой аксиомой счётности (например, с куба I^n) и ограничиться лишь стандартными резольвентами со слоем I^n, для всякого счётного α бикомпакт $R^\alpha(X)$ согласно лемме 1.16 будет обладать первой аксиомой счётности. Поэтому можно построить резольвенту $\pi^{\alpha+1}_\alpha\colon R^{\alpha+1}(X) \to R^\alpha(X)$, удовлетворяющую условиям 2) и 3) леммы 1.16. Эти условия позволяют получать пространства, интересные как своими размерностными свойствами, так и кардинальнозначными инвариантами.

1.18. Обобщённые резольвенты. Всякая резольвента, согласно предложению 1.9, является послойным произведением элементарных резольвент. А всякая элементарная резольвента над точкой $x \in X$ получается заменой точки x произведением $\{x\} \times Y_x$. В. М. Ульянов обобщил это определение (см. [42, 45]), заменив в нём точки локально замкнутыми множествами.

Пусть даны пространство X, семейство $\{O_\alpha\colon \alpha \in A\}$ его открытых подмножеств, семейство $G_\alpha \subseteq O_\alpha$ множеств, замкнутых в O_α, семейство пространств Y_α и непрерывных отображений $h_\alpha\colon O_\alpha \setminus G_\alpha \to Y_\alpha$.

Элементарной обобщённой резольвентой посредством одного отображения h_α называется множество

$$X_\alpha = (X \setminus G_\alpha) \cup G_\alpha \times Y_\alpha,$$

открытую базу топологии которого образуют множества вида

$$(U \setminus G_\alpha) \cup (U \cap G_\alpha) \times Y_\alpha,$$
$$(U \cap h^{-1}_\alpha V) \cup (U \cap G_\alpha) \times V,$$

где U открыто в X, V открыто в Y_α. Естественное отображение $\pi_\alpha\colon X_\alpha \to X$ непрерывно и также называется элементарной обобщённой резольвентой.

Обобщённой резольвентой посредством всех отображений h_α, $\alpha \in A$, называется пространство

$$R^g(X) = R^g(X, Y_\alpha, h_\alpha),$$

являющееся веерным произведением пространств X_α относительно отображений $\pi_\alpha\colon X_\alpha \to X$, $\alpha \in A$.

Послойное произведение

$$\pi\colon R^g(X) \to X$$

отображений π_α также называется обобщённой резольвентой.

Как уже отмечалось выше, если все G_α одноточечны, то обобщённая резольвента является резольвентой. Если $G_\alpha = O_\alpha$, то обобщённая резольвента совпадает с *частичным произведением* в смысле Б. А. Пасынкова [32]. Если все пространства Y_α бикомпактны, то отображение $\pi\colon R^g(X) \to X$ совершенно. Если, кроме того, и пространство X бикомпактно, то обобщённая резольвента $R^g(X)$ также бикомпактна.

1.19. Частичные резольвенты. Пусть $R(Y) = R(Y, Z_y, h_y)$ — резольвента пространства Y со слоями Z_y. Для некоторого множества $M \subseteq Y$ определим новую резольвенту $R_M(Y) = R(Y, Z'_y, h'_y)$, где $Z'_y = Z_y$, $h'_y = h_y$ для $y \in M$ и $Z'_y = \{y\}$ для $y \in Y \setminus M$ с единственно возможным постоянным отображением $h'_y\colon Y \setminus \{y\} \to Z'y$. Пространство $R_M(Y)$ вместе с естественным проектированием $\pi_M\colon R_M(Y) \to Y$ назовём *частичной резольвентой* (или подрезольвентой) резольвенты $\pi\colon R(Y) \to Y$. Существует единственное такое отображение $q_M\colon R(Y) \to R_M(Y)$, что $\pi = \pi_M \circ g_M$. Обозначим теперь отображение резольвенты $\pi\colon R(Y) \to Y$ через f. Тогда в обозначениях пункта II.1.5 имеет место следующее утверждение.

1.20. Предложение. *Если слои Z_y резольвенты $R(Y)$ бикомпактны, а пространство Y регулярно, то $\pi_M = \pi_f^M$, а $q_M = f^M$.*

В самом деле, согласно предложению 1.2 отображение f вполне замкнуто. Кроме того, оно совершенно. По тем же причинам совершенно и отображение π_M. Из предложения II.1.7 вытекает совершенность отображения π_f^M. Но отображения π_M и π_f^M совпадают как отображения множеств. Поэтому, будучи совершенными, они совпадают и как отображения пространств. А отсюда автоматически вытекает равенство $q_M = f^M$.

§ 2. Вполне замкнутые отображения и размерность

Определения основных размерностных инвариантов (лебеговой размерности $\dim$ и индуктивных размерностей ind и Ind) и их элементарные свойства можно найти в стандартных учебниках по теории размерности (см. [3,100]). Некоторые из этих свойств мы напомним.

2.1. Теорема Даукера. *Пусть X — нормальное пространство, F — такое его замкнутое подмножество, что $\dim F \leqslant n$ и $\dim \Phi \leqslant n$ для всякого замкнутого в X множества $\Phi \subseteq X \setminus F$. Тогда $\dim X \leqslant n$.*

2.2. Напомним, что отображение $f\colon X \to Y$ называется *u-отображением*, где u — открытое покрытие пространства X, если для всякой точки $y \in Y$ её прообраз $f^{-1}y$ содержится в некотором элементе U покрытия u. Это условие эквивалентно тому, что множество

$$f^{\#}u = \{f^{\#}U\colon U \in u\}$$

является покрытием пространства Y. Из этого определения и пункта I.1.38 вытекает следующее утверждение.

2.3. Теорема об u-отображениях. *Нормальное пространство X имеет размерность $\dim X \leqslant n$ тогда и только тогда, когда для всякого конечного открытого покрытия u пространства X существует замкнутое u-отображение на нормальное пространство Y размерности $\dim Y \leqslant n$.*

Напомним, что размерностью отображения $f\colon X \to Y$ называется число

$$\dim f = \sup\{\dim f^{-1}y\colon y \in Y\}.$$

Аналогично определяется $\operatorname{Ind} f$.

2.4. Теорема. *Если $f\colon X \to Y$ — вполне замкнутое отображение нормальных пространств, то*

$$\dim X \leqslant \max\{\dim Y, \dim f\}.$$

Доказательство. Положим $n = \max\{\dim Y, \dim f\}$. Поскольку размерность монотонна по замкнутым подмножествам, можно считать, что $Y = fX$. Пусть $u = \{U_1, \ldots, U_s\}$ — конечное открытое покрытие пространства X. Согласно теореме 2.3 достаточно найти замкнутое u-отображение $g\colon X \to Z$ на нормальное пространство Z размерности $\dim Z \leqslant n$. Положим

$$M = Y \setminus \bigcup\{f^{\#}U_i\colon i = 1, \ldots, s\}.$$

Пусть $y \in M$. В силу полной замкнутости отображения f множество

$$U_y = \{y\} \cup \Bigl(\bigcup\{f^{\#}U_i\colon i = 1, \ldots, s\}\Bigr)$$

является окрестностью точки y. Более того, $|M \cap U_y| = 1$. Следовательно, множество M дискретно в Y.

Положим $Z = Y_f^M$ и $g = f^M\colon X \to Y_f^M$ (см. II.1.5) и покажем, что пространство Z и отображение g искомые. Согласно предложению II.1.10 отображение g замкнуто. Следовательно, пространство Z нормально как замкнутый образ нормального пространства X. Положим $F = (\pi_f^M)^{-1}M$. По определению отображений f^M и π_f^M множество F гомеоморфно множеству $f^{-1}M$ и, следовательно, топологически является дискретной суммой множеств $f^{-1}y$, $y \in M$. Поэтому $\dim F \leqslant \dim f$. Пусть теперь $\Phi \subseteq Z \setminus F$ — замкнутое в Z множество. Поскольку π_f^M гомеоморфно отображает Φ на замкнутое в Y множество, имеем $\dim \Phi \leqslant \dim Y$. Следовательно, $\dim Z \leqslant n$ по теореме 2.1.

Остаётся показать, что g есть u-отображение. Если $z \in Z \setminus F$, то множество $g^{-1}z = f^{-1}\pi_f^M z$ лежит в некотором элементе покрытия u, поскольку

$\pi_f^M z \notin M$. Если же $z \in F$, то множество $g^{-1}z$ состоит из одной точки. Теорема доказана. $\square$

2.5. Теорема. *Если $f\colon X \to Y$ — вполне замкнутое отображение нормального пространства X на пространство Y, то*

$$\dim Y \leqslant \dim X + 1.$$

Доказательство. Пространство Y автоматически нормально. Пусть $\dim X = n$. Возьмём произвольное открытое конечное покрытие $v = \{V_1, \ldots, V_s\}$ пространства Y. В покрытие $\{f^{-1}V_1, \ldots, f^{-1}V_s\}$ пространства X можно вписать открытое покрытие $u = \{U_1, \ldots, U_s\}$ кратности $\leqslant n+1$. Тогда семейство $f^{\#}u = \{f^{\#}U_1, \ldots, f^{\#}U_s\}$ имеет кратность $\leqslant n+1$ и вписано в v. Множество $M = Y \setminus \bigcup\{f^{\#}U_i\colon i = 1, \ldots, s\}$, как было отмечено выше, дискретно. Положим $F_1 = M \cap V_1$ и $F_k = M \cap V_k \setminus \bigcup\{V_i\colon i \leqslant k-1\}$ для $k \geqslant 2$. Тогда $\{F_1, \ldots, F_s\}$ — дизъюнктное семейство замкнутых подмножеств нормального пространства Y. Существует дизъюнктное семейство $w = \{W_1, \ldots, W_s\}$ окрестностей этих множеств. С учётом условия $F_i \subseteq V_i$ окрестности W_i можно выбрать так, что $W_i \subseteq V_i$. Тогда $w \cup f^{\#}u$ будет открытым покрытием пространства Y, вписанным в покрытие v и имеющим кратность $\leqslant n+2$. Теорема доказана. $\square$

2.6. Теорема. *Если $f\colon X \to Y$ — вполне замкнутое отображение нормального пространства X на совершенно нормальное пространство Y, то*

$$\operatorname{Ind} Y \leqslant \operatorname{Ind} X + 1.$$

Доказательство. Индукция по размерности $\operatorname{Ind} X = n$. При $n = -1$ утверждение очевидно. Пусть теперь $n \geqslant 0$ и $F_1, F_2 \subseteq Y$ — замкнутые непересекающиеся множества. В пространстве X существует перегородка P между множествами $f^{-1}F_1$ и $f^{-1}F_2$ размерности $\operatorname{Ind} P \leqslant n-1$. Следовательно, имеются такие непересекающиеся окрестности $Of^{-1}F_1$ и $Of^{-1}F_2$, что

$$X \setminus P = Of^{-1}F_1 \cup Of^{-1}F_2. \tag{1}$$

Положим $U_i = Of^{-1}F_i \setminus f^{-1}fP$, $i = 1, 2$. Имеем $f^{-1}F_i \subseteq U_i$. Следовательно, $F_i \subseteq V_i \equiv f^{\#}U_i$. В силу замкнутости отображения f множество

$$K = Y \setminus V_1 \cup V_2$$

является перегородкой в Y между F_1 и F_2.

Остаётся показать, что $\operatorname{Ind} K \leqslant n$. Из равенства (1) вытекает дизъюнктность представления

$$X = U_1 \cup f^{-1}fP \cup U_2. \tag{2}$$

Следовательно, пространство Y является объединением непересекающихся множеств fP и $f^{\#}(U_1 \cup U_2)$. Значит,

$$K \setminus fP \subseteq f^{\#}(U_1 \cup U_2) \setminus f^{\#}U_1 \cup f^{\#}U_2. \tag{3}$$

Из представления (2) и совершенной нормальности пространства Y вытекает, что каждое из открытых множеств U_i является F_σ-множеством. Следовательно, существуют такие замкнутые множества $\Phi_i^j \subseteq X$, что

$$U_i = \bigcup \{\Phi_i^j \colon j \in \omega\}, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

Из очевидного включения

$$f^{\#}(U_1 \cup U_2) \setminus f^{\#}U_1 \cup f^{\#}U_2 \subseteq fU_1 \cap fU_2$$

и условия (3) вытекает

$$K \setminus fP \subseteq fU_1 \cap fU_2. \tag{5}$$

Положим $\Gamma_{jk} = f\Phi_1^j \cap f\Phi_2^k$, $j, k \in \omega$. Тогда из (4) и (5) вытекает

$$K \setminus fP \subseteq \bigcup \{\Gamma_{jk} \colon j, k \in \omega\}. \tag{6}$$

Таким образом, перегородка K является суммой замкнутого множества fP и счётного числа множеств $\Gamma_{jk} \setminus fP$, которые дискретны согласно II.1.6. По теореме Чеха (см. [3, гл. 7, § 3]) в совершенно нормальном пространстве для размерности Ind выполняется теорема счётной суммы замкнутых слагаемых. Следовательно, $\operatorname{Ind} K = \operatorname{Ind} fP$. Но по предположению индукции $\operatorname{Ind} fP \leqslant n$. Значит, $\operatorname{Ind} Y \leqslant n + 1$. Теорема доказана. $\square$

2.7. Определение. Подмножества A и B пространства X называются *разделёнными*, если

$$[A] \cap B = \varnothing = A \cap [B].$$

Пространство X называется *сильно наследственно нормальным*, если любые два его разделённые множества можно заключить в непересекающиеся окрестности, каждая из которых является объединением точечно конечного семейства открытых F_σ-множеств пространства X.

2.8. Теорема. *Пусть $f \colon X \to Y$ — вполне замкнутое отображение наследственно нормального пространства $X \neq \varnothing$ на сильно наследственно нормальное пространство Y. Тогда*

$$\operatorname{Ind} X \leqslant \operatorname{Ind} Y + \operatorname{Ind} f.$$

Доказательство. Проведём индукцию по $\operatorname{Ind} Y + \operatorname{Ind} f = p + g \geqslant 0$, где $\operatorname{Ind} Y \leqslant p$, $\operatorname{Ind} f \leqslant q$. При этом из непустоты пространства X вытекает, что $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$. При $p + q = 0$ утверждение вытекает из теоремы 2.4, поскольку для нормального пространства Z свойство $\dim Z = 0$ равносильно свойству $\operatorname{Ind} Z = 0$.

Пусть теперь $p + q \geqslant 1$. Возьмём непересекающиеся замкнутые множества $F_1, F_2 = \varnothing$. Положим $M = fF_1 \cap fF_2$. Множество M дискретно согласно II.1.6. По определению отображений $f^M \colon X \to Y_f^M$ и $\pi_f^M \colon Y_f^M \to Y$ имеем

множество $L \equiv (\pi_f^M)^{-1} M$ гомеоморфно множеству $f^{-1}M$, (7)

отображение $\pi_f^M | Y_f^M \setminus L \colon Y_f^M \setminus L \to Y \setminus M$ — гомеоморфизм, (8)

$f^M F_1 \cap f^M F_2 = \varnothing$. (9)

Из (7) вытекает, что пространство L топологически является дискретной суммой замкнутых подпространств $f^{-1}y$, $y \in M$, размерности $\operatorname{Ind} f^{-1}y \leqslant q$. Следовательно,

$$\operatorname{Ind} L \leqslant q. \tag{10}$$

Положим $\Phi_i = L \cap f^M F_i$, $i = 1, 2$. Отображение f^M вполне замкнуто по предложению II.1.10. Поэтому согласно равенству (9) Φ_1 и Φ_2 являются замкнутыми непересекающимися подмножествами пространства L. Значит, из (10) вытекает существование такой перегородки C в пространстве L между Φ_1 и Φ_2, что

$$\operatorname{Ind} C \leqslant q - 1. \tag{11}$$

Существуют такие открытые в L окрестности G_i множеств Φ_i, $i = 1, 2$, что

$$G_1 \cap G_2 = \varnothing, \quad L \setminus C = G_1 \cup G_2. \tag{12}$$

Множества G_1 и G_2 открыто-замкнуты в $L \setminus C$. Поэтому из (9) и (12) вытекает, что

$$\text{множества } G_i \cup f^M F_i \text{ замкнуты в пространстве } Y_f^M \setminus C \tag{13}$$

и не пересекаются.

Согласно уже упомянутому предложению II.1.10 пространство Y_f^M наследственно нормально как образ наследственно нормального пространства Y при замкнутом отображении f^M. Следовательно, в силу (13) у множеств $G_i \cup f^M F_i$ в пространстве $Y_f^M \setminus C$ существуют замкнутые в $Y_f^M \setminus C$ непересекающиеся окрестности A_i, $i = 1, 2$. Положим

$$B_i = \pi_f^M (A_i \setminus L), \quad i = 1, 2.$$

Из (8) вытекает, что

$$\text{множества } B_1 \text{ и } B_2 \text{ замкнуты в } Y \setminus M \text{ и не пересекаются.} \tag{14}$$

Поскольку в сильно наследственно нормальных пространствах выполнено свойство монотонности размерности Ind (см. [100, теорема 2.3.6]), имеем

$$\operatorname{Ind}(Y \setminus M) \leqslant \operatorname{Ind} Y \leqslant P.$$

Поэтому из (14) вытекает существование таких непересекающихся окрестностей H_1 и H_2 множеств B_1 и B_2 в $Y \setminus M$, что

$$\operatorname{Ind} E \leqslant p - 1, \quad \text{где} \quad E = Y \setminus M \cup H_1 \cup H_2. \tag{15}$$

Тогда множества $G_1 \cup (\pi_f^M)^{-1} H_1$ и $G_2 \cup (\pi_f^M)^{-1} H_2$ не пересекаются и открыты в Y_f^M. Последнее вытекает из того, что множество A_i является окрестностью множества G_i в открытом в $Y_f^M \setminus C$ подмножестве пространства Y_f^M. Следовательно, множество $C \cup (\pi_f^M)^{-1} E$ является перегородкой в Y_f^M между множествами $f^M F_1$ и $f^M F_2$. В этом случае множество

$$P \equiv (f^M)^{-1} (C \cup (\pi_f^M)^{-1} E = (f^M)^{-1} C \cup f^{-1} E$$

есть перегородка в X между F_1 и F_2. При этом множество $(f^M)^{-1}C$ замкнуто в P. Поэтому по аддиционной теореме Даукера для наследственно нормальных пространств (см. [3, гл. 7, § 2, теорема 2]) имеем

$$\operatorname{Ind} P \leqslant \max\{\operatorname{Ind}(f^M)^{-1}C, \operatorname{Ind}(P \setminus (f^M)^{-1}C)\}. \tag{16}$$

Но $P \setminus (f^M)^{-1}C = f^{-1}E$, а отображение $f|f^{-1}E$ вполне замкнуто. Значит, по предположению индукции из (15) вытекает

$$\operatorname{Ind}(P \setminus (f^M)^{-1}C) \leqslant p - 1 + q. \tag{17}$$

С другой стороны, множества $(f^M)^{-1}C$ и C гомеоморфны. Следовательно, согласно (11) имеем

$$\operatorname{Ind}(f^M)^{-1}C \leqslant q - 1 \leqslant p - 1 + q. \tag{18}$$

Таким образом, из (16), (17) и (18) получаем, что $\operatorname{Ind} P \leqslant p - 1 + q$. Теорема доказана. □

2.9. Определение. Напомним, что нормальное пространство X называется *слабо бесконечномерным*, если для любой счётной системы пар замкнутых множеств

$$(A_i, B_i), \quad A_i \cap B_i = \varnothing, \quad i \in \omega,$$

в X найдутся перегородки C_i между A_i и B_i, такие что $\bigcap\{C_i : i \in \omega\} = \varnothing$. Пространство, не являющееся слабо бесконечномерным, называется *сильно бесконечномерным*. Если же мы потребуем, чтобы уже конечное число перегородок имело пустое пересечение, то получим определение *S-слабо бесконечномерного* пространства. Для бикомпактов и даже счётно компактных пространств понятия слабо бесконечномерного и S-слабо бесконечномерного пространства совпадают. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *слабо бесконечномерным*, если все его слои $f^{-1}y$ слабо бесконечномерны.

2.10. Теорема ([61]). *Пусть $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \gamma\}$ — непрерывный спектр из бикомпактов и вполне замкнутых проекций, причём X_0 и все соседние проекции $\pi^{\alpha+1}_\alpha$ слабо бесконечномерны. Тогда его предел $\lim S$ также слабо бесконечномерен.*

Следствием теоремы 2.10 является следующее утверждение.

2.11. Теорема ([61]). *Пусть $f\colon X \to Y$ — вполне замкнутое отображение между бикомпактами. Тогда если бикомпакт Y и отображение f слабо бесконечномерны, то бикомпакт X также слабо бесконечномерен.*

Следующий вопрос имеет уже четвертьвековую историю.

2.12. Вопрос. Можно ли в теореме 2.10 полную замкнутость всех проекций заменить на полную замкнутость соседних проекций?

2.13. Полностью отказаться от полной замкнутости проекций в теореме 2.10 нельзя, поскольку гильбертов куб является пределом счётного спектра из конечномерных кубов. Что касается вопроса, можно ли в теореме 2.11 отказаться от полной замкнутости отображения, он представляется весьма трудным. Так, до сих пор не известно, будет ли слабо бесконечномерным произведение двух слабо бесконечномерных метризуемых компактов.

§ 3. Приложения

3.1. Как уже было отмечено выше, в основе многих приложений лежит лемма 1.16 о стандартной резольвенте. При этом при повторном (и многократном) применении этой леммы новые функции h_x можно определять двумя существенно различными способами. Поясним это на примере. Исходное пространство в лемме 1.16 обозначим через Y, резольвенту $R(Y) = R_n(Y)$ — через X, а отображение резольвенты $\pi\colon R(Y) \to Y$ — через f.

При построении второй резольвенты $R^2(Y) = R(X)$ мы можем поступить следующим образом. Мы забываем об исходном пространстве Y и определяем функции $h_x\colon X \setminus \{x\} \to I^n$ так, как это делается в лемме 1.16. Этот способ построения итерированных резольвент можно назвать методом *неразвёртываемых резольвент*.

Более тонкий метод состоит в следующем. Для точки $x \in X = R(Y)$ и отображения резольвенты $f\colon X \to Y$ положим $y = fx$. Тогда согласно II.1.5 отображение f представляется в виде композиции отображений $f^y\colon X \to Y^y$ и $\pi^y\colon Y^y \to Y$. Полагаем $z = f^y x$, находим необходимую для дальнейшего функцию $g_z\colon Y^y \setminus \{z\} \to I^n$ и полагаем $h_x = g_z \circ f^y$. Функция h_x определена корректно, поскольку z есть точка взаимной однозначности отображения f^y.

Эта же процедура, но в более усложненном виде, применяется при построении последующих итераций резольвенты. С точкой $x \in R^\alpha(Y)$ в предположении развёртываемости $R^\alpha(Y)$, что гарантируется применением этого метода, ассоциируется простой спектр S_x (см. гл. II, § 6), в пределе которого и строится функция типа g_z, которая затем поднимается на $R^\alpha(Y)$. Этот способ построения итерированных резольвент назовём методом *развёртываемых резольвент*.

Прежде чем привести пример применения метода неразвёртываемых резольвент, обратимся к неитерированной резольвенте $R(Y) = X$. Нам понадобятся некоторые вспомогательные понятия и факты.

3.2. Бикомпакт X размерности $\dim X = n$ называется *канторовым n-многообразием*, если X не содержит перегородки C размерности $\dim C \leqslant n-2$. Примерами канторовых n-многообразий являются куб I^n и всякое компактное n-многообразие. П. С. Александров [84] доказал, что всякий n-мерный бикомпакт содержит канторово n-многообразие.

3.3. Лемма ([53]). *Пусть $f\colon X \to Y$ — кольцевое отображение бикомпакта X на канторово m-многообразие Y, $m \geqslant 2$, при котором каждый слой $f^{-1}y$ связен и n-мерен. Тогда для всякой перегородки F в бикомпакте X имеем $\dim F \geqslant n$ и, в частности, $\operatorname{ind} X \geqslant n+1$.*

Доказательство. Бикомпакт Y связен. Следовательно, отображение f неприводимо согласно 1.15. По определению перегородки существуют такие непересекающиеся открытые множества $U, V \subseteq X$, что $X \setminus F = U \cup V$. Покажем, что

$$f^{\#}(U \cup V) = f^{\#}U \cup f^{\#}V. \tag{1}$$

Включение $\subseteq$ очевидно. Предположим теперь, что $y \in f^{\#}(U \cup V)$. Тогда слой f^{-1} лежит в объединении двух непересекающихся открытых множеств U и V, откуда из-за связности множества $f^{-1}y$ вытекает, что оно лежит в одном множестве, либо в U, либо в V. Равенство (1) установлено.

Таким образом, имеет место дизъюнктное представление

$$Y = f^{\#}U \cup fF \cup f^{\#}V.$$

Но множества $f^{\#}U$ и $f^{\#}V$ не пусты в силу неприводимости отображения f. Следовательно, fF является перегородкой в канторовом m-многообразии Y. Значит, $\dim fF \geqslant m - 1 \geqslant 1$. Поэтому бикомпакт fF содержит неодноточечный континуум K. Итак, $f^{-1}K \subseteq F$ согласно 1.15. Отсюда и вытекает неравенство $\dim F \geqslant n$, поскольку $\dim f^{-1}y \geqslant n$ для всякой точки y. Лемма доказана. $\square$

Резольвенту, удовлетворяющую условию 2) из леммы 1.16, будем называть *стандартной кольцевой резольвентой*.

3.4. Теорема. *Стандартная кольцевая резольвента* $X = R_2(I^2)$ *является сепарабельным бикомпактом с первой аксиомой счётности размерности* $\dim X = 2$, $3 \leqslant \operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X = 4$, *без перегородок размерности* $\leqslant 1$.

В самом деле, сепарабельность X вытекает из неприводимости отображения резольвенты π и предложения II.4.8. Отсутствие перегородок размерности $\leqslant 1$ и неравенство $3 \leqslant \operatorname{ind} X$ вытекают из леммы 3.3. Равенство $\dim X = 2$ является следствием теоремы 2.4. Наибольшие затруднения вызывает доказательство неравенства $\operatorname{Ind} X \leqslant 4$, сводящееся к проверке неравенства $\operatorname{Ind} \pi^{-1}F \leqslant 3$ для любого одномерного компакта $F \subseteq I^2$.

3.5. Замечание. Теорема 3.4 фактически была доказана в [48], где в качестве основания резольвенты была взята сфера S^2, а в качестве слоя — тор T^2. Итак, уже достаточно элементарное применение метода вполне замкнутых отображений привело к построению пространства, показывающего, что аксиоматику размерности метризуемых компактов, предложенную П. С. Александровым [83], нельзя распространить на бикомпакты.

3.6. Пример. Значительно более аккуратное применение описанной выше идеи даёт пример сепарабельного с первой аксиомой счётности бикомпакта Ψ размерности $\dim \Psi = 1 \leqslant \operatorname{ind} \Psi = 2$, топологически сильно однородного в том смысле, что любую его точку x можно перевести в любую другую $x' \in \Psi$ посредством гомеоморфизма пространства Ψ на себя (см. [52]).

3.7. Замечание. Б. А. Пасынков [31] доказал тождество Урысона

$$\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X \tag{2}$$

для бикомпактов, являющихся фактор-пространствами локально бикомпактных групп (и даже в более общем случае). Такие бикомпакты образуют подкласс более широкого класса так называемых *алгебраически однородных* бикомпактов, т. е. бикомпактов, являющихся фактор-пространствами произвольных топологических групп. Всякий алгебраически однородный бикомпакт топологически сильно однороден, но обратное неверно. Первым примером, различающим эти два класса, как раз и был бикомпакт Ψ.

В связи со сказанным вполне естественным выглядит следующий уже давно возникший вопрос.

3.8. Вопрос. Выполняется ли тождество Урысона (2) для алгебраически однородных бикомпактов?

3.9. Пример. Простейшее применение метода неразвёртываемых резольвент даёт пример n-мерного бикомпакта B_n с первой аксиомой счётности без промежуточных размерностей, т. е. бикомпакта, в котором всякое непустое замкнутое множество либо нульмерно, либо n-мерно, $n \geqslant 2$ (см. [53]).

Бикомпакт B_n получается как предел счётного спектра из бикомпактов X_k. Начинается спектр с n-мерного куба $I^n = X_1$, и бикомпакт X_{k+1} является стандартной кольцевой резольвентой $R_n(X_k)$.

3.10. Замечание. В дополнительных теоретико-множественных предположениях были построены и совершенно нормальные бикомпакты без промежуточных размерностей (см. [36, 59, 101, 103]).

Напомним, что *размерностной компонентой* n-мерного бикомпакта X называется его максимальное канторово n-подмногообразие, т. е. канторово n-многообразие $K \subseteq X$, не содержащееся ни в каком большем канторовом n-многообразии $L \subseteq X$. *Внутренним размерностным ядром* K_X n-мерного бикомпакта X называется объединение всех его канторовых n-подмногообразий.

Примеры 3.11—3.13 также построены методом резольвент, где не надо было заботиться об их развёртываемости.

3.11. Для всякого $n \geqslant 2$ существует n-мерный наследственно нормальный бикомпакт с первой аксиомой счётности, некоторая (всякая) размерностная компонента которого содержится в объединении остальных его размерностных компонент [55].

В связи с этим стоит отметить, что, как показал П. С. Александров, в совершенно нормальном бикомпакте никакая его размерностная компонента не может содержаться в объединении остальных размерностных компонент.

3.12. Существуют бикомпакты с первой аксиомой счётности без канонически открытых F_σ-множеств [54].

3.13. Существуют n-мерные наследственно нормальные бикомпакты $X = X_{lmn}$, в которых размерности внутреннего размерностного ядра K_X и его дополнения принимают сколь угодно большие наперёд заданные значения l и m ([103] с применением CH).

3.14. Напомним некоторые термины, понятия и факты, связанные с аксиоматикой ZFC теории множеств. Гёдель ввёл аксиому конструктивности ($V = L$) и доказал её совместимость с ZFC. Из аксиомы конструктивности вытекает, в частности, континуум-гипотеза (CH). Ослаблением континуум-гипотезы является *аксиома Мартина* (MA). Она допускает следующую топологическую формулировку.

Никакой бикомпакт, удовлетворяющий условию Суслина, не может быть представлен в виде суммы нигде не плотных множеств, число которых меньше мощности континуума.

Соловей и Тенненбаум [121] доказали, что с аксиоматикой ZFC одновременно совместимы аксиома Мартина и отрицание континуум-гипотезы (MA + ¬CH). Ещё одним следствием аксиомы конструктивности является *принцип Йенсена* $\diamondsuit$. Он состоит в следующем.

Для всякого стационарного множества $A \subseteq \omega_1$ существует такая последовательность $\{s_\alpha \colon \alpha \in A\}$, что $s_\alpha \subseteq \alpha$ и для всякого множества $X \subseteq \omega_1$ множество $\{\alpha \in A \colon X \cap \alpha = s_\alpha\}$ стационарно в ω_1.

При этом множество $A \subseteq \omega_1$ называется *стационарным* в ω_1, если оно пересекается со всяким замкнутым и неограниченным в ω_1 множеством.

Гипотеза Суслина (SH) состоит в том, что всякий сепарабельный линейно упорядоченный континуум метризуем. Известно, что как гипотеза Суслина, так и её отрицание совместимы с аксиомами ZFC.

Применение метода развёртываемых резольвент позволило построить следующие примеры.

3.15. Можно построить n-мерный бикомпакт X, в котором всякое бесконечное замкнутое множество n-мерно (в частности, X не содержит ни αN, ни βN) ([56] с применением CH).

3.16. Можно построить наследственно сепарабельное, совершенно нормальное, счётно компактное, локально бикомпактное, но не бикомпактное n-мерное пространство X $(n \geqslant 0)$ [58, 59].

3.17. Такое же пространство при $n = 0$ и при том же предположении $\diamondsuit$ построено Осташевским [116]. Это позволило построить контрпример к формуле Гуревича для понижающих размерность $\dim$ (и Ind) нульмерных отображений совершенно нормальных счётно компактных пространств [58, 59].

Этот пример, в силу теоремы Вейса [127] о бикомпактности совершенно нормального счётно компактного пространства в предположении (MA + ¬CH), показывает, в частности, независимость от аксиомы ZFC справедливости формулы Гуревича для понижающих размерность отображений совершенно нормальных счётно компактных пространств.

3.18. Александровская компактификация пространства 3.16 дала первый пример наследственно сепарабельного (и, значит, наследственно суслинского) наследственно нормального бикомпакта, который не является секвенциальным и тем более совершенно нормальным.

3.19. Пример 3.16 был применен к построению первого наследственно нормального бикомпакта, в котором размерности $\dim$ и Ind не обладают свойством монотонности ([58, 59] в предположении $\lozenge$).

Наиболее ярким примером применения метода развёртываемых спектров явилось построение бикомпактов 3.20 и 3.22.

3.20. Можно построить наследственно сепарабельный наследственно нормальный бикомпакт мощности $2^{\mathfrak{c}}$ без b-точек, который почти совершенно нормален в том смысле, что всякое его замкнутое подмножество без изолированных точек имеет тип G_δ и, кроме того, если x является неизолированной точкой замкнутого множества F, то существует такое замкнутое Φ без изолированных точек, что $x \in \Phi \subseteq F$ ([57] в предположении $\lozenge$).

Напомним, что точка $x \in X$ называется *b-точкой* пространства X, если существуют такие открытые множества $U, V \subseteq X$, что $\{x\} = [U] \cap [V]$.

В связи с примером 3.20 отметим, что до сих пор нерешённым остаётся следующий вопрос.

3.21. Вопрос ([63, 104]). Верно ли, что всякий наследственно сепарабельный (наследственно нормальный) бикомпакт имеет мощность $\leqslant 2^{\omega_1}$?

Юхас и Шелах [111] построили модель, в которой наследственно сепарабельное пространство может иметь мощность $> 2^{\omega_1}$.

3.22. Можно построить слабо бесконечномерный наследственно несчётномерный (всякое непустое замкнутое множество ненулевой размерности несчётномерно) бикомпакт с первой аксиомой счётности (и некоторые модификации таких бикомпактов, в частности, со свойствами бикомпакта 3.20 в дополнительных теоретико-множественных предположениях) [61].

3.23. Можно построить слабо бесконечномерный наследственно несчётномерный совершенно нормальный бикомпакт ([61] в предположении CH).

3.24. Можно построить слабо бесконечномерный бикомпакт, всякое бесконечное замкнутое подмножество которого несчётномерно ([61] в предположении CH).

3.25. Можно построить слабо бесконечномерный наследственно сепарабельный почти совершенно нормальный бикомпакт, всякое бесконечное замкнутое подмножество которого несчётномерно и имеет мощность $2^{\mathfrak{c}}$ ([61] в предположении $\lozenge$).

Напомним, что пространство X называется *α-растянутым* [5], если на X существует такой линейный порядок $\leqslant$, что всякий левый луч $(-\infty, x]$ замкнут. Если же на X существует такой линейный порядок, что замыкание всякого «открытого» левого луча $(-\infty, x)$ получается прибавлением к нему множества веса $\leqslant \tau$, то пространство X называется *τ-α-растянутым*. А. В. Архангельским были поставлены следующие вопросы:

1) всякий ли бикомпакт с первой аксиомой счётности α-растянут или хотя бы $\aleph_0$-α-растянут?

2) существуют ли $\aleph_0$-α-растянутые бикомпакты, не являющиеся α-растянутыми?

Пример 3.26 даёт положительный ответ на второй вопрос и показывает, что не всякий бикомпакт с первой аксиомой счётности α-растянут.

3.26. Существует однородный сепарабельный с первой аксиомой счётности $\aleph_0$-α-растянутый бикомпакт, не являющийся α-растянутым [62].

В качестве такого бикомпакта можно взять бикомпакт Ψ из 3.6. В то же время утверждение, что всякий бикомпакт с первой аксиомой счётности $\aleph_0$-α-растянут, эквивалентно континуум-гипотезе. В самом деле, предполагая CH, мы можем упорядочить всякий бикомпакт мощности $\mathbf{c}$ по типу ω_1^*. А для бикомпактов с первой аксиомой счётности такое упорядочение является, как легко видеть, $\aleph_0$-α-растяжением.

3.27. При отрицании CH мы имеем бикомпакт с первой аксиомой счётности, не являющийся $\aleph_0$-α-растянутым ([62] в предположении $\neg$CH).

В качестве такого бикомпакта можно взять стандартную кольцевую резольвенту бикомпакта Ψ со слоем I.

3.28. Построен совершенно нормальный бикомпакт, в котором не всякое замкнутое множество является π-множеством в смысле В. И. Зайцева, т. е. пересечением конечного числа канонически замкнутых множеств ([60] в предположении (CH $+ \neg$SH)).

Стоит отметить, что пример 3.28 показывает независимость от аксиом ZFC следующей теоремы, совместимость которой с ZFC доказана В. П. Золотарёвым [12].

3.29. Теорема. *Всякое замкнутое подмножество совершенно нормального бикомпакта является π-множеством.*

Напомним, что бикомпакт X называется *C-пространством* [104], если он является пределом развёртываемого спектра с метризуемыми прообразами точек при соседних проекциях (развёртываемые спектры начинаются с метризуемого или даже одноточечного компакта). В частности, согласно теореме II.3.8 C-пространством является всякий бикомпакт, допускающий вполне замкнутое отображение на метризуемый компакт, при котором прообразы всех точек метризуемы.

3.30. Существует совершенно нормальное не сепарабельное C-пространство ([104] в предположении существования континуума Суслина).

Наследственно сепарабельный бикомпакт, являющийся C-пространством, называется *вполне сепарабельным* [104]. Бикомпакт 3.20 является вполне сепарабельным, почти совершенно нормальным, но не совершенно нормальным. В то же время имеет место следующая теорема.

3.31. Теорема ([104] в предположении леммы Буса [87] и отрицания континуум-гипотезы). *Всякий вполне сепарабельный почти совершенно нормальный бикомпакт совершенно нормален.*

Другим доказательством независимости от аксиом ZFC существования бикомпакта 3.20 явилась полученная в предположении аксиомы Мартина и отрицания континуум-гипотезы теорема Сентмиклоши [123] о том, что всякий наследственно сепарабельный бикомпакт совершенно нормален.

3.32. Методом развёртываемых спектров очень просто строится нульмерный бикомпакт X, являющийся суммой всюду плотных подпространств Y и Z, таких что Y метризуемо, Z σ-бикомпактно и различные точки из Z имеют разные характеры.

X является пределом счётного спектра из бикомпактов X_n, причём бикомпакт X_{n+1} получается из X_n посредством следующей операции. К каждой точке $x \in X_n \setminus X_{n-1}$ приклеивается $D^{\tau(x)}$, причём $x_1 \neq x_2 \to \tau(x_1) \neq \tau(x_2)$ и $\tau(x) > |X_n|$. Начинаем с канторова совершенного множества.

По поводу примера 3.32 стоит отметить, что он содержится в статье [63] 1980 г. Но в его описание вкралась опечатка: вместо «$x \in X_n \setminus X_{n-1}$» написано «$x \in X_n$».

В [63] в связи с примером 3.32 был поставлен следующий вопрос.

3.33. Вопрос. Существует ли бесконечный бикомпакт, в котором характеры всех точек попарно различны?

Нетривиальный ответ на этот вопрос дал Вотсон.

3.34. Теорема ([125]).

1. *Если $V = L$ и существует кардинал Мало, то существует линейно упорядоченный континуум, в котором характеры различных точек различны.*
2. *Если существует бесконечный бикомпакт, в котором характеры различных точек различны, то существует слабо недостижимый кардинал.*

Напомним, что *кардинал Мало* — это регулярное кардинальное число k, имеющее стационарное подмножество из регулярных бесконечных кардинальных чисел. Регулярный кардинал k называется *слабо недостижимым*, если $k = \omega_\alpha$, где $|\alpha| = \omega_\alpha$. Таким образом, положительный ответ на вопрос 3.33 «равносилен» существованию больших кардиналов.

В [120] Д. Б. Шахматов поставил следующий вопрос.

3.35. Вопрос. Существует ли в ZFC счётно компактное пространство, в котором характеры различных точек различны?

Напомним, что для кардинального числа k пространство X называется *инициально k-компактным*, если всякое открытое покрытие пространства X, имеющее мощность $\leqslant k$, содержит конечное подпокрытие. В частности, инициально ω_0-компактные пространства — это счётно компактные пространства.

Положительный ответ на вопрос 3.35 вытекает из следующего утверждения.

3.36. Теорема. *Для всякого бесконечного кардинального числа k существует инициально k-компактное пространство $X = X(k)$, в котором характеры всех точек различны.*

Для доказательства теоремы 3.36 нам потребуются некоторые вспомогательные понятия и факты. Пусть дан непрерывный спектр $S = \{X_\alpha, p^\alpha_\beta, \delta\}$ из бикомпактов, где δ — некоторое порядковое предельное число. Спектр S будем называть *ретрактивным*, если для каждой пары $\beta < \alpha$ зафиксировано вложение $i^\beta_\alpha \colon X_\beta \to X_\alpha$ так, что

$$p^\alpha_\beta \circ i^\beta_\alpha = \mathrm{id}_{X_\beta}\,. \tag{3}$$

При этом для $\gamma < \beta < \alpha$ выполнено равенство

$$i^\beta_\alpha \circ i^\gamma_\beta = i^\gamma_\alpha. \tag{4}$$

Из (3) и (4) вытекает

$$i^\gamma_\beta = p^\alpha_\beta \circ i^\gamma_\alpha. \tag{5}$$

В свою очередь, из (5) и непрерывности спектра S вытекает

$$i^\gamma_\alpha = \lim\{i^\gamma_\beta \colon \gamma \leqslant \beta < \alpha\} \tag{6}$$

для всякого предельного числа $\alpha > \gamma$.

3.37. Замечание. Из (5) и (6) следует, что для рекурсивного определения ретрактивного спектра S достаточно для каждого $\alpha < \delta$ построить проекцию $p^{\alpha+1}_\alpha \colon X_{\alpha+1} \to X_\alpha$ и вложение $i^\alpha_{\alpha+1} \colon X_\alpha \to X_{\alpha+1}$ со свойством

$$p^{\alpha+1}_\alpha \circ i^\alpha_{\alpha+1} = \mathrm{id}_{X_\alpha}\,. \tag{7}$$

Для произвольного отображения $f \colon Z \to Y$ через $Y^{(0,f)}$ обозначим множество точек взаимной однозначности отображения f, т. е.

$$Y^{(0,f)} = \{y \in Y \colon |f^{-1}(y)| = 1\}. \tag{8}$$

Ретрактивный спектр S назовём *чисто ретрактивным*, если

$$X_{\beta+1}^{(0,p^\alpha_{\beta+1})} = i^\beta_{\beta+1}(X_\beta) \tag{9}$$

для произвольного β,

$$X_\beta^{(0,p^\alpha_\beta)} = \bigcup\{i^\gamma_\beta(X_\gamma) \colon \gamma < \beta\} \tag{10}$$

для предельного β.

Чисто ретрактивный спектр S назовём *разнородным*, если

$$\chi(y_1, X_{\alpha+1}) \neq \chi(y_2, X_{\alpha+1}) \tag{11}$$

для различных точек

$$y_1, y_2 \in i^\alpha_{\alpha+1}(X_\alpha). \tag{12}$$

3.38. Лемма. *Пусть $S = \{X_\alpha, p^\alpha_\beta, k^+\}$ — разнородный чисто ретрактивный спектр, $X = \lim S$ и $X_\infty = \bigcup\{p^{-1}_{\alpha+1}(i^\alpha_{\alpha+1}(X_\alpha)) \colon \alpha < k^+\}$. Тогда пространство X_∞ инициально k-компактно и характеры всех точек в пространстве X_∞ различны.*

Доказательство. Заметим сначала, что

$$p_{\beta+1}^{-1}(i_{\beta+1}^{\beta}(X_\beta)) \subseteq p_{\alpha+1}^{-1}(i_{\alpha+1}^{\alpha}(X_\alpha)), \tag{13}$$

если $\beta < \alpha$. В самом деле, для проверки включения (13) достаточно показать, что

$$(p_{\beta+1}^{\alpha+1})^{-1}(i_{\beta+1}^{\beta}(X_\beta)) \subseteq i_{\alpha+1}^{\alpha}(X_\alpha). \tag{14}$$

Но согласно (9) множество $i_{\alpha+1}^{\alpha}(X_\alpha)$ состоит из всех точек взаимной однозначности отображения $p_{\alpha+1}$. По той же причине $|p_{\beta+1}^{-1}(x)| = 1$ для $x \in i_{\beta+1}^{\beta}(X_\beta)$. Поэтому, полагая $y = (p_{\beta+1}^{\alpha+1})^{-1}(x)$, имеем $|(p_{\alpha+1})^{-1}y| = 1$ и, следовательно, $y \in i_{\alpha+1}^{\alpha}(X_\alpha)$. Итак, включение (14) и вместе с ним включение (13) установлены.

Следовательно, пространство X_∞ является объединением растущей последовательности бикомпактов

$$Z_\alpha = p_{\alpha+1}^{-1}(i_{\alpha+1}^{\alpha}(X_\alpha)), \quad \alpha < k^+.$$

Но такое пространство, как легко видеть, инициально k-компактно.

Пусть теперь $x_1, x_2 \in X_\infty$ — различные точки. Существует такое α, что $p_\alpha(x_1) \neq p_\alpha(x_2)$. Положим $y_i = i_{\alpha+1}^{\alpha}(p_\alpha(x_i))$. Тогда $p_{\alpha+1}^{-1}(y_i) = x_i$, т. е. y_i есть точка взаимной однозначности отображения $p_{\alpha+1}$. Следовательно,

$$\chi(x_i, X) = \chi(y_i, X_{\alpha+1}) \tag{15}$$

в силу следующего простого утверждения.

3.39. Предложение. *Пусть $f\colon X \to Y$ — эпиморфизм бикомпактов, и пусть $y \in Y$ — точка взаимной однозначности отображения f. Тогда*

$$\chi(f^{-1}(y), X) = \chi(y, Y).$$

Из включений

$$p_{\alpha+2}^{-1}(i_{\alpha+2}^{\alpha+1}(X_{\alpha+1})) \subseteq X_\infty \subseteq X$$

вытекает, что

$$\chi(x_i, p_{\alpha+2}^{-1}(i_{\alpha+2}^{\alpha+1}(X_{\alpha+1}))) \leqslant \chi(x_i, X_\infty) \leqslant \chi(x_i, X). \tag{16}$$

Но x_i — точка взаимной однозначности отображения $p_{\alpha+2}$. Следовательно,

$$\chi(p_{\alpha+2}(x_i), i_{\alpha+2}^{\alpha+1}(X_{\alpha+1}) = \chi(x_i, p_{\alpha+2}^{-1}(i_{\alpha+2}^{\alpha+1}(X_{\alpha+1})). \tag{17}$$

С другой стороны, отображение $p_{\alpha+1}^{\alpha+2}|i_{\alpha+2}^{\alpha+1}(X_{\alpha+1})$ является гомеоморфизмом согласно (7). Кроме того, $p_{\alpha+1}^{\alpha+2}(p_{\alpha+2}(x_i)) = y_i$. Значит,

$$\chi(y_i, X_{\alpha+1}) = \chi(p_{\alpha+2}(x_i), i_{\alpha+2}^{\alpha+1}(X_{\alpha+1})). \tag{18}$$

Таким образом, из (16), (17) и (18) получаем

$$\chi(y_i, X_{\alpha+1}) \leqslant \chi(x_i, X_\infty) \leqslant \chi(x_i, X). \tag{19}$$

Из (15) и (19) вытекает, что

$$\chi(x_i, X_\infty) = \chi(y_i, X_{\alpha+1}). \tag{20}$$

Наконец, из (11), (12) и (20) получаем

$$\chi(x_1, X_\infty) \neq \chi(x_2, X_\infty).$$

Лемма 3.38 доказана. □

Доказательство теоремы 3.36. Индукцией по порядковым числам $\alpha < k^+$ определим кардинальные числа λ_α. Положим $\lambda_0 = 2^{\omega_0}$, $\lambda_{\alpha+1} = \omega_{\lambda_\alpha}$ и $\lambda_\alpha = \prod\{\lambda_\beta : \beta < \alpha\}$ для предельного α.

Для пространства X, пространств Y_x, $x \in X$, и точек $y_x \in Y_x$ положим

$$X \diamond \{Y_x, y_x\} = R(X, Y_x, h_x) = R(X),$$

где $h_x : X \setminus \{x\} \to Y_x$ — постоянное отображение в точку y_x. Пространство $X \diamond \{Y_k, y_k\}$ называется *свободной резольвентой пространства* X с переменным слоем Y_x, в котором *отмечена* точка y_x. Отображение свободной резольвенты обладает свойством (7). Это означает, что существует топологическое вложение $i^X_{R(X)} : X \to R(X)$, для которого

$$\pi_X \circ i^X_{R(X)} = \mathrm{id}_X\,. \tag{21}$$

В нашем случае вложение $i^X_{R(X)}$ определяется равенством

$$i^X_{R(X)}(x) = (x, y_x). \tag{22}$$

Положим

$$X^0 = \{x \in X : Y_x = \{y_x\}\}. \tag{23}$$

Ясно, что множество X^0 совпадает с множеством точек взаимной однозначности отображения π_X, т. е. $X^0 = X^{(0,\pi_X)}$.

В нашем построении все неодноточечные слои Y_x будут различными канторовыми дисконтинуумами D^τ. Отмеченной точкой будет точка $\bar{0} \in D^\tau$, все координаты которой равны нулю. Поэтому свободную резольвенту $X \diamond \{Y_x, y_x\}$ будем обозначать

$$(X, X^0) \diamond \{D^{\tau(x)}\},$$

где множество X^0 из (23) можно записать по-другому:

$$X^0 = \{x \in X : \tau(x) = 0\}.$$

Для доказательства теоремы 3.36 нам достаточно построить спектр $S = \{X_\alpha, p^\alpha_\beta, k^+\}$, удовлетворяющий условиям леммы 3.38. Спектр S построим трансфинитной рекурсией. Чтобы спектр S был ретрактивным, согласно замечанию 3.37 достаточно определить соседние проекции $p^{\beta+1}_\beta$ и вложения $i^\beta_{\beta+1} : X_\beta \to X_{\beta+1}$, удовлетворяющие условию (7).

Полагаем $X_0 = \{0\}$. Предположим, что бикомпакты X_β и отображения $p^\beta_\gamma : X_\beta \to X_\gamma$ построены для всех $\gamma \leqslant \beta < \alpha$ так, что

$$|X_\beta| \leqslant \lambda_\beta. \tag{24}$$

Если α — предельное число, полагаем $X_\alpha = \lim\{S|\alpha\}$, где $S|\alpha = \{X_\beta, p^\beta_\gamma, \alpha\}$. При этом предполагаем, что спектр $S|\alpha$ чисто ретрактивный. Проекции p^α_γ однозначно определяются свойством непрерывности строящегося спектра S, т. е. $p^\alpha_\gamma = \lim\{p^\beta_\gamma : \gamma \leqslant \beta < \alpha\}$.

Пусть теперь $\alpha = (\alpha - 1) + 1$, где $\alpha - 1$ — предельное число. Положим

$$X^0_{\alpha-1} = \bigcup\{i^\gamma_{\alpha-1}(X_\gamma) : \gamma < \alpha - 1\}. \tag{25}$$

Условие (24) для $\beta = \alpha - 1$ выполнено по определению чисел λ_β в силу следующего очевидного утверждения.

3.40. Предложение. *Пусть $T = \{Y_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \delta\}$ — обратный спектр множеств. Тогда*

$$|\lim T| \leqslant \Big|\prod_\alpha Y_\alpha\Big| = \prod_\alpha |Y_\alpha|.$$

Следовательно, $|X_{\alpha-1} \backslash X^0_{\alpha-1}| \leqslant \lambda_{\alpha-1}$. Поэтому точки множества $X_{\alpha-1} \backslash X^0_{\alpha-1}$ можно занумеровать порядковыми числами $\omega_\varepsilon \in [\lambda_{\alpha-1}, \delta]$, где $\delta < \lambda_\alpha$, т. е.

$$X_{\alpha-1} \setminus X^0_{\alpha-1} = \{x_{\omega_\varepsilon} : \omega_\varepsilon \in [\lambda_{\alpha-1}, \delta]\}. \tag{26}$$

Положим

$$X_\alpha = (X_{\alpha-1}, X^0_{\alpha-1}) \diamond \{D^{\tau(x)}\}, \tag{27}$$

где $\tau(x_{\omega_\varepsilon}) = \omega_\varepsilon$. Проекцию $p^\alpha_{\alpha-1}$ определим как отображение резольвенты $\pi_{X_{\alpha-1}} : X_\alpha \to X_{\alpha-1}$. Эта проекция удовлетворяет условию (7) ретрактивности спектра в силу свойства (21). Из (25) и (27) вытекает выполнение свойства (10) чистой ретрактивности спектра.

Пусть, наконец, $\alpha = (\alpha - 2) + 2$. Полагаем

$$X^0_{\alpha-1} = i^{\alpha-2}_\alpha(X_{\alpha-2}). \tag{28}$$

Согласно свойству (24) точки множества $X_{\alpha-1} \setminus X^0_{\alpha-1}$ можно занумеровать последовательностью (26). Бикомпакт X_α снова определяем равенством (27). Из (28) вытекает свойство (9) чистой ретрактивности спектра.

Итак, спектр $S = \{X_\alpha, p^\alpha_\beta, k^+\}$ построен. Остаётся проверить только, что он разнороден. Для этого нам потребуется вспомогательное утверждение.

3.41. Предложение. *Для точки $z = (x, y_x)$ бикомпактной свободной резольвенты $X \diamond \{Y_x, y_x\} \equiv X_1$ имеем*

$$\chi(z, X_1) = \max\{\chi(x, X), \chi(y_x, Y_x)\}.$$

Это утверждение верно для любой ретракции $r : X_1 \to X$ и точки $x = z \in X$.

Условие (12) равносильно совокупности трёх условий:

$$y_1, y_2 \in i^\alpha_{\alpha+1}(X^0_\alpha); \tag{12_0}$$

$$y_1 \in i^\alpha_{\alpha+1}(X^0_\alpha), \quad y_2 \in i^\alpha_{\alpha+1}(X_\alpha \setminus X^0_\alpha); \tag{12_1}$$

$$y_1, y_2 \in i^\alpha_{\alpha+1}(X_\alpha \setminus X^0_\alpha). \tag{12_2}$$

В случае (12_2) условие (11) выполнено по предложению 3.41 и определению бикомпакта $X_{\alpha+1}$. В случае (12_1) в силу тех же причин имеем $\chi(y_1) < \chi(y_2)$. Наконец, в случае (12_0) точка y_i есть точка взаимной однозначности отображения $p_\alpha^{\alpha+1}$. Поэтому для $x_i = p_\alpha^{\alpha+1}(y_i)$ имеем

$$\chi(x_i, X_\alpha) = \chi(y_i, X_{\alpha+1}). \tag{29}$$

Следовательно, условие (11) в этом случае равносильно условию

$$\chi(x_1, X_\alpha) \neq \chi(x_2, X_\alpha) \tag{11_0}$$

для различных точек $x_1, x_2 \in X_\alpha^0$. Это условие проверяется трансфинитной индукцией. Для изолированного $\alpha = (\alpha - 1) + 1$ посредством аналогичного равенства (29) мы спускаемся на уровень $\alpha - 1$, где всё уже выполнено по предположении индукции. Для предельного α согласно (25) имеем

$$X_\alpha^0 = \bigcup\{i_\alpha^\gamma(X_\gamma) \colon \gamma < \alpha\}, \tag{30}$$

что равносильно равенству

$$X_\alpha^0 = \bigcup\{(p_{\gamma+1}^\alpha)^{-1}(i_{\gamma+1}^\gamma(X_\gamma)).$$

Поэтому для проверки неравенства (11_0) в этом случае надо применить рассуждения из доказательства леммы 3.38. Теорема 3.36 доказана. □

3.42. Вполне замкнутые и близкие к ним отображения изучали и применяли также П. Г. Парфёнов [27—30], Н. В. Савинов [35—37], В. М. Ульянов [39—45], А. В. Иванов [13—19], В. А. Чатырко [76—79] и А. А. Одинцов [25, 26].

В частности, П. Г. Парфёнов доказал [30], что тождество Урысона (2) выполняется для любого бикомпакта Y, который является непрерывным образом бикомпакта X, допускающего счётно-кратное непрерывное отображение на метризуемый компакт. Более того, к этому тождеству можно добавить равенство $\operatorname{Ind} Y = \Delta Y$. При этом равенство $\Delta Y = n$ означает, что бикомпакт Y n-мерен и является $(n+1)$-кратным образом нульмерного бикомпакта.

Н. В. Савинов, кроме упомянутых выше теоретических результатов (аналог теоремы 2.4 для более широкого класса отображений, теорем 2.5, 2.6 и теоремы 2.8 для тотально нормального Y) и примера совершенно нормального бикомпакта без промежуточных размерностей в предположении континуум-гипотезы, построил [37] примеры 3.43 и 3.44.

3.43. Можно построить одномерный бикомпакт X, для которого выполняется тождество Урысона, но $\Delta X = 3$.

Стоит отметить, что первый бикомпакт с $\operatorname{Ind} < \Delta$ построил П. Г. Парфёнов [27].

3.44. Можно построить бикомпакт Z, для которого $\dim Z = \Delta Z = 1$, но $\Delta(Z \times I) = 3$.

Пример 3.44 интересен, в частности, тем, что он показывает границы действия одной теоремы П. Г. Парфёнова [27] о равенстве $\Delta(K \times I) = 2$ для линейно упорядоченного континуума K.

Кроме того, этот пример показывает, что в оценке

$$\Delta(X \times Y) \leqslant (\Delta X + 1)(\Delta Y + 1) - 1,$$

верной для любых бикомпактов X и Y, может достигаться равенство.

В. М. Ульянов [43] рассмотрел близкие к вполне замкнутым отображения, являющиеся вполне замкнутыми для тихоновских пространств. Он исследовал непрерывные образы некоторых пространств, допускающих вполне замкнутые отображения на «хорошие» пространства. Им был указан также (без доказательства) пример из теоремы II.4.50. Что касается приложений обобщённых резольвент, об этом будет рассказано ниже.

Из результатов А. В. Иванова, полученных с применением развёртываемых спектров, отметим примеры 3.45—3.49.

3.45. Можно построить неметризуемое небикомпактное счётно компактное совершенно нормальное локально бикомпактное пространство, все конечные степени которого наследственно сепарабельны ([16] в предположении $\diamondsuit$).

В связи с этим отметим теорему Кюнена [114] о том, что утверждение, что если у пространства X все конечные степени наследственно сепарабельны, то X финально компактно, совместимо с аксиомами ZFC. Таким образом, пример 3.45 показывает, что следующие утверждения не зависят от аксиом ZFC:

1) если у счётно компактного пространства X все конечные степени наследственно сепарабельны, то X есть бикомпакт;
2) если у совершенно нормального счётно компактного пространства все конечные степени наследственно сепарабельны, то оно метризуемо.

3.46. Для любого натурального n существует n-мерный бикомпакт X_n, для которого выполнено следующее: если F — бесконечное замкнутое множество в k-й степени X_n^k, $k > 0$, то $\dim F = tn$, где $1 \leqslant t \leqslant k$ ([16] в предположении $\diamondsuit$).

Этот пример усиливает пример 3.15 автора. В связи с этим возникает вопрос, можно ли построить пространство со свойствами бикомпакта из 3.46 без дополнительных теоретико-множественных предположений или хотя бы в более слабых, чем принцип Йенсена, предположениях, например при CH.

Одним из наиболее наглядных доказательств силы метода развёртываемых спектров является следующий пример.

3.47. Можно построить бикомпакт мощности $2^{\mathbf{c}}$, все конечные степени которого наследственно сепарабельны ([14] в предположении $V = L$).

В связи с этим напомним, что в предположении континуум-гипотезы Кюнен построил неметризуемый бикомпакт мощности $\mathbf{c}$, все конечные степени которого наследственно сепарабельны. Он же доказал, что «наивного» примера такого бикомпакта не существует. Другим усилением примера Кюнена является ещё один построенный А. В. Ивановым бикомпакт.

3.48. Можно построить неметризуемый совершенно нормальный бикомпакт, все конечные степени которого наследственно сепарабельны ([14] в предположении $\diamondsuit$).

Бикомпакт 3.48 даёт также отрицательный ответ на вопрос Е. В. Щепина [82], будет ли каппа-метризуемым бикомпакт, квадрат которого совершенно каппа-нормален.

3.49. Существуют такие неметризуемые бикомпакты Z_n, произведение которых $\prod\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$ совершенно нормально ([14] в предположении $\diamondsuit$).

3.50. В [18] А. В. Иванов ввёл понятие F-бикомпакта, обобщающее понятие C-пространства из [104]. А именно, бикомпакт X называется *F-бикомпактом*, если существует такой вполне упорядоченный непрерывный спектр $S = \{X_\alpha, p^\alpha_\beta, \tau\}$ из бикомпактов, что

1) X_0 есть точка,
2) соседние проекции $p^{\alpha+1}_\alpha$ вполне замкнуты и имеют метризуемые слои,
3) $X = \lim S$.

Наименьшая длина τ спектров S, удовлетворяющих условиям 1)—3), называется *спектральной высотой* F-бикомпакта X и обозначается $sh(X)$.

3.51. Теорема ([18]). *Если $sh(X) < \omega_1$, то наследственное число Суслина F-бикомпакта X совпадает с его наследственным числом Линделёфа и с наследственной плотностью.*

Любой пример наследственно сепарабельного не совершенно нормального F-бикомпакта (например, 3.16) показывает, что счётность спектральной высоты в условии теоремы 3.51 существенна. Тем не менее в предположении $\mathsf{MA}+\neg\mathsf{CH}$ утверждение теоремы 3.51 верно и для F-бикомпактов спектральной высоты ω_1 [18].

3.52. Теорема ([19], $2^{\omega_0} < 2^{\omega_1}$). *Если X — сепарабельный наследственно нормальный F-бикомпакт и $sh(X) < \omega_1$, то X совершенно нормален.*

Пример лексикографически упорядоченного квадрата показывает, что условие сепарабельности в теореме 3.52 существенно.

3.53. Пример ([19] в предположении $\diamondsuit$). Существует счётный спектр из наследственно нормальных бикомпактов с вполне замкнутыми проекциями, предел которого не наследственно нормален и в то же время все конечные степени предела наследственно сепарабельны.

Этот пример даёт отрицательный ответ на вопрос 3 из [63].

Целый ряд интересных примеров построил В. А. Чатырко.

3.54. Для любого $n = 2, 3, \ldots$ существует сепарабельный с первой аксиомой счётности змеевидный бикомпакт X_n размерности $\operatorname{ind} X_n = n$ [76, 79].

Бикомпакты из 3.54 связаны вполне замкнутыми отображениями $\pi_n \colon X_{n+1} \to X_n$. Взятие предела возникающей обратной последовательности позволяет получить следующее утверждение.

3.55. Существует сепарабельный с первой аксиомой счётности змеевидный бикомпакт X_∞, у которого всякое замкнутое подмножество либо нульмерно, либо не имеет малой индуктивной размерности. Более того, всякое бесконечное связное замкнутое подмножество бикомпакта X_∞ гомеоморфно бикомпакту X_∞ [77, 79].

Из 3.54 легко получается также следующее утверждение.

3.56. Существуют сепарабельные с первой аксиомой счётности змеевидные бикомпакты X_{ω_0} и X_{ω_0+1} размерности $\operatorname{ind} X_{\omega_0} = \omega_0$ и $\operatorname{ind} X_{\omega_0+1} = \omega_0+1$ [77,79].

3.57. Для любого $m = 2, 3, \ldots$ существует одномерный топологически однородный сепарабельный с первой аксиомой счётности бикомпакт S_m индуктивной размерности $\operatorname{ind} S_m = m$ [77, 79].

Эта теорема усиливает результат автора 3.6.

3.58. Бикомпакты S_m связаны вполне замкнутыми отображениями $\pi^m \colon S_{m+1} \to S_m$. Переходя к пределу возникающей обратной последовательности, получаем сепарабельный с первой аксиомой счётности топологически однородный одномерный бикомпакт S_∞, не имеющий малой индуктивной размерности. Кроме того, всякое бесконечное связное замкнутое подмножество бикомпакта S_∞ содержит подмножество, гомеоморфное S_∞ [77, 79].

Напомним, что континуум (= связный бесконечный бикомпакт) называется *неразложимым*, если его нельзя представить в виде объединения двух его собственных подконтинуумов. Континуум, всякий подконтинуум которого неразложим, называется *наследственно неразложимым*. Далее будем использовать краткое название наследственно неразложимых континуумов — н. н. к.

3.59. Существует неметризуемый сепарабельный с первой аксиомой счётности одномерный н. н. к. B_1 [78].

3.60. Существует сепарабельный с первой аксиомой счётности н. н. к. B_2 размерности $\dim B_2 = 2 < 3 \leqslant \operatorname{ind} B_2 \leqslant 4$ [78].

3.61. Для любого $n \geqslant 1$ существует такой сепарабельный с первой аксиомой счётности н. н. к. B_n, что для всякого непустого замкнутого множества $F \subseteq B_n$ имеем либо $\dim F = 0$, либо $wF = \mathbf{c}$ и $\dim F = \dim B_n = n$ [78].

3.62. Существует метризуемый н. н. к. X размерности $\operatorname{ind} X = \omega_0$ [78].

3.63. Работы А. А. Одинцова, связанные с применением вполне замкнутых отображений, относятся к пространствам, близким к упорядоченным. Через $\mathcal{K}$ (соответственно $\mathcal{C}$) обозначается класс непрерывных образов линейно упорядоченных бикомпактов (соответственно континуумов). Важность этих классов обусловлена двумя классическими теоремами. В 1914 г. Хан и Мазуркевич доказали, что всякий локально связный метризуемый континуум является *пеановским* континуумом и, следовательно, принадлежит классу $\mathcal{C}$. В 1927 г. П. С. Александров доказал, что всякий метризуемый компакт есть образ канторова совершенного множества и, следовательно, принадлежит классу $\mathcal{K}$. Классы $\mathcal{K}$ и $\mathcal{C}$ хороши ещё и тем, что все они состоят из наследственно нормальных пространств.

3.64. Первая группа примеров А. А. Одинцова основана на понятии *обобщённого свободного произведения с переменным слоем*. Это понятие обобщает понятие *свободного произведения*, т. е. резольвенты, в которой все отображения h_x постоянны. Доказано [25], что обобщённое свободное произведение сохраняет классы $\mathcal{K}$ и $\mathcal{C}$. Это позволило усилить результаты автора 3.11 и 3.32. Так, бикомпакт из 3.11, в котором каждая размерностная компонента содержалась в сумме остальных размерностных компонент, был обобщённым свободным произведением со слоем сфера S^n и, таким образом, автоматически оказался наследственно нормальным. Модификациями примера 3.32 оказываются примеры 3.65 и 3.66.

3.65. Существует такой нульмерный бикомпакт X из класса $\mathcal{K}$, что $X = Y \cup Z$, где Y, Z всюду плотны в X, Y метризуемо, а пространство Z является σ-бикомпактным с различными характерами различных точек [25].

3.66. Существует дендрон X' с разбиением $X' = Y' \cup Z'$, как и в 3.65 [25].

Напомним, что *дендроном* называется континуум, в котором между двумя различными точками имеется одноточечная перегородка. Известно, что всякий дендрон принадлежит классу $\mathcal{C}$ и, следовательно, наследственно нормален.

Вторая группа примеров А. А. Одинцова связана со змеевидными континуумами.

3.67. Для всякого $n \geqslant 1$ существует такой совершенно нормальный наследственно сепарабельный змеевидный бикомпакт X_n, что $\operatorname{Ind} X_n = n$ ([26] в предположении CH).

Интересно сравнить этот пример с примером 3.54 В. А. Чатырко. Бикомпакты X_n из 3.67 обладают ещё одним дополнительным свойством: для всякого замкнутого множества $F \subseteq X_n$ пространство его компонент связности метризуемо.

Как и в 3.54, бикомпакт X_{n+1} вполне замкнуто отображается на X_n. Предел обратного спектра из бикомпактов X_n обладает следующими свойствами.

3.68. Это совершенно нормальный змеевидный бикомпакт, не являющийся 0-dim-счётномерным ([26] в предположении CH).

Напомним, что пространство называется 0-dim-*счётномерным*, если его можно представить в виде суммы счётного числа нульмерных (в смысле dim) подпространств.

3.69. Существует змеевидный бикомпакт с первой аксиомой счётности, не являющийся 0-dim-счётномерным [26].

Пример 3.68 даёт отрицательный ответ на вопрос Э. Поль и Энгелькинга, будет ли 0-dim-счётномерным всякий одномерный наследственно нормальный бикомпакт. До примера А. А. Одинцова примерами таких пространств более высокой размерности были совершенно нормальные бикомпакты без промежуточных размерностей. Это вытекает из следующего результата автора [61]: всякий 0-dim-счётномерный наследственно нормальный бикомпакт X размерности $\dim X > 0$ содержит одномерное замкнутое множество.

Автору не известно, существует ли «наивный» контрпример к гипотезе Э. Поль и Энгелькинга.

3.70. Самые последние результаты применения резольвент относятся к брауэровой размерности Dg. Размерностный инвариант Dg был введён Брауэром [88] ещё в 1913 г. под названием «Dimensionsgrad». Это было первое чисто топологическое определение размерности. Оно аналогично определению большой индуктивной размерности Ind. Отличие состоит в том, что перегородки заменяются на разрезы. Напомним, что *разрезом* между замкнутыми непересекающимися подмножествами A и B пространства X называется всякое замкнутое множество $C \subseteq X$, находящееся в дополнении к $A \cup B$ и обладающее следующим свойством: если какой-нибудь континуум $K \subseteq X$ пересекается с A и B, то K пересекается и с множеством C.

Долгое время считалось, что размерность Dg совпадает с лебеговой размерностью $\dim$ и индуктивными размерностями ind и Ind в классе локально связных польских пространств. В [71] было доказано, что $\mathrm{Dg} = \dim$ в классе всех метризуемых компактов. Но в [106] для всякого $n \geqslant 2$ было построено польское локально связное пространство X_n размерности $\mathrm{Dg}\, X_n = 1 < n = \dim X_n$. В [69] было доказано, что $\dim X \leqslant \mathrm{Dg}\, X$ для всякого бикомпакта X. Бикомпакты без промежуточных размерностей показывают, что равенство $\dim = \mathrm{Dg}$, вообще говоря, не имеет места.

3.71. Существует сепарабельный с первой аксиомой счётности бикомпакт B размерности

$$\dim B = 2 < \mathrm{Dg}\, B = 3 < \mathrm{ind}\, B = \mathrm{Ind}\, B = 4$$

[70].

3.72. Существует бикомпакт X размерности

$$\dim X = 1 < \mathrm{Dg}\, X = 2 < \mathrm{ind}\, X = \mathrm{Ind}\, X = 3$$

[80, 93]. По сравнению с бикомпактом B бикомпакт X имеет минимальную размерность $\dim$, при которой возможно неравенство $\dim < \mathrm{Dg}$. Но в нём нет ни первой аксиомы счётности, ни сепарабельности. Бикомпакт X является дискретной суммой бикомпакта X_3 из 3.54 и построенного И. К. Лифановым [23] локально связного бикомпакта L размерности $1 = \dim L < \mathrm{Ind}\, L = 2$.

3.73. Теперь приведём некоторые примеры применения обобщённых резольвент (см. 1.18). В. М. Ульянов [42] дал необходимые и достаточные условия для того, чтобы пространство имело бикомпактификацию с первой аксиомой счётности. Он же построил [42, 44] различные примеры финально компактных полных по Чеху пространств с первой аксиомой счётности со счётной π-базой, не имеющих бикомпактных расширений счётного характера.

3.74. Пример. Самым ярким результатом В. М. Ульянова явился пример пространства, не всякое бикомпактное расширение которого имеет волмэновский тип [45].

Тем самым была решена известная задача Фринк. Напомним, что бикомпактное расширение bX пространства X имеет *волмэновский тип*, если пространство X имеет такую базу-кольцо Φ замкнутых множеств, что бикомпакт bX является пространством ультрафильтров из Φ.

3.75. Та же техника была использована автором при построении бикомпакта мощности континуума без изолированных точек и без сходящихся последовательностей ([102] с применением метода форсинга).

Такой бикомпакт не может быть построен «наивно», поскольку в предположении континуум-гипотезы из известной теоремы Чеха и Поспишила [92] вытекает, что всякий бикомпакт мощности $\leqslant \mathbf{c}$ имеет точку счётного характера.

3.76. Большой раздел приложений вполне замкнутых отображений относится к размерности неметризуемых многообразий. Поскольку для пространств, локально удовлетворяющих второй аксиоме счётности, размерность ind совпадает с локальной лебеговой размерностью locdim, для всякого нормального n-многообразия M имеем

$$n = \operatorname{ind} M \leqslant \dim M \leqslant \operatorname{Ind} M. \tag{31}$$

Если многообразие M паракомпактно, то, будучи связным, оно имеет счётную базу. В этом случае свойство (31) превращается в тождество Урысона. Что касается неметризуемых многообразий, мы практически не имеем никакой позитивной информации об их размерности (имеются в виду результаты о совпадении размерностей).

Вопрос о том, верно ли равенство

$$\dim M^n = n \tag{32}$$

для всякого топологического многообразия M^n, известен много лет. Он восходит ещё к 1935 г., когда П. С. Александров поставил вопрос о соотношении между основными размерностями компактов. Наряду с компактами и метризуемыми пространствами многообразия представляют собой один из трёх основных классов топологических пространств. Поэтому вопрос о равенстве (32) не мог не интересовать как специалистов по теории размерности, так и топологов вообще.

В явном виде вопрос о равенстве (32) был поставлен М. М. Постниковым [34], математиком, далёким от общей топологии, хотя и написавшим работу [33] о паракомпактности клеточных комплексов.

Первое многообразие с несовпадающими размерностями было построено в [73].

3.77. Пример. Для всякого $n \geqslant 3$ существует нормальное счётно компактное n-многообразие M^n размерности

$$n = \operatorname{ind} M^n = \dim M^n < \operatorname{Ind} M^n = 2n - 2$$

([73] в предположении CH).

Первый пример многообразия, у которого все три основные размерности не совпадают между собой, был построен в [105]. Этот пример, в частности, даёт отрицательное решение гипотезы (32).

3.78. Пример. Для любых целых m и n, подчинённых условию $4 \leqslant n < m$, существует дифференцируемое, счётно компактное, совершенно нормальное, сепарабельное n-многообразие M^n_m размерности

$$n = \operatorname{ind} M^n_m < m = \dim M^n_m < m + n - 2 = \operatorname{Ind} M^n_m$$

([105] в предположении $\diamondsuit$).

В последующей работе автора [65] принцип Йенсена $\diamondsuit$ был ослаблен до континуум-гипотезы.

3.79. Пример. Для любых целых m и n, подчинённых условию $4 \leqslant n < m$, существует дифференцируемое, совершенно нормальное, сепарабельное n-многообразие $M^{n,m}$ размерности

$$m - 1 \leqslant \dim M^{n,m} \leqslant m < m + n - 3 \leqslant \operatorname{Ind} M^{n,m} \leqslant m + n - 1$$

([65] в предположении CH).

3.80. Замечание. Все известные к данному моменту примеры многообразий с несовпадающими размерностями построены при дополнительных теоретико-множественных предположениях, вытекающих из аксиомы конструктивности: континуум-гипотеза и принцип Йенсена. Сто́ит отметить, что вообще многие контрпримеры в общей топологии строятся при тех или иных следствиях аксиомы конструктивности. В то же время большое число «позитивных» утверждений доказано в предположении аксиомы Мартина и отрицания континуум-гипотезы ($\mathsf{MA} + \neg\mathsf{CH}$) или в более слабой версии этого предположения $\mathsf{MA}(\omega_1)$. К числу таких утверждений относится знаменитая теорема М. Рудин о метризуемости совершенно нормального многообразия [118]. Поэтому вполне естественным представляется следующий вопрос.

3.81. Вопрос. Верно ли в предположении $\mathsf{MA} + \neg\mathsf{CH}$, что $\dim M = n$ для всякого нормального n-многообразия M?

Интересен и более общий вопрос.

3.82. Вопрос. Верно ли, что равенство $\dim M^n = n$ для всякого нормального многообразия M^n совместимо с аксиомами ZFC?

В двойственной форме вопрос 3.82 может быть сформулирован следующим образом.

3.83. Вопрос. Существует ли «наивный» пример многообразия с несовпадающими размерностями?

3.84. Замечание. Вопрос 3.83 содержит в себе по крайней мере три вопроса в зависимости от того, какую группу размерностных инвариантов мы рассматриваем. Кроме того, мы можем варьировать дополнительные топологические свойства, которыми многообразие должно обладать: сепарабельность, счётная компактность, коллективная хаусдорфовость, коллективная нормальность. Сто́ит отметить, что такое многообразие не может быть совершенно нормальным в силу упомянутой выше теоремы М. Рудин. Не может оно быть и наследственно сепарабельным, поскольку по теореме Сентмиклоши [123] всякое наследственно сепарабельное локально компактное пространство финально компактно, если мы предполагаем $\mathsf{MA} + \neg\mathsf{CH}$.

Другая группа вопросов связана с возможными значениями различных размерностных инвариантов многообразий с несовпадающими размерностями.

3.85. Вопрос. Существует ли 2-многообразие M размерности $\operatorname{Ind} M > 2$?

3.86. Вопрос. Существует ли 3-многообразие M размерности $\dim M > 3$?

3.87. Вопрос. Существует ли n-многообразие M размерности $n < \dim M = \operatorname{Ind} M$?

3.88. Вопрос. Существуют ли n-многообразия M, для которых разность $\operatorname{Ind} M - \dim M$ может быть сколь угодно большой, в частности $\operatorname{Ind} M - \dim M > n - 2$?

3.89. Замечание. В связи с последним вопросом отметим, что $\operatorname{Ind} M - \dim M = n - 2$ для многообразий из 3.77 и 3.78. Что касается многообразия $M^{n,m}$ из 3.79, мы не знаем, чему в точности равна разность $\operatorname{Ind} M^{n,m} - \dim M^{n,m}$, и можем только утверждать, что

$$n - 3 \leqslant \operatorname{Ind} M^{n,m} - \dim M^{n,m} \leqslant n.$$

Следующая группа вопросов связана с гладкостью многообразий. Мы не знаем, является ли гладким многообразие из 3.77. Многообразия из 3.78 и 3.79 имеют C^∞-дифференциальную структуру. Но такая структура по теореме 2.7 содержит вещественно аналитическую структуру. В связи с этим возникает следующий вопрос.

3.90. Вопрос. Существует ли комплексно аналитическое многообразие с несовпадающими размерностями?

Этот вопрос можно комбинировать с предыдущими вопросами о допустимых значениях размерностных инвариантов многообразий и о существовании «наивных» примеров многообразий с несовпадающими размерностями.

3.91. Здесь мы остановимся на методе построения 4-многообразий из 3.78 и 3.79 (случай $n = 4$ наиболее важен и принципиально не отличается от общего случая $n \geqslant 4$). Начнём с одного обозначения. Пусть A — замкнутое подмножество топологического пространства X и $\varphi\colon A \to B$ — факторное отображение на некоторое пространство B. Обозначим через X_φ фактор-пространство пространства X относительно разбиения, элементами которого являются слои $\varphi^{-1}(b)$ отображения φ и одноточечные множества из $X \setminus A$. Факторное отображение $X \to X_\varphi$ обозначим через q_φ.

В 1952 г. Андерсон [85] доказал, что всякий пеановский континуум P является непрерывным образом некоторого одномерного пеановского континуума M при открытом монотонном отображении $f\colon M \to P$. Но для нас существенно лишь то, что $f^{-1}(y)$ — невырожденный континуум для всякого $y \in P$. Фиксируем теперь отображение Андерсона $f\colon M \to Q$ на гильбертов куб. Будучи одномерным, континуум M вкладывается в сферу S^3. Фиксируем вложение $M \subset S^3$ и рассмотрим сферу S^3 как границу замкнутого шара B^4. Пусть теперь $B \subset Q$ — некоторый компакт. Полагаем $A = f^{-1}(B)$ и $\varphi = f|A$. Воспользовавшись обозначениями предыдущего абзаца для $X = B^4$, получаем фактор-пространство B^4_φ и факторное отображение $q_\varphi\colon B^4 \to B^4_\varphi$. Положим $S^3_\varphi = q_\varphi(S^3)$. Таким образом, имеем пару $(B^4_\varphi, S^3_\varphi)$, где B^4_φ — шар, слегка «испорченный» на границе, а S^3_φ — ограничивающая его «сфера». Эта пара и будет отправной точкой построения 4-многообразий из 3.78 и 3.79. Отметим, что разность $B^4_\varphi \setminus S^3_\varphi$ посредством q_φ^{-1} гомеоморфно отображается на открытый шар $O^4 = B^4 \setminus S^3$. В дальнейшем будем считать $q_\varphi | O^4$ тождественным отображением.

Чтобы сформулировать следующее утверждение, напомним одно определение.

Отображение $f\colon X \to Y$ называется *почти гомеоморфизмом*, если для всякого открытого покрытия u пространства Y существует гомеоморфизм $g\colon X \to Y$, который u-близок к отображению f. Последнее означает, что для всякой точки $x \in X$ точки fx и gx содержатся в каком-нибудь одном элементе U покрытия u.

3.92. Лемма Брауна ([89]). *Пусть $S = \{X_n, f_n^{n+1}, \omega\}$ — обратная последовательность, состоящая из метризуемых компактов и почти гомеоморфизмов. Тогда её предельная проекция $f_0\colon \lim S \to X_0$ также является почти гомеоморфизмом.*

Трансфинитной индукцией с помощью леммы Брауна и того, что композиция двух почти гомеоморфизмов является почти гомеоморфизмом, доказывается следующее утверждение.

3.93. Лемма. *Пусть $\mathcal{S} = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta\colon \alpha < \lambda\}$ — такой счётный непрерывный обратный спектр из метризуемых компактов, что все короткие проекции $\pi^{\alpha+1}_\alpha$ являются почти гомеоморфизмами. Тогда все проекции и все предельные проекции спектра $\mathcal{S}$ также будут почти гомеоморфизмами.*

3.94. Лемма (основная лемма из [105]). *Пусть фиксирована некоторая точка $b \in B$ и $H = \varphi^{-1}(b) \subset S^3$. Предположим, что $h\colon H \times [0,1] \subset B^4$ — вложение, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) $h(x,0) = x$ *для всех* $x \in H$,
2) $h(H \times (0,1] \subset O^4$.

Тогда для произвольного счётного семейства $\mathcal{C} = \{C_i\colon i \in \omega\}$ таких счётных множеств $C_i \subset O^n$, что $y = q_\varphi(\varphi^{-1}(b))$ есть предельная точка множества C_i для любого $i \in \omega$, существует непрерывное отображение $g = g_{(y,\mathcal{C})}\colon B^4_\varphi \to B^4_\varphi$ со следующими свойствами:

3) g *является почти гомеоморфизмом,*
4) g *имеет единственный нетривиальный слой* $g^{-1}(y) = q_\varphi(h(H \times [0,1])) \equiv K$,
5) $g | S^3_\varphi = \mathrm{id}$,
6) $g\colon O^4 \setminus K \to O^4$ *есть диффеоморфизм,*
7) $K \subset \overline{(g^{-1}(C_i))}$ *для любого* i.

Заметим, что множество $K = g^{-1}(y)$ гомеоморфно конусу над H. Таким образом, лемма 3.94 позволяет посредством отображения g «вставлять» в точку $y \in S^3_\varphi \subset B^4_\varphi$ конус над множеством H. В результате такой «вставки» получается пространство, гомеоморфное B^4_φ. При этом «убивается» счётное множество последовательностей, сходящихся к точке y, а шар O^4 диффеоморфно погружается в объемлющий шар $O^4_g = O^4 \cup (H \times (0,1])$. Если H состоит из одной точки, то $g^{-1}(y)$ гомеоморфно отрезку.

Теперь мы можем вкратце описать, как строятся наши многообразия. Начнём с более простой процедуры построения многообразия из 3.30. Поскольку мы фиксировали отображение Андерсона f, отображение φ однозначно определяется компактом $B \subset Q$. Поэтому строящееся многообразие будем обозначать символом $M^{4,B}$. Многообразие $M^{4,B}$ будет построено одновременно с его компактификацией $bM^{4,B} = M^{4,B} \cup S^3_\varphi$. Компактификация $bM^{4,B}$ будет пределом непрерывного обратного спектра

$$\mathcal{S}^B = \{X_\alpha, p^\alpha_\beta \colon \alpha < \omega_1\}.$$

Все компакты X_α будут гомеоморфны «шару» B^4_φ. Все короткие проекции $p^{\alpha+1}_\alpha$ будут отображениями типа отображения g из леммы 3.94. Лемма 3.92 гарантирует нам, что для предельного α компакт X_α гомеоморфен компактам X_β при $\beta < \alpha$. Далее, компакт X_α однозначно представляется в виде дизъюнктной суммы $O^4_\alpha \cup S^3_\varphi$ открытого шара O^4_α и ограничивающей его «сферы» S^3_φ. Все отображения $p^\alpha_\beta | S^3_\varphi$ будут тождественными гомеоморфизмами в силу условия 5) из леммы 3.94 и непрерывности спектра $\mathcal{S}^B$. Значит, «сфера» S^3_φ будет естественно вложена в предел $X_{\omega_1} = X$ этого спектра. Разность $X_{\omega_1} \setminus S^3_\varphi$ и будет нашим многообразием $M^{4,B}$. При этом $M^{4,B}$ является суммой растущей последовательности открытых шаров O^4_α, диффеоморфных $\mathbb{R}^4$. Поэтому следующая теорема 3.95 позволяет трансфинитной рекурсией определить дифференциальную структуру на $M^{4,B}$.

Теорема 3.95 имеет некоторую предысторию. В 1979 г. Зенор и Козловский [113] при предположении CH (и $\Diamond$) построили дифференцируемые версии примеров М. Рудин и Зенора ([119], 1976) совершенно нормальных (и счётно компактных) неметризуемых многообразий. Ключевую роль здесь сыграла дифференцируемая версия теоремы Брауна [90] о том, что объединение растущей последовательности открытых n-клеток есть открытая n-клетка.

3.95. Теорема. *Если дифференцируемое многообразие M имеет такой атлас $\{(U_i, \varphi_i) \colon i \in \omega\}$, что $U_i \subset U_{i+1}$ и $\varphi_i(U_i) = \mathbb{R}^n$, то M диффеоморфно $\mathbb{R}^n$.*

Осталось более детально определить короткие проекции $p^{\alpha+1}_\alpha$. Пусть S^3_φ, $O^4 = O^4_0$, Z_β, где β пробегает множество всех изолированных чисел $< \omega_1$, — дизъюнктные множества мощности континуум. Положим

$$O^4_\alpha = O^4_0 \cup \Bigl(\bigcup \{Z_\beta \colon \beta < \alpha\}\Bigr), \quad \alpha \leqslant \omega_1.$$

Предполагая континуум-гипотезу, занумеруем счётными порядковыми числами α точки $y_\alpha \in S^3_\varphi$ и счётные множества $C_\alpha \subset O^4_{\omega_1}$. Определим отображение $p^{\alpha+1}_\alpha \colon X_{\alpha+1} \to X_\alpha$ следующим образом. В точку $y_\alpha \in S^3_\varphi \subset X_\alpha$ «вставляем» конус над H, если $y_\alpha \in A = \varphi^{-1}(B)$, или отрезок, если $y_\alpha \in S^3_\varphi \setminus A$. В качестве семейства $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\alpha$ из леммы 3.94 берутся все множества вида $C_\beta \cap O^4_\alpha$,

$\beta \leqslant \alpha$. Таким образом, многообразие $M^{4,B}$ определяется компактом B, нумерацией точек из S^3_φ и счётных подмножеств $O^4_{\omega_1}$, а также выбором отображений $p^{\alpha+1}_\alpha = g_{(y_\alpha, \mathcal{C}_\alpha)}$ из леммы 3.94. Многообразие $M^{4,m}$ из 3.79 есть многообразие вида M^{4,I^m}.

Совершенная нормальность и размерностные свойства многообразия $M^{4,m}$ вытекают из следующего утверждения. Пусть $p_0\colon bM^{4,B} = X \to X_0$ — предельная проекция спектра S^B.

3.96. Основное свойство отображения p_0. *Множество $p_0([F]_X) \setminus p_0^{\#}([F]_X)$ счётно для всякого замкнутого множества $F \subseteq M^{4,B}$.*

3.97. Многообразия из 3.78 строятся аналогичным образом. Обозначаться они будут символом M^4_B, а многообразие M^4_m есть многообразие вида $M^4_{I^m}$. Многообразие M^4_B будет подмножеством предела непрерывного обратного спектра

$$\mathcal{S}_B = \{Y_\alpha, \pi^\alpha_\beta\colon \alpha < \omega_1\},$$

состоящего из замкнутых «шаров» B^4_φ и почти гомеоморфизмов p^α_β. Предел $Y_{\omega_1} = M^4_B \cup S^3_\varphi$ этого спектра будет стоун-чеховской компактификацией многообразия M^4_B с наростом S^3_φ, что во многом облегчает подсчёт размерностей многообразия M^4_B. Например, равенство

$$\dim X = \dim \beta X$$

для нормального пространства X автоматически влечёт равенство $\dim M^4_m = m$ (при $m \geqslant 4$). Поскольку высказанное выше утверждение будет основным для дальнейшего, выделим его в отдельное равенство

$$\beta M^4_B \setminus M^4_B = S^3_\varphi. \tag{33}$$

Имеются существенные различия в построении многообразий $M^{4,B}$ и M^4_B. Во-первых, короткие проекции $\pi^{\alpha+1}_\alpha$ спектра $\mathcal{S}_B$ будут иметь счётное число нетривиальных слоёв, а именно слои над точками y_β, $\beta \leqslant \alpha$. Отображение $\pi^{\alpha+1}_\alpha$ можно представлять себе как послойное произведение отображений вида $g_{(y_\beta, \mathcal{C}_{(\alpha,\beta)})}$, $\beta \leqslant \alpha$. При этом каждое множество $(\pi^{\alpha+1}_\alpha)^{-1}(y_\gamma) \setminus \{y_\gamma\}$ в своём замыкании будет содержать конус $(\pi^{\alpha+1}_\alpha)^{-1}(y_\gamma)$ для любого $\gamma \leqslant \alpha$. Соответственно открытый шар $O^4_{\alpha+1}$ получается из шара O^4_α добавлением счётного числа множеств вида $H \times (0,1]$, где H — либо точка, либо менгеровская кривая. Второе отличие состоит в «убивании» сходящихся последовательностей, т. е. в определении семейств $\mathcal{C}_{(\alpha,\beta)}$. С помощью континуум-гипотезы множество $O^4_{\omega_1} = M^4_B$ отождествляется с ω_1. А семейство $\mathcal{C}_{(\alpha,\beta)}$ состоит из множеств вида $s_\gamma \cap O^4_\alpha$, $\gamma \leqslant \alpha$, где s_γ — множество из формулировки принципа Йенсена $\diamondsuit$, и некоторых счётных множеств $C_{(\gamma,\beta)}$, $\gamma < \beta$, каждое из которых плотно в конусе $(\pi^{\gamma+1}_\gamma)^{-1}(y_\gamma)$. Подробности можно найти в [105].

3.98. Теперь рассмотрим свойства бесконечномерности n-многообразий. Как и ранее, мы ограничимся 4-многообразиями. Из 3.78 и 3.79 вытекает, что существуют 4-многообразия M сколь угодно большой размерности $\dim$. Приклеив к $\mathbb{R}^4$ счётное число таких многообразий, получим бесконечномерное в смысле лебеговой размерности 4-многообразие.

Существует несколько различных типов бесконечномерности топологических пространств.

3.99. Определение. Пусть d — некоторый размерностный инвариант. Скажем, что пространство X *0-d-счётномерно* (*d-счётномерно*), если X можно представить в виде такой суммы его подпространств X_i, $i \in \omega$, что $dX_i \leqslant 0$ (соответственно X_i замкнуто и dX_i конечно).

Из 3.98 вытекает следующее утверждение.

3.100. Предложение (в предположении CH). *Существует совершенно нормальное, сепарабельное 4-многообразие, которое бесконечномерно, но* $\dim$*-счётномерно.*

Практически ничего не известно о соотношениях между различными типами счётномерности многообразий, кроме тривиальных импликаций, получающихся из справедливых для любого локально метризуемого пространства X неравенств

$$\operatorname{ind} X \leqslant \dim X \leqslant \operatorname{Ind} X.$$

В частности, не известен ответ на следующий вопрос.

3.101. Вопрос. Имеет ли место для наследственно (совершенно) нормального n-многообразия M разложение Урысона

$$M = X_0 \cup \ldots \cup X_n$$

на индуктивно нульмерные слагаемые X_i?

Более того, открытым остаётся следующий вопрос.

3.102. Вопрос. Всякое ли наследственно (совершенно) нормальное n-многообразие 0-ind-счётномерно?

Что касается размерности $\dim$, то M^n нельзя представить в виде суммы $n+1$ слагаемых X_i размерности $\dim X_i = 0$, если $\dim M^n > n$. Но имеют место аналоги вопросов 3.101 и 3.102.

3.103. Вопрос. Имеет ли место для наследственно (совершенно) нормального n-многообразия M размерности $\dim M = m$ разложение Урысона

$$M = X_0 \cup \ldots \cup X_m$$

на $\dim$-нульмерные слагаемые X_i?

3.104. Вопрос. Всякое ли наследственно (совершенно) нормальное конечномерное n-многообразие 0-$\dim$-счётномерно?

Аналогичные вопросы можно поставить и по отношению к размерности Ind. По поводу вопроса 3.104 отметим, что существуют змеевидные (совершенно нормальные в CH) компакты, не являющиеся 0-$\dim$-счётномерными (см. 3.68 и 3.69).

Применительно к многообразиям большой интерес представляет также трансфинитная размерность Ind. Из 3.78 вытекает, что при $\diamondsuit$ существуют 4-многообразия любой конечной размерности $\mathrm{Ind} \geqslant 7$. Оказывается, что имеет место гораздо более сильное утверждение.

3.105. Пример ([66] в предположении $\diamondsuit$). Для всякого счётного порядкового числа $\alpha \geqslant 5$ существует счётно компактное, совершенно нормальное, сепарабельное, дифференцируемое 4-многообразие M^4_α размерности

$$\mathrm{Ind}\, M^4_\alpha = \alpha.$$

При этом для $\alpha \geqslant \omega_0$ можно положить $M^4_\alpha = M^4_{S^\alpha}$, где S^α — компакт трансфинитной размерности $\mathrm{Ind}\, S^\alpha = \alpha$, построенный Ю. М. Смирновым [38]. Если же $\alpha < \omega_0$, то в качестве M^4_α можно взять многообразие $M^4_{I^{\alpha-2}}$. Надо отметить, что многообразие M^4_m построено в [105] лишь для $m \geqslant 5$, т. е. для $\alpha \geqslant 7$. Но построение, схема которого приведена в 3.97, проходит и для $m = 3$ или $m = 4$. Неравенство $\mathrm{Ind}\, M^4_m \geqslant m+2$ доказано в общем случае (см. [105, лемма 2.15]). Неравенство $\mathrm{Ind}\, M^4_m \leqslant m+2$ вытекает из следующего утверждения.

3.106. Лемма. *Если $F \subseteq \beta M^4_B$ — замкнутое множество размерности $\dim F \leqslant k < \omega$, то $\mathrm{Ind}\, F \leqslant k+2$.*

Эта лемма фактически была доказана в [105]. Основным фактом, используемым при доказательстве, является неравенство $\dim \pi_\alpha \leqslant 2$, где π_α — сквозная проекция спектра S_B.

В связи с примером 3.105 возникает несколько вопросов.

3.107. Вопрос. Существует ли n-многообразие, большая трансфинитная размерность которого несчётна?

Стоит отметить, что существует простая конструкция, которая даёт связную сумму многообразий M^4_α, $5 \leqslant \alpha < \omega_1$. Но при этом получается 4-многообразие, большая трансфинитная размерность которого не определена.

С вопросом 3.107 перекликается следующий вопрос.

3.108. Вопрос. Существует ли n-многообразие M размерности $\dim M < \infty$, $\mathrm{Ind}\, M \geqslant \omega_0$?

3.109. Вопрос. Можно ли построить многообразие типа M^4_α при более слабых, чем принцип Йенсена, предположениях, например при континуум-гипотезе?

Последний вопрос можно сузить и конкретизировать.

3.110. Вопрос. Верно ли, что для каждого конечного $l \geqslant 5$ существует многообразие типа $M^{4,B}$ размерности $\mathrm{Ind}\, M^{4,B} = l$?

Из примера 3.79 вытекает лишь, что множество чисел вида $\mathrm{Ind}\, M^{4,B}$ не ограничено и пересекается с каждым отрезком $[l, l+3]$.

Общеизвестно следующее утверждение.

3.111. Предложение. *Если трансфинитная размерность $\mathrm{Ind}\, X$ нормального пространства X определена, то оно S-слабо бесконечномерно.*

Обратить это утверждение нельзя даже в классе метризуемых компактов. Это показывает построенный Р. Полем [117] пример слабо бесконечномерного компакта P, не являющегося 0-счётномерным. А известно, что 0-счётномерность метризуемого компакта X эквивалентна существованию трансфинитной размерности $\operatorname{Ind} X$. Оказывается, что обратить предложение 3.111 нельзя и в классе дифференцируемых многообразий.

3.112. Пример ([66] в предположении $\diamondsuit$). Существует счётно компактное, совершенно нормальное, сепарабельное, дифференцируемое, слабо бесконечномерное 4-многообразие M, трансфинитная размерность Ind которого не определена.

В качестве такого многообразия M можно взять многообразие вида M^4_P, где P — только что упомянутый компакт Поля. Если бы трансфинитная размерность $\operatorname{Ind} M^4_P$ была бы определена, то была бы определена и трансфинитная размерность $\operatorname{Ind} \beta M^4_P$. Но, как отмечалось выше, $\beta M^4_P = M^4_P \cup S^3_\varphi$. Следовательно, была бы определена и трансфинитная размерность $\operatorname{Ind} S^3_\varphi$. А это противоречит тому, что S^3_φ содержит несчётномерный компакт P. Что касается слабой бесконечномерности многообразия M^4_P, то она вытекает из следующего утверждения, имеющего и самостоятельный интерес.

3.113. Предложение ([66]). *Многообразие $M^n_B \equiv M^n_\varphi$ слабо бесконечномерно тогда и только тогда, когда слабо бесконечномерен компакт S^3_φ.*

3.114. Вопрос. Можно ли построить слабо бесконечномерное n-многообразие, трансфинитная размерность Ind которого не определена, при более слабых, чем принцип Йенсена, предположениях? В частности, будет ли $M^{4,P}$ таким многообразием?

3.115. Пример. Существует счётно компактное, совершенно нормальное, сепарабельное, дифференцируемое 4-многообразие M, которое сильно бесконечномерно .

Из предложения 3.113 вытекает, что в качестве такого многообразия M можно взять многообразие вида M^4_B, где $B \subset Q$ — сильно бесконечномерный компакт, например $B = Q$. Если отказаться от счётной компактности, то такое многообразие можно построить и при континуум-гипотезе.

3.116. Пример ([66] в предположении CH). Существует совершенно нормальное сепарабельное дифференцируемое 4-многообразие M, которое сильно бесконечномерно.

В качестве такого многообразия можно взять многообразие $M^{4,Q}$. Это вытекает из следующего утверждения.

3.117. Предложение. *Если $B \subset Q$ — сильно бесконечномерный компакт, то многообразие $M^{4,B}$ сильно бесконечномерно.*

3.118. Пример ([11] в предположении CH). Существует совершенно нормальное, сепарабельное, дифференцируемое 4-многообразие M, которое слабо бесконечномерно, но S-сильно бесконечномерно.

Таким многообразием является, например, $M^{4,B}$, где B — александровская компактификация дискретной суммы кубов I^n, $n \in \omega$.

Известно, что наследственно нормальное 0-dim-счётномерное пространство слабо бесконечномерно, но отнюдь не обязано быть S-слабо бесконечномерным даже в случае локально компактных пространств со счётной базой. Тем интереснее представляется следующий вопрос.

3.119. Вопрос. Является ли всякое наследственно (совершенно) нормальное 0-dim-счётномерное n-многообразие S-слабо бесконечномерным?

Заметим, что положительный ответ на вопрос 3.104 влечёт отрицательный ответ на вопрос 3.119, поскольку связная сумма многообразий M^4_m из 3.78 (или $M^{4,m}$ из 3.79), $5 \leqslant m < \infty$, S-сильно бесконечномерна.

3.120. Теперь обратимся к когомологической размерности многообразий. Напомним (см. [22]), что *когомологической размерностью* $\operatorname{c-dim}_G X$ локально компактного пространства X относительно абелевой группы коэффициентов G называется наибольшее целое n, для которого существует такое локально компактное множество $A \subset X$, что $H^n(A;G) \neq 0$. Здесь через $H^i(Y;G)$ обозначается i-я группа когомологий локально компактного пространства Y. Размерностный инвариант $\operatorname{c-dim}_{\mathbf{Z}} X$, где $\mathbf{Z}$ — группа целых чисел, обозначим через $\operatorname{c-dim} X$ и назовём его *когомологической размерностью* локально компактного пространства X.

3.121. Предложение (см. [22, замечание 1]). *Для любого локально компактного пространства X мы имеем*

$$\operatorname{c-dim} X = \sup\{\operatorname{c-dim} F \colon F \subset X \text{ есть компакт}\}.$$

Когомологическая и лебеговы размерности связаны неравенством

$$\operatorname{c-dim} X \leqslant \dim X, \tag{34}$$

верным для любого локально компактного пространства X (см. [22, замечания 2 и 3]). В то же время основная теорема гомологической теории размерности, полученная для метризуемых компактов П. С. Александровым [83] ещё в 1932 г. (общий случай см. в [1, 2]), гласит, что

$$\operatorname{c-dim} X = \dim X \tag{35}$$

для всякого компакта X размерности $\dim X < \infty$.

Одной из основных проблем гомологической теории размерности, остававшейся нерешённой более 50 лет, была проблема Александрова о том, верно ли равенство (35) для произвольного метризуемого компакта X. Эта проблема была решена А. Н. Дранишниковым [8], который построил бесконечномерный компакт D когомологической размерности $\operatorname{c-dim} D = 3$. Что касается многообразий, из предложения 3.121 вытекает равенство

$$\operatorname{c-dim} M^n = n \tag{36}$$

для всякого n-многообразия M^n. Поэтому из 3.79 получаем следующее утверждение.

3.122. Теорема (в предположении CH). *Существует совершенно нормальное, сепарабельное, дифференцируемое 4-многообразие M^4, для которого*

$$\text{c-dim}\, M^4 < \dim M^4 < \infty. \tag{37}$$

3.123. Замечание. Из 3.78 вытекает, что в предположении принципа Йенсена $\diamondsuit$ существует счётно компактное 4-многообразие, удовлетворяющее всем условиям теоремы 3.122.

Равенство (36) вместе с теоремой 3.122 показывают, что размерность c-dim не улавливает специфики размерностного поведения многообразий «в бесконечности». Более адекватно отражает ситуацию в этом плане размерностный инвариант cA-dim, предложенный П. С. Александровым [84] в 1947 г.

3.124. Определение. *Когомологической размерностью* $\text{cA-dim}\, X$ нормального пространства X называется наибольшее целое n, для которого существует такое замкнутое множество $F \subset X$, что отлична от нуля группа спектральных целочисленных когомологий $H^n(X; F)$, определяемых посредством системы всех конечных открытых покрытий пространства X.

3.125. Теорема ([84]). *Для нормального пространства X имеем*

$$\text{cA-dim}\, X = \text{cA-dim}\, \beta X = \text{c-dim}\, \beta X.$$

Из этой теоремы и равенства (35) вытекает следующее утверждение.

3.126. Предложение. *Для произвольного нормального пространства X конечной размерности* dim, *в частности для конечномерного многообразия, мы имеем*

$$\text{cA-dim}\, X = \dim X.$$

Следовательно, для размерности cA-dim многообразий не может возникнуть феномен соотношения (37).

Следующий пример можно считать решением проблемы Александрова (основной проблемы гомологической теории размерности) для многообразий.

3.127. Пример ([66] в предположении $\diamondsuit$). Для произвольных целых m и n, подчинённых условию $4 \leqslant n \leqslant m$, существует счётно компактное, совершенно нормальное, сепарабельное, дифференцируемое n-многообразие M^n размерности

$$m = \text{cA-dim}\, M^n < \dim M^n = \infty. \tag{38}$$

Многообразие M^n является многообразием типа M^n_B, где B есть дизъюнктная сумма компакта Дранишникова D и m-мерного куба I^m.

3.128. Замечание. Многообразие M^n из 3.127 сильно бесконечномерно. В самом деле, из построения компакта Дранишникова D вытекает его сильная бесконечномерность (это было отмечено самим А. Н. Дранишниковым). Поэтому сильно бесконечномерными является компакт $S^3_\varphi \supset D$, а вместе с ним (по предложению 3.113) и многообразие M^n.

В связи с этим возникает следующий вопрос.

3.129. Вопрос. Существует ли слабо бесконечномерное n-многообразие M^n, удовлетворяющее условию (38)?

Отвечая на вопрос, поставленный в [67] А. В. Карасёв построил следующий пример.

3.130. Пример ([21] в предположении CH). Существует совершенно нормальное, сепарабельное, дифференцируемое 4-многообразие M размерности

$$4 = \mathrm{cA}\text{-}\dim M < \dim M = \infty.$$

Таким многообразием является многообразие типа $M^{4,D}$, где D — компакт Дранишникова.

3.131. Вопрос. Верно ли, что при $\mathsf{MA} + \neg\mathrm{CH}$ для всякого нормального (сепарабельного) многообразия M^n имеет место равенство

$$\mathrm{cA}\text{-}\dim M^n = \dim M^n?$$

3.132. Неметризуемые многообразия интересны также размерностями своих подмножеств. Достаточно полная история этой тематики изложена во введении к статье [68]. Здесь мы приведём лишь примеры, построенные с помощью вполне замкнутых отображений. Обозначим через H знаменитый бесконечномерный компакт Хендерсона, который не содержит компактов конечной положительной размерности (см. [109]).

3.133. Многообразие M^4_H бесконечномерно и не имеет промежуточных размерностей между 4 и ∞, т. е. всякое замкнутое множество $F \subseteq M^4_H$ размерности $\dim F \geqslant 5$ бесконечномерно ([96] в предположении $\diamondsuit$).

3.134. Многообразие $M^{4,H}$ бесконечномерно и не имеет промежуточных размерностей между 4 и ∞ ([68] в предположении CH).

3.135. Вопрос. Существует ли конечномерное многообразие без промежуточных размерностей?

3.136. Существует счётно компактное, совершенно нормальное, сепарабельное, дифференцируемое 4-многообразие M, размерности открытых подмножеств которого принимают все значения от 4 до ∞ ([96] в предположении $\diamondsuit$).

В качестве такого многообразия можно взять многообразие вида M^4_A, где A — александровская компактификация дискретной суммы кубов I^n, $n \geqslant 5$.

Аналогичный пример можно построить и в континуум-гипотезе.

3.137. Размерности открытых подмножеств многообразия $M^{4,A}$ образуют бесконечное множество ([68] в предположении CH).

3.138. Вопрос. Можно ли в континуум-гипотезе построить 4-многообразие, размерности открытых подмножеств которого принимают все значения $\geqslant 4$? Обладает ли этим свойством многообразие $M^{4,A}$?

3.139. Большую роль в теории размерности играют вопросы, связанные с размерностью произведений пространств. В первую очередь сюда относится проблема о выполнении логарифмического закона

$$\dim(X_1 \times X_2) \leqslant \dim X_1 + \dim X_2 \tag{39}$$

в различных классах топологических пространств. Вопрос о справедливости неравенства (39) для многообразий остаётся открытым. В то же время из теоремы Гликсберга [108] о равенстве

$$\beta(X_1 \times X_2) = \beta X_1 \times \beta X_2$$

для псевдокомпактного произведения $X_1 \times X_2$ легко вытекает следующее утверждение.

3.140. Предложение. *Если многообразия M_1 и M_2 счётно компактны, то*

$$\dim(M_1 \times M_2) \leqslant \dim M_1 + \dim M_2.$$

3.141. Теорема ([96] в предположении $\diamondsuit$). *Для всякого натурального $m \geqslant 5$ существует такое счётно компактное совершенно нормальное сепарабельное 4-многообразие $M = M_m$, что*

$$\dim(M \times M) = 2m - 1 < 2m = 2\dim M.$$

В качестве многообразия M_m можно взять многообразие вида M_C^4, где $C = B \times I^{m-2}$, а B — такой двумерный метризуемый компакт Болтянского [6], что $\dim(B \times B) = 3$.

3.142. Вопрос. Существует ли такое многообразие M, что

$$2\dim M - \dim(M \times M) \geqslant 2?$$

Следующее утверждение показывает, что если брать произведение различных многообразий, то разность

$$\dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 \times M_2)$$

может оказаться сколь угодно большой.

3.143. Теорема ([96] в предположении $\diamondsuit$). *Пусть m_1, m_2 и r — такие натуральные числа, что $5 \leqslant m_1 \leqslant m_2$ и $4 + m_2 \leqslant r < m_1 + m_2$. Тогда существуют такие счётно компактные, совершенно нормальные, сепарабельные 4-многообразия M_1 и M_2, что $\dim M_i = m_i$ и*

$$\dim(M_1 \times M_2) = r < m_1 + m_2 = \dim M_1 + \dim M_2. \tag{40}$$

В качестве многообразий M_i можно взять многообразия вида $M_{X_i}^4$, где X_1, X_2 — построенные А. Н. Дранишниковым (см. [7, § 2, следствие 2]) компакты, размерности которых удовлетворяют аналогу неравенства (40). Легко показать, что для счётно компактных n-многообразий M_1 и M_2 одинаковой размерности m имеем

$$\dim(M_1 \times M_2) \geqslant m + n.$$

Что будет, если мы откажемся от счётной компактности многообразий? В частности, не известен ответ на следующий вопрос.

3.144. Вопрос. Существуют ли (совершенно нормальные) n-многообразия M_1 и M_2 одинаковой размерности m, для которых $\dim(M_1 \times M_2) = m$?

3.145. Наконец, обсудим вопрос о реализации типов продолжения многообразиями. Для этого напомним некоторых определения и факты. Предполагается, что читатель знаком с понятиями *CW-комплекса, симплициального комплекса с метрической топологией*, который в дальнейшем будем просто называть *симплициальным комплексом*, и *абсолютного окрестностного ретракта* в категории $\mathcal{M}$ метризуемых пространств ($\mathrm{ANR}(\mathcal{M})$-пространства) (подробности можно найти, например, в [107]). Все симплексы предполагаются замкнутыми, что влечёт компактность конечного симплициального комплекса. Следующее утверждение, являющееся следствием [107, теорема 5.2.1], позволит нам в дальнейшем ограничиться лишь симплициальными комплексами.

3.146. Теорема. *Всякий CW-комплекс имеет гомотопический тип симплициального комплекса.*

3.147. Будем говорить, что пространство Z является *абсолютным экстензором нормального пространства* X, и писать $Z \in \mathrm{AE}(X)$, если для всякого замкнутого множества $F \subseteq X$ всякое отображение $f\colon F \to Z$ имеет продолжение $\bar{f}\colon X \to Z$.

3.148. Теперь определим бинарное отношение $\leqslant$ на классе всех симплициальных комплексов. Следуя [10], скажем, что $K \leqslant L$, если для всякого нормального счётно компактного пространства X условие $K \in \mathrm{AE}(X)$ влечёт условие $L \in \mathrm{AE}(X)$. Отношение $\leqslant$ рефлексивно и транзитивно, т. е. является предпорядком. Этот предпорядок индуцирует следующее отношение эквивалентности: $K \sim L$ тогда и только тогда, когда $K \leqslant L$ и $L \leqslant K$. Для симплициального комплекса L через $[L]$ обозначается класс всех комплексов, эквивалентных L. Эти классы $[L]$ называются *типами продолжения*.

3.149. Замечание. Отношение $L \in \mathrm{AE}(X)$, предпорядок $\leqslant$ и типы продолжения $[L]$ могут быть определены для различных классов пространств X. А. Н. Дранишников в [9] определил отношение $L \in \mathrm{AE}(X)$ для класса $\mathcal{MLC}$ всех метризуемых локально компактных пространств. В [10] он определил это отношение для класса $\mathcal{C}$ всех бикомпактов. Можно определить отношение $\leqslant_\sigma$ для произвольного класса σ топологических пространств. Обозначим через $\mathcal{MC}$ класс всех метризуемых компактных пространств, а через $\mathcal{CC}$ — класс всех нормальных счётно компактных пространств.

3.150. Предложение ([96]). *Для симплициальных комплексов K и L следующие условия равносильны:*

1) $K \leqslant_{\mathcal{MC}} L$,
2) $K \leqslant_{\mathcal{C}} L$,
3) $K \leqslant_{\mathcal{CC}} L$,
4) $K \leqslant_{\mathcal{MLC}} L$.

3.151. Если σ — один из классов топологических пространств из 3.149, то через $\mathbf{E}_\sigma$ мы обозначим класс всех типов продолжения всех симплициальных комплексов, порождённый отношением $\leqslant_\sigma$. Ввиду предложения 3.150 мы можем использовать более простые обозначения $\mathbf{E}$ и $\leqslant$. Отметим, что отношение $\leqslant$ является отношением частичного порядка на классе $\mathbf{E}$.

3.152. Определение (см. [10, 94]). Пусть X — нормальное счётно компактное пространство. Его *размерностью продолжения* $\text{e-dim}\, X$ называется наименьший тип продолжения $[L]$ симплициальных комплексов L, удовлетворяющих условию $L \in \mathrm{AE}(X)$.

3.153. Предложение ([10]). *Для любого бикомпакта X существует единственный такой тип продолжения $[L]$, что $\text{e-dim}\, X = [L]$.*

3.154. Предложение ([96]). *Для любого нормального счётно компактного пространства X существует единственный такой тип продолжения $[L]$, что $\text{e-dim}\, X = \text{e-dim}\, \beta X = [L]$.*

3.155. Предложение ([10]). *Соответствие e-dim отображает класс $\mathcal{C}$ эпиморфно на класс $\mathbf{E}$.*

Из предложения 3.155 вытекает следующее утверждение.

3.156. Предложение ([96]). *Соответствие e-dim отображает класс $\mathcal{CC}$ эпиморфно на класс $\mathbf{E}$.*

Из характеристики размерности $\dim$ посредством отображений в сферы вытекает следующее утверждение, устанавливающее связь между теорией лебеговой размерности и теорией размерности продолжения.

3.157. Теорема. *Для любого нормального пространства X*

$$\dim X \leqslant n \iff \text{e-dim}\, X \leqslant [S^n].$$

С учётом этой теоремы вместо равенства $\text{e-dim}\, X = [S^n]$ мы будем писать $\text{e-dim}\, X = n$.

3.158. Обозначив через Λ класс всех симплициальных комплексов, положим

$$\Lambda^0 = \{L \in \Lambda \colon [L] = \text{e-dim}\, X \text{ для некоторого метризуемого компакта } X\}.$$

По предложению 3.153 для каждого метризуемого компакта определена размерность продолжения $\text{e-dim}\, X = [L]$. Не известно, можно ли в последнем равенстве предполагать, что комплекс L счётен.

Положим

$$\Lambda^0_4 = \{L \in \Lambda^0 \colon [L] \geqslant [S^4]\}.$$

Следующая теорема является основным результатом о реализации типов продолжения многообразиями.

3.159. Теорема ([96] в предположении $\diamondsuit$). *Для произвольного комплекса $L \in \Lambda^0_4$ существует счётно компактное совершенно нормальное сепарабельное дифференцируемое 4-многообразие M^L размерности $\text{e-dim}\, M^L = [L]$.*

В качестве многообразия M^L можно взять многообразие вида M^4_X, где X — метризуемый компакт размерности $\text{e-dim}\, X = [L]$. Доказательство теоремы основано на предложении 3.154 и равенстве (33), из которого в нашем случае вытекает, что нарост $\beta M^4_X \setminus M^4_X$ гомеоморфен дизъюнктной сумме компакта X и открытого подмножества сферы S^3.

Для счётных комплексов $L \in \Lambda^0_4$ теорема 3.159 была доказана в [81]. Чтобы сформулировать её следствие нам понадобится следующее утверждение.

3.160. Определение. Симплициальный комплекс L называется *конечно доминируемым*, если он доминируется конечным комплексом, т. е. если существуют такой конечный комплекс K и такие отображения $f\colon L \to K$ и $g\colon K \to L$, что их композиция $g \circ f$ гомотопна отображению id_L.

3.161. Теорема ([95]). *Для любого счётного комплекса L существует такое польское пространство $X = X^L$, что* $\operatorname{e-dim} X = [L]$. *Если, кроме того, комплекс L конечно доминируем, то можно считать, что X^L — компакт.*

Из теорем 3.159 и 3.161 вытекает следующее утверждение.

3.162. Теорема ([81] в предположении $\lozenge$). *Для произвольного счётного конечно доминируемого комплекса L типа продолжения $[L] \geqslant [S^4]$ существует счётно компактное совершенно нормальное сепарабельное дифференцируемое 4-многообразие M размерности* $\operatorname{e-dim} M = [L]$.

3.163. Вопрос. Можно ли в утверждении теоремы 3.162 отказаться от конечной доминируемости комплекса L?

И в заключение приведём один довольно забавный факт.

3.164. Теорема ([96] в предположении $\lozenge$). *Существует счётно компактное совершенно нормальное сепарабельное дифференцируемое 4-многообразие M размерности*

$$4 < \operatorname{e-dim} M < 5.$$

В качестве многообразия M можно взять многообразие $M^4_{C_4}$, где компакт C_4 описывается следующим образом. Пусть $M(\mathbf{Z}_2, n+1)$ — *комплекс Мора*, т. е. пространство, получаемое из диска B^{n+1} приклеиванием к его границе S^n другого диска B^{n+1} посредством отображения $S^n \to S^n$ степени 2. Положим L_n равным букету $M(\mathbf{Z}_2, n+1) \vee S^{n+1}$. Тогда L_n — конечный комплекс, для которого $[S^n] < [L_n] < [S^{n+1}]$. По теореме 3.161 существует метризуемый компакт C_4 размерности $\operatorname{e-dim} C_4 = [L_4]$.

Дополнение. Об одном классе однородных бикомпактов

Для всякого гладкого (компактного) n-многообразия M определяется резольвента RM с постоянным слоем S^{n-1}, являющаяся неметризуемым (сепарабельным бикомпактным) пространством с первой аксиомой счётности (предложение 2.1). Доказывается, что бикомпакт RM однороден (теорема 2.6) и, более того, группа $\operatorname{Diff} M$ транзитивно действует на RM. Для метризуемого многообразия M пространство RM имеет размерность $\dim RM = n-1$ (теорема 3.7). При $M = S^1$ пространство RM совпадает с «двумя стрелками» П. С. Александрова.

В § 1 приводятся необходимые сведения из теории гладких многообразий. Начала этой теории можно найти в [24]. Более глубокие факты, относящиеся к действию группы $\operatorname{Diff} M$ на многообразии M и на касательном расслоении TM, после консультаций со специалистами по гладкой топологии решено постулировать (= считать общеизвестными).

§ 1. Гладкие многообразия и их касательные расслоения

Пусть M — гладкое n-многообразие, а TM — его *касательное пространство* (касательное расслоение). Напомним, что касательное пространство TM является дизъюнктной суммой касательных пространств $T_P(M)$ по всем точкам $P \in M$. При этом *касательным вектором* $\bar{\xi}$ *в точке* P *к многообразию* M называется соответствие, которое каждой локальной системе координат $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ сопоставляет набор чисел $(\xi_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^n)$, удовлетворяющее следующему закону перехода от локальных координат (x_α^k) к локальным координатам (x_β^l):

$$\xi_\alpha^k = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^l}(P)\xi_\beta^l. \tag{1}$$

Числа $(\xi_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^n)$ называются *координатами касательного вектора* $\bar{\xi}$ в локальной системе координат $x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n$. Таким образом, касательное пространство $T_P(M)$ при всяком выборе локальной системы координат в точке P отождествляется с арифметическим n-мерным пространством $\mathbb{R}^n$.

Касательное пространство TM естественным образом превращается в гладкое $2n$-многообразие. Локальным координатам $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ многообразия M соответствуют локальные координаты $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n, \xi_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^n)$. При этом переход от одной локальной системы координат к другой происходит по формулам (1), дополненным исходными формулами преобразования координат точек

$$x_\alpha^k = x_\alpha^k(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n).$$

Пусть теперь $f\colon M \to N$ — гладкое отображение n-многообразия M в m-многообразие N. В локальных координатах оно определяется системой гладких вещественных функций $y^1 = f^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^m = f^m(x^1, \dots, x^n)$. *Дифференциалом* $d_P f$ *гладкого отображения* f *в точке* $P \in M$ называется линейное отображение касательного пространства $T_P(M)$ в касательное пространство $T_Q(N)$, где $Q = f(P)$, определяемое в локальных координатах матрицей Якоби $J_P(f)$ отображения f в точке P:

$$J_P(f) = \left(\frac{\partial f^k}{\partial x^l}\right). \tag{2}$$

Из отображений $d_P f\colon T_P(M) \to T_{f(P)}(N)$ состоит отображение $df\colon TM \to TN$, называемое *дифференциалом гладкого отображения* f. Напомним несколько хорошо известных утверждений.

1.1. Теорема. *Если $f\colon M \to N$ — гладкое отображение, то его дифференциал $df\colon TM \to TN$ также является гладким отображением.*

1.2. Теорема. *Если f — диффеоморфизм, то df также диффеоморфизм.*

Для дальнейшего напомним, что *расслоением касательного пространства* многообразия M называется отображение $\varphi_M\colon TM \to M$, переводящее касательное пространство $T_P(M)$ в точку $P \in M$.

1.3. Теорема. *Если M — гладкое n-многообразие, то отображение φ_M является гладким локально тривиальным расслоением со слоем $\mathbb{R}^n$. Кроме того, если $f\colon M \to N$ — гладкое отображение, то имеет место равенство*

$$f \circ \varphi_M = \varphi_N \circ df. \tag{3}$$

Два ненулевых вектора $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2 \in \mathbb{R}^n$ называются эквивалентными, если существует такое $\lambda > 0$, что $\bar{\xi}_2 = \lambda\bar{\xi}_1$. Соответствующие классы эквивалентности в $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ называются *направлениями* в $\mathbb{R}^n$. Множество направлений в $\mathbb{R}^n$ естественно ассоциируется со сферой S^{n-1}. Понятие направления возникает и в касательном расслоении TM. При этом тензорный закон (1) преобразования координат векторов показывает, что определение эквивалентности векторов в $T_P(M)$ не зависит от выбора локальных координат и, таким образом, направления в касательном пространстве $T_P(M)$ определены корректно. Множество направлений в касательном пространстве $T_P(M)$ обозначим через $S_P(M)$, а множество всех направлений в TM обозначим через SM, т. е.

$$SM = \bigcup \{S_P(M)\colon P \in M\}.$$

Отождествляя каждую точку P многообразия M с нулевым вектором $\bar{0}_P \in T_P(M)$, получаем нулевое сечение $s_{\bar{0}}\colon M \to TM$ расслоения φ_M, которое является диффеоморфным вложением многообразия M в многообразие TM. Определено отображение

$$\varepsilon_M\colon TM \setminus s_{\bar{0}}(M) \to SM,$$

сопоставляющее каждому ненулевому вектору направление, его содержащие. При этом

$$\varepsilon_M(T_P(M) \setminus \{\bar{0}_P\}) = S_P(M). \tag{4}$$

Если мы обозначим через

$$\psi_M\colon SM \to M$$

естественное проектирование, то из (4) получим

$$\varphi_M | TM \setminus s_{\bar{0}}(M) = \psi_M \circ \varepsilon_M. \tag{5}$$

Считая ε_M факторным отображением, легко получить, что фактор-пространство SM наделяется структурой гладкого $(2n-1)$-многообразия, относительно которой отображение ε_M является гладким локально тривиальным расслоением со слоем $\mathbb{R}$.

Из равенства (5) автоматически вытекает, что отображение ψ_M непрерывно. Более того, оно является гладким локально тривиальным расслоением со слоем S^{n-1}.

Известно, что если отображение $f\colon M \to N$ является диффеоморфизмом, то его дифференциал df изоморфно отображает линейное пространство $T_P(M)$ на линейное пространство $T_{f(P)}(N)$. Таким образом, дифференциал диффеоморфизма порождает отображение

$$d^1 f\colon SM \to SN.$$

Следующий факт также общеизвестен.

1.4. Теорема. *Если $f\colon M \to N$ — диффеоморфизм, то отображение $d^1 f$ также является диффеоморфизмом. При этом коммутативна диаграмма*

$$f \circ \psi_M = \psi_N \circ d^1 f. \tag{6}$$

Напомним ещё два широко известных факта из теории гладких многообразий.

1.5. Теорема. *Пусть P, Q — различные точки гладкого многообразия M. Тогда существует такой диффеоморфизм $f\colon M \to M$, что $f(P) = Q$.*

1.6. Теорема. *Пусть M — гладкое многообразие и $P \in M$. Пусть $g\colon U \to \mathbb{R}^n$ — карта многообразия M с центром в точке P, т. е. гомеоморфизм окрестности U точки P, переводящий её в начало координат. Тогда для любой изометрии $i\colon B^n \to B^n$ единичного шара в $\mathbb{R}^n$, гомотопной тождественному отображению, существует такой диффеоморфизм $f\colon M \to M$, что $f(P) = P$ и*

$$f|g^{-1}(B^n) = g^{-1} \circ i \circ g. \tag{7}$$

§ 2. Однородные бикомпакты

Если M — компактное n-многообразие, то многообразие SM также компактно, будучи пространством локально тривиального расслоения с компактной базой M и компактным слоем S^{n-1}. Определим теперь на множестве SM новое топологическое пространство RM.

Пространство RM будет резольвентой (см. III.1.1) многообразия M в каждой точке P в сферу S^{n-1} посредством отображения h_P, которое мы сейчас определим. Фиксируем карту $g_P\colon OP \to \mathbb{R}^n$ с центром в точке P и задаём отображение $h_P\colon OP \setminus \{P\} \to S^{n-1}$ следующим образом:

$$h_P(P') = \bar{p}'/\|\bar{p}'\|, \tag{1}$$

где $\bar{p}'$ — радиус-вектор точки $g_P(P')$.

Единичный вектор $\bar{q}/\|\bar{q}\|$ естественно интерпретируется как направление в касательном пространстве $T_P(M)$. Поэтому равенство (1) фактически определяет отображение

$$h_P\colon OP \setminus \{P\} \to S_P(M).$$

Таким образом, пространство RM получается «вставкой» в каждую точку $P \in M$ сферы $S_P(M)$ посредством отображения h_P. Отображение $\psi_M\colon SM \to M$ в новой топологии обозначим

$$\pi_M\colon RM \to M.$$

Из определения топологии пространства RM следует, что отображение π_M неприводимо. Поэтому из доказательства леммы III.1.16 и предложений II.3.10 и II.4.8 вытекает следующее утверждение.

2.1. Предложение. *Для всякого компактного гладкого многообразия M пространство RM является неметризуемым сепарабельным бикомпактом с первой аксиомой счётности.*

Отображение $d^1 f\colon SM \to SM$, порождаемое диффеоморфизмом $f\colon M \to N$, в новой топологии обозначим через

$$\delta^1 f\colon RM \to RN.$$

Аналогом теоремы 1.4 является следующее утверждение.

2.2. Теорема. *Если $f\colon M \to N$ — диффеоморфизм компактных многообразий, то отображение $\delta^1 f$ является гомеоморфизмом. При этом*

$$f \circ \pi_M = \pi_N \circ \delta^1 f. \tag{2}$$

Доказательство. Равенство (2) совпадает с равенством (6), если фигурирующие в этих равенствах отображения рассматривать как отображения множеств. Далее, из теоремы 1.4 вытекает, что отображение $\delta^1 f$ является биекцией. Поэтому ввиду бикомпактности пространства SM достаточно проверить непрерывность отображения $\delta^1 f$.

Пусть $P \in M$ — произвольная точка и $Q = f(P)$. Возьмём карты $g^1_P\colon OP \to \mathbb{R}^n$ и $g^2_Q\colon OQ \to \mathbb{R}^n$ из определения топологии бикомпактов RM и RN. Существует такая меньшая окрестность $O_P \subseteq OP$, что $f(O_1 P) \subseteq OQ$. Без ограничения общности можно считать, что $O_1 P = (g^1_P)^{-1} O^n$, где $O^n \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытый единичный шар. Отображение f в картах $O_1 P$ и OQ выражается отображением

$$F = g^2_Q \circ f \circ (g^1_P)^{-1}\colon O^n \to \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

которое сохраняет начало координат и переводит точку $x = (x^1, \ldots, x^n)$ в точку $y = (y^1, \ldots, y^n)$, где $y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n)$ — гладкие функции.

Мы хотим проверить непрерывность отображения $\delta^1 f$ в точке (P, s), где $s = (\lambda\bar{\xi})$ — направление в пространстве $T_P(M)$, определяемое ненулевым вектором $\bar{\xi}$. Пусть $\delta^1 f(P, s) = (Q, t)$, где $t = (\mu\bar{\eta})$ — направление в $T_Q(N)$, определяемое вектором $\bar{\eta}$. При этом мы можем считать, что

$$d_P f(\bar{\xi}) = \bar{\eta}. \tag{4}$$

Фиксируем базисную окрестность $U \otimes V$ точки (Q, t) в бикомпакте RN. Без ограничения общности можно предположить, что

$$U = (g_Q^2)^{-1} O_a^n, \tag{5}$$

где $O_a^n \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытый шар радиуса $a > 0$ с центром в начале координат, а

$$V = \{t' \in S_Q(N) \colon \cos(t, t') > 1 - b\}, \tag{6}$$

где $b > 0$. В определении множества V направления отождествлены с единичными векторами из $\mathbb{R}^n = g_Q^2(OQ)$, а косинусы углов между ними также измеряются в евклидовой метрике $\mathbb{R}^n$. Напомним также, что

$$U \otimes V = \{Q\} \times V \cup (\pi_N^{-1}(U \cap h_Q^{-1}(V)), \tag{7}$$

где отображение $h_Q = OQ \setminus \{Q\} \to S_Q(N)$ определяется равенством, аналогичным равенству (1) для отображения h_P.

Пусть последовательность $\sigma = \{(P_k, s_k)\}$ сходится к точке (P, s) при $k \to \infty$. Надо показать, что $\delta^1 f(P_k, s_k) \in U \otimes V$ для всех k начиная с некоторого k_0. Если это не так, то бесконечно много точек последовательности $\delta^1 f(\sigma)$ лежит за пределами окрестности $U \otimes V$. Переходя к подпоследовательности, без ограничения общности можно считать, что

$$\delta^1 f(\sigma) \cap (U \otimes V) = \varnothing. \tag{8}$$

Из равенства (2) вытекает, что последовательность $\{f(P_k)\}$ сходится к точке Q. Существует такое k_0, что

$$f(P_k) \neq Q \text{ при } k \geqslant k_0. \tag{9}$$

В самом деле, если условие (9) не выполняется ни при каком k_0, то $f(P_k) = Q$ для бесконечного множества значений k. Опять, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $f(P_k) = Q$ для всех k. Тогда из (2) получаем, что $P_k = P$ для всех k. Следовательно, последовательность σ лежит в слое $\pi_M^{-1}(P)$, а её образ — в слое $\pi_N^{-1}(Q)$. Но из теоремы 1.4 вытекает, что $d^1 f$ гомеоморфно отображает слой $\psi_M^{-1}(P)$ на слой $\psi_N^{-1}(Q)$. Поэтому из определения отображений $\delta^1 f$, π_M и π_N следует, что $\delta^1 f$ гомеоморфно переводит слой $\pi_M^{-1}(P)$ в слой $\pi_N^{-1}(Q)$. Последнее противоречит тому, что согласно условию (8) последовательность $\delta^1 f(\sigma)$ не сходится к точке $(Q, t) = \delta^1 f(P, s)$. Таким образом, условие (9) проверено. Снова, переходя к подпоследовательности, можно считать, что

$$P_k \neq P, \quad Q_k = f(P_k) \neq Q \text{ при всех } k. \tag{10}$$

Положим

$$H = g_Q^2(h_Q^{-1}(V)). \tag{11}$$

Из (6) вытекает

$$H = \{y \in \mathbb{R}^n \colon \cos(\bar{\eta}, \bar{y}) > 1 - b\}, \tag{12}$$

где $\bar{y}$ — радиус-вектор точки y. Положим

$$g_P^1(P_k) = x_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n),$$
$$g_Q^2(Q_k) = y_k = (y_k^1, \ldots, y_k^n).$$

При этом $y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n)$ — гладкие функции, представляющие отображение F из (3), и

$$y^i_k = y^i(x^1_k, \ldots, x^n_k).$$

Из (10) вытекает, что $\bar{x}_k \neq \bar{0}$. Следовательно, определён угол $(\bar{\xi}, \bar{x}_k)$. Поскольку последовательность σ сходится к точке (P, s), из определения топологии бикомпакта RM вытекает, что

$$\cos(\bar{\xi}, \bar{x}_k) \to 1 \text{ при } k \to \infty. \tag{13}$$

В то же время из (8), (11) и (12) получаем

$$\cos(\bar{\eta}, \bar{y}_k) \leqslant 1 - b. \tag{14}$$

Таким образом, непрерывность отображения $\delta^1 f$ будет доказана, если мы докажем, что

$$\cos(\bar{\eta}, \bar{y}_k) \to 1 \text{ при } k \to \infty. \tag{15}$$

Для дальнейшего нам потребуется

2.3. Лемма (см. [24, гл. 3, § 3, лемма 2]). *Всякую бесконечно дифференцируемую функцию $\varphi(x^1, \ldots, x^n)$ можно представить в виде*

$$\varphi(x^1, \ldots, x^n) = \varphi(x^1_0, \ldots, x^n_0) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x^1_0, \ldots, x^n_0)(x^i - x^i_0) + \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(x^1, \ldots, x^n)(x^i - x^i_0)(x^j - x^j_0), \tag{16}$$

где $h_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ — бесконечно дифференцируемые функции.

Условие (15) мы проверим сначала в двух частных случаях.

Первый случай. Отображение $F = g^2_Q \circ f \circ (g^1_P)^{-1}$ является поворотом (изометрией, сохраняющей ориентацию) в окрестности начала координат.

В этом случае матрица Якоби

$$\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$$

отображения F в окрестности начала координат является постоянной матрицей

$$A = (a_{ij}),$$

а само линейное отображение F имеет вид

$$y^i = a_{i1}x^1 + \ldots + a_{in}x^n.$$

Дифференциал отображения f в точке P также записывается матрицей A. Следовательно, координаты точек и касательных векторов изменяются одинаковым образом. Кроме того, матрица A ортогональна. Значит, $(\bar{\xi}, \bar{x}) = (\bar{\eta}, \bar{y})$ и из (13) вытекает (15).

Второй случай. $\bar{\xi} = (1, 0, \ldots, 0)$, $\bar{\eta} = (\lambda, 0, \ldots, 0)$.

Тогда из (2) вытекает, что

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^1}(\bar{0}) = \lambda, \quad \frac{\partial y^2}{\partial x^1}(\bar{0}) = \ldots = \frac{\partial y^n}{\partial x^1}(\bar{0}) = 0. \tag{17}$$

Поэтому равенство (16) для $\varphi = y^1$ и $(x_0^1, \ldots, x_0^n) = (0, \ldots, 0)$ превращается в

$$y^1 = \lambda x^1 + \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(x) x^i x^j. \tag{18}$$

Поскольку $P_k \to P$, имеем

$$\bar{x}_k \to \bar{0}, \tag{19}$$

а условие (13) превращается в

$$\frac{x_k^1}{((x_k^1)^2 + \ldots + (x_k^n)^2)^{1/2}} \to 1. \tag{20}$$

Необходимое нам свойство (15) превращается в

$$\frac{\lambda y_k^1}{((y_k^1)^2 + \ldots + (y_k^n)^2)^{1/2}|\lambda|} \to 1. \tag{21}$$

Равенство (18) в точке x_k превращается в равенство

$$y_k^1 = \lambda x_k^1 + \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(x_k) x_k^i x_k^j. \tag{18_k}$$

Из свойства (20) вытекают следующие два свойства:

$$x_k^1 > 0 \text{ начиная с некоторого } k = k_0, \tag{22}$$

$$\frac{x_k^i}{x_k^1} \to 0, \quad i = 2, \ldots, n. \tag{23}$$

Из (18_k), (19) и (22) получаем, что $\lambda y_k^1 > 0$ почти для всех k. Поэтому $\lambda y_k^1 = |\lambda y_k^1| = |\lambda| \cdot |y_k^1|$, и свойство (21) оказывается равносильным свойству

$$\frac{|y_k^1|}{((y_k^1)^2 + \ldots + (y_k^n)^2)^{1/2}} \to 1. \tag{24}$$

Чтобы доказать (24), достаточно проверить, что

$$u_k^l = \frac{y_k^l}{y_k^1} \to 0 \text{ при } l \geqslant 2. \tag{25}$$

Из (16) получаем

$$y_k^l = \frac{\partial y_k^l}{\partial x^1} x_k^1 + \ldots + \frac{\partial y_k^l}{\partial x^n} x_k^n + \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}^l x_k^i x_k^j,$$

где

$$\frac{\partial y_k^l}{\partial x^i} = \frac{\partial y^l}{\partial x^i}(x_k),$$

а $h^l_{ij} = h^l_{ij}(x_k)$. Поэтому при фиксированном $l \geqslant 2$ имеем

$$u^l_k = v^k_1 + \ldots + v^k_n + \sum v^k_{ij}, \tag{26}$$

где

$$v^k_m = \frac{\frac{\partial y^l_k}{\partial x^m} x^m_k}{x^1_k + \sum\limits_{i,j} h_{ij} x^i_k x^j_k},$$

$$v^k_{ij} = \frac{h^l_{ij} x^i_k x^j_k}{x^1_k + \sum\limits_{i,j} h_{ij} x^i_k x^j_k}.$$

Для того чтобы имело место свойство (25), необходимо, чтобы каждое слагаемое в правой части равенства (26) стремилось к нулю при $k \to \infty$. В силу бесконечной дифференцируемости функций y^l имеем

$$\frac{\partial y^l_k}{\partial x^m} \to \frac{\partial y^l}{\partial x^m}(\bar{0}).$$

Поэтому v^k_m будет стремиться к нулю (при $m \geqslant 2$), если

$$w^k_m = \frac{x^m_k}{x^1_k + \sum\limits_{i,j} h_{ij} x^i_k x^j_k} \to 0.$$

Имеем

$$w^k_m = \frac{x^m_k}{x^1_k} \frac{1}{1 + \sum\limits_{i,j} h_{ij} x^i_k x^j_k \frac{1}{x^1_k}}. \tag{27}$$

Но первый сомножитель стремится к нулю согласно (23), а второй стремится к 1 согласно (19) и (23). Доказательство того, что $v^k_{ij} \to 0$, проходит по аналогичной схеме.

Что касается слагаемого

$$v^k_1 = \left(\frac{\partial y^l_k}{\partial x^1}\right) \cdot \frac{x_k}{x^1_k + \sum\limits_{i,j} h_{ij} x^i_k x^j_k},$$

то первый его сомножитель стремится к 0 согласно (17), а второй — к 1, совпадая со вторым сомножителем из (27).

Общий случай. Длина вектора $\bar{\xi}$, определяющего направление s, не имеет значения. Будем считать, что она равна 1. В карте $g^1_P(OP)$ рассмотрим поворот $i_1\colon B^n \to B^n$, переводящий вектор $\bar{\xi}$ в вектор $\bar{\xi}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. По теореме 1.6 существует такой диффеоморфизм $f_1\colon M \to M$, что $f_1(P) = P$ и

$$f_1|(g^1_P)^{-1}(B^n) = (g^1_P)^{-1} \circ i_1 \circ g^1_P.$$

Аналогичным образом в карте $g^2_Q(OQ)$ существует поворот $i_2\colon B^n \to B^n$, переводящий вектор $\bar{\eta}$ в вектор $\bar{\eta}_1 = (\lambda, 0, \ldots, 0)$, где $|\lambda| = \|\bar{\eta}\|$. Здесь не имеет значения величина радиуса шара B^n, поскольку вектор $\bar{\eta}$ является элементом касательного пространства в точке Q, для которой $g_Q^2(Q) = \bar{0}$. По теореме 2.2 существует такой диффеоморфизм $f_2 \colon N \to N$, что $f_2(Q) = Q$ и

$$f_2|(g_Q^2)^{-1}(B^n) = (g_Q^2)^{-1} \circ i_2 \circ g_Q^2.$$

Рассмотрим диффеоморфизм $f_3 = f_2 \circ f \circ f_1^{-1}$. Из определения отображения f_3 вытекает, что

$$d_P f_3(\bar{\xi}_1) = \bar{\eta}_1.$$

Пусть $s_1 \in S_P M$ — направление, определяемое вектором $\bar{\xi}_1$, а $t_1 \in S_Q N$ — направление, определяемое вектором $\bar{\eta}_1$. Ясно, что

$$\begin{gathered} d_P^1 f_3(s_1) = \delta_P^1 f_3(s_1) = t_1, \\ \delta_P^1 f_1(s) = s_1, \quad \delta_Q^1 f_2(t) = t_1. \end{gathered} \tag{28}$$

Согласно второму случаю отображение $\delta^1 f_3$ непрерывно в точке (P, s_1). Далее,

$$f = f_2^{-1} \circ f_3 \circ f_1$$

и, следовательно,

$$\delta^1 f = (\delta^1 f_2)^{-1} \circ (\delta^1 f) \circ \delta^1 f_1. \tag{29}$$

Согласно первому случаю отображение $\delta^1 f_1$ непрерывно в точке (P, s), а отображение $(\delta^1 f_2)^{-1}$ непрерывно в точке (Q, t_1). Поэтому из (28) и (29) вытекает непрерывность отображения $\delta^1 f$ в точке (P, s). Теорема доказана. $\square$

2.4. Замечание. Утверждение теоремы 2.2 имеет место и в некомпактном случае. В самом деле, не предполагая компактности многообразий, мы доказали, что для диффеоморфизма $f \colon M \to N$ отображение $\delta^1 f$ является непрерывной биекцией. То же самое верно и для обратного диффеоморфизма f^{-1}. Следовательно, $\delta^1 f = (\delta^1 f^{-1})^{-1}$ — гомеоморфизм.

2.5. Замечание. При определении пространства RM мы фиксировали в каждой точке $P \in M$ карту $g_P \colon OP \to \mathbb{R}^n$ с центром в точке P. Таким образом, пространство RM было определено не для многообразия M, а для пары $(M, \mathcal{A})$, где $\mathcal{A} = \{g_P \colon P \in M\}$ — атлас, содержащийся в максимальном атласе, определяющем гладкую структуру многообразия M. Из теоремы 2.2, в формулировке которой должна идти речь о пространствах $RM(\mathcal{A})$ и $RN(\mathcal{A}')$, вытекает, что определение пространства RM не зависит от атласа $\mathcal{A}$. В самом деле, для другого атласа $\mathcal{A}_1$ тождественное отображение id_M порождает гомеоморфизм $RM(\mathcal{A}) \to RM(\mathcal{A}_1)$.

Для пространства X через $\mathrm{Homeo}(X)$ обозначим группу всех гомеоморфизмов X на себя. Пусть G — подгруппа группы $\mathrm{Homeo}(X)$. *Орбитой точки* $x \in X$ относительно действия группы G называется множество $G(x) = \{g(x) \colon g \in G\}$. Действие группы G на пространстве X называется *транзитивным*, если у него имеется ровно одна орбита — само X. Примером транзитивного действия может служить действие ортогональной группы $SO(n)$ на сфере S^{n-1}.

2.6. Теорема. *Для всякого компактного гладкого многообразия M пространство RM является топологически однородным бикомпактом.*

Доказательство. Пусть (P,s) и (Q,t) — различные точки бикомпакта RN. По теореме 1.5 существует такой диффеоморфизм $f_1\colon M \to M$, что $f_1(P) = Q$. По теореме 2.2 отображение $\delta^1 f_1\colon RM \to RM$ будет гомеоморфизмом. Пусть $\delta^1 f_1(P,s) = (Q,t')$. Возьмём карту $g_Q\colon OQ \to \mathbb{R}^n$ из определения топологии пространства RM. В направлениях t' и t возьмём векторы $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ соответственно, которые в карте g_Q имеют координаты $(\xi^1,\ldots,\xi^n)$ и $(\eta^1,\ldots,\eta^n)$, удовлетворяющие условию

$$(\xi^1)^2 + \ldots + (\xi^n)^2 = (\eta^1)^2 + \ldots + (\eta^n)^2 = 1.$$

В пространстве $\mathbb{R}^n$ возьмём точки $x = (\xi^1,\ldots,\xi^n)$ и $y = (\eta^1,\ldots,\eta^n)$. Поскольку ортогональная группа $SO(n)$ транзитивно действует на единичной сфере S^{n-1}, существует такой поворот $i\colon B^n \to B^n$, что $i(x) = y$. В окрестности начала координат отображение i записывается некоторой ортогональной матрицей A.

По теореме 1.6 существует такой диффеоморфизм $f_2\colon M \to M$, что $f_2(Q) = Q$ и

$$f_2|g_Q^{-1}(B^n) = g_Q^{-1} \circ i \circ g_Q.$$

Как отмечалось при доказательстве теоремы 2.2 (первый случай), дифференциал отображения f_2 в точке Q также записывается матрицей A. Но координаты точек x и y совпадают с координатами векторов $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ соответственно. Поэтому $d_Q f_2(\bar{\xi}) = \bar{\eta}$ и, следовательно, $d^1 f_2(Q,t') = (Q,t)$. Полагая $f = f_2 \circ f_1$, получаем $d^1 f(P,s) = (Q,t)$, или, что то же самое, $\delta^1 f(P,s) = (Q,t)$. Итак, отображение $\delta^1 f\colon RM \to RM$, являющееся гомеоморфизмом по теореме 2.2, переводит точку (P,s) в точку (Q,t). Теорема 2.6 доказана. $\square$

Для гладкого многообразия M через $\mathrm{Diff}(M)$ обозначим группу всех диффеоморфизмов многообразия M на себя. Содержание теоремы 2.2 состоит в том, что определяется отображение

$$\delta^1\colon \mathrm{Diff}(M) \to \mathrm{Homeo}(RM).$$

При этом в силу теоремы 2.2 разные диффеоморфизмы f_1 и f_2 отображаются в разные гомеоморфизмы. Таким образом, отображение δ^1 является мономорфизмом, т. е. определяет *эффективное* действие группы $\mathrm{Diff}(M)$ на пространстве RM. Что касается теоремы 2.6, нами было доказано более сильное утверждение.

2.7. Теорема. *Для любого гладкого компактного многообразия M группа $\delta_1(\mathrm{Diff}\, M)$ транзитивно действует на бикомпакте RM.*

§ 3. Размерность

3.1. Пространство $\mathbb{R}^n$ является гладким n-многообразием с тождественным отображением в качестве карты g, задающей на нём гладкую структуру. Поэтому согласно замечанию 2.5 топологию на пространстве $R\mathbb{R}^n$ можно определить посредством карт $g_{\bar{x}}$, получающихся из карты g параллельным сдвигом на вектор $\bar{x}$. Следовательно, $\mathbb{R}^n$ действует на $R\mathbb{R}^n$ как группа «параллельных сдвигов» и топологию на $R\mathbb{R}^n$ достаточно определить в начале координат. А именно, фиксируем единичный вектор $\bar{\xi} = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ и положительные числа a, b. Полагаем

$$U(a) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon \|y\| < a\},$$
$$V(\bar{\xi}, b) = \{\bar{\xi}' \in S^{n-1} \colon \cos(\bar{\xi}, \bar{\xi}') > 1 - b\}.$$

Отождествляя единичные векторы с определяемыми ими направлениями, получаем, что множества

$$U(a) \otimes V(\bar{\xi}, b) \tag{1}$$

образуют базу окрестностей в точке $(0, \bar{\xi})$. Тогда базу окрестностей в точке $(x, \bar{\xi})$ образуют множества, получающиеся «параллельным сдвигом» множеств (1) на вектор $\bar{x}$, т. е. множества

$$U(x, a) \otimes V(\bar{\xi}, b), \tag{2}$$

где

$$U(x, a) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon \|y - x\| < a\}.$$

3.2. Резольвента $\mathbb{R}^n$ над началом координат. Рассмотрим частичную резольвенту $R_{\{0\}}(\mathbb{R}^n)$ (см. III.1.19). Наряду с ней рассмотрим множество $\mathbb{R}^n_{(0,r)} \subseteq \mathbb{R}^n$ $(r > 0)$:

$$\mathbb{R}^n_{(0,r)} = \{y \in \mathbb{R}^n \colon \|y\| > r\}.$$

Множество $\mathbb{R}^n_{(0,r)}$ получается из $\mathbb{R}^n$ выбрасыванием открытого шара $O^n r$ с центром в начале координат и радиусом r.

3.3. Предложение. *Пространства $R_{\{0\}}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathbb{R}^n_{(0,r)}$ гомеоморфны.*

Доказательство. Как множество частичную резольвенту $R_{\{0\}}(\mathbb{R}^n)$ можно отождествить с дизъюнктной суммой сферы S^{n-1} и множества $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. При таком отождествлении можно определить отображение $h \colon R_{\{0\}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n_{(0,r)}$ следующим образом:

$$h(\bar{\xi}) = r\bar{\xi}, \quad h(y) = y + r\frac{y}{\|y\|}, \tag{3}$$

где $\bar{\xi} \in S^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Отображение h биективно, гомеоморфно отображает открытое множество $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \subseteq R_{\{0\}}(\mathbb{R}^n)$ на открытое множество $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n_{(0,r)}) \subseteq \subseteq \mathbb{R}^n_{(0,r)}$, а замкнутое множество $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}_{\{0\}}(\mathbb{R}^n)$ на замкнутое множество $S^{n-1}_r \subseteq \mathbb{R}^n_{(0,r)}$ — сферу радиуса r с центром в начале координат. При этом базисное множество $U(a) \otimes V(\bar{\xi}, b)$ переходит в открытое множество

$$\mathbb{R}^n_{(0,r)} \cap O^n_{a+r} \cap C_{(\bar{\xi}, b)},$$

где

$$C_{(\bar{\xi}, b)} = \{y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \colon \cos(\bar{\xi}, \bar{y}) > 1 - b\}.$$

Таким образом, h — гомеоморфизм. Предложение доказано. $\square$

3.4. Замечание. Гомеоморфизм $h\colon R_{\{0\}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n_{(0,r)}$ можно задать и следующим образом:

$$\begin{aligned} &h(\bar{\xi}) = r\bar{\xi}, \\ &h(y) = y, && \text{если } \|y\| \geqslant 2r; \\ &h(y) = \frac{y}{2} + r\frac{y}{\|y\|}, && \text{если } \|y\| \leqslant 2r. \end{aligned} \tag{4}$$

3.5. Резольвента $\mathbb{R}^n$ над конечным множеством. Пусть $F = \{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ — конечное множество, состоящее из попарно различных точек, т. е. $|F| = k$. Существует такое $r > 0$, что

$$4r < \|x_i - x_j\|, \quad \text{если} \quad i \neq j. \tag{5}$$

Наряду с частичной резольвентой $R_F(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим множество

$$\mathbb{R}^n_{(F,r)} = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup \{U(x_i, r)\colon 1 \leqslant i \leqslant k\}.$$

3.6. Предложение. *Пространства $R_F(\mathbb{R}^n)$ и $\mathbb{R}^n_{(F,r)}$ гомеоморфны.*

Доказательство. Как и в доказательстве предложения 3.3, частичную резольвенту $R_F(\mathbb{R}^n)$ можно отождествить с дизъюнктной суммой сфер $S^{n-1}_{x_i} \subseteq T_{x_i}(\mathbb{R}^n)$ и множества $\mathbb{R}^n \setminus F$. При этом, обозначая отображение резольвенты $R\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ через f, можем считать, что

$$S^{n-1}_{x_i} = f^{-1}(x_i), \quad \mathbb{R}^n \setminus F = (\pi^F_f)^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus F). \tag{6}$$

Поэтому, отождествляя $f^{-1}(F)$ с $(\pi^F_f)^{-1}(F) = f^F f^{-1}(F)$, имеем

$$S^{n-1}_x = f^F f^{-1}(x_i), \quad \mathbb{R}^n \setminus F = f^F(f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus F)). \tag{7}$$

Значит, гомеоморфизм

$$h\colon R_F(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n_{(F,r)}$$

можно задать условиями, аналогичными условиям (4), а именно

$$h(x_i, \bar{\xi}) = x_i + r\xi, \text{ где } \bar{\xi} \in T_{x_i}(\mathbb{R}^n), \ \|\bar{\xi}\| = 1; \tag{8}$$

$$h|\mathbb{R}^n_{(F,2r)} = \mathrm{id}; \tag{9}$$

$$h(y) = x_i + \frac{1}{2}(y - x_i) + r\frac{y - x_i}{\|y - x_i\|}, \text{ если } y \in U(x, 2r). \tag{10}$$

Условие (5) гарантирует корректность определения отображения h. □

3.7. Теорема. *Для метризуемого гладкого n-многообразия M имеем* $\dim RM = n - 1$.

Доказательство. Поскольку отображение $\pi_M\colon RM \to M$ вполне замкнуто (см. предложение III.1.2), из теорем III.2.4 и III.2.5 вытекает, что

$$n - 1 \leqslant \dim RM \leqslant n.$$

Нам остаётся доказать, что

$$\dim RM \leqslant n - 1. \tag{11}$$

Воспользовавшись тем, что

$$\operatorname{locdim} X = \dim X$$

для паракомпактного пространства X, мы можем ограничиться случаем $M = \mathbb{R}^n$. Поэтому из теоремы суммы вытекает, что неравенство (11) будет доказано, если мы установим неравенство

$$\dim R(I^n) \leqslant n-1, \tag{12}$$

где $I^n \subseteq \mathbb{R}^n$ — стандартный куб. Мы сделаем это посредством теоремы III.2.3 об u-отображениях.

Пусть $u = \{U_1, \dots, U_s\}$ — произвольное конечное открытое покрытие бикомпакта $X = R(I^n)$. Звёздно впишем в него открытое покрытие $v = \{V_1, \dots, V_t\}$. Куб I^n обозначим через Y, а отображение $\pi_{\mathbb{R}^n}|X$ — через f. Поскольку f вполне замкнуто, множество

$$F_1 = Y \setminus \bigcup \{f^{\#} V_i \colon i = 1, \dots, t\}$$

дискретно и, значит, конечно. Без ограничения общности можно предположить, что

$$F_1 \cap \operatorname{Bd} I^n = \varnothing. \tag{13}$$

В самом деле, от покрытия v можно перейти к покрытию $v' = \{V_1', \dots, V_t'\}$ пространства $R\mathbb{R}^n$, полагая $U_i' = U_i \cup (R\mathbb{R}^n \setminus X)$. Из определения пространства X и множеств V_i' вытекает, что

$$F_1 = \mathbb{R}^n \setminus \{\pi^{\#}_{\mathbb{R}^n} V_i' \colon i = 1, \dots, t\}.$$

Поэтому можно увеличить куб Y до куба Y' так, что выполняется условие

$$F_1 \cap \operatorname{Bd} Y' = \varnothing.$$

Доказав, что бикомпакт $R(Y')$ допускает v'-отображение на $(n-1)$-мерный компакт, мы докажем и неравенство (12). Итак, мы считаем условие (13) выполненным.

Пусть $F_1 = \{x_1, \dots, x_k\}$. Поскольку множества вида (2) образуют базу окрестностей в точке $(x, \bar{\xi}) \in R\mathbb{R}^n$, для каждого $\bar{\xi} \in S^{n-1}_{x_j} \subseteq T_{x_j}(\mathbb{R}^n)$ существуют такие числа $a(\bar{\xi}), b(\bar{\xi}) > 0$ и целое число $i = i(j, \bar{\xi})$, что

$$W_{(j,\bar{\xi})} = U(x_j, a(\bar{\xi})) \otimes V(\bar{\xi}, b(\bar{\xi})) \subseteq U_i. \tag{14}$$

Из покрытия $\{W_{(j,\bar{\xi})} \colon \bar{\xi} \in S^{n-1}_{x_j}\}$ множества $f^{-1}(x_j)$ можно выбрать конечное подпокрытие

$$\{W_{(j,\bar{\xi}^j_1)}, \dots, W_{(j,\bar{\xi}^j_{l(j)})}\}.$$

Согласно (13) существует такое число $a > 0$, что

$$a < \min\{\rho(x_j, \operatorname{Bd} I^n), a(\bar{\xi}^j_m) \colon m = 1, \dots, l_j,\ j = 1, \dots, k\}. \tag{15}$$

Уменьшая при необходимости число a, можно считать, что

$$2a < \|x_{j_1} - x_{j_2}\| \quad \text{при} \quad j_1 \neq j_2. \tag{16}$$

Для $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$, через $(x, y]$ обозначим полуинтервал, соединяющий точку x с точкой y. Из (14) и (15) вытекает, что

$$[f^{-1}(x_j, y]] \subseteq V_i \quad \text{для некоторого} \quad i = i(y), \quad \text{если} \quad \|y - x_j\| = a. \tag{17}$$

Обозначим через C_j какой-нибудь n-куб с центром в точке x_j, лежащий в шаре $U(x_j, a)$. Положим $D_j = \operatorname{Int}_{\mathbb{R}^n} C_j$, $B_j = C_j \setminus D_j$, $Z = Y \setminus \bigcup\{D_j : j = 1, \ldots, k\}$. По определению множества Z имеем $Z \cap F_1 = \varnothing$. Следовательно, семейство $f^{\#}v = \{f^{\#}V_1, \ldots, f^{\#}V_t\}$ является покрытием компакта $Z \subseteq I^n$. Пусть ε — число Лебега этого покрытия. Это означает, что для всякой точки $z \in Z$ существует $i = i(z)$, для которого

$$U(z, \varepsilon) \subseteq f^{\#}V_i. \tag{18}$$

Из (16) вытекает, что различные кубы C_{j_1} и C_{j_2} не пересекаются. Поэтому компакт Z можно представить в виде объединения конечного числа n-параллелепипедов $C_{k+1}, \ldots, C_{k+p}$ с рёбрами, параллельными осям координат, и с попарно непересекающимися внутренностями. Эти параллелепипеды можно взять настолько мелкими, что

$$\operatorname{diam} Cq < \varepsilon, \quad q = k+1, \ldots, k+p. \tag{19}$$

Как и для $j \leqslant k$, положим $D_j = \operatorname{Int}_{\mathbb{R}^n} C_j$ и $B_j = C_j \setminus D_j$ при $j \geqslant k+1$. Через x_q обозначим центр (симметрии) параллелепипеда C_q. Положим

$$F = \{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, x_{k+p}\}.$$

Пусть

$$r = \min\{\pi(x_j, Y \setminus C_j) : j = 1, \ldots, k+p\}. \tag{20}$$

Положим $I^n_{(F,r)} = I^n \cap \mathbb{R}^n_{(F,r)}$ и

$$B = \bigcup\{B_j : j = 1, \ldots, k+p\}. \tag{21}$$

Компакт B n-мерен как сумма конечного числа замкнутых множеств B_j, каждое из которых гомеоморфно сфере S^{n-1}. Для проверки неравенства (12) осталось построить u-отображение

$$\alpha : R(I^n) = X \to B.$$

Для этого сначала определим отображение

$$\beta_j : C_j \setminus U(x_j, r) \to B_j$$

как радиальную ретракцию с центром в точке x_j. Из (20) вытекает, что отображение β_j определено корректно. Равенство (21) влечёт, что частичные отображения β_j определяют отображение $\beta : I^n_{(F,r)} \to B$:

$$\beta | C_j \setminus U(x_j, r) = \beta_\gamma. \tag{22}$$

Определение (22) корректно, поскольку

$$I^n_{(F,r)} = \bigcup\{C_j \setminus U(x_j, r) : j = 1, \ldots, k+p\}$$

и
$$\beta_j|B_j = \mathrm{id}\,.$$

Положим
$$\alpha = \beta \circ h \circ f^F, \tag{23}$$
где $f^F\colon X \to Y_f^F$ — отображение из II.1.5, а h — отображение из доказательства предложения 3.6. Согласно предложению III.1.20
$$f^F = q_F\colon R(I^n) \to R_F(I^n).$$
Для того чтобы показать, что отображение α является u-отображением, надо для произвольной точки $y' \in B$ найти $i \in [1, s]$, для которого
$$\alpha^{-1}(y') = (f^F)^{-1}(h^{-1}(\beta^{-1}(y')) \subseteq U_i. \tag{24}$$
Положим $J(y') = \{j\colon y' \in B_j\}$. Тогда из (22) вытекает, что
$$\beta^{-1}(y') = \bigcup\{\beta_j^{-1}(y')\colon j \in J(y')\}. \tag{25}$$
Положим
$$X_j = (f^F)^{-1}(h^{-1}(C_j \setminus U(x_j, r)))$$
и
$$\alpha_j = \beta_j \circ h \circ f^F|X_j.$$
Согласно (23) и (25) имеем
$$\alpha^{-1}(y') = \bigcup\{\alpha_j^{-1}(y')\colon j \in J(y')\}. \tag{26}$$
Из определения отображения β_j вытекает, что
$$\beta_j^{-1}(y') = \left[x_j + r\frac{y' - x_j}{\|y' - x_j\|}, y'\right]. \tag{27}$$
Пусть $z \in \beta_j^{-1}(y')$. Если $\|z - x_j\| = r$, то из (8) получаем, что
$$h^{-1}(z) = \left(x_j, \frac{\overline{y' - x_j}}{\|y' - x_j\|}\right). \tag{28}$$
С учётом (6) равенство (28) превращается в равенство
$$(f^F)^{-1}h^{-1}(z) = \left(x_j, \frac{\overline{y' - x_j}}{\|y' - x_j\|}\right). \tag{29}$$
Если же $\|z - x_j\| > r$, то из (9) и (10) вытекает, что
$$h^{-1}(z) \in (x_j, y']. \tag{30}$$
Из (7) и (30) следует
$$(f^F)^{-1}h^{-1}(x) \subseteq f^{-1}(x_j, y']. \tag{31}$$
Пусть $j \in J(y') \cap [1, k]$. Тогда из (17), (27), (29) и (31) получаем
$$(f^F)^{-1}h^{-1}(\beta_j^{-1}(y')) \subseteq V_i \quad \text{для некоторого} \quad i = i(j, y'). \tag{32}$$

Если же $j \in J(y') \cap [k+1, k+p]$, то из (18) и (19) вытекает, что
$$f^{-1}(C_j) \subseteq V_i \quad \text{для некоторого} \quad i = i(j). \tag{33}$$
Но $h^{-1}\beta_j^{-1}(B_j) \subseteq C_j$. Поэтому из (7) и (33) получаем
$$(f^F)^{-1}h^{-1}\beta_j^{-1}(B_j) \subseteq V_i. \tag{34}$$
Таким образом, из (32) и (34) вытекает, что для всякого $j \in J(y')$ имеем
$$\alpha_j^{-1}(y') \subseteq V_i \quad \text{для некоторого} \quad i = i(j, y'). \tag{35}$$
Отображение β_j является ретракцией. Следовательно, $y' \in \beta_j^{-1}(y')$. Значит,
$$(f^F)^{-1}h^{-1}(y') \subseteq \bigcap\{\alpha_j^{-1}(y') \colon j \in J(y')\}.$$
Таким образом,
$$\bigcap\{V_{i(j,y')} \colon j \in J(y')\} \neq \varnothing. \tag{36}$$
Но покрытие v звёздно вписано в покрытие u. Поэтому из (35) и (36) вытекает (24). Теорема доказана. □

3.8. Замечание. Для неметризуемого многообразия M мы можем утверждать только, что
$$\dim M - 1 \leqslant \dim RM \leqslant \dim M.$$
Разумеется, $\dim RM = 0$, если $\dim M = 1$.

В связи с этим возникает следующий вопрос.

3.9. Вопрос. Верно ли, что
$$\dim RM = \dim M$$
для n-многообразия M размерности $\dim M > n$?

§ 4. Подпространства

4.1. Начнём с очевидного замечания. Бикомпакт RS^1 гомеоморфен «двум стрелкам» П. С. Александрова. Поэтому для метризуемого 1-многообразия M пространство RM совершенно нормально и, следовательно, наследственно нормально.

4.2. Предложение. *Если* $\dim M \geqslant 2$, *то пространство* RM *содержит дискретное подпространство мощности континуума и поэтому, будучи сепарабельным, не является наследственно нормальным.*

Доказательство. Достаточно доказать это утверждение для $M = \mathbb{R}^2$, поскольку легко видеть, что $R\mathbb{R}^2 \subseteq R\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 2$. В начале § 3 отмечено, что $\mathbb{R}^2$ действует на $R\mathbb{R}^2$ как группа «параллельных сдвигов». Поэтому можно считать, что угловые параметризации окружностей $S_x^1 = \pi^{-1}(x)$, где $\pi \colon R\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — проектирование, согласованы и горизонтальные направления соответствуют углам 0 и π. Горизонтальную ось координат в $\mathbb{R}^2$, т. е. множество всех точек вида $(t, 0)$, обозначим через X. Пространство $R\mathbb{R}^2$ как множество совпадает с произведением $\mathbb{R}^2 \times S^1$ (см. III.1.13). Положим $Y = X \times \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ и покажем, что пространство $Y \subseteq R\mathbb{R}^2$ дискретно. Множество $\mathbb{R}^2 \otimes V\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ (см. 3.1) является окрестностью точки $\left(0, 0, \frac{\pi}{2}\right) \in R\mathbb{R}^2$, пересекающейся с множеством Y по единственной точке $\left(0, 0, \frac{\pi}{2}\right)$. Параллельно перенося окрестность $\mathbb{R}^2 \otimes V\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ в точку $\left(t, 0, \frac{\pi}{2}\right)$, убеждаемся в дискретности множества Y. Предложение доказано. □

4.3. Теорема. *Пусть $Y \subseteq RM$. Если множество $\pi(Y)$ конечно, то $wY \leqslant \omega_0$. Если множество $\pi(Y)$ бесконечно, то $wY = |\pi(Y)|$.*

Доказательство. Для «двух стрелок» этот факт общеизвестен. Поэтому считаем, что $\dim M \geqslant 2$, и снова, как и в предыдущем утверждении, рассмотрим лишь случай $M = \mathbb{R}^2$. Оценка $wY \leqslant \omega_0 \cdot |\pi(Y)|$ очевидна. Остаётся только показать, что

$$|\pi(Y)| \leqslant wY \quad \text{для несчётного} \quad \pi(Y). \tag{1}$$

Для проверки оценки (1) достаточно рассмотреть случай, когда отображение $p = \pi_Y \colon Y \to \pi(Y)$ является биекцией. Каждая точка $y \in Y$ имеет вид $(\overline{\pi(y)}, \overline{e(y)}\,)$, где $\overline{e(y)} \in S^1$ — единичный вектор. Без ограничения общности можно предположить, что

$$\cos(\overline{e(y_1)}, \overline{e(y_2)}\,) > \frac{1}{2} \quad \text{для всех} \quad y_1, y_2 \in Y. \tag{2}$$

Условие (2) равносильно тому, что угол между $\overline{e(y_1)}$ и $\overline{e(y_2)}$ меньше $\frac{\pi}{3}$. У каждой точки $y \in Y$ возьмём окрестность Oy вида $\mathbb{R}^2 \otimes V\left(\overline{e(y)}, \frac{1}{2}\right)$, т. е.

$$Oy = \{\pi(y)\} \times \left\{\overline{e} \in S^1 \colon \cos(\overline{e}, \overline{e(y)}\,) > \frac{1}{2}\right\} \cup \pi^{-1} Wy,$$

где

$$Wy = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \cos(\overline{x} - \overline{\pi(y)}, \overline{e(y)}\,) > \frac{1}{2}\right\}. \tag{3}$$

Положим $\tau = |\pi(Y)|$ и предположим, что $\tau < |\pi(Y)|$. Зафиксируем базу $\mathcal{B}$ пространства Y мощности τ. Для каждой точки $y \in Y$ возьмём базисную окрестность $By \subseteq Oy$. Поскольку $\tau < |\pi(Y)|$, существуют такие различные точки $y_1, y_2 \in Y$, что $By_1 = By_2$. Из этого вытекает

$$y_1 \in Oy_2, \quad y_2 \in Oy_1. \tag{4}$$

Но $\pi|Y$ — биекция. Следовательно, из (4) вытекает

$$\pi(y_1) \in Wy_2, \quad \pi(y_2) \in Wy_1. \tag{5}$$

Условия (3) и (5) влекут

$$\cos(\overline{\pi(y_1)} - \overline{\pi(y_2)}, \overline{e(y_2)}\,) > \frac{1}{2}, \tag{6}$$

$$\cos(\overline{\pi(y_2)} - \overline{\pi(y_1)}, \overline{e(y_1)}\,) > \frac{1}{2}, \tag{7}$$

что противоречит условию (2), поскольку противоположные векторы не могут соединяться тремя дугами окружности, каждая из которых меньше $\frac{\pi}{3}$. Теорема доказана. □

Из теоремы 4.3 вытекает следующее утверждение.

4.4. Предложение. *Если точки $x_1, x_2 \in RM$ принадлежат различным слоям отображения $\pi\colon RM \to M$, то их нельзя соединить дугой (= гомеоморфным образом отрезка $I \subseteq \mathbb{R}$) в RM.*

4.5. Замечание. В то же время, если $\dim M \geqslant 2$, то пространство RM локально связно. Более того, оно связно упорядоченными континуумами. В самом деле, модифицируя доказательство предложения 4.2, легко показать, что любые две точки $x_1, x_2 \in R\mathbb{R}^2$ из различных слоёв отображения $\pi\colon R\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ соединяются континуумом, гомеоморфным лексикографическому квадрату отрезка.

Важнейшим, пожалуй, следствием предложения 4.4 является следующая теорема.

4.6. Теорема. *Пусть M — компактное гладкое n-многообразие, $n \geqslant 2$, и пусть $h\colon RM \to RM$ — гомеоморфизм. Тогда существует такой единственный гомеоморфизм $p_M(h)\colon M \to M$, что*

$$\pi \circ h = p_M(h) \circ \pi. \tag{8}$$

Более того, отображение $p_M\colon \mathrm{Homeo}(RM) \to \mathrm{Homeo}(M)$ является мономорфизмом.

Доказательство. Из предложения 4.4 вытекает, что для произвольной точки $y \in M$ множество $\pi h(\pi^{-1}(y))$ состоит из одной точки, которую и обозначим через $p_M(h)(y)$. Из определения отображения $p_M(h)$ вытекает справедливость равенства (8). Следовательно, отображение $p_M(h)$ непрерывно как левый делитель факторного отображения $\pi\circ h$. Далее, h является эпиморфизмом, поскольку отображения h и π суть эпиморфизмы. Надо проверить инъективность отображения $p_M(h)$. Предположим, что существуют различные точки $y_1, y_2 \in M$, которые отображение $p_M(h)$ переводят в одну точку y. Тогда из равенства (8) вытекает, что

$$\pi^{-1}(y_i) \subseteq h^{-1}\pi^{-1}(y), \quad i = 1, 2.$$

Но множество $h^{-1}\pi^{-1}(y)$ гомеоморфно сфере S^{n-1}. Значит, точки из разных слоёв $\pi^{-1}(y_1)$ и $\pi^{-1}(y_2)$ можно соединить дугой, что противоречит предложению 4.4. Итак, отображение $p_M(h)$ является гомеоморфизмом.

Далее, из равенства (8) вытекает, что отображение p_M является гомоморфизмом. Предположим, что $p_M(h_1) = p_M(h_2)$. Тогда $p_M(h_2^{-1} \circ h_1) = \mathrm{id}_M$. Остаётся доказать, что если $p_M(h) = \mathrm{id}_M$, то $h = \mathrm{id}_{R(M)}$. Но это вытекает из равенства (8) и неприводимости отображения π. В самом деле, если $h(x) \neq x$ для некоторой точки $x \in R(M)$, то найдётся такая окрестность Ox, что

$$Ox \cap h(Ox) = \varnothing. \tag{9}$$

В силу неприводимости отображения π найдётся такая точка $y \in M$, что $\pi^{-1}(y) \subseteq Ox$. Тогда для произвольной точки $z \in \pi^{-1}(y)$ имеем $h(z) \notin \pi^{-1}(y)$ согласно (9). Следовательно, $\pi h(z) \neq y$. С другой стороны,

$$\pi h(z) \overset{\text{согласно (8)}}{=} p_M(h)(\pi(z)) = p_M(h)(y) \overset{\text{поскольку } p_M(h) = \mathrm{id}_M}{=} y.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

4.7. Замечание. Анализ доказательства теоремы 4.6 показывает, что условие компактности многообразия M можно опустить. То же относится и к теоремам из § 2. Далее, отображение $p_M\colon \mathrm{Homeo}(RM) \to \mathrm{Homeo}(M)$ не может быть эпиморфизмом. Примером гомеоморфизма $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, не имеющего вида $p_{\mathbb{R}^2}(h)$, является гомеоморфизм, переводящий горизонтальную ось координат в график функции $y = x \sin\frac{1}{x}$. Легко также убедиться в том, что мономорфизм $\delta^1\colon \mathrm{Diff}(M) \to \mathrm{Homeo}(RM)$ из § 2 также не является эпиморфизмом.

Другим следствием предложения 4.4 является следующее утверждение.

4.8. Предложение. *Никакое пространство вида $R(M)$ не может быть алгебраически однородным при $\dim M \geqslant 2$.*

Напомним, что топологическое пространство называется *алгебраически однородным*, если оно гомеоморфно фактор-пространству G/H топологической группы G по отношению к некоторой подгруппе $H \subseteq G$. Отметим, что факторное отображение $G \to G/H$ открыто.

Предложение 4.8 вытекает из предложения 4.4 и леммы 4.9, которая в частном случае была сформулирована в [52].

4.9. Лемма. *Пусть $f\colon X \to Y$ — совершенное неприводимое отображение регулярного пространства X на регулярное пространство Y, при котором прообраз какой-нибудь точки y_0 не вырожден и линейно связен. Тогда если X является алгебраически однородным пространством, то существуют такие точки $x_1, x_2 \in X$, связанные простой дугой, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Доказательство. Пусть $X = G/H$ и $q\colon G \to G/H$ — факторное отображение. Без ограничения общности можем предполагать, что единица e группы G переводится отображением q в точку $x_0 \in f^{-1}(y_0)$. Для элемента $a \in G$ определим отображение $\Psi_a\colon G/H \to G/H$ равенством $\Psi_a(gH) = (ag)H$. Отображение Ψ_a является гомеоморфизмом. Через K обозначим подгруппу группы G, порождённую множеством $q^{-1}(f^{-1}(y_0))$.

4.10. Утверждение. *Множество $q(K)$ линейно связно.*

Доказательство. Множество $q^{-1}(f^{-1}(y_0))$ обозначим через L. Группа K состоит из слов, буквы которых принадлежат множеству $L \cup L^{-1}$. Доказательство того, что точки $q(e)$ и $q(a)$ можно соединить дугой, лежащей в $q(K)$, проводится индукцией по длине l слова a. Если $l = 1$, то требуемое свойство, в силу условия $q(e) = x_0 \in f^{-1}(y_0)$, вытекает из линейной связности множества $f^{-1}(y_0)$. Предположим теперь, что мы уже умеем соединять дугой точки $q(e)$ и $q(b)$, где b — слово длины $\leqslant k$, и пусть a — буква, т. е. либо $q(a) \in f^{-1}(y_0)$, либо

$q(a^{-1}) \in f^{-1}(y_0)$. Рассмотрим второй случай. Пусть $\Gamma \subseteq f^{-1}(y_0)$ — дуга, соединяющая точки $q(e)$ и $q(a)$. Тогда дуга $\Psi_{a^{-1}}(\Gamma)$ соединяет точки $q(a^{-1})$ и $q(e)$. Поэтому дуга $M \equiv \Psi_b(\Psi_{a^{-1}}(\Gamma))$ соединяет точки $q(ba^{-1})$ и $q(b)$. По предположению индукции существует дуга $\Phi \subseteq q(K)$, соединяющая точки $q(b)$ и $q(e)$. Тогда в множестве $\Phi \cup M$ содержится дуга, соединяющая точки $q(ba^{-1})$ и $q(e)$. Остаётся показать только, что $M \subseteq q(K)$. Но всякая точка $x \in M$ имеет вид $q(ba^{-1}c)$, где $c \in q^{-1}(\Gamma) \subseteq q^{-1}(f^{-1}(y_0))$. Утверждение доказано. □

Возвращаемся к доказательству леммы 4.9. Если её утверждение не верно, то всякое множество $q(gK) = \Psi_g(q(K))$ содержится в каком-нибудь слое отображения f. Поэтому естественная проекция $p\colon G/H \to G/K$ факторизует отображение f. Следовательно, существует единственное отображение $r\colon G/K \to Y$, удовлетворяющее условию

$$f = r \circ p. \tag{10}$$

Далее, группа K замкнута в G. В самом деле, по определению группы K имеем $K \supset q^{-1}(f^{-1}(y_0))$. С другой стороны, по нашему предположению $q(K) \subseteq f^{-1}(y_0)$. Значит, $K = q^{-1}(f^{-1}(y_0))$. Следовательно, пространство $Z = G/K$ регулярно как фактор-пространство по замкнутой подгруппе.

Таким образом, совершенное отображение f является композицией непрерывных отображений $p\colon X \to Z$ и $r\colon Z \to Y$. Поэтому согласно предложению II.2.9 оба отображения p и r совершенны. Но тогда в силу предложения II.4.4 из неприводимости отображения f вытекает неприводимость отображения p. С другой стороны, отображение p открыто как левый делитель открытого отображения $G \to G/K$. Следовательно, p является гомеоморфизмом, будучи открытым неприводимым отображением. Но это противоречит тому, что $p(f^{-1}(y_0))$ состоит из одной точки, поскольку $K = q^{-1}(f^{-1})(y_0))$. Лемма 4.9, а вместе с ней и предложение 4.8 доказаны. □

4.11. Замечание. Условие $\dim M \geqslant 2$ в предложении 4.8 существенно, поскольку «две стрелки» П. С. Александрова алгебраически однородны.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 03-01-00706, и фонда Wenner—Gren Foundation.

Литература

[1] Александров П. С. Общая теория гомологий // Учёные записки Моск. ун-та. — 1940. — Т. 45. — С. 3—60.

[2] Александров П. С. Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию. — М.: Наука, 1975.

[3] Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. — М.: Наука, 1973.

[4] Александров П. С., Урысон П. С. Мемуар о компактных топологических пространствах. — М.: Наука, 1971.

[5] Архангельский А. В. Об α-растянутых пространствах // ДАН СССР. — 1978. — Т. 239, № 3. — С. 505—508.

[6] Болтянский В. Г. Пример двумерного компакта, топологический квадрат которого трёхмерен // ДАН СССР. — 1949. — Т. 67. — С. 597—599.

[7] Дранишников А. Н. Гомологическая теория размерности // Успехи мат. наук. — 1988. — Т. 43, № 4. — С. 11—55.

[8] Дранишников А. Н. О проблеме П. С. Александрова // Мат. сб. — 1988. — Т. 135. — С. 551—557.

[9] Дранишников А. Н. Продолжение отображений в CW-комплексы // Мат. сб. — 1991. — Т. 182, № 9. — С. 47—56.

[10] Дранишников А. Н. Теорема Эйленберга—Борсука для отображений в произвольные комплексы // Мат. сб. — 1994. — Т. 185. — С. 81—90.

[11] Дулев В. А. О бесконечномерных n-многообразиях // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1996. — № 4. — С. 12—17.

[12] Золотарёв В. П. О π-множествах // ДАН СССР. — 1976. — Т. 230, № 2. — С. 264—267.

[13] Иванов А. В. О размерности не совершенно нормальных пространств // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1976. — № 4. — С. 21—27.

[14] Иванов А. В. О бикомпактах, все конечные степени которых наследственно сепарабельны // ДАН СССР. — 1978. — Т. 243, № 5. — С. 1109—1112.

[15] Иванов А. В. О вложении счётных произведений сепарабельных метрических пространств в слабо бесконечномерные компакты // Успехи мат. наук. — 1978. — Т. 33, № 6. — С. 211—212.

[16] Иванов А. В. О наследственной сепарабельности и размерности произведений бикомпактов // ДАН СССР. — 1978. — Т. 239, № 5. — С. 1037—1040.

[17] Иванов А. В. О продолжении метрической размерности // Сиб. мат. журн. — 1982. — Т. 23, № 4. — С. 43—52.

[18] Иванов А. В. О бикомпактах Федорчука // Отображения и функторы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. — С. 31—40.

[19] Иванов А. В. О наследственной нормальности F-бикомпактов // Мат. заметки. — 1986. — Т. 39, № 4. — С. 606—611.

[20] Кандил А. О размерности пространств θ-близости // Успехи мат. наук. — 1978. — Т. 33, № 6. — С. 215—216.

[21] Карасёв А. В. Бесконечномерное 4-многообразие конечной когомологической размерности при CH // Мат. заметки. — 1999. — Т. 66, № 5. — С. 664—670.

[22] Кузьминов В. И. Гомологическая теория размерности // Успехи мат. наук. — 1968. — Т. 23, № 5. — С. 3—49.

[23] Лифанов И. К. О двух проблемах Мардешича // ДАН СССР. — 1965. — Т. 162. — С. 997—1000.

[24] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Дифференциальная геометрия и топология. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.

[25] Одинцов А. А. О наследственной нормальности пределов обратных спектров из бикомпактов // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1985. — № 3. — С. 75—78.

[26] Одинцов А. А. Змеевидные бикомпакты и некоторые вопросы теории размерности // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1986. — № 1. — С. 59—62.

[27] Парфёнов П. Г. К теории размерности бикомпактов // ДАН СССР. — 1973. — Т. 209, № 2. — С. 302—304.

[28] Парфёнов П. Г. О некоторых классах совершенно нормальных бикомпактов // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1977. — № 6. — С. 14—17.

[29] Парфёнов П. Г. О совпадении размерностей совершенно нормальных бикомпактов // Сиб. мат. журн. — 1978. — Т. 19, № 3. — С. 654—662.

[30] Парфёнов П. Г. О бикомпактах, нульмерно отображающихся на компакты // Непрерывные функции на топологических пространствах. — Рига, 1986. — С. 134—141.

[31] Пасынков Б. А. О совпадении различных определений размерности для фактор-пространств локально бикомпактных групп // Успехи мат. наук. — 1962. — Т. 17, № 5. — С. 129—135.

[32] Пасынков Б. А. Частичные топологические произведения // Труды ММО. — 1965. — Т. 13. — С. 136—245.

[33] Постников М. М. О паракомпактности клеточных полиэдров // Успехи мат. наук. — 1965. — Т. 20, № 5. — С. 226—230.

[34] Постников М. М. Гладкие многообразия. — М.: Наука, 1987.

[35] Савинов Н. В. О вполне замкнутых отображениях // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1975. — № 4. — С. 39—45.

[36] Савинов Н. В. Пример совершенно нормального бикомпакта без промежуточных размерностей // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1976. — № 3. — С. 52—56.

[37] Савинов Н. В. Два примера к теории размерности бикомпактов // ДАН СССР. — 1977. — Т. 233, № 1. — С. 41—44.

[38] Смирнов Ю. М. Об универсальных пространствах для некоторых классов пространств // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1959. — Т. 23. — С. 185—196.

[39] Ульянов В. М. О бикомпактных расширениях с первой аксиомой счётности // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1973. — № 2. — С. 13—18.

[40] Ульянов В. М. Бикомпактные расширения с первой аксиомой счётности и непрерывные отображения // Мат. заметки. — 1974. — Т. 15, № 3. — С. 491—499.

[41] Ульянов В. М. Бикомпактные расширения с первой аксиомой счётности, не повышающие веса и размерности // ДАН СССР. — 1974. — Т. 217, № 6. — С. 1263—1265.

[42] Ульянов В. М. О бикомпактных расширениях счётного характера и абсолютах // Мат. сб. — 1975. — Т. 98, № 2. — С. 223—254.

[43] Ульянов В. М. О вполне замкнутых и близких к ним отображениях // Успехи мат. наук. — 1975. — Т. 30, № 3. — С. 177—178.

[44] Ульянов В. М. Примеры финально компактных пространств, не имеющих бикомпактных расширений счётного характера // ДАН СССР. — 1975. — Т. 220, № 6. — С. 1282—1285.

[45] Ульянов В. М. Решение основной задачи о бикомпактных расширениях волмэновского типа // ДАН СССР. — 1977. — Т. 233, № 6. — С. 1056—1059.

[46] Федорчук В. В. Об упорядоченных пространствах // ДАН СССР. — 1966. — Т. 169. — С. 777—780.

[47] Федорчук В. В. Упорядоченные множества и произведение топологических пространств // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1966. — № 4. — С. 66—71.

[48] Федорчук В. В. О бикомпактах с несовпадающими размерностями // ДАН СССР. — 1968. — Т. 182, № 2. — С. 275—277.

[49] Федорчук В. В. Об отображениях, не понижающих размерность // ДАН СССР. — 1968. — Т. 185, № 1. — С. 54—57.

[50] Федорчук В. В. Некоторые вопросы теории упорядоченных пространств // Сиб. мат. журн. — 1969. — Т. 10. — С. 124—132.

[51] Федорчук В. В. О сильно замкнутых отображениях // ДАН СССР. — 1969. — Т. 187, № 1. — С. 47—49.

[52] Федорчук В. В. Пример однородного бикомпакта с несовпадающими размерностями // ДАН СССР. — 1971. — Т. 198, № 6. — С. 1283—1286.

[53] Федорчук В. В. Бикомпакты без промежуточных размерностей // ДАН СССР. — 1973. — Т. 213, № 4. — С. 795—797.

[54] Федорчук В. В. Бикомпакты без канонически корректных множеств // ДАН СССР. — 1974. — Т. 218, № 1. — С. 50—53.

[55] Федорчук В. В. О размерностных компонентах бикомпактов // ДАН СССР. — 1974. — Т. 215, № 2. — С. 289—292.

[56] Федорчук В. В. Бикомпакт, все бесконечные замкнутые подмножества которого n-мерны // Мат. сб. — 1975. — Т. 96, № 1. — С. 41—62.

[57] Федорчук В. В. О мощности наследственно сепарабельных бикомпактов // ДАН СССР. — 1975. — Т. 222, № 2. — С. 302—305.

[58] Федорчук В. В. Совместимость некоторых теорем общей топологии с аксиомами теории множеств // ДАН СССР. — 1975. — Т. 220, № 4. — С. 786—788.

[59] Федорчук В. В. Вполне замкнутые отображения и совместимость некоторых теорем общей топологии с аксиомами теории множеств // Мат. сб. — 1976. — Т. 99, № 1. — С. 3—33.

[60] Федорчук В. В. О π-множествах // ДАН СССР. — 1977. — Т. 233, № 6. — С. 1060—1063.

[61] Федорчук В. В. Бесконечномерные бикомпакты // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1978. — Т. 42, № 5. — С. 1162—1178.

[62] Федорчук В. В. Об упорядоченных множествах // ДАН СССР. — 1978. — Т. 240, № 2. — С. 280—282.

[63] Федорчук В. В. Метод развёртываемых спектров и вполне замкнутых отображений в общей топологии // Успехи мат. наук. — 1980. — Т. 35, № 3. — С. 112—121.

[64] Федорчук В. В. Произведения и спектры топологических пространств. II. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.

[65] Федорчук В. В. Дифференцируемое многообразие с несовпадающими размерностями при CH // Мат. сб. — 1995. — Т. 186, № 1. — С. 149—160.

[66] Федорчук В. В. О трансфинитной и когомологической размерности 4-многообразий // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1996. — Т. 211. — С. 193—212.

[67] Федорчук В. В. Тождество Урысона и размерность многообразий // Успехи мат. наук. — 1998. — Т. 53, № 5. — С. 73—114.

[68] Федорчук В. В. О некоторых вопросах топологической теории размерности // Успехи мат. наук. — 2002. — Т. 57, № 2. — С. 139—178.

[69] Федорчук В. В. О брауэровской размерности бикомпактов // Мат. заметки. — 2003. — Т. 73, № 2. — С. 271—279.

[70] Федорчук В. В. Пример бикомпакта, лебегова, брауэрова и индуктивная размерности которого различны // Мат. сб. — 2004.

[71] Федорчук В. В., Левин М., Щепин Е. В. О брауэровском определении размерности // Успехи мат. наук. — 1999. — Т. 54, № 2. — С. 432—433.

[72] Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

[73] Федорчук В. В., Филиппов В. В. Многообразия с несовпадающими индуктивными размерностями // Мат. сб. — 1992. — Т. 183, № 9. — С. 29—44.

[74] Филиппов В. В. О совершенно нормальных бикомпактах // ДАН СССР. — 1969. — Т. 189, № 4. — С. 736—739.

[75] Филиппов В. В. О бикомпактах с несовпадающими размерностями ind и dim // ДАН СССР. — 1970. — Т. 192, № 3. — С. 516—519.

[76] Чатырко В. А. О змеевидных бикомпактах // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1984. — № 4. — С. 15—18.

[77] Чатырко В. А. О змеевидных и однородных бикомпактах с несовпадающими размерностями // Успехи мат. наук. — 1984. — Т. 39, № 3. — С. 247—248.

[78] Чатырко В. А. О наследственно неразложимых неметризуемых континуумах // Мат. заметки. — 1989. — Т. 46, № 3. — С. 122—125.

[79] Чатырко В. А. О бикомпактах с несовпадающими размерностями // Труды ММО. — 1990. — Т. 53. — С. 192—228.

[80] Чатырко В. А., Федорчук В. В. О брауэровой размерности одномерных бикомпактов // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2005. — № 2.

[81] Чигогидзе А. Ч., Федорчук В. В. Об экстензорной размерности неметризуемых многообразий // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1999. — № 3. — С. 44—48.

[82] Щепин Е. В. О топологических произведениях, группах и новом классе пространств, более общих, чем метрические // ДАН СССР. — 1976. — Т. 226, № 3. — С. 527—529.

[83] Alexandroff P. S. Dimensiontheorie. Ein Beitrag zur Geometrie der abgeschlossenen Mengen // Math. Ann. — 1932. — Vol. 106. — P. 161—238.

[84] Alexsandroff P. S. On dimension of normal spaces // Proc. R. Soc. London. A. — 1947. — Vol. 189. — P. 11—39.

[85] Anderson R. D. Monotone interior dimension-raising mappings // Duke Math. J. — 1952. — Vol. 19. — P. 359—366.

[86] Bashkirov A. I. On Fréchet compactifications of discrete spaces // Bull. Acad. Polon. Sci. — 1980. — Vol. 28, nos. 5—6. — P. 301—305.

[87] Booth D. D. Countably indexed ultrafilters. — Ph. D. Thesis, University of Wisconsin, Madison, Wisc., 1969.

[88] Brouwer L. E. Über den naturlichen Dimensionsbegriff // J. Reine Angew. Math. — 1913. — B. 142. — S. 145—152.

[89] Brown M. Some application of an approximation theorem for inverse limits // Proc. Amer. Math. Soc. — 1960. — Vol. 11. — P. 478—483.

[90] Brown M. The monotone union of open n-cells is an open n-cell // Proc. Amer. Math. Soc. — 1961. — Vol. 12. — P. 812—814.

[91] Cech E. On bicompact spaces // Ann. Math. — 1937. — Vol. 38. — P. 823—844.

[92] Cech E., Pospisil B. Sur les espaces compacts // Publ. Fac. Sci., Univ. Masaryk Brno. — 1938. — Vol. 258. — P. 3—7.

[93] Chatyrko V. A., Fedorchuk V. V. Dimensionsgrad for nonmetrizable compact spaces // LiTH-MAT-R-2003-15. — Linkoping University, Sweden. — P. 1—10.

[94] Chigogidze A. Cohomological dimension of Tychonoff spaces // Topol. Appl. — 1997. — Vol. 79. — P. 197—228.

[95] Chigogidze A. Infinite dimensional topology and shape theory // Handbook of Geometric Topology / eds. R. Daverman and R. Sher. — Amsterdam: North-Holland, 2001. — P. 307—371.

[96] Chigogidze A., Fedorchuk V. V. On some dimensional properties of 4-manifolds // Topol. Appl. — 2000. — Vol. 107. — P. 67—78.

[97] Dowker C. H. Local dimension of normal spaces // Quart. J. Math. — 1955. — Vol. 6, no. 22. — P. 101—120.

[98] Engelking R. On the double circumference of Alexandroff // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. — 1968. — Vol. 16. — P. 629—634.

[99] Engelking R. General Topology. — Warsaw: PWN, 1977.

[100] Engelking R. Theory of Dimension, Finite and Infinite. — Lemgo, Heldermann, 1995.

[101] Fedorchuk V. V. A perfectly normal compact space without intermediate dimensions // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. — 1975. — Vol. 23. — P. 975—979.

[102] Fedorchuk V. V. A compact space having the cardinality of the continuum with no convergent sequences // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1977. — Vol. 81, no. 2. — P. 177—181.

[103] Fedorchuk V. V. On the dimension of hereditarily normal spaces // Proc. London Math. Soc. — 1978— Vol. 34. — P. 163—175.

[104] Fedorchuk V. V. Fully closed maps, scannable spectra and cardinality of hereditarily separable spaces // Gen. Topol. Appl. — 1979. — Vol. 10, no. 3. — P. 247—274.

[105] Fedorchuk V. V. A differentiable manifold with noncoinciding dimensions // Topol. Appl. — 1993. — Vol. 54, nos. 1—3. — P. 221—239.

[106] Fedorchuk V. V., Mill J. van. Dimensionsgrad for locally connected Polish spaces // Fund. Math. — 2000. — Vol. 163. — P. 77—82.

[107] Fritch R., Piccinini R. A. Cellular Structures in Topology. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.

[108] Gliksberg I. Stone—Cech compactification of products // Trans. Amer. Math. Soc. — 1959. — Vol. 90. — P. 369—382.

[109] Henderson D. W. An infinite-dimensional compactum with no positive-dimensional compact subsets. A simpler construction // Amer. J. Math. — 1967. — Vol. 89. — P. 105—121.

[110] Henriksen M., Isbell J. R. Some properties of compactifications // Duke Math. J. — 1958. — Vol. 25. — P. 83—106.

[111] Juhasz I., Shelah S. How large can a HS or HL space be? // Isr. J. Math. — 1986. — Vol. 53. — P. 355—356.

[112] Kaufman R. Ordered sets and compact spaces // Colloq. Math. — 1967. — Vol. 17. — P. 264—266.

[113] Kozlowski G., Zenor P. A differentiable, perfectly normal, nonmetrizable manifold // Topol. Proc. — 1979. — Vol. 4. — P. 453—461.

[114] Kunen K. Set Theory — An Introduction to Independence Proofs. — Amsterdam: North-Holland, 1980.

[115] Mill J. van. On the character and π-weight of homogeneous compacta. — Israel J. Math. — 2003. — Vol. 133. — P. 321—338.

[116] Ostaszewski A. J. On countably compact, perfectly normal spaces // J. London Math. Soc. — 1976— Vol. 14. — P. 501—516.

[117] Pol R. A weakly infinite-dimensional compactum which is not countable-dimensional // Proc. Amer. Math. Soc. — 1981. — Vol. 82. — P. 634—636.

[118] Rudin M. E. The undecidability of the existence of a perfectly normal nonmetrizable manifold // Houston J. Math. — 1979. — Vol. 5. — P. 249—252.

[119] Rudin M. E., Zenor P. A perfectly normal nonmetrizable manifold // Houston J. Math. — 1976. — Vol. 2. — P. 129—144.

[120] Shakhmatov D. B. Compact spaces and their generalizations // Recent Progress in General Topology / eds. M. Husek and J. van Mill. — Amsterdam: North-Holland, 1992. — P. 571—640.

[121] Solovay R., Tennenbaum S. Iterated Cohen extensions and Suslin's problem // Ann. Math. — 1971. — Vol. 94. — P. 201—245.

[122] Stone M. H. Applications of the theory of Boolean rings in general topology // Trans. Amer. Math. Soc. — 1937. — Vol. 41. — P. 375—481.

[123] Szentmiklossy Z. S-spaces and L-spaces under Martin's axiom // Coll. Math. Soc. Janos Bolyai. — 1978. — Vol. 23. — P. 1139—1145.

[124] Tychonoff A. N. Über die topologische Erweiterund von Raumen // Math. Ann. — 1930. — B. 102. — S. 544—561.

[125] Watson S. Using prediction principles to construct ordered continua. Pacific J. Math. — 1986. — Vol. 125. — P. 251—256.

[126] Watson S. The construction of topological spaces: Planks and resolutions // Recent Progress in General Topology / eds. M. Husek and J. van Mill. — Amsterdam: North-Holland, 1992. — P. 673—757.

[127] Weiss W. Countably compact space and Martin's axiom // Canad. J. Math. — 1978. — Vol. 30, no. 2. — P. 243—249.