Симметрийные редукции вещественного бездисперсного уравнения Веселова—Новикова*

Л. В. БОГДАНОВ
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
e-mail: leonid@landau.ac.ru

Б. Г. КОНОПЕЛЬЧЕНКО
Университет Лечче, Национальный институт ядерной физики (INFN)
e-mail: konopel@le.infn.it

А. МОРО
Университет Лечче, Национальный институт ядерной физики (INFN)
e-mail: antonio.moro@le.infn.it

УДК 517.957

Ключевые слова: бездисперсные системы, симметрийные редукции, уравнение Веселова—Новикова.

Аннотация

В статье обсуждаются симметрийные редукции бездисперсных интегрируемых уравнений. Показано, что при наложении симметрийных связей бездисперсное уравнение Веселова—Новикова редуцируется в $1+1$-мерные системы гидродинамического типа.

Abstract

L. V. Bogdanov, B. G. Konopelchenko, A. Moro, Symmetry constraints for real dispersionless Veselov—Novikov equation, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 1, pp. 5—15.

Symmetry constraints for dispersionless integrable equations are discussed. It is shown that under symmetry constraints, the dispersionless Veselov—Novikov equation is reduced to the $(1+1)$-dimensional hydrodynamic-type systems.

§ 1. Введение

Бездисперсные интегрируемые уравнения привлекают в последнее время значительный внимание (см., например, [2—4, 19, 21]). Такие уравнения возникают в различных областях физики, математической физики и прикладной математики. Для исследования бездисперсных систем были предложены различные

*Исследования Л. В. Богданова частично поддержаны грантом РФФИ 04-01-00508 и грантом Президента Российской Федерации 1716-2003 (научные школы). Исследования Б. Г. Конопельченко и А. Моро частично поддержаны COFIN PRIN «SINTESI» 2002.

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 1, с. 5—15.

методы, начиная от квазиклассического представления типа Лакса, тесно связанного с универсальной иерархией Уизема [4, 19] до квазиклассического варианта метода обратной задачи рассеяния. В частности, предложенный недавно квазиклассический метод $\bar{\partial}$-одевания [13—15] представляет собой общий и эффективный метод построения бездисперсных интегрируемых уравнений и нахождения их решений. С другой стороны, хорошо известный метод редукции (см., например, [10—12]) также позволяет эффективно строить решения $2+1$-мерных бездисперсных уравнений. В [7] было продемонстрировано, что рассмотрение симметрийных связей для бездисперсных уравнений даёт эффективный способ построения редукций. В [7] таким способом был построен определённый класс редукций бездисперсного уравнения Кадомцева—Петвиашвили (бКП) и бездисперсной двумерной цепочки Тоды (б2ЦТ) к системам гидродинамического типа.

В настоящей статье изучаются симметрийные редукции бездисперсного уравнения Веселова—Новикова и выводятся соответствующие системы гидродинамического типа.

В § 2 мы напоминаем определения симметрийных редукций. В § 3 и 4 рассматриваются симметрийные редукции для уравнения КП и бКП-уравнения. Симметрийные редукции для бездисперсного уравнения Веселова—Новикова (бВН) изучаются в § 5. В § 6 показано, каким образом симметрийные связи для уравнения бВН позволяют редуцировать это $2+1$-мерное уравнение к $1+1$-мерным системам гидродинамического типа.

§ 2. Симметрийные редукции

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$F(u, u_{t_i}, u_{t_i t_j}, \ldots) = 0 \tag{1}$$

относительно скалярной функции $u = u(t) = u(t_1, t_2, \ldots)$; здесь $u_{t_i} = \partial u/\partial t_i$. По определению симметрией уравнения (1) называется преобразование $u(t) \to u'(t')$, образ которого вновь является решением (см., например, [5]). Инфинитезимальные непрерывные преобразования симметрии

$$t'_i = t_i + \delta t_i, \quad u' = u + \delta u = u + \epsilon u_\epsilon$$

удовлетворяют линеаризации [5]

$$L\delta u = 0 \tag{2}$$

уравнения (1), где L — производная Гато функции F:

$$L\delta u := \frac{dF}{d\epsilon}\left(u + \epsilon u_\epsilon, \frac{\partial}{\partial t_i}(u + \epsilon u_\epsilon), \ldots\right)\bigg|_{\epsilon=0}. \tag{3}$$

Очевидно, что всякая линейная комбинация $\delta u = \sum\limits_k c_k \delta_k u$ инфинитезимальных симметрий $\delta_k u$ — тоже симметрия.

Введём важное определение. Будем говорить, что к уравнению (1) применена *симметрийная редукция*, если выполнено дополнительное условие

$$\sum_k c_k \delta_k u = 0, \tag{4}$$

то есть некоторая линейная комбинация инфинитезимальных симметрий равна 0. Поскольку тождественно равная 0 функция является симметрией исходного уравнения (1), то переопределённая система (1), (4) совместна. Симметрийные редукции позволяют выделять классы решений, обладающих свойствами инвариантности. Например, симметрийная редукция $\delta u = \epsilon u_{t_k} = 0$ задаёт решения, стационарные по «времени» t_k.

§ 3. Солитонные уравнения

Впервые симметрийные редукции $2+1$-мерных солитонных уравнений обсуждались в [8,18]. В данной статье рассматривается уравнение КП (см., например, [6])

$$u_t = \frac{3}{2} u u_x + u_{xxx} + \frac{3}{4}\omega_y, \quad \omega_x = u_y, \tag{5}$$

где $x{:=}t_1$, $y{:=}t_2$ и $t{:=}t_3$. Уравнение КП (5) эквивалентно условию совместности линейных задач [6]

$$\psi_y = \psi_{xx} + u\psi, \quad \psi_t = \psi_{xxx} + \frac{3}{2} u\psi_x + \left(\frac{3}{2}u_x + \frac{3}{4}\omega\right)\psi. \tag{6}$$

Определяющее уравнение (2), которому удовлетворяют инфинитезимальные симметрии, принимает для уравнения КП вид

$$(\delta u)_t = \frac{3}{2}(u_x \delta u + u(\delta u)_x) + (\delta u)_{xxx} + \frac{3}{4}(\delta\omega)_y, \quad (\delta\omega)_x = (\delta u)_y. \tag{7}$$

Рассмотрим линейные задачи, сопряжённые к (6):

$$-\psi^*_y = \psi^*_{xx} + u\psi^*, \quad \psi^*_t = \psi^*_{xxx} + \frac{3}{2} u\psi^*_x + \left(\frac{3}{2}u_x - \frac{3}{4}\omega\right)\psi^*. \tag{8}$$

Непосредственным вычислением легко проверяется, что функция $\phi = (\psi\psi^*)_x$ удовлетворяет [20] линеаризованному уравнению КП (7) и, таким образом, является его инфинитезимальной симметрией. Рассмотрим следующий класс симметрийных редукций:

$$u_{t_n} = (\psi\psi^*)_x, \quad n = 1, 2, 3.$$

Наиболее простая из них имеет вид

$$u_x = (\psi\psi^*)_x, \tag{9}$$

и её можно проинтегрировать, получая в результате

$$u = \psi\psi^*. \tag{10}$$

Подставим (10) в первое уравнение пары Лакса (6) и сопряжённой к ней системы (8); имеем

$$\psi_y + \psi_{xx} + \psi^2\psi^* = 0, \quad -\psi^*_y + \psi^*_{xx} + (\psi^*)^2\psi = 0. \tag{11}$$

Таким образом, мы получили AKNS-систему [6], которая редуцируется к нелинейному уравнению Шрёдингера в случае $\psi^* = \bar{\psi}$ (черта означает комплексное сопряжение).

Далее, подставим (10) во вторые уравнения, входящие в пару Лакса и сопряжённую систему, и заметим, что $\omega = \psi^*_x\psi - \psi_x\psi^*$. Тогда мы получаем высшую AKNS-систему

$$\psi_t = 3\psi\psi^*\psi_x + \psi_{xxx}, \quad \psi^*_t = 3\psi\psi^*\psi^*_x + \psi^*_{xxx}. \tag{12}$$

Непосредственно проверяется, что функция $u = \psi\psi^*$ является решением уравнения КП, если функции ψ и ψ^* удовлетворяют уравнениям (11)—(12). Итак, мы установили, что симметрийные редукции позволяют находить решения 2+1-мерных систем сведением последних к интегрируемым $1+1$-мерным системам.

§ 4. Нелинейные бездисперсные уравнения

Бездисперсные пределы солитонных уравнений можно строить следующим способом. Введём «медленные» переменные, то есть сделаем подстановку $t_n \to t_n/\epsilon$, и будем искать решения с заданной асимптотикой при $\epsilon \to 0$, например такой;

$$u\left(\frac{t_n}{\epsilon}\right) \to u(t_n) + O(\epsilon), \quad \epsilon \to 0.$$

Бездисперсный предел уравнения КП имеет тогда вид

$$u_t = \frac{3}{2}uu_x + \frac{3}{4}\omega_y, \quad \omega_x = u_y. \tag{13}$$

Бездисперсные пределы интегрируемых уравнений соответствуют квазиклассическим пределам связанных с ними линейных задач. Именно, запишем решение ψ уравнений Лакса (6) в форме $\psi = \psi_0 \exp(S/\epsilon)$, где $S(\lambda; x/\epsilon, y/\epsilon, t/\epsilon) \to$ $\to S(\lambda; x, y, t) + O(\epsilon)$, а λ — *спектральный параметр*, и рассмотрим предел $\epsilon \to 0$. Тогда из уравнений (6) следует пара уравнений Гамильтона—Якоби

$$S_y = S_x^2 + u, \quad S_t = S_x^3 + \frac{3}{2}uS_x + \frac{3}{2}u_x + \frac{3}{4}\omega, \tag{14}$$

где $\omega_x = u_y$. Условием совместности системы (14) является само бКП-уравнение (13). Аналогично рассмотренному выше дисперсионному случаю линеаризация бКП-уравнения есть

$$(\delta u)_t = \frac{3}{2}(u_x\delta u + u(\delta u)_x) + \frac{3}{4}(\delta\omega)_y, \quad (\delta\omega)_x = (\delta u)_y, \tag{15}$$

и решения этой системы являются инфинитезимальными симметриями бКП-уравнения.

Теорема 1. *Пусть S_i и $\tilde{S}_i$ — некоторые решения уравнений Гамильтона—Якоби* (14). *Тогда выражение*

$$\delta u = \sum_{i=1}^{N} c_i (S_i - \tilde{S}_i)_{xx},$$

где c_i — произвольные константы, есть симметрия бКП-уравнения.

Доказательство. Непосредственной проверкой можно установить, что разность $(S_i - \tilde{S}_i)_{xx}$ удовлетворяет уравнению (15). □

Данный класс симметрий был впервые рассмотрен в [7] в рамках квазиклассического $\bar{\partial}$-метода одевания. Наглядным примером симметрийной редукции бКП-уравнения, см. также (9), является соотношение $u_x = S_{xx}$. Согласно [7], при ограничении указанного типа система Гамильтона—Якоби (14) сводится к системе гидродинамического типа (бездисперсному нелинейному уравнению Шрёдингера, см. [3])

$$\tilde{u}_y = (\tilde{u}^2 + u)_x, \quad u_y = 2(\tilde{u}u)_x,$$

где $\tilde{u} = \partial S_x / \partial \lambda$.

§ 5. Вещественное бездисперсное уравнение Веселова—Новикова

Уравнение Веселова—Новикова (ВН)

$$u_t = (uV)_z + (u\bar{V})_{\bar{z}} + u_{zzz} + u_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}, \quad V_{\bar{z}} = -3u_z, \tag{16}$$

где $z = x + iy$, было получено в 1984 году [1] как двумерное интегрируемое расширение уравнения Кортевега—де Фриза. ВН-уравнение эквивалентно условию совместности системы уравнений

$$\psi_{z\bar{z}} = u\psi, \quad \psi_t = \psi_{zzz} + \psi_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} + (V\psi_z) + (\bar{V}\psi_{\bar{z}}).$$

Известны приложения уравнения Веселова—Новикова в дифференциальной геометрии [9, 17]. Сравнительно недавно было установлено, что это уравнение описывает распространение света в некотором классе нелинейных сред в пределе геометрической оптики [16].

Бездисперсное уравнение Веселова—Новикова (бВН) получается из ВН-уравнения (16) разложением по медленным переменным. Именно, положив $\psi = \psi_0(\lambda, \epsilon^{-1}z, \epsilon^{-1}\bar{z}, \epsilon^{-1}t) \exp \epsilon^{-1} S(\lambda, z, \bar{z}, t)$ аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе, мы получаем следующую пару уравнений Гамильтона—Якоби [4, 14]:

$$S_z S_{\bar{z}} = u, \quad S_t = S_z^3 + S_{\bar{z}}^3 + VS_z + \bar{V}S_{\bar{z}}, \tag{17}$$

а также уравнения

$$u_t = (uV)_z + (u\bar{V})_{\bar{z}}, \quad V_{\bar{z}} = -3u_z. \tag{18}$$

В данной работе предполагается, что u — вещественная функция. Линеаризация системы (18) имеет вид

$$(\delta u)_t = (V\delta u + u\delta V)_z + (\bar{V}\delta u + \delta\bar{V}u)_{\bar{z}}, \quad V_{\bar{z}} = -3u_z, \quad (\delta V)_{\bar{z}} = -3(\delta u)_z. \quad (19)$$

Теорема 2. *Пусть S_i и $\tilde{S}_i$ — некоторые решения уравнений Гамильтона—Якоби* (17). *Тогда выражение*

$$\delta u = \sum_{i=1}^{N} c_i (S_i - \tilde{S}_i)_{z\bar{z}}, \quad (20)$$

где c_i — произвольные постоянные, есть симметрия бездисперсного уравнения Веселова—Новикова.

Доказательство. Непосредственным вычислением несложно установить, что разность $(S_i - \tilde{S}_i)_{z\bar{z}}$ удовлетворяет уравнению (19). □

Положим $S_i = S(\lambda = \lambda_i)$ и $\tilde{S}_i = S(\lambda = \lambda_i + \mu_i)$ и рассмотрим случай $\mu_i \to 0$ и $c_i = \tilde{c}_i/\mu_i$. Тогда мы получаем класс симметрий, заданный формулами

$$\delta u = \sum_{i=1}^{N} \tilde{c}_i \phi_{iz\bar{z}}, \quad \phi_i = \frac{\partial S}{\partial \lambda}(\lambda = \lambda_i). \quad (21)$$

Ниже мы рассмотрим три частных случая вещественных редукций, задающих вещественные решения бездисперсного уравнения Веселова—Новикова.

Если S — решение уравнений Гамильтона—Якоби (17), то $-\bar{S}$ также является решением. Следовательно, рассматривая вещественные S (т. е. $S = \bar{S}$) в выражении (20), взятом при $N = 1$, мы получаем такую — достаточно простую — редукцию:

$$\text{случай I:} \quad u_x = (S)_{z\bar{z}}. \quad (22)$$

Комплексным S соответствует следующая редукция:

$$\text{случай II:} \quad u_x = \frac{1}{2}(S + \bar{S})_{z\bar{z}}. \quad (23)$$

Ещё один пример редукции — это частный случай (21), а именно

$$\text{случай III:} \quad u_x = \phi_{z\bar{z}}. \quad (24)$$

§ 6. Редукции гидродинамического типа бездисперсного уравнения Веселова—Новикова

6.1. Случай I

Введём обозначения $\rho_1 := S_x$ и $\rho_2 := S_y$; в них симметрийная редукция (22) принимает вид

$$u_x = \frac{1}{4}(S_{xx} + S_{yy}) = \frac{1}{4}(\rho_{1x} + \rho_{2y}). \tag{25}$$

Для дальнейшего анализа редукции (25) оказывается удобным перейти к декартовым координатам (x, y) в уравнении (17), которое теперь записывается в форме

$$S_x^2 + S_y^2 = 4u, \tag{26}$$

$$S_t = \frac{1}{4}S_x^3 - \frac{3}{4}S_x S_y^2 + V_1 S_x + V_2 S_y, \tag{27}$$

где $V = V_1 + iV_2$, в то время как бездисперсное уравнение Веселова—Новикова приобретает вид

$$u_t = (uV_1)_x + (uV_2)_y, \quad V_{1x} - V_{2y} = -3u_x, \quad V_{2x} + V_{1y} = 3u_y.$$

Подставляя (26) в соотношение (25), мы получаем систему гидродинамического типа

$$\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2\rho_1 - 1 & 2\rho_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix}_x. \tag{28}$$

Введём обозначение $V_{\bar z} := -3u_z$. Продифференцируем это соотношение по x и, используя редукцию (22) и уравнение (28), получим уравнения

$$V_{1x} = -\frac{3}{2}\rho_{1x} + \frac{3}{4}(\rho_1^2 + \rho_2^2)_x, \quad V_{2x} = \frac{3}{2}\rho_{2x}.$$

Интегрируя их, мы получаем явные формулы, выражающие V_1 и V_2 в терминах ρ_1 и ρ_2:

$$V_1 = -\frac{3}{2}\rho_1 + \frac{3}{4}(\rho_1^2 + \rho_2^2), \quad V_2 = \frac{3}{2}\rho_2. \tag{29}$$

Получим теперь уравнения, описывающие эволюцию ρ_1 и ρ_2 относительно времени t. Для этого продифференцируем уравнение (27) и воспользуемся (28) и (29). В результате имеем

$$\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix}_x,$$

где

$$A_{11} = 3\rho_1(\rho_1 - 1), \quad A_{12} = 3\rho_2, \quad A_{21} = 3\rho_2(2\rho_1 - 1), \quad A_{22} = 3\rho_1(\rho_1 - 1) + 6\rho_2^2.$$

6.2. Случай II

Запишем комплекснозначную функцию S в виде суммы вещественной и мнимой части: $S = \rho + i\varphi$. Соответствующая данному случаю редукция (23) принимает вид

$$u_x = \frac{1}{4}(\rho_{xx} + \rho_{yy}). \tag{30}$$

Уравнение (26) эквивалентно системе

$$(\nabla\rho)^2 - (\nabla\varphi)^2 = 4u, \quad \nabla\rho \cdot \nabla\varphi = 0, \tag{31}$$

где $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ и введены обозначения $\nabla\rho = (\rho_1, \rho_2)$ и $\nabla\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$. Заметим, что в уравнении (31) одну из компонент (например, компоненту φ_2) можно выразить через остальные (соответственно через ρ_1, ρ_2 и φ_1). Используя редукцию (30) так же, как и в предыдущем случае, мы устанавливаем, что ρ_1, ρ_2 и φ_1 удовлетворяют системе гидродинамического типа

$$\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\\ \varphi_1\end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\\ \varphi_1\end{pmatrix}_x, \tag{32}$$

где

$$a_1 = 2\rho_1\left(1 - \frac{\varphi_1^2}{\rho_2^2}\right) - 1, \quad a_2 = 2\left(\rho_2 + \frac{\rho_1^2\varphi_1^2}{\rho_2^3}\right),$$

$$a_3 = -2\varphi_1\left(1 + \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}\right), \quad b_1 = -\frac{\varphi_1}{\rho_2}, \quad b_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2^2}\varphi_1, \quad b_3 = -\frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

Аналогично предыдущему разделу введём функцию V, продифференцируем её по x и выразим её вещественную и мнимую части через ρ_1 и ρ_2:

$$V_1 = -\frac{3}{2}\rho_1 + \frac{3}{4}(\rho_1^2 + \rho_2^2 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2), \quad V_2 = \frac{3}{2}\rho_2, \tag{33}$$

или

$$V_1 = -\frac{3}{2}\rho_1 + \frac{3}{4}\left(\rho_1^2 + \rho_2^2 - \varphi_1^2 - \frac{\rho_1^2\varphi_1^2}{\rho_2^2}\right), \quad V_2 = \frac{3}{2}\rho_2.$$

Выписывая отдельно вещественную и мнимую части уравнения (27), мы получаем систему

$$\rho_t = \frac{1}{4}(\rho_x^3 - 3\rho_x\varphi_x^2) - \frac{3}{4}(\rho_x\rho_y^2 - \rho_x\varphi_y^2 - 2\rho_y\varphi_x\varphi_y) + V_1\rho_x + V_2\rho_y, \tag{34}$$

$$\varphi_t = \frac{1}{4}(-\varphi_x^3 + 3\rho_x^2\varphi_x) - \frac{3}{4}(2\rho_x\rho_y\varphi_y + \varphi_x\rho_y^2 - \varphi_x\varphi_y^2) + V_1\varphi_x + V_2\varphi_y. \tag{35}$$

Подставляя выражения (33) в уравнения (34) и (35) и затем дифференцируя их по x и y, мы получаем систему гидродинамического типа, которой удовлетворяют функции ρ_1, ρ_2 и φ_1:

$$\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\\ \varphi_1\end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix}B_{11} & C_{12} & B_{13}\\ B_{21} & B_{22} & B_{23}\\ B_{31} & B_{32} & B_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\\ \varphi_1\end{pmatrix}_x, \tag{36}$$

где

$$B_{11} = 3(\rho_1^2 - \varphi_1^2) - \frac{3}{2}\rho_1, \quad B_{12} = 0, \quad B_{13} = -3\rho_1\varphi_1,$$

$$B_{21} = \rho_2(6\rho_1 - 3) - \frac{9\rho_1}{\rho_2}\varphi_1^2, \quad B_{22} = 3(\rho_1(\rho_1 - 1) + 2\rho_2^2 - \varphi_1^2), \quad B_{23} = -6\rho_2\varphi_1,$$

$$B_{31} = \frac{3}{2}\varphi_1(4\rho_1 - 1), \quad B_{32} = \frac{3}{2}\frac{\rho_1^2}{\rho_2}\varphi_1(\rho_2 + 1), \quad B_{33} = 3(\rho_1^2 - \varphi_1^2) - \frac{3}{2}\rho_1.$$

6.3. Случай III

Из симметрийной редукции (24) следует, что ϕ — вещественная функция. Введём обозначение $\nabla\phi = (\sigma_1, \sigma_2)$, тогда редукция (24) принимает вид

$$u_x = \frac{1}{4}(\sigma_{1x} + \sigma_{2y}). \tag{37}$$

Кроме того, предположим для простоты, что функция S также вещественная, и обозначим $\nabla S = (\rho_1, \rho_2)$. Дифференцируя уравнение (26) по λ, мы получаем алгебраическое соотношение

$$\rho_1\sigma_1 + \rho_2\sigma_2 = 0,$$

которое позволяет исключить, скажем, ρ_2. Основываясь на сделанных выше предположениях, мы приходим к такой системе гидродинамического типа в переменных x и y относительно функций σ_1, σ_2 и ρ_1:

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \rho_1\end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ c_1 & c_2 & c_3\\ d_1 & d_2 & d_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \rho_1\end{pmatrix}_x, \tag{38}$$

где

$$c_1 = 2\frac{\sigma_1\rho_1^2}{\sigma_2^2} - 1, \quad c_2 = -2\frac{\sigma_1^2\rho_1^2}{\sigma_2^3}, \quad c_3 = 2\rho_1\left(1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right),$$
$$d_1 = -\frac{\rho_1}{\sigma_2}, \quad d_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2^2}\rho_1, \quad d_3 = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

Продифференцируем уравнение (27) по λ, получим уравнение для переменной ϕ и выразим V_1 и V_2:

$$V_1 = -\frac{3}{2}\sigma_1 + \frac{3}{4}(\rho_1^2 + \rho_2^2), \quad V_2 = \frac{3}{2}\sigma_2. \tag{39}$$

Выражая ρ_2 в терминах σ_1, σ_2 и ρ_1, получим

$$V_1 = -\frac{3}{2}\sigma_1 + \frac{3}{4}\rho_1^2 + \frac{3}{4}\frac{\rho_1^2\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, \quad V_2 = \frac{3}{2}\sigma_2. \tag{40}$$

Используя формулу (40), имеем

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \rho_1\end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \rho_1\end{pmatrix}_x, \tag{41}$$

где

$$C_{11} = 3\left(\frac{3}{2}\rho_1^2 - \sigma_1\right), \quad C_{12} = 3\sigma_2, \quad C_{13} = 9\rho_1\sigma_1,$$
$$C_{21} = \frac{3\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\rho_1^4\left(\frac{1}{\sigma_2} - 1\right) + \frac{3}{2}\sigma_1\rho_1^2\left(1 - \frac{3}{\sigma_2}\right) - 3\sigma_2,$$
$$C_{22} = \frac{3}{2}\rho_1^2\left(3 + 2\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right) - 3\sigma_1, \quad C_{23} = 3\rho_1\sigma_2\left(2 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right),$$
$$C_{31} = -3\rho_1, \quad C_{32} = 0, \quad C_{33} = 3(\rho_1^2 - \sigma_1).$$

Мы предполагаем рассмотреть физический и геометрический смысл систем гидродинамического типа, полученных в данной работе, в отдельной публикации.

Литература

[1] Веселов А. П., Новиков С. П. Конечнозонные двумерные потенциальные операторы Шрёдингера. Явные формулы и эволюционные уравнения // ДАН СССР. — 1984. — Т. 279. — С. 20.

[2] Дубровин Б. А., Новиков С. П. Гидродинамика слабо деформированных солитонных решёток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория // Успехи мат. наук. — 1989. — Т. 44. — С. 29.

[3] Захаров В. Е. Уравнение Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функцион. анализ и его прил. — 1980. — Т. 14. — С. 89.

[4] Кричевер И. М. Метод усреднения для двумерных интегрируемых уравнений // Функцион. анализ и его прил. — 1988. — Т. 22. — С. 37.

[5] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.

[6] Ablowitz M. J., Segur H. Solitons and the Inverse Scattering Transform. — SIAM, 1981.

[7] Bogdanov L. V., Konopelchenko B. G. Symmetry constraints for dispersionless integrable equations and systems of hydrodynamic type. — Preprint `arXiv: nlin.SI/0312013`. — 2003.

[8] Cheng Y., Li Y. S. The constraint of the Kadomtsev—Petviashvili equation and its special solutions // Phys. Lett. A. — 1991. — Vol. 157. — P. 22.

[9] Ferapontov E. V. Stationary Veselov—Novikov equation and isothermally asymptotic surfaces in projective differential geometry // Differential Geom. Appl. — 1999. — Vol. 11, no. 2. — P. 117—128.

[10] Gibbons J., Tsarev S. P. Conformal maps and reductions of the Benney equations // Phys. Lett. A. — 1999. — Vol. 258, no. 4—6. — P. 263—271.

[11] Kodama Y. A method for solving the dispersionless KP equation and its exact solutions // Phys. Lett. A. — 1988. — Vol. 129. — P. 223; Solutions of the dispersionless Toda equation // Phys. Lett. A. — 1990. — Vol. 147. — P. 477.

[12] Kodama Y., Gibbons J. A method for solving the dispersionless KP hierarchy and its exact solutions // Phys. Lett. A. — 1989. — Vol. 135, no. 3. — P. 167.

[13] Konopelchenko B., Martinez Alonso L. $\bar{\partial}$-equations, integrable deformations of quasi-conformal mappings and Whitham hierarchy // Phys. Lett. A. — 2001. — Vol. 286. — P. 161.

[14] Konopelchenko B. G., Martinez Alonso L. Nonlinear dynamics on the plane and integrable hierarchies of infinitesimal deformations // Stud. Appl. Math. — 2002. — Vol. 109. — P. 313—336.

[15] Konopelchenko B. G., Martinez Alonso L., Ragnisco O. The $\bar{\partial}$-approach to the dispersionless KP hierarchy // J. Phys. A. — 2001. — Vol. 34. — P. 10209—10217.

[16] Konopelchenko B. G., Moro A. Geometrical optics in nonlinear media and integrable equations // J. Phys. A. — 2004. — Vol. 37. — P. L105—L111;
Konopelchenko B., Moro A. Integrable equations in nonlinear geometrical optics. — Stud. Appl. Math. (to appear). — Preprint `arXiv:nlin.SI/0403051`. — 2004.

[17] Konopelchenko B. G., Pinkall U. Integrable deformations of affine surfaces via Nizhnik—Veselov—Novikov equation // Phys. Lett. A. — 1998. — Vol. 245. — P. 239—245.

[18] Konopelchenko B., Sidorenko J., Strampp W. $1 + 1$ dimensional integrable systems as symmetry constraints of $2 + 1$ dimensional systems // Phys. Lett. A. — 1991. — Vol. 157. — P. 17.

[19] Krichever I. M. The τ-function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories // Comm. Pure Appl. Math. — 1994. — Vol. 47. — P. 437.

[20] Orlov A. Yu. Vertex operator, $\bar{\partial}$-problem, symmetries, variational identities and Hamiltonian formalism for $2 + 1$ integrable systems // Nonlinear and Turbulent Processes in Physics / ed. V. Baryakhtar. — Singapore: World Scientific, 1988.

[21] Singular Limits of Dispersive Waves / eds. N. M. Ercolani et al. — New York: Plenum Press, 1994. — Nato Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys. Vol. 320.