Нейтральные лагранжианы в теории нематиков

Р. ВИТОЛО
Университет Лечче
e-mail: Raffaele.Vitolo@unile.it

ДЖ. САККОМАНДИ
Университет Лечче
e-mail: Giuseppe.Saccomandi@unile.it

УДК 514.763.85+544.232+544.25+678

Ключевые слова: нематики, нейтральные лагранжианы.

Аннотация

В работе дано полное описание нейтральных лагранжианов, применяемых в описании нематиков — сплошных сред особого типа. Результаты вычислений могут быть использованы для построения соответствий между существующими физически эквивалентными теориями нематиков. Обсуждаются локальные и глобальные (топологические) аспекты рассматриваемой задачи.

Abstract

R. Vitolo, G. Saccomandi, Null Lagrangians for nematic elastomers, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 1, pp. 17—28.

In this paper we compute all possible null Lagrangians (null energies) for the mechanics of a distinguished class of continua, the nematic elastomers. The computation is done in order to help to relate different physically equivalent theories of nematic elastomers. We discuss both local and global (hence topological) aspects of the problem.

Введение

Эластичная среда, образуемая полимерным коллоидом, содержащим жидкие кристаллы внутри полимерных цепочек, называется *оптическим* или *нематическим эластиком* [23]. Описание механических свойств нематических эластомеров как непрерывной среды было получено в недавней работе [2] Андерсона, Карлсона и Фрида. Построенная ими теория основана на новом подходе, предложенном Эриксеном [5] и Лесли [11]. В определённом смысле теория нематических эластомеров — это раздел теории поля, объединяющий теорию нелинейной упругости и классическую теорию жидких кристаллов: свободная энергия ψ нематического эластомера есть функция градиента деформаций $\boldsymbol{F}$, ориентации $\boldsymbol{n}$ молекулы нематика и градиента ориентации $\boldsymbol{G} = \operatorname{Grad} \boldsymbol{n}$. Поясним, что именно понимается под градиентом деформаций. Каждой точке $\boldsymbol{X}$ исходной среды $\mathcal{R}_0$ ставится в соответствие точка $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})$ деформируемой

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 1, с. 17—28.

среды $\mathcal{R}_1$ ($\mathcal{R}_0$ и $\mathcal{R}_1$ — регулярные подобласти трёхмерного евклидова пространства). В предположении, что деформация является гладкой и обратимой, поле $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ определяется формулой

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \operatorname{Grad} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}). \tag{1}$$

В свою очередь, поле $\boldsymbol{n}$ описывает ориентацию и длину молекулы нематика в каждой точке $\boldsymbol{X}$ области $\mathcal{R}_0$. В [2] рассматривались лишь нематики, состоящие из нерастяжимых молекул. В данном предположении $\boldsymbol{n}$ — это единичный вектор, задающий ориентацию молекул.

Определение допустимых форм функционала плотности ψ свободной энергии представляет собой актуальную задачу в данном разделе механики сплошных сред. Существуют два направления в исследовании нематиков: *феноменологический* подход [7], основанный на аксиоматической теории сплошных сред, и *статистический* подход (развиваемый, в частности, отделением сплошных сред лаборатории Кавендиша, см. [17]), использующий концепции молекулярной физики. В настоящее время ясно, что неоценимую помощь в решении давно стоящей задачи построения эффективного функционала плотности энергии может оказать математика, способная дать ответ на вопрос, какие из лагранжианов в данной теории являются *нейтральными*. По определению нейтральными лагранжианами называются те плотности свободной энергии, которые не вносят вклад в уравнение состояния при заданной энергии. В классической теории жидких кристаллов хорошо известна история, связанная с константой Франка k_{24}, см. [20]. Именно, в 1958 году Франк получил формулу для кристаллических нематиков и холестериков, квадратичных по $\boldsymbol{G}$. Указанная формула содержала материальные константы, которые следовало определять экспериментально. Сравнивая прикидочные значения констант, входящих в эту формулу, и экспериментальные данные и пренебрегая поверхностными эффектами, удалось определить значения всех констант, кроме одной: для k_{24} это оказалось невозможным. Впоследствии Эриксен [6] указал на то, что соответствующее данной константе слагаемое является нейтральным лагранжианом. Итак, мы видим, что нейтральные лагранжианы играют фундаментальную роль в классификации разных теорий; пример их практического использования содержится в недавней работе [12].

Нейтральные лагранжианы, возникающие в теории жидких кристаллов, были получены непосредственным вычислением в [6]. В механике нелинейных упругих сред исчерпывающее описание нейтральных лагранжианов можно получить на основе формул Олвера и Сивалоганатана [14], в которых предполагается, что лагранжиан имеет вид $\mathcal{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{F})$. Указанные достижения позволяют перейти к возникающей в теории нематических эластомеров задаче описания нейтральных лагранжианов вида $\mathcal{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$. Понятно, что лагранжианы такого вида представляют, вообще говоря, лишь теоретический интерес, поскольку в практических приложениях их необходимо ограничивать соотношениями, свойственными данной конкретной среде, или налагать условия симметрии. В настоящей же работе мы задаёмся вопросом исчерпывающего математического описания полного набора нейтральных лагранжианов. Применяемый нами метод рассуждений основан на геометрическом понятии вариационных последовательностей, получившем развитие в работах Андерсона, Тюльчева, Виноградова и др. Этот подход является действенным не только в «высокой теории»: в нашем случае с его помощью становится возможным оперировать с несвязными компонентами среды — или с топологически нетривиальными компонентами. Хорошо известно, что важнейшей составляющей теории жидких кристаллов являются дефекты различной природы, а литература, посвящённая изучению дефектов в рамках классической теории, огромна (см. работу [20] и ссылки в ней). Понятно также, что для оперирования со столь сложными явлениями, как разного рода дефекты, необходимо задействовать рафинированные геометрические методы.

Структура настоящей работы такова. В первом разделе вводятся основные обозначения и определения для полей, координат и т. п. Вычисление нейтральных лагранжианов в глобальном случае проводится в разделе 2. В подразделе 2.1 изложены необходимые сведения о вариационных последовательностях, а в следующем подразделе приведены вычисления нейтральных лагранжианов, соответствующих двумерным и трёхмерным средам. В результате установлено, что в двумерном случае — даже в случае топологически тривиальных областей — в лагранжианах присутствует неустранимый топологический член, дополняющий слагаемые, предсказываемые [3, 8, 10, 14]. В заключительном разделе 3 содержится обсуждение полученных результатов.

1. Лагранжианы в теории жидких кристаллов

Пространством наблюдаемых для нашей задачи, то есть пространством независимых переменных, является область $\mathcal{R}_0 \subset \mathbb{R}^n$, причём $n = 2$ (иными словами, мы рассматриваем предельный случай тонкой плёнки из жидких кристаллов) или $n = 3$ (что соответствует общему случаю). Введём на области $\mathcal{R}_0$ локальные координаты (X^i).

Пространство полей — это $\mathbb{R}^3 \times S^2$, где компоненты $\mathbb{R}^3$ соответствуют пространству деформаций и S^2, то есть сфера радиуса 1 в $\mathbb{R}^3$, задаёт пространство допустимых ориентаций кристаллов. *Поле деформации* — это локальное отображение $\boldsymbol{x}\colon \mathcal{R}_0 \to \mathbb{R}^3$; в свою очередь, *полем ориентаций* называется локальное отображение $\boldsymbol{n}\colon \mathcal{R}_0 \to S^2$. На $\mathbb{R}^3 \times S^2$ мы зададим локальные координаты (x^j, n^α).

В этом случае *тотальное пространство* есть прямое произведение пространства наблюдаемых и пространства полей: $\mathcal{R}_0 \times S^2 \times \mathbb{R}^3$. Соответственно, координаты на нём определены набором $(X^i; x^j, n^\alpha)$.

Пространство скоростей тогда будет произведением

$$\mathcal{R}_0 \times T^*\mathcal{R}_0 \otimes (T\mathbb{R}^3 \times TS^2),$$

то есть произведением пространства наблюдаемых и пространства дифференциалов полей $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})\colon \mathcal{R}_0 \to \mathbb{R}^3 \times S^2$. Введём локальные координаты таким образом:

$$(X^i; x^j, n^\alpha; x^j_i, n^\alpha_i) \quad \text{на} \quad \mathcal{R}_0 \times T^*\mathcal{R}_0 \otimes (T\mathbb{R}^3 \times TS^2).$$

Отметим, что пространство скоростей — это не что иное, как пространство первых джетов тривиального расслоения

$$\pi\colon \mathcal{R}_0 \times \mathbb{R}^3 \times S^2 \to \mathcal{R}_0$$

(см. [16, 19]), и потому мы будем в дальнейшем обозначать пространство скоростей через $J^1\pi$, а скорости полей $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$ — через $j^1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$.

Определим *пространство ускорений* как $\mathcal{R}_0 \times (T^*\mathcal{R}_0 \odot T^*\mathcal{R}_0) \otimes (T\mathbb{R}^3 \times TS^2)$, произведение пространства наблюдаемых и пространства вторых дифференциалов полей $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})\colon \mathcal{R}_0 \to \mathbb{R}^3 \times S^2$. Аналогично предыдущему, пространство ускорений — это пространство вторых джетов расслоения π, обозначаемое в дальнейшем $J^2\pi$. Локальные координаты на этом пространстве таковы:

$$(X^i; x^j, n^\alpha; x^j_i, n^\alpha_i; x^j_{hk}, n^\alpha_{hk}) \quad \text{на} \quad J^2\pi.$$

Назовём *лагранжианом* первого порядка функцию вида

$$\mathcal{L}\colon J_1\pi \to \mathbb{R}.$$

Соответственно, *лагранжева плотность* есть $\mathcal{L}\upsilon$, где υ — стандартная форма объёма на $\mathbb{R}^n$, ограниченная на $\mathcal{R}_0$. Лагранжева плотность является n-формой на пространстве $J^1\pi$. Далее, пусть $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$ — некоторое поле, а $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$ — его производные, которые определены на ограниченном открытом подмножестве $U \subset \mathcal{R}_0$ с гладкой границей. Лагранжеву плотность можно проинтегрировать по данному полю, и в результате получается *действие*

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}; U) = \int\limits_U \mathcal{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{n}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}))\, \upsilon.$$

Стандартные рассуждения позволяют в этом случае определить глобальный *морфизм Эйлера—Лагранжа*

$$\mathbf{E}(\mathcal{L}\upsilon)\colon J^2\pi \to (T^*\mathbb{R}^3 \times T^*S^2) \otimes \wedge^3 T^*\mathcal{R}_0,$$

где $T^*\mathbb{R}^3 \times T^*S^2$ — кокасательное пространство пространства полей. Появление множителя $\wedge^3 T^*\mathcal{R}_0$ обусловлено тем, что образ морфизма Эйлера—Лагранжа — векторнозначная плотность. В координатах отображение $\mathbf{E}(\mathcal{L})$ задано привычными формулами

$$\mathbf{E}(\mathcal{L}\upsilon)_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n^\alpha} - \frac{d}{dX^i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n^\alpha_i}, \quad \mathbf{E}(\mathcal{L})_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} - \frac{d}{dX^i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j_i},$$

где

$$\frac{d}{dX^i} = \frac{\partial}{\partial X^i} + x^k_i \frac{\partial}{\partial x^k} + n^\alpha_i \frac{\partial}{\partial n^\alpha} + x^k_{hi}\frac{\partial}{\partial x^k_h} + n^\alpha_{hi}\frac{\partial}{\partial n^\alpha_h}.$$

Реализуемыми считаются только те поля, которые удовлетворяют *уравнению Эйлера—Лагранжа*

$$\mathbf{E}(\mathcal{L}\upsilon) \circ j_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}) = 0.$$

Отметим, что морфизм Эйлера—Лагранжа задаёт $(n+1)$-форму Эйлера—Лагранжа $\mathbf{E}(\mathcal{L}\upsilon) \wedge \upsilon$ на $J^2\pi$.

2. Вычисление нейтральных лагранжианов в общем случае

По определению *нейтральным* называется лагранжиан $\mathcal{L}$, который тождественно удовлетворяет уравнению $\mathbf{E}(\mathcal{L}) = 0$. Рассмотрим задачу координатного описания всех нейтральных лагранжианов первого порядка наиболее общего вида. Наш подход к решению данной задачи основан на использовании теории *вариационных последовательностей*. Идея такого подхода заключается в том, что оператор $\mathbf{E}$, ставящий в соответствие всякой лагранжевой плотности уравнение Эйлера—Лагранжа, задаёт часть некоторого *комплекса*. Иными словами, можно считать, что действие оператора $\mathbf{E}$ аналогично внешнему дифференцированию на пространстве дифференциальных форм. Например, выполняется условие $\mathbf{E}^2 = 0$; если $\mathbf{E}(\mathcal{L}) = 0$, то на всякой звездчатой подобласти в $J^1\pi$ локально определена $(n-1)$-форма P, такая что на рассматриваемой подобласти выполнено

$$\mathbf{E}(P) = \mathcal{L}. \tag{2}$$

Ниже мы опишем действие $\mathbf{E}$ на формах степени, отличной от n, более подробно. А пока вернёмся к исходной задаче и переформулируем её следующим образом: требуется найти наиболее общий вид формы P, удовлетворяющей уравнению (2). Следует, однако, отметить, что $\mathcal{L}$ может удовлетворять (2) лишь *локально*. Итак, решение нашей задачи заключается в описании векторного пространства $\mathbf{E}$-замкнутых лагранжианов, взятых по модулю $\mathbf{E}$-точных лагранжианов; иными словами, займёмся вычислением класса когомологий относительно дифференциала $\mathbf{E}$.

Прежде всего напомним основные сведения из теории вариационных последовательностей. В дальнейшем указанные теоретические конструкции будут применены к решению задачи классификации нейтральных лагранжианов первого порядка.

2.1. Вариационная последовательность

Наше изложение теории вариационных последовательностей следует работам Виноградова [19] и его научной школы [1]; отметим, впрочем, что излагаемые сведения во многом перекликаются с достижениями других авторов (например, работами Андерсона [3] или Крупки [9]). Сравнение указанных подходов и обоснование их эквивалентности дано в [21, 22]. Ниже мы переформулируем результаты работ [8, 10, 22] применительно к случаю моделей первого порядка. Отметим, что ограничение теории вариационных последовательностей на лагранжианы первого порядка представляется физически обоснованным; стандартная теория, оперирующая объектами бесконечного порядка, оказывается недостаточно содержательной. Во всяком случае, лагранжианы бесконечного порядка нефизичны [20].

Обозначим пространство *k-форм* на $J^1\pi$ через Λ^k_1. В нём существует выделенное подпространство $\mathcal{C}^1\Lambda^k_1 \subset \Lambda^k_1$ *контактных k-форм* $\alpha \in \Lambda^k_1$; они заданы условием $(j^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}))^*(\alpha) = 0$, которое должно выполняться для произвольных полей $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n})$. Здесь и далее мы используем стандартное обозначение: * — это индуцированное отображение форм, то есть вычисление форм на образах полей. В локальных координатах контактные 1-формы порождены следующими формами:

$$\omega^i = dn^i - n^i_j dX^j, \quad \theta^k = dx^k - x^k_j dX^j,$$
$$\omega^i_h = dn^i - n^i_{hj} dX^j, \quad \theta^k_h = dx^k_h - x^k_{hj} dX^j.$$

Мы также рассматриваем пространства, порождённые внешними произведениями двух и более контактных форм; их мы обозначаем через $\mathcal{C}^2\Lambda^k_1$, $\mathcal{C}^3\Lambda^k_1$ и т. д. Очевидно, существует последовательность вложений (в терминах гомологической алгебры — *фильтрация*)

$$\Lambda^k_1 = \mathcal{C}^0\Lambda^k_1 \supset \mathcal{C}^1\Lambda^k_1 \supset \mathcal{C}^2\Lambda^k_1 \supset \ldots . \tag{3}$$

Заданный на формах дифференциал d сохраняет подпространства $\mathcal{C}^l$, потому его можно опустить на фактор-пространства $\mathcal{C}^*\Lambda^*_1/\mathcal{C}^{*+1}\Lambda^*$; соответствующий фактор-оператор обозначим $\mathbf{E}$. Пара, состоящая из фильтрации (3) и дифференциала $\mathbf{E}$, задаёт *$\mathcal{C}$-спектральную последовательность первого порядка*. Эта конструкция была построена в [22] на основе стандартной $\mathcal{C}$-спектральной последовательности, которая определяется для пространства бесконечных джетов [1, 19]. Используя $\mathcal{C}$-спектральную последовательность, можно установить множество примечательных фактов. Упомянем, например, *вариационную последовательность первого порядка*

$$0 \to \mathbb{R} \to \bar{\Lambda}^0_1 \to \ldots \to \bar{\Lambda}^{n-1}_1 \to \bar{\Lambda}^n_1 \to E^1_1 \to E^2_1 \to \ldots . \tag{4}$$

Рассмотрим компоненты этой последовательности более подробно.

1. $\bar{\Lambda}^*_1 = \Lambda^*_1/\mathcal{C}^1\Lambda^*_1$. Это фактор-пространство можно описать следующим образом. Рассмотрим стандартный локальный базис dX^j, dx^i, dn^α, dx^i_j, dn^α_j дифференциальных 1-форм на $J^1\pi$. Построим его отображение в другой базис dX^j, ω^i, ω^i_h, θ^k, θ^k_h: образующие dX^j оставим те же, вместо dn^α выберем $\omega^\alpha + n^\alpha_j dX^j$, отобразим dn^α_h в $\omega^\alpha_h + n^\alpha_{hj} dX^j$ и т. д. В этом случае корректно определено взятие формы с фиксированным числом *горизонтальных* сомножителей dX^j. Эта операция *горизонтализации* определена глобально; обозначим её через h. Пусть $\beta \in \Lambda^k_1$. Несложно проверить, что представитель $h(\beta) = \alpha \in \bar{\Lambda}^k_1$ класса $[\beta] \in \Lambda^*_1/\mathcal{C}^1\Lambda^*_1$ имеет вид
$$\alpha = \alpha_{\lambda_1\ldots\lambda_k} dX^1 \wedge \ldots \wedge dX^k, \tag{5}$$
где $\alpha_{\lambda_1\ldots\lambda_k}$ — полином k-й степени, зависящий от вторых производных x^i_{hj}, n^α_{hj}.
2. Из приведённых выше рассуждений следует, что $\bar{\Lambda}^n_1$ содержит лагранжевы плотности первого порядка. Отметим, что переход к фактор-пространству

позволяет исключить из рассмотрения те формы β, на которых функционал действия $\int\limits_U (j^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}))^*(\beta)$ тождественно равен нулю. Заметим также, что образ $\mathbf{E}(\alpha)$ произвольной $(n-1)$-формы $\alpha \in \bar{\Lambda}_1^{n-1}$ является тривиальной лагранжевой плотностью, поскольку $\mathbf{E}^2 = 0$.

3. Отображение $\bar{\Lambda}_1^k \to \bar{\Lambda}_1^{k+1}$ — это фактор-дифференциал $\mathbf{E}$, определяемый соотношением $\mathbf{E}(h(\beta)) = h(d\beta)$.
4. Пространство E_1^1 — это фактор пространства $\mathcal{C}^1\Lambda_1^{n+1}/\mathcal{C}^2\Lambda_1^{n+1}$ по подпространству $\mathbf{E}(\mathcal{C}^1\Lambda_1^n/\mathcal{C}^2\Lambda_1^n)$; иными словами, это пространство классов $(n+1)$-х когомологий относительно дифференциала $\mathbf{E}$. Оно содержит формы лагранжева типа. Таким образом, двойная факторизация позволяет избавиться и от форм, равных нулю на всех полях, и от форм, ставящих в соответствие вариациям $(\delta\boldsymbol{x}, \delta\boldsymbol{n})$ полей полную дивергенцию.
5. Отображение $\bar{\Lambda}_1^n \to E_1^1$ — это оператор Эйлера—Лагранжа, отображающий лагранжевы плотности в $(n+1)$-формы Эйлера—Лагранжа; мы по-прежнему обозначаем его символом $\mathbf{E}$.
6. Согласно [19], когомологии данной последовательности равны когомологиям де Рама тотального пространства $\mathcal{R}_0 \times \mathbb{R}^3 \times S^2$. Отсюда следует, что вариационная последовательность локально точна.

2.2. Нейтральные лагранжианы первого порядка

В данном разделе приведено исчерпывающее локальное описание лагранжианов первого порядка, вариационная производная которых равна нулю. В дальнейшем указанная задача описания нейтральных лагранжианов будет рассмотрена не только локально, но и глобально.

Прежде всего заметим, что пространство $\bar{\Lambda}_1^n$ (см. п. 2 в предыдущем подразделе) содержит не только лагранжевы плотности первого порядка (см. определение в разделе 1). В самом деле, это пространство порождено формами вида $\bar{\mathcal{L}}\upsilon$, где

$$\bar{\mathcal{L}}\colon J^2\pi \to \mathbb{R} \tag{6}$$

есть полином n-й степени, зависящий от вторых производных n^α_{hj}, u^i_{hj}, точное описание которых дано в [22]. Отсюда следует, что локальной точности вариационной последовательности (см. п. 6) недостаточно для решения нашей задачи. Более строго: если $\alpha \in \bar{\Lambda}_1^n$ и выполнено равенство $\mathbf{E}(\alpha) = 0$, то (по крайней мере локально) существует форма $\beta \in \bar{\Lambda}_1^{n-1}$, такая что $\mathbf{E}(\beta) = \alpha$, и тогда, как было установлено выше (см. уравнение (5)), коэффициенты формы β зависят от вторых производных. В дальнейшем для локального описания нейтральных лагранжианов первого порядка окажется существенной следующая теорема.

Теорема 1 (локальное описание). *Пусть $\mathcal{L}\upsilon \subset \bar{\Lambda}_1^n$ — нейтральный лагранжиан первого порядка, то есть $\mathbf{E}(\mathcal{L}\upsilon) = 0$. Тогда на тотальном пространстве локально существует $(n-1)$-форма $P \in \Lambda_0^{n-1}$, такая что выполнено равенство*

$$\mathcal{L}\upsilon = \mathbf{E}(h(P)) = h(dP). \tag{7}$$

И наоборот, всякий лагранжиан, тотально представимый в виде $\mathcal{L}\upsilon = \mathbf{E}(h(P)) = h(dP)$, *нейтральный.*

Доказательство. Эта теорема была сначала доказана Андерсоном и Дюшамом [3] применительно к лагранжианам произвольных порядков; в дальнейшем ясное геометрическое доказательство было предложено Крупкой [9, 10]. Ещё одно доказательство содержится в [8]. Мы же приводим ещё один вариант доказательства, более короткий и простой, нежели перечисленные выше. Изложение следует работе [15].

Итак, имеем $\mathcal{L} \in \Lambda^0_r$. Тогда условие $\mathbf{E}_n(\mathcal{L}\upsilon) = 0$ в координатах есть

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{dX^j}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i_j} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n^\alpha} - \frac{d}{dX^j}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n^\alpha_j} = 0.$$

Левые части этих тождеств — линейные функции по вторым производным x^i_{hk}, n^α_{hk}. Поскольку справа имеем 0, то коэффициенты при этих переменных также должны обращаться в 0 по отдельности. Всякий такой коэффициент есть матрица из вторых производных лагранжиана $\mathcal{L}$ по переменным x^i_h, n^α_h. Следовательно, $\mathcal{L}$ линеен по первым производным. Далее, очевидно, что $\mathcal{L}\upsilon = h(\beta)$, где $\beta \in \Lambda^n_0$. Отсюда следует $\mathcal{L}\upsilon \in \bar{\Lambda}^n_0$. Теперь утверждение теоремы следует из локальной точности вариационной последовательности. □

Сформулированная выше теорема решает задачу нахождения потенциалов минимального порядка для нейтральных лагранжианов первого порядка. Кроме того, из неё следует описание нейтральных лагранжианов первого порядка наиболее общего вида. Ниже мы приводим явные выражения, соответствующие лагранжианам, свойства которых заданы этой теоремой.

Случай $n = 2$. Координатное выражение для P есть

$$P = p_i\, dX^i + p_k\, dx^k + p_\alpha\, dn^\alpha, \tag{8}$$

где p_i, p_k, p_α — функции, локально зависящие от (X^j, x^h, n^β). Имеем

$$h(P) = (p_i + p_k + x^k_i p_\alpha n^\alpha_i)\, dX^i, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} dP = {} & \frac{\partial p_i}{\partial X_j}\, dX^j \wedge dX^i + \frac{\partial p_\alpha}{\partial n^\beta}\, dn^\beta \wedge dn^\alpha + \frac{\partial p_k}{\partial x^h}\, dx^h \wedge dx^k + \\ & + \left(\frac{\partial p_i}{\partial n^\alpha} - \frac{\partial p_\alpha}{\partial X^i}\right) dn^\alpha \wedge dX^i + \left(\frac{\partial p_i}{\partial x^k} - \frac{\partial p_k}{\partial X^i}\right) dx^k \wedge dX^i + \\ & + \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial x^k} - \frac{\partial p_k}{\partial n^\alpha}\right) dx^k \wedge dn^\alpha. \end{aligned} \tag{10}$$

В результате локальное выражение для нейтрального лагранжиана, соответствующего случаю $n = 2$, имеет вид

$$\mathbf{E}(h(P)) = h(dP) = \left(\frac{\partial p_i}{\partial X_j} + \left(\frac{\partial p_i}{\partial n^\alpha} - \frac{\partial p_\alpha}{\partial X^i}\right) n_j^\alpha + \left(\frac{\partial p_i}{\partial x^k} - \frac{\partial p_k}{\partial X^i}\right) x_j^k + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial p_\alpha}{\partial n^\beta} n_j^\beta n_i^\alpha + \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial x^k} - \frac{\partial p_k}{\partial n^\alpha}\right) x_j^k n_i^\alpha + \frac{\partial p_k}{\partial x^h} x_j^h x_i^k \right) dX^j \wedge dX^i. \quad (11)$$

Случай $n = 3$. Координатное выражение для P таково:

$$P = p_{ji}\, dX^j \wedge dX^i + p_{\beta i}\, dn^\beta \wedge dX^i + p_{hi}\, dx^h \wedge dX^i +$$
$$+ p_{\beta\alpha}\, dn^\beta \wedge dn^\alpha + p_{h\alpha}\, dx^h \wedge dn^\alpha + p_{hk}\, dx^h \wedge dx^k, \quad (12)$$

коэффициенты p локально зависят от (X^j, n^β, x^h). В этом случае имеем

$$h(P) = (p_{ji} + p_{\beta i} n_j^\beta + p_{ki} x_j^k + p_{\beta\alpha} n_j^\beta n_i^\alpha + p_{h\alpha} x_j^h n_i^\alpha + p_{hk} x_j^h x_i^k)\, dX^j \wedge dX^i, \quad (13)$$

$$dP = \frac{\partial p_{ji}}{\partial X^l} dX^l \wedge dX^j \wedge dX^i + \frac{\partial p_{\beta\alpha}}{\partial n^\gamma} dn^\gamma \wedge dn^\beta \wedge dn^\alpha +$$
$$+ \frac{\partial p_{hk}}{\partial x^t} dx^t \wedge dx^h \wedge dx^k + \left(\frac{\partial p_{ji}}{\partial n^\alpha} - \frac{\partial p_{\alpha i}}{\partial X^j}\right) dn^\alpha \wedge dX^j \wedge dX^i +$$
$$+ \left(\frac{\partial p_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial p_{ki}}{\partial X^j}\right) dx^k \wedge dX^j \wedge dX^i + \left(\frac{\partial p_{\beta\alpha}}{\partial X^i} + \frac{\partial p_{\alpha i}}{\partial n^\beta}\right) dn^\beta \wedge dn^\alpha \wedge dX^i +$$
$$+ \left(\frac{\partial p_{\alpha i}}{\partial x^h} - \frac{\partial p_{hi}}{\partial n^\alpha} + \frac{\partial p_{h\alpha}}{\partial X^i}\right) dx^h \wedge dn^\alpha \wedge dX^i +$$
$$+ \left(\frac{\partial p_{hk}}{\partial X^i} + \frac{\partial p_{ki}}{\partial x^h}\right) dx^h \wedge dx^k \wedge dX^i + \left(\frac{\partial p_{hk}}{\partial n^\alpha} + \frac{\partial p_{k\alpha}}{\partial x^h}\right) dx^h \wedge dx^k \wedge dn^\alpha +$$
$$+ \left(\frac{\partial p_{\beta\alpha}}{\partial x^k} + \frac{\partial p_{h\beta}}{\partial n^\alpha}\right) dx^k \wedge dn^\beta \wedge dn^\alpha. \quad (14)$$

Отсюда мы получаем локальное описание нейтральных лагранжианов при $n = 3$:

$$\mathbf{E}(h(P)) = h(dP) = \left(\frac{\partial p_{ji}}{\partial X^l} + \left(\frac{\partial p_{ji}}{\partial n^\alpha} - \frac{\partial p_{\alpha i}}{\partial X^j}\right) n_l^\alpha + \left(\frac{\partial p_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial p_{ki}}{\partial X^j}\right) x_l^k + \right.$$
$$+ \left(\frac{\partial p_{\beta\alpha}}{\partial X^i} + \frac{\partial p_{\alpha i}}{\partial n^\beta}\right) n_l^\beta n_j^\alpha + \left(\frac{\partial p_{\alpha i}}{\partial x^h} - \frac{\partial p_{hi}}{\partial n^\alpha} + \frac{\partial p_{h\alpha}}{\partial X^i}\right) x_l^h n_j^\alpha +$$
$$+ \left(\frac{\partial p_{hk}}{\partial X^i} + \frac{\partial p_{ki}}{\partial x^h}\right) x_l^h x_j^k + \frac{\partial p_{\beta\alpha}}{\partial n^\gamma} n_l^\gamma n_j^\beta n_i^\alpha + \left(\frac{\partial p_{\beta\alpha}}{\partial x^k} + \frac{\partial p_{h\beta}}{\partial n^\alpha}\right) x_l^k n_j^\beta n_i^\alpha +$$
$$\left. + \left(\frac{\partial p_{hk}}{\partial n^\alpha} + \frac{\partial p_{k\alpha}}{\partial x^h}\right) x_l^h x_j^k n_i^\alpha + \frac{\partial p_{hk}}{\partial x^t} x_l^t x_j^h x_i^k \right) dX^l \wedge dX^j \wedge dX^i. \quad (15)$$

2.3. Глобальная задача

В этом подразделе впервые приводится *глобальное* описание нейтральных лагранжианов. В начале раздела 2 было показано, что решение задачи описания лагранжианов в глобальной формулировке напрямую зависит от структуры векторного пространства

$$\bar{H}^n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left.\frac{\ker \mathbf{E}}{\operatorname{Im} \mathbf{E}}\right|_{\bar{\Lambda}_1^n}. \tag{16}$$

Поскольку $\bar{H}^n$ — это группа n-х когомологий вариационного комплекса (4), а когомологии последнего равны [1, 19, 22] когомологиям де Рама тотального пространства $\mathcal{R}_0 \times S^2 \times \mathbb{R}^3$, то

$$n = 2 \iff \bar{H}^2 = H^2_{\text{de Rham}}(\mathcal{R}_0 \times S^2),$$
$$n = 3 \iff \bar{H}^3 = H^3_{\text{de Rham}}(\mathcal{R}_0 \times S^2),$$

поскольку тотальное пространство стягиваемо на $\mathcal{R}_0 \times S^2$ [4]. Для вычисления когомологий пространства $\mathcal{R}_0 \times S^2$ воспользуемся формулой Кюннета в предположении, что когомологии пространства $\mathcal{R}_0$ конечномерны. Заметим, что базис в векторном пространстве $H^2_{\text{de Rham}}(S^2)$ задан (глобальной) формой объёма υ_{S^2}, которая в сферических координатах имеет вид

$$\upsilon_{S^2} = \sin\theta \, d\theta \wedge d\varphi.$$

Следует подчеркнуть, что по теореме Стокса эта форма не точна, поскольку интеграл от υ_{S^2} по S^2 равен площади сферы S^2.

В случае, если пространство $\mathcal{R}_0$ стягиваемо (например, $\mathbb{R}^n$), описание искомых нейтральных лагранжианов задано следующей теоремой.

Теорема 2 (глобальное описание).
Случай $n = 2$: глобальная форма нейтральных лагранжианов на $J^1\pi$ такова:

$$\mathcal{L}\upsilon = \mathbf{E}(h(P)) + kh(\upsilon_{S^2}),$$

здесь $k \in \mathbb{R}$ — произвольная постоянная.

Случай $n = 3$: глобальная форма нейтральных лагранжианов на $J^1\pi$ есть

$$\mathcal{L}\upsilon = \mathbf{E}(h(P)).$$

Замечание 3. Рассматриваемую модель и приведённые выше рассуждения легко обобщить на случай, когда область деформации x является регулярной подобластью $\mathcal{R}_1 \subset \mathbb{R}^n$. Наши решения и локальной, и глобальной (когомологической) задачи переносятся на этот случай без изменения. Следует, правда, обратить внимание на то, что тотальное пространство в этом случае не гомеоморфно $\mathcal{R}_0 \times S^2$.

3. Заключительные замечания

Полученные нами результаты можно переформулировать следующим образом. Во-первых, были явно описаны локальные представления нейтральных лагранжианов, соответствующих размерностям $n = 2$ и $n = 3$. Во-вторых, было показано, что в случае стягиваемого пространства (например, $\mathcal{R}_0 = \mathbb{R}^n$) при

$n = 2$ существует глобальное описание топологических нейтральных лагранжианов, в то время как при $n = 3$ топологическая компонента отсутствует. Таким образом, все локальные утверждения для $n = 3$ справедливы глобально. В-третьих, в связи с изложенными результатами естественным образом ставится задача их применения в механике сплошных сред, в частности в исследовании нематиков. Из формул (11), (15) понятно, что существует классический аналог нейтральных лагранжианов, которые возникают в описании явления нелинейной упругости (лагранжиан $\det \boldsymbol{F}$) или в классической теории жидких кристаллов (соответственно $\operatorname{tr}(\boldsymbol{G})^2 - (\operatorname{div}\boldsymbol{n})^2$). Отметим, что в первом случае допустимо предположение, что все токи, кроме Px, равны нулю, в то время как последний линеен по деформациям. Во втором случае ситуация усложняется, поскольку в работе не использовалась интерпретация $\boldsymbol{n}$ как единичного вектора в трёхмерном пространстве (см. $[2, 7, 12, 20]$): во всех случаях предполагалось, что $\boldsymbol{n}$ параметризует точки двумерной сферы.

Полученные формулы можно использовать двояко. С одной стороны, для всякого выражения, описывающего свободную энергию, можно проверить, соответствует ли оно нейтральному лагранжиану. С другой стороны, с их помощью по произвольным токам можно строить интересные слагаемые, задающие свободную энергию, вводя дополнительные ограничения, например симметричные. Указанные вопросы являются предметом дальнейших исследований.

Литература

[1] Бочаров А. В., Вербовецкий А. М., Виноградов А. М. и др. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Ред. А. М. Виноградов и И. С. Красильщик. — М.: Факториал, 1997.

[2] Anderson D. R., Carlson D. E., Fried E. A continuum-mechanical theory for nematic elastomers // J. Elasticity. — 1999. — Vol. 56. — P. 35—58.

[3] Anderson I. M., Duchamp T. On the existence of global variational principles // Amer. J. Math. — 1980. — Vol. 102. — P. 781—868.

[4] Bott R., Tu L. W. Differential Forms in Algebraic Topology. — Berlin: Springer, 1982. — GTM. Vol. 82.

[5] Ericksen J. L. Conservation laws for liquid crystals // Trans. Soc. Rheol. — 1961. — Vol. 5. — P. 23—34.

[6] Ericksen J. L. Nilpotent energies in liquid crystal theories // Arch. Rational Mech. Anal. — 1962. — Vol. 10. — P. 189—196.

[7] Fried E., Sellers S. Free energy-density functions for nematic elastomers // J. Mech. Phys. Solids. — 2004. — Vol. 52. — P. 1671—1689.

[8] Grigore D. R. Variationally trivial Lagrangians and locally variational differential equations of arbitrary order // Differential Geom. Appl. — 1999. — Vol. 10. — P. 79—105.

[9] Krupka D. Variational sequences on finite order jet spaces // Proceedings of the Conf. on Diff. Geom. and its Appl. — New York: World Scientific, 1990. — P. 236—254.

[10] Krupka D., Musilova J. Trivial Lagrangians in field theory // Differential Geom. Appl. — 1998. — Vol. 9. — P. 293—505.

[11] Leslie F. M. Some constutive equations for liquid crystals // Arch. Rational Mech. Anal. — 1968. — Vol. 28. — P. 265—283.

[12] Leslie F. M., Stewart I. W., Carlsson T., Nakagawa M. Equivalent smectic C liquid crystal energies // Contin. Mech. Thermodyn. — 1991. — Vol. 3. — P. 237—250.

[13] Olver P. J. Applications of Lie Groups to Differential Equations, 2nd ed. — Springer, 1986. — GTM. Vol. 107.

[14] Olver P. J., Sivaloganathan J. The structure of null Lagrangians // Nonlinearity. — 1988. — Vol. 1. — P. 389—398.

[15] Palese M., Vitolo R., Winterroth E. Minimal order problems in the calculus of variations. — In preparation, 2004.

[16] Saunders D. J. The Geometry of Jet Bundles. — Cambridge Univ. Press, 1989.

[17] Terentjev E. M. Liquid-cristalline elastomers // J. Phys.: Condensed Matter. — 1999. — Vol. 11. — P. R239—R257.

[18] Tulczyjew W. M. The Lagrange complex // Bull. Soc. Math. France. — 1977. — Vol. 105. — P. 419—431.

[19] Vinogradov A. M. The $\mathcal{C}$-spectral sequence, Lagrangian formalism and conservation laws I and II // J. Math. Anal. Appl. — 1984. — P. 100.

[20] Virga E. Variational Theories for Liquid Crystals. — Chapman & Hall, 1994. — Appl. Math. and Math. Comput. Vol. 8.

[21] Vitolo R. On different geometric formulations of Lagrangian formalism // Differential Geom. Appl. — 1999. — Vol. 10. — P. 225—255.

[22] Vitolo R. The finite order $\mathcal{C}$-spectral sequence // Acta Appl. Math. — 2002. — Vol. 72. — P. 133—154.

[23] Warner M., Terentjev E. M. Nematic elastomers — a new state of matter? // Progr. Polymer Sci. — 1996. — Vol. 21. — P. 853—891.