О построении симметрий по интегралам гиперболических систем уравнений*

Д. К. ДЕМСКОЙ
Орловский государственный университет
demskoy@iname.com

С. Я. СТАРЦЕВ
Институт Математики УНЦ РАН
e-mail: startsev@anrb.ru

УДК 517.957+514.763.85

Ключевые слова: высшие симметрии, системы типа Лиувилля, формально сопряжённые операторы, интегралы, система Полмейера—Лунда—Редже, цепочки Тоды, матрицы Картана.

Аннотация

Предложен алгоритм построения симметрий сколь угодно высокого порядка, применимый к некоторым специальным классам гиперболических систем уравнений, обладающих интегралами. Показано, что система Полмейера—Лунда—Редже и открытые двумеризованные цепочки Тоды относятся к числу систем, для которых применим этот алгоритм.

Abstract

D. K. Demskoi, S. Ya. Startsev, On construction of symmetries from integrals of hyperbolic partial differential systems, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 1, pp. 29—37.

An algorithm is proposed which allows one to construct higher symmetries of arbitrary order for some special classes of hyperbolic systems possessing the integrals. The Pohlmeyer—Lund—Regge system and the open two-dimensional Toda lattices are shown to belong to the class of systems such that our algorithm is applicable.

Введение

Одним из достаточных условий интегрируемости скалярного уравнения вида

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \tag{1}$$

является (см. [11]) наличие у него нетривиальных интегралов (функций, зависящих от x, y, u и производных u, таких что их полная производная либо по x, либо по y равна нулю в силу уравнения (1)). В частности, у уравнения (1) имеются симметрии сколь угодно высокого порядка, если это уравнение допускает

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 04-01-00190.

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 1, с. 29—37.

нетривиальные интегралы по каждой из характеристик. Строгое доказательство этого факта, замеченного ещё в [3], можно найти, например, в [5]. Основой доказательства является применение к линеаризованному уравнению (1) каскадного метода интегрирования Лапласа [8].

Имеется достаточно оснований [5, 6] считать, что каскадный метод интегрирования Лапласа удастся обобщить на случай систем уравнений. Однако, в отличие от скалярного случая, последовательность инвариантов Лапласа, составляющую основу вышеуказанного метода, удаётся построить не для любой системы уравнений. И, как показано в [6], наличие интегралов у системы (1) не гарантирует для неё существования этой последовательности. Это делает актуальной задачу поиска альтернативного (не опирающегося на технику инвариантов Лапласа) алгоритма построения высших симметрий для систем уравнений (1), допускающих интегралы.

Описанию одного из таких алгоритмов и посвящена эта заметка. Основой этого алгоритма является описанный в разделе 2 конструктивный способ построения дифференциального оператора, переводящего интегралы в решения системы уравнений, полученной формальным сопряжением из линеаризации системы (1). В тех случаях, когда решения линеаризованной системы удаётся получить из решений сопряжённой с ней системы, это позволяет строить высшие симметрии системы (1). Один из способов связи между линеаризацией и сопряжённой с ней системой обсуждается в разделе 3.

В настоящий момент неясно, насколько широка область применимости данного алгоритма. То, что предложенный здесь метод позволяет построить высшие симметрии для некоторых интересных систем, проиллюстрировано на примере экспоненциальных систем с матрицами Картана простых алгебр Ли и системы Полмейера—Лунда—Редже.

1. Обозначения и определения

Далее мы будем рассматривать (1) как систему уравнений: будем считать, что u является n-мерным вектором, а F — вектор-функцией со значениями в n-мерном пространстве. Через $g_z = \partial g/\partial z$, где g — скалярная функция, z — вектор $(z^1, z^2, \ldots, z^n)^\top$, будем обозначать строку $(\partial g/\partial z^1, \partial g/\partial z^2, \ldots, \partial g/\partial z^n)$, а результатом применения этой операции к вектор-функции будем считать матрицу, строки которой получены применением $\partial/\partial z$ к компонентам вектор-функции.

В настоящей заметке под функциями мы будем понимать дифференциальные функции, то есть будем предполагать, что они зависят не только от x и y, но и, вообще говоря, от u и конечного числа их частных производных. Так как смешанные производные u мы можем исключить в силу системы (1), в дальнейшем будем считать, что все функции могут зависеть лишь от x, y, u, $u_i = \partial^i u/\partial x^i$, $v_i = \partial^i u/\partial y^i$. Будем говорить, что функция f имеет *порядок* (k, m), если она не зависит от переменных v_i, $i > k$, u_j, $j > m$ и $f_{v_k} \neq 0$, $f_{u_m} \neq 0$. Если функция f имеет порядок (k, m), мы будем писать $\mathrm{ord}_y(f) = k$, $\mathrm{ord}_x(f) = m$.

Полные производные по x и y в силу (1) обозначим через D_x и D_y соответственно. Для любой скалярной функции g эти полные производные задаются формулами

$$D_x(g) = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u}u_1 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\partial g}{\partial u_i}u_{i+1} + \frac{\partial g}{\partial v_i}D_y^{i-1}(F)\right),$$

$$D_y(g) = \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u}v_1 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\partial g}{\partial v_i}v_{i+1} + \frac{\partial g}{\partial u_i}D_x^{i-1}(F)\right).$$

На векторах и матрицах действие D_x и D_y определяется как результат покомпонентного применения этих операций. Для более компактной записи формул удобно придерживаться соглашения, что нулевые степени операторов D_x и D_y совпадают с оператором умножения на единицу (тождественным отображением): $D_x^0 = D_y^0 = 1$.

Пользуясь симметрией $x \leftrightarrow y$ формулы (1), далее мы будем приводить лишь одно из двух «симметричных» определений и утверждений.

Определение 1. Функцию w будем называть *y-интегралом* системы (1), если $D_x(w) = 0$. Если w зависит только от y, то w будем называть *тривиальным* y-интегралом.

Нетрудно видеть, что y-интеграл не может зависеть от переменных u_i. Порядок старшей из частных производных v_i, от которых интеграл существенно зависит, будем называть *порядком интеграла*.

Действующие на множестве n-мерных вектор-функций операторы

$$L = D_xD_y - F_{u_x}D_x - F_{u_y}D_y - F_u \tag{2}$$

и

$$g_* = \frac{\partial g}{\partial u} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\partial g}{\partial v_i}D_y^i + \frac{\partial g}{\partial u_i}D_x^i\right)$$

будем называть соответственно *оператором линеаризации системы* (1) и *линеаризацией функции* g, причём определение g_* равно применимо как к скалярным, так и к вектор-функциям. С учётом введённых обозначений и соглашений будем говорить, что вектор-функция f является *симметрией системы* (1), если выполнено соотношение $L(f) = 0$.

Определение 2. Оператором, *формально сопряжённым* к дифференциальному оператору

$$Z = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m} c_{ij}D_x^iD_y^j, \tag{3}$$

где c_{ij} — матрицы, зависящие от конечного числа переменных x, y, u, u_l и v_l, будем называть оператор

$$Z^+ = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j+j}D_x^iD_y^j \circ c_{ij}^{\top},$$

где символом $\top$ обозначена операция транспонирования матриц.

Для дальнейших рассуждений важно отметить следующее свойство формального сопряжения: $(P \circ Q)^+ = Q^+ \circ P^+$ для любой пары P и Q дифференциальных операторов вида (3).

2. Интегралы и ядро сопряжённой линеаризованной системы

Для настоящей заметки ключевым является следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть w является y-интегралом порядка k для системы* (1). *Тогда оператор $(w_*)^+$ делится без остатка на оператор $D_y + (F_{u_x})^\top$:*

$$(w_*)^+ = (D_y + (F_{u_x})^\top) \circ P, \quad P = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i D_y^i.$$

Дифференциальный оператор P, полученный в результате такого деления, переводит любой y-интеграл в ядро оператора L^+, формально сопряжённого к оператору (2) *линеаризации системы* (1).

Заметим, что в [4] было доказано, что для любого y-интеграла w скалярного уравнения (1) его вариационная производная $\delta w/\delta u$ удовлетворяет формуле

$$[(D_y + F_{u_x} - D_y(h)/h)(D_x + F_{u_y}) - h]\left(\frac{\delta w}{\delta u}\right) = 0, \tag{4}$$

где $h = F_u + F_{u_x}F_{u_y} - D_y(F_{u_y})$. Утверждение 1 получено в результате развития этой формулы с целью исключения из неё деления на инвариант Лапласа h, который в случае систем уравнений может быть вырожденным. Нетрудно проверить, что формула (4) получается из утверждения 1 применением y-преобразования Лапласа к L^+.

Доказательство утверждения 1 сводится к доказательству следующих двух лемм.

Лемма 1. *Для любой функции g можно найти дифференциальный оператор $P = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i D_y^i$, $k = \mathrm{ord}_y(g)$, такой что*

$$D_x \circ g_* = (D_x(g))_* + P \circ L, \tag{5}$$

где L — оператор линеаризации системы (1).

Доказательство. Нетрудно проверить, что

$$D_x \circ g_* = D_x(g_u) + \sum_{i=1}^{\infty}(D_x(g_{u_i})D_x^i + D_x(g_{v_i})D_y^i) +$$
$$+ g_u D_x + \sum_{i=1}^{\infty}(g_{u_i}D_x^{i+1} + g_{v_i}D_xD_y^i),$$

$$(D_x(g))_* = D_x(g_u) + \sum_{i=1}^{\infty}(D_x(g_{u_i})D_x^i + D_x(g_{v_i})D_y^i) +$$

$$+ g_u D_x + \sum_{i=1}^{\infty}(g_{u_i} D_x^{i+1} + g_{v_i}[D_y^{i-1}(F)]_*)$$

и, следовательно,

$$(D_x(g))_* = D_x \circ g_* + \sum_{i=1}^{k} g_{v_i}([D_y^{i-1}(F)]_* - D_x D_y^i). \tag{6}$$

Проводя аналогичное рассуждение для оператора D_y, получим, что для любой функции q, такой что $\mathrm{ord}_x(q) \leqslant 1$, верна формула

$$(D_y(q))_* = D_y \circ q_* - q_{u_x} L. \tag{7}$$

Учитывая, что $\mathrm{ord}_x(D_y^i(F)) \leqslant 1$ для любого i, многократным применением формулы (7) получим

$$(D_y^i(F))_* = D_y^i \circ F_* + \sum_{j=0}^{i-1} \gamma_{ij} D_y^j \circ L,$$

где γ_{ij} — некоторые матрицы. Подстановка этого соотношения в (6) доказывает лемму 1. □

Лемма 2. *Пусть w является y-интегралом порядка k для системы* (1). *Тогда оператор w_* делится без остатка на оператор $D_y - F_{u_x}$:*

$$w_* = P \circ (D_y - F_{u_x}), \quad P = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i D_y^i, \tag{8}$$

и дифференциальный оператор P, полученный в результате такого деления, удовлетворяет соотношению

$$D_x \circ w_* = P \circ L, \tag{9}$$

где L — оператор линеаризации системы (1).

Доказательство. Равенство (9) получается из формулы (5) и соотношения $D_x(w) = 0$. Для доказательства формулы (8) запишем оператор линеаризации (2) как

$$L = (D_y - F_{u_x}) \circ D_x - F_{u_y} D_y - F_u.$$

Воспользовавшись этой формой записи для L, мы можем переписать (9) в виде

$$\sum_{i=0}^{k} w_{v_i} D_y^i \circ D_x + \ldots = P \circ (D_y - F_{u_x}) \circ D_x + \ldots,$$

где многоточием обозначены слагаемые, не содержащие D_x. Из этого равенства видно, что

$$P \circ (D_y - F_{u_x}) = \sum_{i=0}^{k} w_{v_i} D_y^i = w_*. \quad \square$$

Для доказательства утверждения 1 остаётся применить формальное сопряжение к формулам (8) и (9).

3. Построение симметрий

В несколько более слабой формулировке и без строгого формального доказательства утверждение 1 фактически использовалось в [7] в качестве вспомогательного технического трюка. Цель этого раздела состоит в том, чтобы показать, что это утверждение может иметь и другие, прямые применения. А конкретно, здесь мы покажем, как с его помощью можно строить симметрии системы (1).

Если говорить наиболее общо, утверждение 1 позволяет строить симметрии системы (1) всегда, когда удаётся получить элементы ядра оператора L линеаризации этой системы (которые по определению и есть симметрии) из элементов ядра формально сопряжённого к нему оператора L^+. Здесь же мы ограничимся рассмотрением наиболее простого (и, как будет показано ниже, реализующегося на практике) случая связи между ядрами операторов L и L^+: предположим, что найдётся квадратная матрица C размера n, такая что

$$L \circ C = C \circ L^+, \tag{10}$$

то есть Cf является симметрией системы (1) для любой вектор-функции f из ядра $\ker L^+$. Сопоставив это предположение с утверждением 1, получим следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть w является y-интегралом порядка k для системы* (1) *и найдётся квадратная матрица C, удовлетворяющая условию* (10)*. Тогда оператор $(w_*)^+$ делится без остатка на оператор $D_y + (F_{u_x})^\top$:*

$$(w_*)^+ = (D_y + (F_{u_x})^\top) \circ P, \quad P = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i D_y^i,$$

и $C \cdot P(Q)$ является симметрией системы (1) *для любого y-интеграла Q этой системы.*

Коротко этот результат можно сформулировать так: оператор

$$C \circ (D_y + (F_{u_x})^\top)^{-1} \circ (w_*)^+$$

переводит y-интегралы в симметрии. Это утверждение можно считать обобщением приведённой в [2] формулы $CD_y^{-1}(\delta w/\delta u)$ для симметрий систем вида $u_{xy} = F(u)$, таких что $F_u C = C(F_u)^\top$, где C — постоянная матрица. Отметим, что утверждение 2 гарантирует нам локальность (отсутствие отрицательных степеней D_y) задающего симметрии оператора.

Таким образом, если известен интеграл w, то для нахождения симметрии надо записать $(w_*)^+$ в виде $\sum\limits_{i=0}^{k} \beta_i D_y^i$ и найти коэффициенты оператора P по формулам

$$\alpha_{k-1} = \beta_k, \quad \alpha_{i-1} = \beta_i - (D_y + (F_{u_x})^\top)(\alpha_i), \quad i = \overline{k-1, 1},$$

а затем подействовать оператором $C \circ P$ на интегралы системы. Как видно из вышеизложенного, всё достаточно конструктивно вычисляется по известному интегралу w — остаётся лишь выяснить, как найти матрицу C, и указать способ проверки её существования. Остаток статьи посвящён обсуждению этой проблемы.

Сравнивая в (10) коэффициенты при D_y и D_x, получаем

$$\begin{aligned} (D_x - F_{u_y})(C) = CF_{u_y}^\top &\implies (D_x - F_{u_y}) \circ C = C \circ (D_x + F_{u_y}^\top), \\ (D_y - F_{u_x})(C) = CF_{u_x}^\top &\implies (D_y - F_{u_x}) \circ C = C \circ (D_y + F_{u_x}^\top), \end{aligned} \tag{11}$$

из чего видно, что C может зависеть лишь от x, y и u. Для анализа оставшейся части соотношения (10) удобно записать L в виде

$$L = (D_x - F_{u_y}) \circ (D_y - F_{u_x}) - H = (D_y - F_{u_x}) \circ (D_x - F_{u_y}) - K.$$

Учитывая эту форму записи и формулы (11), получаем условия

$$HC(x,y,u) = C(x,y,u)K^\top, \quad KC(x,y,u) = C(x,y,u)H^\top, \tag{12}$$

где $H = F_u + F_{u_y}F_{u_x} - D_x(F_{u_x})$ и $K = F_u + F_{u_x}F_{u_y} - D_y(F_{u_y})$. Формулы (12), по-видимому, означают, что (1) является системой Эйлера—Лагранжа (по аналогии со скалярными уравнениями Эйлера—Лагранжа вида (1), которые характеризуются [10] условием $H = K$).

Таким образом, для проверки применимости изложенного выше метода и поиска матрицы C надо убедиться в разрешимости соотношений (12) и, если они разрешимы, найти из них матрицу C, а затем проверить выполнение условий (11).

Пример 1. Рассмотрим вырождение системы Полмейера—Лунда—Редже

$$p_{xy} = \frac{qp_xp_y}{pq+a}, \quad q_{xy} = \frac{pq_xq_y}{pq+a},$$

где a — константа. Решением системы уравнений (12) является

$$C = b(x,y,p,q)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а для того чтобы матрица C удовлетворяла (11), берём $b = pq + a$. Таким образом, наш алгоритм применим к этой системе — остаётся лишь заметить, что она обладает y-интегралами $p_yq_y/(pq+a)$ и $q_{yy}/q_y + qp_y/(pq+a)$.

В ряде случаев матрицу C легко угадать непосредственно из вида операторов L и L^+.

Пример 2. Рассмотрим экспоненциальные системы $u_{xy} = A\mathrm{e}^u$, где A — симметрическая постоянная матрица, $u = (u^1, u^2, \ldots, u^n)^\top$, а через e^u обозначен вектор $(\exp(u^1), \exp(u^2), \ldots, \exp(u^n))^\top$. Нетрудно видеть, что

$$L = D_x D_y - AU, \quad L^+ = D_x D_y - UA,$$
$$U = (\mathrm{e}^u)_u = \mathrm{diag}\{\exp(u^1), \exp(u^2), \ldots, \exp(u^n)\}$$

и, следовательно, для таких систем выполнено соотношение (10) с $C = A$.

Заметим, что если A является матрицей Картана простой алгебры Ли, то согласно [9—12] система $u_{xy} = A\mathrm{e}^u$ имеет полный набор интегралов. Условию $A = A^\top$ удовлетворяют все интересующие нас матрицы Картана (полный их список можно найти, например, в [1]), за исключением матриц для алгебр B_n, C_n, F_4 и G_2. Для этих несимметрических матриц Картана в качестве C можно взять матрицу AD, где D — постоянная диагональная матрица, такая что $AD = (AD)^\top$ (для каждой из матриц алгебр B_n, C_n, F_4 и G_2 легко подобрать соответствующую матрицу D). Действительно, выполнение условия (12) подтверждается цепочкой соотношений

$$HAD = AUAD = AUDA^\top = ADUA^\top = ADK^\top,$$

а (11) выполнены в силу постоянства матрицы AD.

Таким образом, изложенный здесь алгоритм примени́м, например, ко всем экспоненциальным системам $u_{xy} = A\mathrm{e}^u$, где A — матрица Картана простой алгебры Ли.

Авторы благодарны А. В. Жиберу и В. В. Соколову за полезные обсуждения.

Литература

[1] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1972.

[2] Жибер А. В. О полной интегрируемости двумерных динамических систем // Проблемы механики и управления. — Уфа: Уфимский научный центр РАН, 1994. — С. 62—71.

[3] Жибер А. В., Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б. Уравнения типа Лиувилля // ДАН СССР. — 1979. — Т. 249, № 1. — С. 26—29.

[4] Жибер А. В., Соколов В. В. Преобразования Лапласа в классификации интегрируемых квазилинейных уравнений // Проблемы механики и управления. Т. 2. — Уфа: Уфимский научный центр РАН, 1995. — С. 51—65.

[5] Жибер А. В., Соколов В. В. Точно интегрируемые уравнения лиувиллевского типа // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 63—106.

[6] Жибер А. В., Старцев С. Я. Интегралы, решения и существование преобразований Лапласа линейной гиперболической системы уравнений // Мат. заметки. — 2003. — Т. 74, №6. — С. 849—858.

[7] Старцев С. Я. Об инвариантах Лапласа систем гиперболических уравнений // Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. Т. 3. — Уфа: Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, 1996. — С. 144—154.

[8] Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. — М.: ИЛ, 1957.

[9] Шабат А. Б., Ямилов Р. И. Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана. — Препринт Башкирского филиала АН СССР, Уфа, 1981.

[10] Anderson I. M., Dutchamp T. On the existence of global variational principles // Amer. J. Math. — 1980. — Vol. 102. — P. 781—868.

[11] Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal. Vol. 1—4. — Paris: Gauthier-Villars, 1896.

[12] Shabat A. B. Higher symmetries of two-dimensional lattices // Phys. Lett. A. — 1995. — Vol. 200. — P. 121—133.