Разложения алгебры петель над $\mathrm{so}(4)$ и интегрируемые модели типа уравнения кирального поля*

О. В. ЕФИМОВСКАЯ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail:efvitaly@mail.ru

В. В. СОКОЛОВ
Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау РАН
e-mail: sokolov@landau.ac.ru

УДК 517.958+512.77

Ключевые слова: факторизующие подалгебры, представления Лакса, интегрируемые модели, алгебра петель, модель Чередника.

Аннотация

Рассматриваются факторизующие подалгебры для алгебры петель над $\mathrm{so}(4)$ и связанные с ними точно интегрируемые нелинейные гиперболические системы типа уравнения главного кирального поля. Найден новый пример такой системы и построено представление Лакса для него.

Abstract

O. V. Efimovskaya, V. V. Sokolov, Decompositions of the loop algebra over $\mathrm{so}(4)$ *and integrable models of the chiral equation type*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 1, pp. 39—47.

Decompositions of the loop algebra over $\mathrm{so}(4)$ are considered and the exactly integrable nonlinear hyperbolic systems of the principal chiral field equation type are analyzed. New example of such system is found and the Lax representation for this example is constructed.

Введение

В работе рассматриваются разложения алгебры петель $\mathrm{so}(4)((\lambda))$ в прямую сумму векторных пространств

$$\mathrm{so}(4)((\lambda)) = \mathrm{so}(4)[[\lambda]] \oplus \mathcal{G} \tag{1}$$

где $\mathrm{so}(4)[[\lambda]]$ обозначает подалгебру Ли рядов Тейлора, а $\mathcal{G}$ — некоторую подалгебру Ли. Будем называть всякую такую подалгебру $\mathcal{G}$ факторизующей. Из

*Работа частично поддержана грантами РФФИ 02-01-00431 и НШ 1716.2003.1.

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 1, с. 39—47.

результатов работы [2] следует, что всякой факторизующей подалгебре соответствует интегрируемая система вида

$$u_\xi = [u, S^t v + vS], \quad v_\eta = [v, \bar{S}^t u + u\bar{S}], \tag{2}$$

где $u, v \in \mathrm{so}(3)$, S и $\bar{S}$ — некоторые постоянные матрицы, а индекс t означает транспонирование. Пара Лакса для такой системы записывается в терминах проектора на подалгебру $\mathcal{G}$ в силу разложения (1).

В настоящей заметке описываются интегрируемые модели вида (2) с *диагональными* матрицами S и $\bar{S}$, укладывающиеся в рамки общей схемы из [2]. Такие системы могут быть переписаны в виде

$$\mathbf{u}_\xi = \Lambda\mathbf{v} \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_\eta = \bar{\Lambda}\mathbf{u} \times \mathbf{v}, \tag{3}$$

где

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad \bar{\Lambda} = \mathrm{diag}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3),$$

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ и $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — векторы из $\mathbb{R}^3$, а $\times$ означает векторное произведение. Ясно, что система (3) совместна с условием $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$, которое обычно накладывается, когда речь идёт о приложениях в физике или в геометрии.

Преобразования

$$u_i \to -u_i, \quad v_i \to -v_i, \quad \xi \to -\xi, \quad \eta \to -\eta$$

не портят интегрируемости системы (3) при любом i. Эти преобразования эквивалентны замене $\lambda_i \to -\lambda_i$, $\bar{\lambda}_i \to -\bar{\lambda}_i$. Кроме того, допустимы согласованные перестановки диагональных элементов матриц Λ и $\bar{\Lambda}$.

В настоящей работе показано, что если элементы матриц Λ и $\bar{\Lambda}$ связаны соотношениями

$$\lambda_1\bar{\lambda}_1(\lambda_3^2 - \lambda_2^2) + \lambda_2\bar{\lambda}_2(\lambda_1^2 - \lambda_3^2) + \lambda_3\bar{\lambda}_3(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) = 0, \tag{4}$$

$$\lambda_1\bar{\lambda}_1(\bar{\lambda}_3^2 - \bar{\lambda}_2^2) + \lambda_2\bar{\lambda}_2(\bar{\lambda}_1^2 - \bar{\lambda}_3^2) + \lambda_3\bar{\lambda}_3(\bar{\lambda}_2^2 - \bar{\lambda}_1^2) = 0, \tag{5}$$

система (3) обладает представлением Лакса. В случае общего положения, когда все элементы λ_i отличны от нуля, из соотношения (4) следует, что

$$\bar{\lambda}_1 = \kappa_1\lambda_1 + \frac{\kappa_2}{\lambda_1}, \quad \bar{\lambda}_2 = \kappa_1\lambda_2 + \frac{\kappa_2}{\lambda_2}, \quad \bar{\lambda}_3 = \kappa_1\lambda_3 + \frac{\kappa_2}{\lambda_3}. \tag{6}$$

Соотношение (5) равносильно соотношению

$$\kappa_1\kappa_2(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) = 0.$$

Случай $\kappa_2 = 0$ соответствует известной интегрируемой модели И. Чередника [4], случай $\kappa_1 = 0$ был рассмотрен И. Голубчиком и В. Соколовым в [1, 2]. Если $\kappa_i \neq 0$, то без ограничения общности можно положить $\lambda_1 = \lambda_2$. Тогда $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2$, а λ_3, $\bar{\lambda}_3$ произвольны. Возможно, этот случай является новым.

По-видимому, соотношения (4), (5) являются не только достаточными, но и необходимыми для точной интегрируемости модели (3). Для доказательства этого факта в принципе можно использовать симметрийный подход или тест Пенлеве.

1. Факторизующие подалгебры для алгебр петель над so(3) и so(4)

Элементы из so(4) мы будем представлять себе как блочно-диагональные матрицы с двумя блоками, принадлежащими so(3). Обозначим через $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ стандартный базис в so(3):

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что всякая факторизующая подалгебра $\mathcal{G}$ в $\mathrm{so}(4)((\lambda))$ содержит ряды вида

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &= \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} + O(\lambda), & \bar{\mathbf{E}}_1 &= \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{c} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} + O(\lambda), \\
\mathbf{E}_2 &= \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} + O(\lambda), & \bar{\mathbf{E}}_2 &= \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{a} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} + O(\lambda), \quad (7) \\
\mathbf{E}_3 &= \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \mathbf{e}_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{b}} \end{pmatrix} + O(\lambda), & \bar{\mathbf{E}}_3 &= \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} + O(\lambda),
\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{a} = \sum a_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{b} = \sum b_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{c} = \sum c_i \mathbf{e}_i, \tag{8}$$

$$\bar{\mathbf{a}} = \sum \bar{a}_i \mathbf{e}_i, \quad \bar{\mathbf{b}} = \sum \bar{b}_i \mathbf{e}_i, \quad \bar{\mathbf{c}} = \sum \bar{c}_i \mathbf{e}_i \text{ —} \tag{9}$$

некоторые элементы so(3).

Ясно, что подалгебра Ли, порождённая образующими (7), в сумме с рядами Тейлора даёт всю алгебру $\mathrm{so}(4)((\lambda))$. Но для образующих вида (7) эта сумма не является прямой.

Предложение 1. *Для всякой факторизующей подалгебры $\mathcal{G}$ имеют место коммутационные соотношения вида*

$$\begin{pmatrix} [\mathbf{E}_2, \bar{\mathbf{E}}_2] \\ [\mathbf{E}_2, \bar{\mathbf{E}}_3] \\ [\mathbf{E}_2, \bar{\mathbf{E}}_1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & -a_3 \\ 0 & b_1 & -b_3 \\ 0 & c_1 & -c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{E}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\bar{a}_1 & \bar{a}_3 \\ \bar{a}_1 & 0 & -\bar{a}_2 \\ -\bar{a}_3 & \bar{a}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{E}}_2 \\ \bar{\mathbf{E}}_3 \\ \bar{\mathbf{E}}_1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix} [\mathbf{E}_3, \bar{\mathbf{E}}_2] \\ [\mathbf{E}_3, \bar{\mathbf{E}}_3] \\ [\mathbf{E}_3, \bar{\mathbf{E}}_1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 & a_2 \\ -b_1 & 0 & b_2 \\ -c_1 & 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{E}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\bar{b}_1 & \bar{b}_3 \\ \bar{b}_1 & 0 & -\bar{b}_2 \\ -\bar{b}_3 & \bar{b}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{E}}_2 \\ \bar{\mathbf{E}}_3 \\ \bar{\mathbf{E}}_1 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\begin{pmatrix} [\mathbf{E}_1, \bar{\mathbf{E}}_2] \\ [\mathbf{E}_1, \bar{\mathbf{E}}_3] \\ [\mathbf{E}_1, \bar{\mathbf{E}}_1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 & -a_2 & 0 \\ b_3 & -b_2 & 0 \\ c_3 & -c_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{E}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\bar{c}_1 & \bar{c}_3 \\ \bar{c}_1 & 0 & -\bar{c}_2 \\ -\bar{c}_3 & \bar{c}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{E}}_2 \\ \bar{\mathbf{E}}_3 \\ \bar{\mathbf{E}}_1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть сумма $\mathrm{so}(4)[[\lambda]]$ и $\mathcal{G}$ является прямой, тогда необходимо, чтобы размерность векторного пространства, порождённого рядами вида (7) и их попарными коммутаторами, равнялась 12. Другими словами, при любых i и j коммутаторы $[\mathbf{E}_i,\ \bar{\mathbf{E}}_j]$ должны являться линейными комбинациями образующих (7). Например, должно иметь место разложение

$$[\mathbf{E}_1, \bar{\mathbf{E}}_2] = \sum_{i=1}^{3} m_i \mathbf{E}_i + n_i \bar{\mathbf{E}}_i,$$

где m_i и n_i — некоторые константы. Подставляя соответствующие разложения из (7) для $\mathbf{E}_1$, $\bar{\mathbf{E}}_2$ в приведённое выше соотношение и приравнивая коэффициенты при λ^{-1} в обеих частях данного равенства, мы получаем явные выражения для m_i и n_i через коэффициенты формул (8), (9). Эти коэффициенты содержатся в первой строке матричного соотношения (12). Рассуждая аналогично, мы получаем все три тождества (10)—(12). □

Нетрудно видеть, что для всякой факторизующей подалгебры для $\mathrm{so}(4)((\lambda))$ её проекции на первый и второй блоки являются факторизующими подалгебрами для $\mathrm{so}(3)((\lambda))$. Соотношения (10)—(12) описывают «взаимодействие» этих двух факторизующих подалгебр. Если все постоянные a_i, b_i, c_i, $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$, $\bar{c}_i$ равны нулю, то $\mathcal{G}$ является прямой суммой двух факторизующих подалгебр для $\mathrm{so}(3)((\lambda))$.

Кроме того, чтобы сумма $\mathrm{so}(4)[[\lambda]]$ и $\mathcal{G}$ была прямой, необходимо, чтобы размерность векторного пространства, порождённого векторами $\mathbf{E}_i$, $[\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j]$ и $[\mathbf{E}_i, [\mathbf{E}_j, \mathbf{E}_k]]$, равнялась девяти. Такое же условие должно быть выполнено для образующих $\bar{\mathbf{E}}_1$, $\bar{\mathbf{E}}_2$, $\bar{\mathbf{E}}_3$. Соответствующие коммутационные соотношения полностью совпадают с соотношениями для алгебры петель $\mathrm{so}(3)((\lambda))$, полученными в [3]. Именно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Для всякой факторизующей подалгебры $\mathcal{G}$ имеют место соотношения вида*

$$\begin{pmatrix} [\mathbf{E}_1, [\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3]] \\ [\mathbf{E}_3, [\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2]] \\ [\mathbf{E}_2, [\mathbf{E}_3, \mathbf{E}_1]] \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} [\mathbf{E}_3, \mathbf{E}_1] \\ [\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2] \\ [\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3] \end{pmatrix} + \mathbf{B} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{E}_1 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix} [\mathbf{E}_3, [\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3]] + [\mathbf{E}_1, [\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2]] \\ [\mathbf{E}_1, [\mathbf{E}_3, \mathbf{E}_1]] + [\mathbf{E}_2, [\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3]] \\ [\mathbf{E}_2, [\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2]] + [\mathbf{E}_3, [\mathbf{E}_3, \mathbf{E}_1]] \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} [\mathbf{E}_3, \mathbf{E}_1] \\ [\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2] \\ [\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3] \end{pmatrix} + \mathbf{D} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{E}_1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ *и* $\mathbf{D}$ — *некоторые матрицы вида*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -u & w & 0 \\ u & 0 & -v \\ 0 & -w & v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ 0 & -\beta & \gamma \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} x & v & -w \\ -v & y & u \\ w & -u & z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \gamma & -\beta \\ -\gamma & \tau & \alpha \\ \beta & -\alpha & \delta \end{pmatrix},$$

причём u, v, w, x, y, z, α, β, γ, δ, τ, ε — такие числа, что выполняются соотношения $\operatorname{tr}\mathbf{C} = \operatorname{tr}\mathbf{D} = 0$. *Более того, существуют такие константы k_1, k_2, что*

$$k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{B} = 0, \quad k_1\mathbf{C} + k_2\mathbf{D} = 0. \tag{15}$$

Аналогичные коммутационные соотношения связывают образующие $\bar{\mathbf{E}}_1$, $\bar{\mathbf{E}}_2$, $\bar{\mathbf{E}}_3$: над всеми символами в формулах (13)—(15) нужно поставить чёрточки.

Напомним общую конструкцию из работы [2]. Пусть $u = \sum u_i \mathbf{e}_i$, $v = \sum v_i \mathbf{e}_i$. Положим

$$L = \frac{d}{d\eta} + \sum u_i \mathbf{E}_i, \quad M = \frac{d}{d\xi} + \sum v_i \bar{\mathbf{E}}_i. \tag{16}$$

Тогда соотношение $[L, M] = 0$ эквивалентно системе

$$u_\xi = [u, v_1\mathbf{c} + v_2\mathbf{a} + v_3\mathbf{b}], \quad v_\eta = [v, u_1\bar{\mathbf{c}} + u_2\bar{\mathbf{a}} + u_3\bar{\mathbf{b}}], \tag{17}$$

где $u = \sum u_i \mathbf{e}_i$ и $v = \sum v_i \mathbf{e}_i$. Действительно, коммутатор $[L, M]$ принадлежит $\mathcal{G}$ и имеет асимптотику вида $Z/\lambda + O(1)$, а система (17) эквивалентна тому, что вычет Z равен нулю. Поскольку $\mathcal{G}$ не содержит ненулевых рядов Тейлора, то $Z = 0$ эквивалентно условию $[L, M] = 0$.

Нетрудно проверить, что (17) можно переписать в виде (2), где

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_2 - b_3 + c_1) & a_3 & -c_3 \\ b_2 & \frac{1}{2}(-a_2 + b_3 + c_1) & c_2 \\ -b_1 & a_1 & \frac{1}{2}(a_2 + b_3 - c_1) \end{pmatrix},$$

а $\bar{S}$ получается из этой формулы добавлением чёрточек над символами.

В настоящей работе мы рассматриваем случай, когда матрицы S и $\bar{S}$ являются диагональными. Это означает, что

$$a_1 = \bar{a}_1 = a_3 = \bar{a}_3 = b_1 = \bar{b}_1 = b_2 = \bar{b}_2 = c_2 = \bar{c}_2 = c_3 = \bar{c}_3 = 0.$$

В этом случае матрицы Λ и $\bar{\Lambda}$ из формулы (3) имеют вид

$$\Lambda = \operatorname{diag}(c_1, a_2, b_3), \quad \bar{\Lambda} = \operatorname{diag}(\bar{c}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_3). \tag{18}$$

Предполагается, что ни одна из этих матриц не является нулевой, так как в противном случае система (3) становится тривиальной.

Можно проверить, что в диагональном случае образующие (7) имеют следующую структуру:

$$\mathbf{E}_i = \begin{pmatrix} q_i\mathbf{e}_i & 0 \\ 0 & \bar{p}_i\mathbf{e}_i \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{E}}_i = \begin{pmatrix} p_i\mathbf{e}_i & 0 \\ 0 & \bar{q}_i\mathbf{e}_i \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где q_i, $\bar{q}_i$ — некоторые скалярные ряды Лорана с асимптотикой вида $1/\lambda + O(1)$, а p_i, $\bar{p}_i$ — ряды Тейлора.

Опишем все факторизующие подалгебры с образующими вида (19). Подставляя (19) в коммутационные соотношения (10)—(14), получаем переопределённую систему алгебраических уравнений относительно q_i, p_i, $\bar{q}_i$, $\bar{p}_i$. Очевидным условием её совместности оказываются соотношения

$$u = \bar{u} = v = \bar{v} = w = \bar{w} = \alpha = \bar{\alpha} = \beta = \bar{\beta} = \gamma = \bar{\gamma} = 0.$$

Система состоит из уравнений

$$
\begin{aligned}
&c_1q_2 - q_3p_1 + \bar b_3 p_2 = 0, \quad c_1q_3 - q_2p_1 + \bar a_2p_3 = 0,\\
&a_2q_1 - q_3p_2 + \bar b_3 p_1 = 0, \quad a_2q_3 - q_1p_2 + \bar c_1p_3 = 0,\\
&b_3q_2 - q_1p_3 + \bar c_1 p_2 = 0, \quad b_3q_1 - q_2p_3 + \bar a_2p_1 = 0,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
&y\ q_1q_2 - \tau\ q_3 + q_1^2q_3 - q_2^2q_3 = 0,\\
&z\ q_2q_3 - \delta\ q_1 + q_1q_2^2 - q_1q_3^2 = 0,\\
&x\ q_1q_3 - \varepsilon\ q_2 + q_2q_3^2 - q_1^2q_2 = 0,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bar y\ p_1p_2 - \bar\tau\ p_3 + p_1^2p_3 - p_2^2p_3 = 0,\\
&\bar z\ p_2p_3 - \bar\delta\ p_1 + p_1p_2^2 - p_1p_3^2 = 0,\\
&\bar x\ p_1p_3 - \bar\varepsilon\ p_2 + p_2p_3^2 - p_1^2p_2 = 0.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Кроме того, имеется симметричная система, которая получается из (20)—(22) расставлением чёрточек.

Из уравнений (20), (21) следует, что

$$
p_1 = c_1 + O(\lambda), \quad p_2 = a_2 + O(\lambda), \quad p_3 = b_3 + O(\lambda),
\tag{23}
$$

$$
q_2^2 - q_1^2 = \frac{y}{\lambda} + O(1), \quad q_3^2 - q_2^2 = \frac{z}{\lambda} + O(1), \quad q_1^2 - q_3^2 = \frac{x}{\lambda} + O(1).
$$

Исключая неизвестные q_1, q_2, q_3 из (20), нетрудно вывести, что

$$
a_2\bar a_2(p_1^2 - p_3^2) + b_3\bar b_3(p_2^2 - p_1^2) + c_1\bar c_1(p_3^2 - p_2^2) = 0,
$$

откуда, учитывая (23) и (18), получаем необходимость условия (4). Условие (5) выводится из симметричной к (20) системы. Из системы (20) также вытекает, что

$$
p_1^2(q_2^2 - q_3^2) + p_2^2(q_3^2 - q_1^2) + p_3^2(q_1^2 - q_2^2) = 0.
\tag{24}
$$

Из формул (24), (23) следует, что

$$
c_1^2 z + a_2^2 x + b_3^2 y = 0.
$$

Отсюда и из условия $x + y + z = 0$ получаем, что или

$$
z = \kappa(a_2^2 - b_3^2), \quad x = \kappa(b_3^2 - c_1^2), \quad y = \kappa(c_1^2 - a_2^2)
\tag{25}
$$

для некоторого κ, или $c_1^2 = a_2^2 = b_3^2$. Последняя возможность соответствует случаю единичной (с точностью до упомянутых в начале статьи преобразований) матрице Λ.

Найдём из системы (20) неизвестные p_1, p_2, p_3:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{c_1q_1q_2^2 + a_2\bar b_3q_2q_3 + \bar c_1b_3\bar b_3q_1}{q_1q_2q_3 - \bar c_1\bar a_2\bar b_3},\\
p_2 &= \frac{a_2q_2q_3^2 + b_3\bar c_1q_1q_3 + \bar a_2c_1\bar c_1q_2}{q_1q_2q_3 - \bar c_1\bar a_2\bar b_3},\\
p_3 &= \frac{b_3q_3q_1^2 + c_1\bar a_2q_1q_2 + \bar b_3a_2\bar a_2q_3}{q_1q_2q_3 - \bar c_1\bar a_2\bar b_3}.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Знаменатели в этих выражениях не равны нулю в силу (23). Можно проверить, что оставшиеся три уравнения из системы (20) по модулю (21) эквивалентны соотношениям

$$c_1 z = a_2\bar{b}_3 - \bar{a}_2 b_3, \quad a_2 x = b_3\bar{c}_1 - \bar{b}_3 c_1, \quad b_3 y = c_1\bar{a}_2 - \bar{c}_1 a_2, \tag{27}$$

$$c_1\delta = \bar{c}_1(a_2\bar{a}_2 - b_3\bar{b}_3), \quad a_2\varepsilon = \bar{a}_2(b_3\bar{b}_3 - c_1\bar{c}_1), \quad b_3\tau = \bar{b}_3(c_1\bar{c}_1 - a_2\bar{a}_2). \tag{28}$$

Сосредоточимся теперь на системе (21). Учитывая, что $x+y+z = \varepsilon+\delta+\tau = 0$, из (21) находим

$$\delta q_1^2 + \varepsilon q_2^2 + \tau q_3^2 = 0, \quad z q_2^2 q_3^2 + x q_1^2 q_3^2 + y q_1^2 q_2^2 = 0.$$

Из этих соотношений и второго из условий (15) следует, что имеются три возможности: или $x = y = z = 0$, или $\varepsilon = \delta = \tau = 0$, или два из рядов q_1, q_2, q_3 совпадают между собой. В последнем случае без ограничения общности положим $q_2 = q_1$. Тогда дополнительно имеем, что либо $\tau = y = 0$, либо $q_3 = q_1$.

Случай 1. Рассмотрим случай $x = y = z = 0$. Предположим также, что $q_i \neq q_j$ при $i \neq j$ (иначе мы попадаем в рамки случая 3). Система (21) превращается в

$$q_2^2 - q_3^2 = \delta, \quad q_3^2 - q_1^2 = \varepsilon, \quad q_1^2 - q_2^2 = \tau.$$

Из (27), (28) следует, что

$$\bar{c}_1 = k c_1, \quad \bar{a}_2 = k a_2, \quad \bar{b}_3 = k b_3,$$
$$\delta = k^2(a_2^2 - b_3^2), \quad \varepsilon = k^2(b_3^2 - c_1^2), \quad \tau = k^2(c_1^2 - a_2^2),$$

где k — некоторый ненулевой параметр, который в системе (3) может быть устранён растяжением независимой переменной η. Поскольку параметр λ в задаче о факторизующих подалгебрах определён с точностью до замен

$$\lambda \mapsto \lambda + k_2\lambda^2 + k_3\lambda^3 + \ldots, \tag{29}$$

без ограничения общности можно считать, что

$$q_1^2 - k^2 c_1^2 = q_2^2 - k^2 a_2^2 = q_3^2 - k^2 b_3^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Окончательно имеем

$$q_1 = \frac{\sqrt{1 + k^2 c_1^2 \lambda^2}}{\lambda}, \quad q_2 = \frac{\sqrt{1 + k^2 a_2^2 \lambda^2}}{\lambda}, \quad q_3 = \frac{\sqrt{1 + k^2 b_3^2 \lambda^2}}{\lambda},$$
$$p_1 = c_1\sqrt{1 + k^2 a_2^2\lambda^2}\sqrt{1 + k^2 b_3^2\lambda^2} + k a_2 b_3 \lambda\sqrt{1 + k^2 c_1^2\lambda^2},$$
$$p_2 = a_2\sqrt{1 + k^2 c_1^2\lambda^2}\sqrt{1 + k^2 b_3^2\lambda^2} + k c_1 b_3 \lambda\sqrt{1 + k^2 a_2^2\lambda^2},$$
$$p_3 = b_3\sqrt{1 + k^2 c_1^2\lambda^2}\sqrt{1 + k^2 a_2^2\lambda^2} + k c_1 a_2 \lambda\sqrt{1 + k^2 b_3^2\lambda^2}.$$

Функции $\bar{q}_i$, $\bar{p}_i$ задаются аналогичными формулами.

Ограничиваясь в соотношении $[L, M] = 0$, где L и M заданы формулой (16), верхним блоком, получаем для модели Чередника операторы Лакса

$$L = \frac{d}{d\eta} + \sum_{i=1}^{3} u_i q_i \mathbf{e}_i, \qquad M = \frac{d}{d\xi} + \sum_{i=1}^{3} v_i p_i \mathbf{e}_i \tag{30}$$

с коэффициентами из so(3). Нижний блок задаёт другую, но совершенно аналогичную пару Лакса.

Случай 2. Рассмотрим случай $\varepsilon = \delta = \tau = 0$, $q_i \neq q_j$ при $i \neq j$. С учётом (25) систему (21) можно переписать в виде

$$\frac{q_1 q_2}{q_3} - \kappa b_3^2 = \frac{q_1 q_3}{q_2} - \kappa a_2^2 = \frac{q_2 q_3}{q_1} - \kappa c_1^2 = \frac{1}{\lambda},$$

откуда

$$q_1 = \frac{\sqrt{1 + \kappa a_2^2 \lambda}\sqrt{1 + \kappa b_3^2 \lambda}}{\lambda}, \quad q_2 = \frac{\sqrt{1 + \kappa c_1^2 \lambda}\sqrt{1 + \kappa b_3^2 \lambda}}{\lambda},$$

$$q_3 = \frac{\sqrt{1 + \kappa c_1^2 \lambda}\sqrt{1 + \kappa a_2^2 \lambda}}{\lambda},$$

$$p_1 = c_1 \lambda q_1, \quad p_2 = a_2 \lambda q_2, \quad p_3 = b_3 \lambda q_3, \quad c_1 \bar{c}_1 = a_2 \bar{a}_2 = b_3 \bar{b}_3 = \kappa c_1 a_2 b_3.$$

Функции $\bar{q}_i$, $\bar{p}_i$ легко находятся и задаются аналогичными формулами.

Случай 3a. Рассмотрим случай $q_1 = q_2$ и $\tau = y = 0$. Заметим, что из (24) сразу видно, что $p_1^2 = p_2^2$. Из (23) следует, что $c_1^2 = a_2^2$. Из системы (20) нетрудно получить, что $\bar{c}_1^2 = \bar{a}_2^2$. Рассмотрим случай $p_2 = p_1$, $c_1 = a_2$, $\bar{c}_1 = \bar{a}_2$. Если ввести обозначения $\bar{c}_1 = t c_1$ и $k = \bar{b}_3 + b_3 t$, где k и t — произвольные константы, и определить λ формулой

$$q_1^2 - \bar{c}_1^2 = \frac{1}{\lambda^2},$$

то ответ записывается в виде

$$q_1 = q_2 = \frac{\sqrt{1 + t^2 c_1^2 \lambda^2}}{\lambda}, \quad q_3 = \frac{\sqrt{4 + k^2 \lambda^2}}{2\lambda} + \frac{k}{2} - b_3 t,$$

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{2} c_1 \big(k\lambda + \sqrt{4 + k^2 \lambda^2}\big)\sqrt{1 + t^2 c_1^2 \lambda^2}, \quad p_3 = b_3 + \frac{1}{2} t c_1^2 \lambda \big(k\lambda + \sqrt{4 + k^2 \lambda^2}\big).$$

Соответствующая пара Лакса (16), (19) является одним из основных результатов этой статьи. Выглядящие несколько искусственно постоянные t, k были введены для того, чтобы включить в этот ответ вырожденный вариант, рассмотренный ниже. Случай $p_2 = -p_1$ рассматривается аналогично и приводит к той же самой системе (3).

Случай 3b. Пусть $q_1 = q_2 = q_3$. Из системы (21) очевидным образом вытекает, что $x = y = z = \delta = \varepsilon = \tau = 0$. Из системы (20) следует, что

$$(p_1, p_2, p_3) = t(c_1, a_2, b_3), \tag{31}$$

где t является некоторым рядом Тейлора от λ.

Так как не все a_2, b_3, c_1 равны нулю, свободный член t_0 ряда t не равен нулю и

$$(\bar{c}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_3) = t_0(c_1, a_2, b_3). \tag{32}$$

Из системы (20), пользуясь (31), получаем уравнения

$$(c_1^2 - a_2^2)(1-t) = 0, \quad (b_3^2 - a_2^2)(1-t) = 0, \quad (c_1^2 - b_3^2)(1-t) = 0.$$

Отсюда видно, что либо все p_i являются константами, либо $a_2^2 = b_3^2 = c_1^2$. В первом случае без ограничения общности можно считать, что $a_2 = c_1 = \bar{a}_2 = \bar{c}_1 = p_1 = p_2 = 0$. Окончательный ответ:

$$q_1 = q_2 = q_3 = \frac{1}{\lambda}, \quad p_1 = p_2 = 0, \quad p_3 = b_3.$$

Заметим, что эти формулы являются частным случаем случая 3а, если там положить $c_1 = 0$.

Во втором случае будем считать, что $c_1 = a_2 = b_3$. Тогда из (32) получаем, что $\bar{c}_1 = \bar{a}_2 = \bar{b}_3$ и, следовательно, $p_1 = p_2 = p_3$. Ответ

$$q_i = \frac{1}{\lambda} + \bar{c}_1, \quad p_i = c_1(1 + \bar{c}_1\lambda)$$

содержится в случае 2 при $\kappa = 1/\bar{c}_1$ и $c_1 = b_3 = a_2$.

Авторы благодарны М. В. Павлову за стимулирующие дискуссии.

Литература

[1] Голубчик И. З., Соколов В. В. Ещё одна разновидность классического уравнения Янга—Бакстера // Функцион. анализ и его прил. — 2000. — Т. 34, № 4. — С. 75—78.

[2] Голубчик И. З., Соколов В. В. Согласованные скобки Ли и интегрируемые уравнения типа модели главного кирального поля // Функцион. анализ и его прил. — 2002. — Т. 36, № 3. — С. 9—19.

[3] Соколов В. В. О разложениях алгебры петель над $\mathrm{so}(3)$ в сумму двух подалгебр // Докл. РАН (в печати).

[4] Чередник И. В. Об интегрируемости двумерного асимметричного кирального $O(3)$-поля и его квантового аналога // Ядерная физика. — 1981. — Т. 33. — С. 278—282.