Электромагнитные волны, допускающие трансляции в изотропном направлении

А. С. ИВАНОВА
Ивановский государственный университет
e-mail: skiv1974@mail.ru

УДК 514.83+514.7

Ключевые слова: группа Пуанкаре, уравнения Максвелла, электромагнитные волны.

Аннотация

В работе дано описание классов электромагнитных волн, допускающих подгруппы группы Пуанкаре, содержащие трансляции в изотропных направлениях. Найдены представители некоторых классов.

Abstract

A. S. Ivanova, Electromagnetic waves that admit translations along the null vector, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 1, pp. 49—56.

We consider the subgroups of the Poincaré group that contains translations along null vector and assign classes of electromagnetic waves to such subgroup. The description of these classes is obtained, and some representatives are given.

Введение

Определение 1 ([6]). Тройка (M, g, F) является *пространством Максвелла*, если

1) M — четырёхмерное вещественное многообразие,
2) $g = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ — псевдоевклидова структура на M,
3) $F = F_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$ — обобщённая симплектическая структура на M (форма F замкнута, т. е. $dF = 0$, но F может быть и вырожденной).

Условие замкнутости формы F можно интерпретировать как первое уравнение Максвелла

$$\partial_{[i}F_{jk]} = 0. \tag{1}$$

При выполнении второго уравнения Максвелла

$$\nabla_k F^{ik} = \frac{1}{c\varepsilon_0} J^i \tag{2}$$

тензор F_{ij} описывает электромагнитное поле, при этом вектор 4-тока J^i должен удовлетворять условию непрерывности $\nabla_i J^i = 0$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 1, с. 49—56.

Важным классом пространств Максвелла является класс электромагнитных волн. Под электромагнитной волной понимается непостоянное электромагнитное поле, существующее в пустоте в отсутствие зарядов [4]. Дадим более строгое определение.

Определение 2. *Электромагнитной волной* называется пространство Максвелла, задаваемое тензором $F_{ij} \neq \mathrm{const}$, который удовлетворяет уравнениям Максвелла (1) и

$$\nabla_k F^{ik} = 0. \tag{3}$$

В [6] сформулирована и решена проблема классификации пространств Максвелла по подгруппам G_S группы Пуанкаре. В [2, 3] описаны частные случаи групповой классификации электромагнитных волн, допускающих смещение по одной из пространственных координат, и волн, допускающих эллиптические винты.

1. Постановка задачи и метод решения

Электромагнитная волна есть пространство Максвелла с дополнительными ограничениями на вид тензора F_{ij}. В настоящей статье представлена классификация электромагнитных волн, допускающих одномерную группу трансляций в направлении изотропного вектора. Для проведения классификации электромагнитных волн мы воспользовались результатами, полученными в [5, 6].

Зафиксируем следующий базис алгебры Ли группы Пуанкаре:

$$e_1 = (1,0,0,0), \quad e_2 = (0,1,0,0), \quad e_3 = (0,0,1,0), \quad e_4 = (0,0,0,1),$$
$$e_{12} = (-x^2, x^1, 0, 0), \quad e_{13} = (x^3, 0, -x^1, 0), \quad e_{23} = (0, -x^3, x^2, 0),$$
$$e_{14} = (x^4, 0, 0, x^1), \quad e_{24} = (0, x^4, 0, x^2), \quad e_{34} = (0, 0, x^4, x^3).$$

Через $\{x^i\}$ всюду будут обозначаться галилеевы координаты. Выпишем все подалгебры, содержащие вектор $e_2 + e_4$, который определяет одномерную группу трансляций вдоль изотропного вектора:

1) $\mathcal{L}_{1,1c} = L\{e_2 + e_4\}$,
2) $\mathcal{L}_{2,1c} = L\{e_1, e_2 + e_4\}$,
3) $\mathcal{L}_{2,2} = L\{e_{13} + \mu e_4, e_2\}$,
4) $\mathcal{L}_{3,1c} = L\{e_1, e_3, e_2 + e_4\}$,
5) $\mathcal{L}_{4,4a} = L\{e_{13} + \lambda e_2, e_1, e_3, e_2 + e_4\}$,
6) $\mathcal{L}_{4,4b} = L\{e_{13}, e_1, e_3, e_2 + e_4\}$,
7) $\mathcal{L}_{4,5} = L\{e_{24}, e_1, e_3, e_2 + e_4\}$,
8) $\mathcal{L}_{4,7} = L\{e_{13} + \lambda e_{24}, e_1, e_3, e_2 + e_4\}$,
9) $\mathcal{L}_{5,4} = L\{e_2 + e_4, e_1, e_3, e_{13}, e_{24}\}$.

В обозначении $\mathcal{L}_{k,l}$ первый индекс указывает на размерность алгебры, второй — на номер в списке подалгебр размерности k, представленном в [1, 6]. Через $L\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ обозначена линейная оболочка векторов $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Подгруппу группы Пуанкаре, соответствующую алгебре Ли $\mathcal{L}_{k,l}$, обозначим $G_{k,l}$.

Цель настоящей работы состоит в описании классов электромагнитных волн, инвариантных относительно групп $G_{k,l}$, алгебры Ли которых принадлежат вышеприведённому списку.

Задача описания классов электромагнитных волн сводится к решению для каждой подалгебры $\mathcal{L}_{k,l}$ системы уравнений (1), (3) и уравнения

$$L_{\xi_\alpha} F_{ij} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, k, \tag{4}$$

где ξ_α — базисные векторы в $\mathcal{L}_{k,l}$, а L_{ξ_α} обозначает производную Ли:

$$L_\xi F_{ij} = \xi^k \partial_k F_{ij} + F_{kj} \partial_j \xi^k + F_{ik} \partial_j \xi^k = 0. \tag{5}$$

Обозначим через $W_{k,l}$ класс электромагнитных волн, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{k,l}$.

2. Классы электромагнитных волн

В этом разделе мы описываем классы электромагнитных волн, инвариантных относительно группы трансляций в изотропном направлении.

2.1. Класс $W_{1,1c}$

Рассмотрим алгебру $\mathcal{L}_{1,1c} = L\{e_2 + e_4\}$ и обозначим класс электромагнитных волн, допускающих группу $G_{1,1c}$ трансляций в изотропном направлении, через $W_{1,1c}$. Для описания этого класса решим систему уравнений (1), (3) и (5) для вектора $\xi = e_2 + e_4$:

$$\partial_2 F_{ij} + \partial_4 F_{ij} = 0. \tag{6}$$

Переходя к координатам $\{v^i\}$ по формулам

$$v^1 = x^1, \quad v^2 = x^2 + x^4, \quad v^3 = x^3, \quad v^4 = x^2 - x^4, \tag{7}$$

получим общее решение уравнения (6)

$$F_{ij} = F_{ij}(v^1, v^3, v^4) = F_{ij}(x^1, x^3, x^2 - x^4), \tag{8}$$

где $F_{ij}(v^1, v^3, v^4)$ — произвольные гладкие функции трёх переменных.

Подставляя (8) в уравнения Максвелла (1)—(3), получим, что функции $F_{ij}(v^1, v^3, v^4)$ должны удовлетворять системам

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_{23}}{\partial v^1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial v^3} - \frac{\partial F_{13}}{\partial v^4} = 0, \quad \frac{\partial F_{24}}{\partial v^1} - \frac{\partial F_{12}}{\partial v^4} - \frac{\partial F_{14}}{\partial v^4} = 0, \\ &\frac{\partial F_{34}}{\partial v^1} - \frac{\partial F_{14}}{\partial v^3} - \frac{\partial F_{13}}{\partial v^4} = 0, \quad \frac{\partial F_{34}}{\partial v^4} - \frac{\partial F_{23}}{\partial v^4} - \frac{\partial F_{24}}{\partial v^3} = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

и

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F_{12}}{\partial v^4}+\frac{\partial F_{13}}{\partial v^3}+\frac{\partial F_{14}}{\partial v^4}=0, \quad \frac{\partial F_{12}}{\partial v^1}-\frac{\partial F_{23}}{\partial v^3}-\frac{\partial F_{24}}{\partial v^4}=0,\\ &\frac{\partial F_{13}}{\partial v^1}+\frac{\partial F_{23}}{\partial v^4}-\frac{\partial F_{34}}{\partial v^4}=0, \quad \frac{\partial F_{14}}{\partial v^1}+\frac{\partial F_{24}}{\partial v^4}+\frac{\partial F_{34}}{\partial v^3}=0.\end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, мы получаем следующее утверждение.

Утверждение 1. *Тензор F_{ij} класса $W_{1,1c}$ имеет вид* (8) *при выполнении уравнений* (9) *и* (10).

Пример 1. Пусть $A_i = (\Phi, 0, 0, 0)$, где

$$\Phi = \Phi(v^1, v^3, v^4) = \Phi(x^1, x^3, x^2 - x^4),$$

есть потенциал, допускающий группу $G_{1,1c}$. По формуле

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

найдём тензор F_{ij}, задающий пространство Максвелла:

$$F_{12} = -F_{14} = -\frac{\partial \Phi}{\partial v^4}, \quad F_{13} = -\frac{\partial \Phi}{\partial v^3}, \quad F_{23} = F_{24} = F_{34} = 0. \tag{11}$$

Подставим найденные компоненты F_{ij} во второе уравнение Максвелла (3), в результате получим выражение для функции Φ

$$\Phi(v^1, v^3, v^4) = v^3(C_1 v^4 + C_2) + C_3 v^1 + C_4 v^4 + C_5 \quad (C_i = \mathrm{const}). \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11) получим следующий пример тензора F_{ij} класса $W_{1,1c}$:

$$F_{12} = -F_{14} = -C_1 v^3 + C_4, \quad F_{13} = -C_1 v^4 - C_2, \quad F_{23} = F_{24} = F_{34} = 0. \tag{13}$$

Предложение 1. *Если $C_1 \neq 0$ и $C_4 \neq 0$, то электромагнитная волна, определяемая тензором* (13), *допускает одномерную группу $G_S = G_{1,1c}$.*

2.2. Класс $W_{2,1c}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,1c} = L\{e_1, e_2 + e_4\}$ соответствует класс пространств Максвелла вида [6]

$$\begin{aligned}&F_{12} = C - \frac{\partial \Phi}{\partial v^4} \ (C = \mathrm{const}), \quad F_{13} = -\frac{\partial \Phi}{\partial v^3}, \quad F_{14} = \frac{\partial \Phi}{\partial v^4},\\ &F_{23} = F_{23}(v^3, v^4), \quad F_{24} = \frac{\partial \Psi}{\partial v^4}, \quad F_{34} = F_{23} + \frac{\partial \Psi}{\partial v^3},\end{aligned} \tag{14}$$

где $\Phi(v^3, v^4)$, $\Psi(v^3, v^4)$, $F_{23}(v^3, v^4)$ — произвольные гладкие функции, определённые в $\mathbb{R}^2$ ($v^3 = x^3$, $v^4 = x^2 - x^4$).

Класс $W_{2,1c}$ найдём, подставив (14) во второе уравнение Максвелла (3).

Утверждение 2. *Тензор F_{ij}, задающий класс электромагнитных волн $W_{2,1c}$, определяется формулами*

$$\begin{aligned}&F_{12} = C - v^3 a_1'(v^4), \quad F_{13} = -a_1(v^4), \quad F_{14} = v^3 a_1'(v^4),\\ &F_{23} = v^3 a_3'(v^4) + a_2(v^4), \quad F_{24} = a_3'(v^4), \quad F_{34} = -v^3 a_3'(v^4) + B,\end{aligned} \tag{15}$$

где C, B — произвольные постоянные, $a_1(v^4)$, $a_2(v^4)$, $a_3(v^4)$ *— произвольные гладкие функции* ($v^3 = x^3$, $v^4 = x^2 - x^4$).

Пример 2. В качестве представителя класса $W_{2,1c}$ может служить тензор F_{ij} вида

$$F_{12} = -F_{14} = -x^3 f'(v^4), \quad F_{13} = -f(v^4), \quad F_{23} = F_{24} = F_{34} = 0, \tag{16}$$

где $f(v^4)$ — произвольная гладкая функция.

Предложение 2. *Если* $f'(v^4) \neq 0$ *и* $f''(v^4) \neq 0$, *то электромагнитная волна вида* (16) *допускает группу* $G_S = G_{2,1c}$.

2.3. Класс $W_{2,4}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,4} = L\{e_2 + e_4, e_{13} + \lambda e_2\}$ соответствует класс электромагнитных волн, определяемый соотношениями

$$\begin{gathered} F_{12} = c_1 \cos\varphi + c_2 \sin\varphi, \quad F_{23} = c_1 \sin\varphi - c_2 \cos\varphi, \\ F_{14} = c_3 \cos\varphi + c_4 \sin\varphi, \quad F_{34} = -c_3 \sin\varphi + c_4 \cos\varphi, \\ F_{13} = F_{13}(r, \tilde{x}^2 - \tilde{x}^4), \quad F_{24} = F_{24}(r, \tilde{x}^2 - \tilde{x}^4), \end{gathered} \tag{17}$$

где замена координат осуществляется по формулам

$$x^1 = r \sin\varphi, \quad x^2 = \lambda\varphi + \tilde{x}^2, \quad x^3 = r\cos\varphi, \quad x^4 = \tilde{x}^4, \tag{18}$$

а функции $C_i(r, \tilde{x}^2 - \tilde{x}^4)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) и F_{13}, F_{24} удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial c_1}{\partial r} + \frac{c_1}{r} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^2} = 0, \quad \frac{\partial F_{24}}{\partial r} + \frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^2} = 0, \\ \frac{\partial c_3}{\partial r} + \frac{c_3}{r} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \quad \frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \\ \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial r} - \frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \quad \frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \\ \frac{\partial c_2}{\partial r} - \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{c_2}{r} - \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \quad \frac{\partial c_4}{\partial r} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{c_4}{r} + \frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^2} = 0. \end{gathered}$$

2.4. Класс $W_{3,1c}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,1c} = L\{e_1, e_3, e_2 + e_4\}$ соответствует найденный в [6] класс пространств Максвелла

$$\begin{gathered} F_{ij} = F_{ij}(v^4) = F_{ij}(x^2 - x^4) \quad (ij = 12, 23, 24), \\ F_{13} = C_1, \quad F_{14} = C_2 - F_{12}, \quad F_{34} = C_3 + F_{23}, \end{gathered} \tag{19}$$

где C_i — произвольные постоянные ($i = 1, 2, 3$), а $F_{ij} = F_{ij}(v^4)$ — гладкие функции. Для нахождения класса $W_{3,1c}$ подставим (19) в (3). Получим

$$F'_{24}(v^4) = 0.$$

Следовательно, $F_{24} = C_4 = \mathrm{const}$.

Таким образом, имеем следующее утверждение.

Утверждение 3. *Класс $W_{3,1c}$ задаётся тензором F_{ij} вида*

$$\begin{gathered} F_{ij} = F_{ij}(v^4) = F_{ij}(x^2 - x^4) \quad (ij = 12, 23), \\ F_{13} = C_1, \quad F_{14} = C_2 - F_{12}, \quad F_{34} = C_3 + F_{23}, \quad F_{24} = C_4, \end{gathered} \tag{20}$$

где C_i — произвольные постоянные ($i = 1, \ldots, 4$), а $F_{ij}(v^4)$ — произвольная гладкая функция.

Пример 3. Положим в (20)

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0, \quad F_{23} = 0.$$

Получим электромагнитную волну вида

$$F_{12} = -F_{14} = -\Phi(v^4), \quad F_{24} = \mathrm{const}, \quad F_{13} = F_{23} = F_{34} = 0, \tag{21}$$

где $\Phi(v^4) = \Phi(x^2 - x^4)$ — произвольная гладкая функция.

Предложение 3. *Электромагнитная волна, определяемая тензором* (21), *допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,1c}$, если $\Phi'(v^4) \neq \mathrm{const}$, а функции $\Phi'(v^4)$ и $\Phi(v^4)$ линейно независимы.*

2.5. Класс $W_{4,4a}$

Алгебре $\mathcal{L}_{4,4a} = L\{e_{13} + \lambda e_2, e_1, e_3, e_2 + e_4\}$ соответствует класс пространств Максвелла, задаваемый тензором [6]

$$\begin{gathered} F_{12} = -F_{14} = b_1 \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda} - b_2 \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ F_{23} = F_{34} = b_1 \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda} + b_2 \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ F_{13} = b_3, \quad F_{24} = b_4 \quad (b_i = \mathrm{const},\ i = 1, 2, 3, 4). \end{gathered} \tag{22}$$

Тензор (22) обращает второе уравнение Максвелла (3) в тождество. Отсюда следует утверждение 4.

Утверждение 4. *Класс $W_{4,4a}$ определяется соотношениями* (22).

Предложение 4. *Электромагнитная волна вида* (22) *допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,4a}$, если $b_1 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$.*

2.6. Класс $W_{4,4b}$

Алгебре $\mathcal{L}_{4,4b} = L\{e_{13}, e_1, e_3, e_2 + e_4\}$ соответствует класс пространств Максвелла, найденный в [6]. Тензор F_{ij} этого класса имеет вид

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{13} = \Phi_1(x^2 - x^4), \quad F_{24} = \Phi_2(x^2 - x^4), \tag{23}$$

где $\Phi_1(v^4)$, $\Phi_2(v^4)$ — гладкие функции одной переменной ($v^4 = x^2 - x^4$).

Для нахождения класса электромагнитных волн $W_{4,4b}$ подставим (23) в (3), в результате получим, что $\Phi_2 = \mathrm{const}$.

Таким образом, имеем следующее утверждение.

Утверждение 5. *Тензор F_{ij} класса $W_{4,4b}$ имеет вид*

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{13} = \Phi_1(x^2 - x^4), \quad F_{24} = \mathrm{const}, \tag{24}$$

где $\Phi_1(v^4)$ — произвольная гладкая функция.

Предложение 5. *Электромагнитная волна, определяемая тензором* (24), *допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,4b}$, если $\Phi_1(v^4) \neq \mathrm{const}$.*

2.7. Класс $W_{4,5}$

В [6] найден класс пространств Максвелла, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{4,5} = L\{e_2 + e_4, e_1, e_3, e_{24}\}$. Тензор F_{ij} имеет вид

$$\begin{gathered} F_{12} = -F_{14} = \frac{b_1}{x^2 - x^4}, \quad F_{23} = F_{34} = \frac{b_2}{x^2 - x^4}, \\ F_{13} = b_3, \quad F_{24} = b_4 \quad (b_k = \mathrm{const},\ k = 1,2,3,4). \end{gathered} \tag{25}$$

Легко проверить, что компоненты тензора F_{ij} удовлетворяют второму уравнению Максвелла (3).

Утверждение 6. *Класс $W_{4,5}$ задаётся условиями* (25).

Предложение 6. *Электромагнитная волна, определяемая тензором* (25), *инвариантна относительно четырёхмерной группы $G_S = G_{4,5}$ при условии, что $b_1 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$.*

2.8. Класс $W_{4,7}$

Алгебре $\mathcal{L}_{4,7} = L\{e_{13} + \lambda e_{24}, e_1, e_3, e_2 + e_4\}$ соответствует класс пространств Максвелла, задаваемый тензором [6]

$$\begin{aligned} F_{12} = F_{14} = (c_1 \sin\varphi - c_2 \cos\varphi) e^{\lambda\varphi}, \quad F_{13} = B = \mathrm{const}, \\ F_{23} = F_{34} = (c_1 \cos\varphi + c_2 \sin\varphi) e^{\lambda\varphi}, \quad F_{24} = E = \mathrm{const}, \end{aligned} \tag{26}$$

где $c_1 = c_1(\rho)$, $c_2 = c_2(\rho)$ — произвольные функции, а переменные ρ и φ связаны с галилеевыми координатами $\{x^i\}$ формулами

$$x^2 = \rho\,\mathrm{ch}(\lambda\varphi), \quad x^4 = \rho\,\mathrm{sh}(\lambda\varphi).$$

Подставляя (26) в (3), получим в результате следующее утверждение.

Утверждение 7. *Тензор класса $W_{4,7}$ задаётся формулами* (26), *где*

$$c_1(\rho) = \frac{1}{\rho}\left(A\cos\frac{\ln\rho}{\lambda} + D\sin\frac{\ln\rho}{\lambda}\right), \quad c_2(\rho) = \frac{1}{\rho}\left(A\sin\frac{\ln\rho}{\lambda} + D\cos\frac{\ln\rho}{\lambda}\right)$$

(*A и D — произвольные постоянные*).

2.9. Класс $W_{5,4}$

Алгебре $\mathcal{L}_{5,4} = L\{e_2 + e_4, e_1, e_3, e_{13}, e_{24}\}$ соответствует следующий класс пространств Максвелла, найденный в работе [6]:

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{13} = C_1, \quad F_{24} = C_2 \quad (C_1, C_2 = \mathrm{const}). \tag{27}$$

Так как $F_{ij} = \mathrm{const}$, то пространства Максвелла, определяемые формулами (27), не являются электромагнитными волнами. Таким образом, имеем следующее утверждение.

Утверждение 8. *Класс $W_{5,4}$ пуст.*

Автор признательна М. А. Паринову за постановку задачи и руководство исследованиями.

Литература

[1] Белько И. В. Подгруппы группы Лоренца—Пуанкаре // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1971. — № 1. — С. 5—13.

[2] Иванова А. С. Групповая классификация электромагнитных волн, допускающих смещение по одной из пространственных координат // Научные труды Ивановского государственного университета. Математика. — 1999. — Вып. 2. — С. 50—62.

[3] Иванова А. С. Групповая классификация электромагнитных волн, допускающих эллиптические винты // Математика и её приложения: Журнал Ивановского математического общества. — 2004. — № 1. — С. 51—62.

[4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1967.

[5] Морозова Е. В., Паринов М. А. Групповая классификация пространств Максвелла, допускающих трансляции вдоль изотропных прямых // Научные труды Ивановского государственного университета. Математика. — 2001. — Вып. 4 — С. 87—94.

[6] Паринов М. А. Пространства Эйнштейна—Максвелла и уравнения Лоренца. — Иваново: Изд-во ИвГУ, 2003.