Методы геометрии дифференциальных уравнений в анализе интегрируемых моделей теории поля*

А. В. КИСЕЛЁВ
Ивановский государственный энергетический университет,
Университет Лечче
e-mail: arthemy@poincare.unile.it

УДК 517.957+514.763.85

Ключевые слова: уравнение Тоды, уравнение Кортевега—де Фриза, нелинейное уравнение Шрёдингера, симметрии, законы сохранения, гамильтоновы структуры, преобразования Беклунда, представления нулевой кривизны.

Аннотация

В работе рассматриваются алгебро-геометрические свойства гиперболических уравнений Тоды $u_{xy} = \exp(Ku)$, ассоциированных с невырожденными симметризуемыми матрицами K. Построена иерархия аналогов потенциального модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза $u_t = u_{xxx} + u_x^3$ и установлена её связь с иерархией уравнения Кортевега—де Фриза $T_t = T_{xxx} + TT_x$. Получено описание групповых структур для бездисперсионного $(2+1)$-мерного уравнения Тоды $u_{xy} = \exp(-u_{zz})$ и установлены геометрические свойства многокомпонентных систем $\Psi_t = \boldsymbol{i}\Psi_{xx} + \boldsymbol{i}f(|\Psi|)\Psi$ типа нелинейного уравнения Шрёдингера (мультисолитонных комплексов).

Abstract

A. V. Kiselev, Methods of geometry of differential equations in analysis of integrable models of field theory, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 1, pp. 57—165.

In this paper, we investigate algebraic and geometric properties of hyperbolic Toda equations $u_{xy} = \exp(Ku)$ associated with nondegenerate symmetrizable matrices K. A hierarchy of analogues of the potential modified Korteweg—de Vries equation $u_t = u_{xxx} + u_x^3$ is constructed and its relationship with the hierarchy for the Korteweg—de Vries equation $T_t = T_{xxx} + TT_x$ is established. Group-theoretic structures for the dispersionless $(2+1)$-dimensional Toda equation $u_{xy} = \exp(-u_{zz})$ are obtained. Geometric properties of the multi-component nonlinear Schrödinger equation type systems $\Psi_t = \boldsymbol{i}\Psi_{xx} + \boldsymbol{i}f(|\Psi|)\Psi$ (multi-soliton complexes) are described.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке стипендии Правительства Российской Федерации, гранта INTAS YS 2001/2-33 и гранта № 650 CP/D университета Лечче.

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 1, с. 57—165.

Содержание

Каждый пишет, что он слышит.
Каждый слышит, как он дышит.
Булат Окуджава

Уравнения Тоды [39] и, в частности, уравнения Тоды, ассоциированные с полупростыми алгебрами Ли [32], играют существенную роль в построении и анализе моделей современной конформной теории поля. Известны многочисленные приложения уравнений Тоды в теории гравитации [43, 47] и теории Янга—Миллса [76], в дифференциальной геометрии [60, 66], задачах классификации нелинейных уравнений в частных производных [14], установлена их связь с интегрируемыми динамическими системами [11], фробениусовыми многообразиями и структурами ассоциативных алгебр [52]. В перечисленных выше областях математической физики непосредственно к уравнениям Тоды сводятся задачи изучения таких систем, как антиавтодуальные вакуумные уравнения Эйнштейна, уравнения Янга—Миллса, структурные уравнения комплексных кривых в кэлеровых многообразиях, динамика инвариантов Лапласа дифференциальных уравнений, уравнение Кортевега—де Фриза, уравнение WDVV (Witten—Dijkraaf—H. Verlinde—E. Verlinde) и т. д.

Алгебраический подход к изучению гиперболических уравнений Тоды

$$\boldsymbol{u}_{xy} = \exp(K\boldsymbol{u})$$

был развит в работах А. Н. Лезнова и М. В. Савельева [32], В. Г. Дринфельда и В. В. Соколова [11], Б. А. Дубровина [52] и др., где уравнения Тоды интерпретированы как уравнения плоских связностей на полупростых комплексных алгебрах Ли (или алгебрах Каца—Муди) с матрицей Картана K. Известно, что такие уравнения, называемые уравнениями, ассоциированными с алгебрами Ли (соответственно с алгебрами Каца—Муди), точно интегрируемы [32]. В фундаментальной работе [11] им были поставлены в соответствие интегрируемые иерархии Дринфельда—Соколова — аналоги бигамильтоновых уравнений Кортевега—де Фриза. Между тем, алгебраический подход не в полной мере учитывает геометрические свойства самих уравнений Тоды, например такие, как структура образующих алгебры Ли нётеровых симметрий, наличие у этих уравнений операторов рекурсии и взаимосвязь допускаемых уравнениями Тоды законов сохранения с гамильтоновыми структурами для уравнений Кортевега—де Фриза. В частности, до настоящего времени не было известно, что перечисленные свойства уравнений Тоды сохраняются при переходе к значительно более общему случаю уравнений $\boldsymbol{u}_{xy} = \exp(K\boldsymbol{u})$, ассоциированных с невырожденной симметризуемой матрицей K, не обязательно матрицей Картана.

Мощным средством изучения алгебро-геометрических структур служат гомологические методы, развитые в работах И. С. Красильщика, В. В. Лычагина, А. М. Виноградова [5, 74, 75, 94] и их научной школы. В связи со значительными успехами методов геометрии дифференциальных уравнений естественно применить их к исследованию уравнений Тоды и родственных им систем.

В настоящей работе проводится детальный анализ геометрических свойств уравнений Тоды. На их основе построены новые гамильтоновы эволюционные системы и установлена нетривиальная взаимосвязь между уравнениями Тоды и иными уравнениями математической физики, например уравнением Кортевега—де Фриза.

Введение

Одним из модельных уравнений математической физики является интегрируемая система с экспоненциальным взаимодействием — дискретная одномерная цепочка Тоды [39]

$$\ddot{q}_n = \exp(q_{n-1} - q_n) - \exp(q_n - q_{n+1}), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad q_n = q_n(\tau). \tag{0.1}$$

Непрерывным аналогом уравнения (0.1) служит уравнение

$$\varepsilon^2 \cdot q_{\tau\tau} = \exp(q(z-\varepsilon) - q(z)) - \exp(q(z) - q(z+\varepsilon)), \tag{0.2}$$

где $\varepsilon \geqslant 0$ и $q = q(\tau, z)$. Уравнение (0.2) может быть получено из соотношения $q_n(\tau) = q(\tau, n\varepsilon)$. Пределом уравнения (0.2) при $\varepsilon \to +0$ является уравнение $u_{\tau\tau} = \pm D_z^2 \circ \exp(u)$, $u = u(\tau, z)$, где D_z — полная производная по z, $u_n(\tau) \equiv \equiv q_{n-1} - q_n = u(\tau, n\varepsilon)$. В [52] установлено, что при $\varepsilon = \boldsymbol{i}$ уравнение (0.2) заменой редуцируется к нелинейному уравнению Шрёдингера. В данной работе рассматриваются многокомпонентные аналоги этого уравнения (мультисолитонные комплексы, см. [42])

$$\Psi_t = \boldsymbol{i}\Psi_{xx} + \boldsymbol{i}f(|\Psi|)\Psi, \tag{0.3}$$

где Ψ — m-элементный вектор и $\boldsymbol{i}$ — мнимая единица, а $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Независимо был произведён процесс «двумеризации» [32] уравнений Тоды (0.1): вместо ускорения $\partial^2/\partial\tau^2$ по времени $t \in \mathbb{R}$ в уравнение

$$u_{xy} = \exp(Ku) \tag{0.4}$$

входит даламбертиан $\partial^2/\partial x\partial y$, причём $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Здесь

$$K = \left\| k_{ij} = 2\frac{(\vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j)}{|\vec{\alpha}_j|^2} \right\|$$

есть матрица Картана комплексной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ранга r с системой простых корней $\langle\vec{\alpha}_i\rangle$, или, более общо, невырожденная симметризуемая (см. ниже) матрица, а поля Тоды $u^j(x,y)$ приобретают индекс $j \in [1,r]$.

Выберем в уравнении (0.4) в качестве K матрицу Картана алгебры Ли серии A_r и положим $u^j(x,y) = u(x,y,z)|_{z=j\varepsilon}$ при $1 \leqslant j \leqslant r$. Непрерывный предел при $r \to \infty$ и $\varepsilon \to +0$ уравнений (0.4), бездисперсионное уравнение Тоды

$$u_{xy} = \exp(-u_{zz}), \tag{0.5}$$

возникает во многих задачах математической физики, например в теории гравитации [47] (см. также работу [38] и ссылки в ней).

Эта работа посвящена изучению алгебро-геометрических свойств уравнений Тоды (0.4), (0.5) и нелинейного уравнения Шрёдингера (0.3), а также установлению взаимосвязи между уравнениями Тоды (0.4) и иерархиями уравнений Кортевега—де Фриза (1.4) и (1.11). Для исследования геометрических свойств указанных выше уравнений применяются современные когомологические методы и алгоритмы. В рамках данного подхода мы отказываемся от громоздкого координатного описания исследуемых объектов и оперируем понятиями гомологической алгебры в категории бесконечно продолженных дифференциальных уравнений.

Приведённые в данной работе результаты содержатся также в работах [19—30, 68—72].

Содержание статьи таково.

Во введении заданы обозначения, сформулированы необходимые определения и кратко изложены основные результаты.

В первой главе рассмотрено несколько важных свойств алгебры симметрий и законы сохранения для уравнений Тоды. В первом разделе содержится обзор известных свойств гиперболических уравнений Тоды, ассоциированных с полупростыми алгебрами Ли, и дано определение уравнений Тоды, ассоциированных с невырожденными симметризуемыми матрицами. Именно эти, существенно более общие уравнения рассматриваются в дальнейшем. Во втором разделе первой главы описаны нётеровы симметрии лагранжиана Тоды, в третьем разделе построен континуум операторов рекурсии для уравнений Тоды.

Во второй главе построена коммутативная иерархия $\mathfrak{A}$ аналогов потенциального модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза, которые образуют коммутативную подалгебру нётеровых симметрий уравнений Тоды. Также во второй главе рассмотрены некоторые вопросы гамильтонова формализма для самих уравнений Тоды и установлена взаимосвязь иерархии $\mathfrak{A}$ с высшими уравнениями Кортевега—де Фриза.

Третья глава содержит два примера применения методов геометрии дифференциальных уравнений в исследовании бездисперсионного уравнения Тоды и связанного с ним многокомпонентного аналога нелинейного уравнения Шрёдингера.

В четвёртой главе рассмотрены преобразования Беклунда для уравнений Тоды, ассоциированных с алгеброй $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, и их однопараметрические деформации.

Приведены примеры интегрирования преобразований Беклунда, указаны представления нулевой кривизны и соотношения между перечисленными структурами.

1. Основные определения и обозначения

Начнём с формулировки нескольких важных определений из геометрии дифференциальных уравнений, следуя [2, 3, 5, 19, 20, 74, 75, 94].

1.1. Дифференциальные уравнения и их симметрии

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных $F^\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mathbf{p}) = 0$, $\alpha = 1, \ldots, r \geqslant 1$, порядка k, где F^α — гладкие функции, $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ — независимые переменные, $\boldsymbol{u} = (u^1, \ldots, u^m)$ — неизвестные функции и

$$\mathbf{p} = \left\{ p^j_\sigma \;\middle|\; p^j_\sigma = \frac{\partial^{|\sigma|} u^j}{\partial (x^1)^{i_1} \ldots \partial (x^n)^{i_n}},\ \sigma = \{i_1, \ldots, i_n\},\ |\sigma| = i_1 + \ldots + i_n \leqslant k \right\}.$$

Рассмотрим гладкое тривиальное m-мерное расслоение

$$\pi\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Пространство k-струй $J^k(\pi)$ расслоения π — это объединение $\bigcup\limits_x J^k_x$, где J^k_x — множество классов $[s]^k_x$ эквивалентности сечений s расслоения π, касающихся с порядком k в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Определим последовательность гладких расслоений $\pi_{k+1,k}\colon J^{k+1}(\pi) \to J^k(\pi)$ формулой $\pi_{k+1,k}([s]^{k+1}_x) = [s]^k_x$. Через π_k обозначим гладкое расслоение $\pi_k\colon J^k(\pi) \to \mathbb{R}^n$, заданное правилом $\pi_k([s]^k_x) = x$. Введём ещё такое обозначение: $\mathcal{F}_k(\pi)$ — это кольцо гладких (C^∞) функций на $J^k(\pi)$. Наконец, положим $\mathcal{F}_{-\infty}(\pi) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Переменные $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, $\mathbf{p}$ примем за координаты в пространстве струй $J^k(\pi)$. Согласно лемме Адамара [35] два сечения $s, s' \in \Gamma(\pi)$ расслоения π эквивалентны в $J^k_x(\pi)$ тогда и только тогда, когда их частные производные в точке x совпадают вплоть до порядка k.

Дифференциальное уравнение порядка k с n независимыми и r зависимыми переменными будем понимать как поверхность

$$\mathcal{E} = \{F^\alpha = 0\} \subset J^k(\pi)$$

в пространстве струй. Уравнение $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ *регулярно*, если отображение $\pi_k|_{\mathcal{E}}\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^n$ является сюръекцией.

Определение 1.1. *Плоскостью Картана $C_\theta = C^k_\theta$* в точке $\theta \in J^k(\pi)$ называется линейная оболочка всех касательных плоскостей к графикам Γ^k_s k-струй сечений s расслоения π, для которых $[s]^k_x = \theta$. Объединение $\mathcal{C}$ отображений $\theta \mapsto C_\theta$ по всем $\theta \in J^k(\pi)$ называется распределением Картана.

Определение 1.2. Подмножество

$$\mathcal{E}^{(l)} = \{\theta_{k+l} = [s]_x^{k+l},\ s \in \Gamma(\pi) \mid j_k(s)(x) \text{ касается } \mathcal{E} \text{ в точке } \theta_k = [s]_x^k \text{ с порядком} \geqslant l\}$$

в $J^{k+l}(\pi)$ называется *l-м продолжением* уравнения $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$. Обратный предел $\mathcal{E}^\infty = \operatorname*{proj\,lim}_{l\to\infty} \mathcal{E}^{(l)}$ относительно проекций

$$\pi_{k+l+1,k+l}\colon J^{k+l+1}(\pi) \to J^{k+l}(\pi)$$

называется *бесконечным продолжением* уравнения $\mathcal{E}$. Ниже мы будем опускать индекс ∞, если из контекста ясно, что речь идёт о бесконечном продолжении $\mathcal{E}^\infty$, а не об исходном уравнении $\mathcal{E}$.

Пространством бесконечных струй $J^\infty(\pi)$ называется бесконечное продолжение пустого уравнения $\{0 = 0\} \simeq J^0(\pi)$. Определим проекции

$$\pi_{\infty,k}\colon J^\infty(\pi) \to J^k(\pi) \quad \text{и} \quad \pi_\infty\colon J^\infty(\pi) \to \mathbb{R}^n$$

формулами

$$\pi_{\infty,k}(\theta_\infty) = \theta_k \quad \text{и} \quad \pi_\infty(\theta_\infty) = x,$$

где $\theta_\infty = \{x, \theta_k \in J^k(\pi) \mid k \in \mathbb{N}\} \in J^\infty(\pi)$. Алгебра $\mathcal{F}(\pi)$ гладких функций на $J^\infty(\pi)$ задана следующим образом: положим

$$\mathcal{F}(\pi) = \bigcup_k \mathcal{F}_k(\pi), \quad k \in \{-\infty\} \cup \mathbb{N}.$$

Модуль $\Lambda^i(\pi)$ дифференциальных i-форм на $J^\infty(\pi)$ определён соотношением

$$\Lambda^i(\pi) = \bigoplus_{k\geqslant 0} \Lambda^i(J^k(\pi)).$$

Ограничение $\mathcal{C}_\mathcal{E}$ распределения Картана $\mathcal{C}$ на уравнение $\mathcal{E}^\infty$ является n-мерным фробениусовым распределением, которое задаёт разложение касательного пространства к $\mathcal{E}^\infty$ на горизонтальное и вертикальное подпространства. Горизонтальная компонента порождена полными производными $D_i = \widehat{\partial/\partial x^i}$, ограниченными на уравнение $\mathcal{E}^\infty$ и обозначаемыми в дальнейшем $\bar{D}_i$. Двойственное описание распределения Картана $\mathcal{C}_\mathcal{E}$ на языке дифференциальных форм таково: дифференциал де Рама на $\mathcal{E}^\infty$ представи́м в виде ограничения на $\mathcal{E}^\infty$ суммы горизонтального дифференциала $\mathrm{d}_h = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x^i \otimes D_i$, то есть поднятия дифференциала с базы расслоения π, и картановского дифференциала $\mathrm{d}_\mathcal{C} = \mathrm{d} - \mathrm{d}_h$. Соответственно, пространство $\Lambda^l(\mathcal{E})$ дифференциальных l-форм на уравнении $\mathcal{E}^\infty$ является прямой суммой

$$\Lambda^l(\mathcal{E}) = \bigoplus_{i+j=l} \bar{\Lambda}^i(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{C}^j\Lambda(\mathcal{E})$$

горизонтальных i-форм $\bar{\Lambda}^i(\mathcal{E})$ и картановских j-форм $\mathcal{C}^j\Lambda(\mathcal{E})$. Формы Картана $\omega_\sigma^j \equiv \mathrm{d}_\mathcal{C}(u_\sigma^j)$ определяют базис в $\mathcal{C}^1\Lambda(\mathcal{E})$, здесь u_σ^j суть координаты на $\mathcal{E}^\infty$.

Горизонтальный дифференциал $\bar{\mathrm{d}}_h$ задаёт горизонтальный комплекс де Рама

$$0 \to \mathcal{F}(\pi) \xrightarrow{\bar{\mathrm{d}}_h} \bar{\Lambda}^1(\pi) \xrightarrow{\bar{\mathrm{d}}_h} \ldots \xrightarrow{\bar{\mathrm{d}}_h} \bar{\Lambda}^n(\pi) \to 0$$

пространства $J^\infty(\pi)$, когомологии которого называются горизонтальными когомологиями и обозначаются через $\bar{H}^i(\pi)$. Горизонтальные когомологии этого комплекса, ограниченного на уравнение $\mathcal{E}^\infty$, будем обозначать через $\bar{H}^i(\mathcal{E})$. Из определения следует, что элементы $[\eta] \in \bar{H}^{n-1}(\mathcal{E})$ — это законы сохранения для уравнения $\mathcal{E}$.

Определение 1.3.

1. *Эволюционное дифференцирование* — это оператор вида

$$\mathrm{Э}_\varphi = \sum_{j,\sigma} D_\sigma(\varphi^j)\,\frac{\partial}{\partial p^j_\sigma},$$

где $\varphi^j \in C^\infty(J^k(\pi))$ для некоторого k, а D_σ — композиция полных производных D_i, соответствующая мультииндексу σ. $\mathcal{F}(\pi)$-модуль $\Gamma(\pi) \otimes_{\mathcal{F}_{-\infty}} \mathcal{F}(\pi)$ обозначим через $\varkappa$. Введём обозначение $\hat{\varkappa} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\pi)}(\varkappa, \bar{\Lambda}^n(\pi))$.

2. Оператор ℓ_ψ, действующий по правилу $\ell_\psi(\varphi) = \mathrm{Э}_\varphi(\psi)$, называется оператором *линеаризации* нелинейного дифференциального оператора Δ_ψ, заданного функцией $\psi \in \mathcal{F}_k(\pi)$; в координатах $\ell_\psi = \left\| \sum_\sigma \frac{\partial \psi^i}{\partial u^j_\sigma} \cdot D_\sigma \cdot \mathbf{1}_{ij} \right\|$.

Любое поле Ли X, то есть поле, сохраняющее распределение Картана $\mathcal{C}$, разложимо в сумму $X = \mathrm{Э}_\varphi + Y$, где $Y \in \mathcal{C}$, а $\mathrm{Э}_\varphi$ — эволюционное поле. Любое инфинитезимальное преобразование пространства $J^0(\pi)$ можно продолжить до поля Ли. В координатах правило поднятия таково: полю

$$X^0 = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial u^j}$$

ставится в соответствие поле

$$\hat{X} = \sum_i a_i\, D_i + \sum_{i,j} \mathrm{Э}_{b_j - a_i p^j_i}$$

(см., например, (2.9)).

Определение 1.4. *Симметрией* уравнения $\mathcal{E}^\infty$ называется π-вертикальное векторное поле X, сохраняющее распределение Картана $\mathcal{C}_\mathcal{E} = \bigcup_{\theta \in \mathcal{E}^\infty} C_\theta$:

$$[X, \mathcal{C}_\mathcal{E}] \subset \mathcal{C}_\mathcal{E}.$$

Теорема 1.5 ([5]). *Если $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — такое уравнение*

$$\{F^1 = 0, \ldots, F^r = 0\},$$

что $\pi_{\infty,0}(\mathcal{E}^\infty) = J^0(\pi)$, то алгебра Ли симметрий $\mathrm{sym}\,\mathcal{E}^\infty$ изоморфна алгебре Ли решений системы определяющих уравнений $\mathrm{Э}_\varphi(F) = 0$ на $\mathcal{E}$, или, что то же самое в силу определения оператора линеаризации ℓ, уравнения $\ell_F(\varphi) = 0$

на $\mathcal{E}$, где $\varphi \in \varkappa|_{\mathcal{E}^\infty}$. В алгебре $\operatorname{sym}\mathcal{E}^\infty$ решений φ структура алгебры Ли задана скобкой

$$\{\varphi,\psi\}_{\mathcal{E}^\infty} = (\mathfrak{Э}_\varphi(\psi) - \mathfrak{Э}_\psi(\varphi))|_{\mathcal{E}^\infty}.$$

Будем в дальнейшем отождествлять понятия производящих сечений $\varphi = {}^t(\varphi^1,\ldots,\varphi^r)$ симметрий $\mathfrak{Э}_\varphi = \sum\limits_{i,\sigma} \bar{D}_\sigma(\varphi^i)\cdot \frac{\partial}{\partial u^i_\sigma}$ (здесь $u^i_\sigma \equiv D_\sigma(u^i)$) дифференциальных уравнений с самими этими симметриями (см. [11, 28]). Неформально говоря, компоненты φ^i производящего сечения φ показывают скорость u^i_t эволюции зависимой переменной u^i вдоль «интегральных траекторий» полей $\mathfrak{Э}_\varphi$.

Определение 1.6. Пусть $\varphi(u,\ldots,u_\sigma)$ — симметрия дифференциального уравнения $\mathcal{E}$, здесь σ — мультииндекс и

$$u_\sigma = \frac{\partial^{|\sigma|}u}{\partial(x^1)^{\sigma_1}\ldots\partial(x^n)^{\sigma_n}}$$

есть производная зависимой переменной u. Предположим, что существует поток $A_\tau\colon u(x,0)\mapsto u(x,\tau)$ симметрии φ, который определён на решениях эволюционного уравнения $u_\tau = \varphi$ и переводит решения $s(x) = u(x,\tau)|_{\tau=0}$ уравнения $\mathcal{E}$ в решения того же уравнения при $\tau > 0$. Решение $s(x)$ уравнения $\mathcal{E}$ называется φ-инвариантным, если оно является стационарным решением эволюционного уравнения $u_\tau = \varphi(u,\ldots,u_\sigma)$. Таким образом, поиск φ-инвариантных решений заданного уравнения $\mathcal{E} = \{F = 0\}$ сводится к рассмотрению системы $\{F = 0,\ \varphi = 0\}$.

В множестве эволюционных уравнений $\boldsymbol{u}_t = f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\mathbf{p})$ выделим важный класс *гамильтоновых* уравнений. Для этого сформулируем определения скобки Пуассона и гамильтонова дифференциального оператора [5, 6, 67].

Определение 1.7. Пусть $A\colon \hat{\varkappa}(\pi)\to\varkappa(\pi)$ есть $(m\times m)$-матричный оператор в полных производных: $A = \|A^{ij}\|$, $A^{ij} = A^{ij}_\sigma\cdot D_\sigma$. Рассмотрим пару лагранжианов $\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2 \in \bar{H}^n(\pi)$. По определению скобка Пуассона (вариационная скобка) на $\bar{H}^n(\pi)$ задана формулой

$$\{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2\}_A = \langle \mathbf{E}(\mathcal{L}_1), A(\mathbf{E}(\mathcal{L}_2))\rangle = \left[\sum_{i,j}\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta u^i}\cdot A^{ij}\left(\frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta u^j}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right], \tag{1.1}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — это естественное спаривание $\hat{\varkappa}(\pi)\times\varkappa(\pi)\to\bar{H}^n(\pi)$, а $[\cdot]$ — взятие класса эквивалентности дифференциальных форм.

Определение 1.8. Введённый выше оператор A называется *гамильтоновым*, если определённая формулой (1.1) скобка задаёт на $\bar{H}^n(\pi)$ структуру алгебры Ли над полем $\mathbb{R}$, то есть выполняются соотношения

$$\{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2\}_A + \{\mathcal{L}_2,\mathcal{L}_1\}_A = 0, \tag{1.2a}$$

$$\{\{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2\}_A,\mathcal{L}_3\}_A + \{\{\mathcal{L}_2,\mathcal{L}_3\}_A,\mathcal{L}_1\}_A + \{\{\mathcal{L}_3,\mathcal{L}_1\}_A,\mathcal{L}_2\}_A = 0. \tag{1.2b}$$

В этом случае скобка $\{\cdot,\cdot\}_A$ называется *гамильтоновой структурой*.

Гамильтоновы операторы A_1 и A_2 называются *совместными*, если их сумма $\lambda A_1 + \mu A_2$ вновь является гамильтоновым оператором при любых $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Условие (1.2a) выполнено, если и только если $A + A^* = 0$. В [5, 67, 74, 75] приведено несколько критериев[1], которые позволяют установить, является ли заданный оператор A гамильтоновым. Например, всякий кососопряжённый $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами гамильтонов.

Определение 1.9. Эволюционное уравнение

$$\boldsymbol{u}_t = A(\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}(\mathcal{H})) \tag{1.3}$$

называется *гамильтоновым эволюционным уравнением*, соответствующим гамильтониану $\mathcal{H} \in \bar{H}^n(\pi)$ и гамильтонову оператору A.

Пример 1.10 ([78]). Уравнение Кортевега—де Фриза

$$T_t = -\beta T_{xxx} + 3TT_x, \quad \beta = \mathrm{const}, \tag{1.4}$$

гамильтоново относительно пары совместных гамильтоновых операторов

$$\hat{B}_1 = D_x, \quad \hat{B}_2 = -\beta D_x^3 + 2T \cdot D_x + T_x. \tag{1.5}$$

В самом деле, имеем

$$T_t = \hat{B}_1 \circ \mathbf{E}_T \left(\left(\frac{1}{2}\beta T_x^2 + \frac{1}{2}T^3 \right) \mathrm{d}x \right) = \hat{B}_2 \circ \mathbf{E}_T \left(\frac{1}{2}T^2 \, \mathrm{d}x \right).$$

1.2. О законах сохранения

В данном разделе сформулированы важные определения и утверждения о законах сохранения для дифференциальных уравнений и установлены полезные факты о связи симметрий и законов сохранения для уравнений Эйлера—Лагранжа.

Определение 1.11. *Закон сохранения*

$$[\eta] \in \bar{H}^{n-1}(\mathcal{E}) \equiv$$
$$\equiv \{\omega \in \bar{\Lambda}^{n-1}(\mathcal{E}) \mid \bar{\mathrm{d}}_h(\omega) = 0\} / \{\omega \in \bar{\Lambda}^{n-1}(\mathcal{E}) \mid \omega = \bar{\mathrm{d}}_h\gamma,\ \gamma \in \bar{\Lambda}^{n-2}(\mathcal{E})\}$$

для уравнения $\mathcal{E}$ — это класс эквивалентности горизонтальных $(n-1)$-форм $\eta \in \bar{\Lambda}^{n-1}(\mathcal{E})$, замкнутых на $\mathcal{E}$,

$$\bar{\mathrm{d}}_h\eta = \nabla(F)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

по модулю точных форм $\bar{\mathrm{d}}_h\gamma$, $\gamma \in \bar{\Lambda}^{n-2}(\mathcal{E})$, где $\bar{\mathrm{d}}_h = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{d}x^i \otimes \bar{D}_i$ — это ограничение горизонтального дифференциала d_h на $\mathcal{E}$, D_i — полная производная по x^i, а ∇ — оператор в полных производных. Представители η классов эквивалентности $[\eta] \in \bar{H}^{n-1}(\mathcal{E})$ называются *сохраняющимися токами* для уравнения $\mathcal{E}$.

[1]В настоящее время разработана теория гамильтоновых операторов как *пуассоновых бивекторов* [6, 67]. Например, первая гамильтонова структура для уравнения Кортевега—де Фриза (1.4) имеет вид $\mathbf{1} \wedge D_x$, а вторая есть $\mathbf{1} \wedge \hat{B}_2$ в обозначениях (1.5). В общем случае бивектор A пуассонов тогда и только тогда, когда A удовлетворяет уравнению $[\![A, A]\!] = 0$, где $[\![\cdot,\cdot]\!]$ — скобка Схоутена. Пара пуассоновых бивекторов A_1 и A_2 совместна, если $[\![A_1, A_2]\!] = 0$. В [29, 69] уравнение $[\![A, A]\!] = 0$ рассмотрено в более общем случае, когда A не обязательно является бивектором.

Пример 1.12 ([24]). Горизонтальная 2-форма

$$\eta = u_{xz}\exp(-u_{zz})\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + \left(\frac{1}{2}u_{xz}^2 - u_{xx}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z$$

является сохраняющимся током для бездисперсионного уравнения Тоды $u_{xy} = \exp(-u_{zz})$: в силу рассматриваемого уравнения выполнено соотношение

$$\bar{D}_y\left(\frac{1}{2}u_{xz}^2 - u_{xx}\right) = \bar{D}_z(u_{xz}\,\exp(-u_{zz})). \tag{1.6}$$

Определение 1.13. Регулярное уравнение $\mathcal{E} = \{F = 0\}$ является *ℓ-нормальным*, если из условия $\nabla\circ\bar{\ell}_F = 0$ следует, что $\nabla = 0$.

Предложение 1.14 ([5]). *Пусть n — число независимых переменных $x^1,\ldots,x^n$ и $\mathcal{E}$ — регулярное уравнение. Рассмотрим координатную окрестность $\Omega(\theta^\infty)\subset\mathcal{E}^\infty$ точки $\theta^\infty\in\mathcal{E}^\infty$ и предположим, что имеется набор $\{v\}$ внутренних координат v на Ω, такой что полные производные $D_i(v)$ можно выразить через эти координаты $\{v\}$ для всех i, $1\leqslant i<n$. Тогда уравнение $\mathcal{E}$ ℓ-нормально.*

Если $\mathcal{E}$ — ℓ-нормальное уравнение, то комплекс совместности [5,75] для уравнения $\mathcal{E}$ имеет длину 2, а уравнение удовлетворяет предположениям теоремы «о 2-строчках».

Замечание 1.15. Системы уравнений Максвелла, Янга—Миллса и Эйнштейна *не* являются ℓ-нормальными, поскольку между входящими в эти системы уравнениями существует нетривиальная зависимость, обусловленная наличием псевдогруппы калибровочных симметрий у каждой из этих систем.

В дальнейшем используется удобный способ проверки, является ли данное уравнение ℓ-нормальным, который основан на следующем примере.

Пример 1.16 ([5,75]). Эволюционные уравнения ℓ-нормальны.

Для ℓ-нормальных уравнений законы сохранения $[\eta]$ определяются их *производящими сечениями* $\vec{\psi}_\eta\equiv\nabla^*(1)\in\hat{\varkappa}$. Заметим, что

$$\mathrm{d}_h\eta = \langle\nabla(F),1\rangle = \langle F,\nabla^*(1)\rangle + \mathrm{d}_h\gamma.$$

Тогда спаривание

$$\langle\nabla^*(1),F\rangle = \mathrm{d}_h(\eta-\gamma) \tag{1.7}$$

является точной горизонтальной n-формой. Очевидно, если η тривиален и, следовательно, $\nabla = 0$, то $\vec{\psi}_\eta = 0$.

Лемма 1.17 ([94]). *Пусть $\mathcal{E} = \{F=0\}$ — ℓ-нормальное уравнение, и предположим, что $H^n(\mathcal{E})\subset\bar{H}^n(\mathcal{E})$ (например, $H^n(\mathcal{E}) = 0$). Если производящее сечение $\vec{\psi}$ сохраняющегося тока η равно 0, то ток η тривиален.*

В дальнейшем неоднократно понадобится следующий факт.

Теорема 1.18 ([94]). *Пусть $\mathcal{E} = \{F=0\}$ — ℓ-нормальное уравнение в расслоении $\pi\colon\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Тогда производящее сечение $\vec{\psi}_\eta$ закона сохранения $[\eta]$*

удовлетворяет уравнению

$$\bar{\ell}^*_F(\vec{\psi}_\eta) = 0, \tag{1.8}$$

где $\bar{\ell}^*_F$ — оператор, формально сопряжённый к ℓ_F и ограниченный на уравнение $\mathcal{E}$.

Доказательство. Применим оператор Эйлера $\mathbf{E}$ к обеим частям уравнения (1.7). Получим

$$0 = \mathbf{E}(\langle\psi, F\rangle) = \ell^*_{\langle\psi,F\rangle}(1) = \ell^*_F(\psi) + \ell^*_\psi(F) = 0 \tag{1.9}$$

по правилу Лейбница. Теперь ограничим (1.9) на уравнение $\mathcal{E} = \{F = 0\}$ и получим определяющее уравнение (1.8), наложенное на производящие сечения и выполненное в силу исходного уравнения $\mathcal{E}$. □

В литературе (см. [11]) для обозначения производящих сечений ψ_η используется также наименование *градиенты законов сохранения*. Связано это с тем, что для эволюционных уравнений производящие сечения принадлежат образу оператора Эйлера («градиента» $\delta/\delta u$), применённого к соответствующей сохраняющейся плотности.

Лемма 1.19 ([75, 96]). *Пусть $\mathcal{E} = \{u_t = f(t, x, u, u_1, \ldots)\}$ — эволюционное уравнение. Предположим, что*

$$\eta = \eta_0\, d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \eta_i\, dt \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n$$

есть сохраняющийся ток для $\mathcal{E}$: $\bar{\mathrm{d}}_h(\eta) = 0$, то есть

$$\bar{D}_t(\eta_0) + \sum_i \bar{D}_{x^i}(\eta_i) = 0.$$

Тогда его производящая функция имеет вид $\psi_\eta = \boldsymbol{E}(\eta_0) \equiv \ell^*_{\eta_0}(1)$.

Лемма 1.19 доказывается непосредственным вычислением.

Уравнение Эйлера $\mathcal{E}_{E-L}$, заданное лагранжианом $\mathcal{L} \in \bar{H}^n(\pi)$, есть

$$\mathcal{E}_{E-L} = \{G \equiv \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}(\mathcal{L}) = 0\}. \tag{1.10}$$

Отметим, что для образа G оператора Эйлера $\mathbf{E}$ выполняется условие Гельмгольца $\ell_G = \ell^*_G$. Любая нётерова симметрия $\varphi_\mathcal{L}$ лагранжиана $\mathcal{L}$, такая что $\mathrm{Э}_\varphi(\mathcal{L}) = 0$ на $J^\infty(\pi)$, является симметрией соответствующего уравнения Эйлера—Лагранжа (1.10), то есть $\operatorname{sym}\mathcal{L} \subseteq \operatorname{sym}\mathcal{E}^\infty$.

Связь между законами сохранения $[\eta]$, их производящими сечениями ψ_η и нётеровыми симметриями $\varphi_\mathcal{L} \in \operatorname{sym}\mathcal{L}$ уравнения Эйлера—Лагранжа $\mathcal{E} = \{\mathbf{E}(\mathcal{L}) = 0\}$ установлена в приведённой ниже формулировке теоремы Нётер.

Теорема 1.20 ([44]). *Пусть $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{E}(\mathcal{L}) = 0\}$ — уравнение Эйлера—Лагранжа, соответствующее лагранжиану $\mathcal{L}$. Эволюционное векторное поле $\mathrm{Э}_\varphi$ является нётеровой симметрией лагранжиана $\mathcal{L}$,*

$$\mathrm{Э}_\varphi(\mathcal{L}) = 0,$$

тогда и только тогда, когда φ есть производящее сечение некоторого закона сохранения $[\eta]$: $\mathrm{d}_h\eta = 0$ на уравнении $\mathcal{E}$.

Доказательство. Пусть φ — производящее сечение закона сохранения $[\eta]$ для уравнения $\mathcal{E}$:

$$\mathrm{d}_h(\eta) = \langle 1, \square(F)\rangle = \langle \square^*(1), F\rangle + \mathrm{d}_h(\gamma),$$

где спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle$ принимает значения в пространстве $\bar{\Lambda}^n(\pi)$ горизонтальных n-форм. Следовательно, $\langle\varphi, F\rangle = \mathrm{d}_h(\eta-\gamma)$ является точной горизонтальной n-формой. По предположению $F = \mathbf{E}(\mathcal{L}) = \ell_L^*(1)$. Очевидным образом мы получаем

$$\langle\varphi, F\rangle = \langle\varphi, \ell_L^*(1)\rangle = \langle\ell_L(\varphi), 1\rangle + \mathrm{d}_h\beta = \langle \Im_\varphi(L), 1\rangle + \mathrm{d}_h\beta,$$

и следовательно, φ является нётеровой симметрией. Для доказательства второго утверждения теоремы — достаточности — нужно повторить те же рассуждения в обратном порядке. □

1.3. Накрытия

Пусть $\mathcal{E}$ — дифференциальное уравнение в расслоении $\pi\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{E}^\infty$ — бесконечное продолжение уравнения $\mathcal{E}$. В каждой точке $\theta\in\mathcal{E}^\infty$ определено n-мерное подпространство $\mathcal{C}_\theta$ — картановская плоскость. Распределение Картана $\mathcal{C}_\mathcal{E}$ на $\mathcal{E}^\infty$ является фробениусовым:

$$[\mathcal{C}_\mathcal{E}, \mathcal{C}_\mathcal{E}] \subset \mathcal{C}_\mathcal{E},$$

в локальных координатах оно задано системой n векторных полей $\bar{D}_1,\ldots,\bar{D}_n$, где $\bar{D}_i$ — ограничение на $\mathcal{E}^\infty$ оператора полной производной по i-й независимой переменной.

Определение 1.21 ([5]). Уравнение $\tilde{\mathcal{E}}$ с n-мерным распределением Картана $\tilde{\mathcal{C}}$ и регулярное отображение τ называются *накрытием* над уравнением $\mathcal{E}$, если для любой точки $\theta\in\tilde{\mathcal{E}}^\infty$ касательное отображение $\tau_{*,\theta}$ является изоморфизмом плоскости $\tilde{\mathcal{C}}_\theta$ на картановскую плоскость $\mathcal{C}_{\tau(\theta)}$ уравнения $\mathcal{E}^\infty$ в точке $\tau(\theta)$. Само уравнение $\tilde{\mathcal{E}}$ при этом называется *накрывающим уравнением*. *Размерностью накрытия* назовём размерность слоя отображения τ.

В координатах структура накрытия задаётся следующим образом. Многообразие $\tilde{\mathcal{E}}$ и отображение $\tau\colon\tilde{\mathcal{E}}\to\mathcal{E}$ локально можно реализовать как прямое произведение $\mathcal{E}^\infty\times W$ ($W\subseteq\mathbb{R}^N$ — открытое множество, $1\leqslant N\leqslant\infty$) и естественную проекцию $\mathcal{E}^\infty\times W\to\mathcal{E}^\infty$ соответственно. Распределение $\tilde{\mathcal{C}}$ на $\tilde{\mathcal{E}}$ можно локально задать системой векторных полей

$$\tilde{D}_i = \bar{D}_i + \sum_{j=1}^N X_{ij}\frac{\partial}{\partial s^j}, \quad i=1,\ldots,n,$$

где $X_{ij}\in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}})$ — коэффициенты τ-вертикальных полей на $\tilde{\mathcal{E}}$, $s^1,\ldots,s^N$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^N$. При этом условие Фробениуса $[\tilde{\mathcal{C}},\tilde{\mathcal{C}}]\subset\tilde{\mathcal{C}}$ интегрируемости распределения $\tilde{\mathcal{C}}$ эквивалентно тому, что $[\tilde{D}_i,\tilde{D}_j]=0$, $i,j=1,\ldots,n$, или, что равносильно, равенствам $\tilde{D}_i(X_{jk}) = \tilde{D}_j(X_{ik})$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$, $0 \leqslant k \leqslant N$.

Координаты s^i будем называть *нелокальными переменными*. В координатах x^i, u^j_σ, s^j правила $\tilde{D}_i(s^j) = X_{ij}$ дифференцирования нелокальных переменных s^j вместе с исходным уравнением $\mathcal{E}^\infty$ задают накрывающее уравнение $\tilde{\mathcal{E}}$.

Пример 1.22. Вновь рассмотрим уравнение Кортевега—де Фриза (1.4) и пополним набор переменных t, x, $T_j \equiv D_x^j(T)$ «нелокальностью» $s = \int T\,\mathrm{d}x$:

$$s_x = T, \quad s_t = -\beta s_{xxx} + \frac{3}{2} s_x^2. \tag{1.11}$$

Мы видим, что уравнение, накрывающее (1.4), — это потенциальное уравнение Кортевега—де Фриза.

Нелокальной симметрией уравнения $\mathcal{E}^\infty$ называется симметрия накрывающего уравнения $\tilde{\mathcal{E}}$. Пусть поле $\hat{X}$ — симметрия уравнения $\mathcal{E}^\infty$, а $\tau\colon \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$ — накрытие. Возможны два принципиально разных случая:

1) симметрию $\hat{X}$ уравнения $\mathcal{E}^\infty$ можно продолжить до симметрии $\tilde{X}$ накрывающего уравнения $\tilde{\mathcal{E}}$,
2) противоположная ситуация, когда любое поднятие симметрии $\hat{X}$ не является симметрией накрывающего уравнения.

Во втором случае поле $\hat{X}$ порождает однопараметрическое семейство уравнений $\tilde{\mathcal{E}}_t$, накрывающих $\mathcal{E}$.

1.4. Операторы рекурсии

В данном разделе сообщаются необходимые сведения о конструктивном методе построения операторов рекурсии для дифференциальных уравнений [74]. В основу данного метода положен разработанный И. С. Красильщиком аппарат производящих форм Картана.

Рассмотрим определённое уравнение $\mathcal{E} = \{F = 0\}$, то есть уравнение, для которого число m зависимых переменных равно количеству уравнений r, симметрию $\varphi \in \operatorname{sym} \mathcal{E}^\infty$ этого уравнения и r-компонентный столбец $\omega = {}^t(\omega^1, \ldots, \omega^r)$, элементы которого $\omega^i \in C^\infty(\mathcal{E}^\infty) \otimes \mathcal{C}^1\Lambda(\mathcal{E})$ суть 1-формы Картана, аннулирующие распределение Картана $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}$ на $\mathcal{E}^\infty$, с коэффициентами — функциями на $\mathcal{E}^\infty$. Очевидно, покомпонентная подстановка $\mathrm{Э}_\varphi \lrcorner\, \omega \equiv \varphi'$ вновь является элементом модуля эволюционных дифференцирований $\varkappa$. Условие, что φ' есть симметрия исходного уравнения $\mathcal{E}$, имеет вид

$$\bar{\ell}_F^{[1]}(\omega) = 0, \tag{1.12}$$

где $\bar{\ell}_F^{[1]}$ — это оператор линеаризации, ограниченный на $\mathcal{C}^1\Lambda(\mathcal{E})$.

Правило соответствия дифференциальных операторов R в полных производных столбцам (*производящим формам*) ω таково. Пусть компоненты ω^i производящей формы $\omega = {}^t(\omega^1, \ldots, \omega^r)$ суть $\omega^i = \sum\limits_{j,\sigma} a^{ij}_\sigma\, \omega^j_\sigma$, тогда $\mathrm{Э}_\varphi \lrcorner\, \omega = {}^t\Bigl(\ldots, \sum\limits_{j,\sigma} a^{ij}_\sigma\, D_\sigma(\varphi^j), \ldots\Bigr)$, то есть покомпонентное действие форм Картана ω^i

задано применением операторов $\sum\limits_{j,\sigma} a^{ij}_\sigma\,\ell_{u^j_\sigma}$ к элементам исходного производящего сечения $\varphi = {}^t(\varphi^1,\ldots,\varphi^r)$. В совокупности формально построенный дифференциальный оператор рекурсии R принимает вид $(r\times r)$-матрицы $R = \Big\| \sum\limits_{\sigma} a^{ij}_\sigma\, D_\sigma \Big\|$.

Тем не менее уравнение (1.12), как правило, имеет лишь тривиальное решение $\omega_\varnothing = {}^t(\omega^1_\varnothing,\ldots,\omega^r_\varnothing)$, соответствующее тождественному преобразованию рекурсии $\mathrm{id}\colon \varphi\mapsto\varphi'=\varphi$. Дело в том, что операторы рекурсии для известных уравнений математической физики, будучи записаны в полных производных D_σ, включают в себя слагаемые, содержащие $D^{-1}_{x^\alpha}$.

Пример 1.23. Оператор рекурсии $R_{\mathrm{KdV}} = \hat B_2\circ \hat B_1^{-1}$ для уравнения Кортевега—де Фриза (1.4) равен

$$R_{\mathrm{KdV}} = -\beta\,D_x^2 + 2T + T_x\cdot D_x^{-1}, \tag{1.13a}$$

оператор рекурсии R_{pKdV} для потенциального уравнения Кортевега—де Фриза (1.11) есть

$$R_{\mathrm{pKdV}} = -\beta\,D_x^2 + 2s_x - D_x^{-1}\circ s_{xx}. \tag{1.13b}$$

С геометрической точки зрения дело обстоит так. Оказывается, что для нетривиальной разрешимости уравнения (1.12) набор локальных координат $\langle x^1,\ldots,x^n,u^j_\sigma\rangle$ необходимо пополнить «нелокальными» переменными s^i, указав совместные правила их дифференцирования по независимым координатам. Этим переменным s^i мы также ставим в соответствие формы Картана $\mathrm{d}_{\mathcal C}(s^i) = \mathrm{d}s^i - \sum\limits_{j=1}^{n} s^i_{x^j}\,\mathrm{d}x^j$, лежащие в некотором большем распределении $\mathcal{C}^1\Lambda(\tilde{\mathcal E})$.

Рассмотрим ограничение $\tilde\ell^{[1]}_F$ оператора линеаризации ℓ_F на пополненный набор форм Картана, вернёмся к уравнению (1.12) с новым оператором линеаризации и предположим, что удалось построить нетривиальное решение ω этого уравнения. В этом случае производящая форма применяется не к исходному эволюционному полю ∂_φ, а к некоторому его продолжению

$$\tilde\partial_{\varphi,A(\varphi)} = \partial_\varphi + \sum_i A_i(\varphi)\cdot\frac{\partial}{\partial s^i} + \ldots,$$

возможно, использующему некоторый больший (вообще говоря, бесконечный) набор нелокальных переменных (см. [40]). Результат $\varphi' = \tilde\partial_{\varphi,A(\varphi)} \lrcorner\, \omega$ этого действия удовлетворяет уравнению $\tilde\ell_F(\varphi) = 0$. Такие сечения $\varphi'(x,u^j_\sigma,s^i,\ldots)$ называются *тенями* нелокальных симметрий, и, вообще говоря, не всякую тень можно расширить до настоящей нелокальной симметрии, используя заданный набор нелокальных переменных s^i (см., например, утверждение 12.1).

Пример 1.24. Рассмотрим одномерное накрытие над потенциальным уравнением Кортевега—де Фриза (1.11). Введём такую нелокальную переменную ζ, что

$$\zeta_x = -\frac{1}{2}s_1^2,\quad \zeta_t = \beta s_1 s_3 - \frac{1}{2}\beta s_2^2 - s_1^3, \tag{1.14}$$

где $s_j \equiv D_x^j(s)$. Аналогично обозначим $\zeta_j \equiv \tilde{D}_x^j(\zeta)$. Оказывается, что накрывающее уравнение — это уравнение Кричевера—Новикова

$$\zeta_t = -\beta\zeta_3 + \frac{3}{4}\beta\zeta_2^2\zeta_1^{-1} - 2\sqrt{2}(-\zeta_1)^{3/2}. \tag{1.15}$$

Уравнение $\tilde{\ell}^{[1]}_{\mathrm{pKdV}}(\omega) = 0$ имеет нетривиальное решение в переменных t, x, s_j, ζ. Производящая форма Картана оператора рекурсии для уравнения (1.11) есть

$$\omega_{\mathrm{pKdV}} = -\beta\,\mathrm{d}_{\mathcal{C}}(s_2) + s_1\,\mathrm{d}_{\mathcal{C}}(s) - \mathrm{d}_{\mathcal{C}}(\zeta). \tag{1.16}$$

Необходимо выяснить, как соотносятся используемые в приложениях операторы R в полных производных и решения ω уравнения $\tilde{\ell}_F^{[1]}(\omega) = 0$. Достаточно решить эту задачу для форм Картана $\mathrm{d}_{\mathcal{C}}(s^i)$. Из общих соображений понятно, что для этого требуется вычислить линеаризацию ℓ_{s^i} нелокальной переменной s^i. Инструментом для этого служит следующая лемма.

Лемма 1.25. *Пусть $s \in \mathcal{F}(\pi)$ — некоторая функция. Зафиксируем номер $i \in [1, n]$ независимой координаты x^i. Тогда выполнено соотношение*

$$\ell_{D_i(s)} = D_i \circ \ell_s. \tag{1.17}$$

Доказательство. Предположим, что $\varphi \in \varkappa$. Тогда получаем

$$\ell_{D_i(s)}(\varphi) = \ni_\varphi \circ D_i(s) = D_i \circ \ni_\varphi(s) = D_i \circ \ell_s(\varphi),$$

откуда следует соотношение (1.17). □

Лемма 1.25 задаёт правило

$$\tilde{\ell}_{s^j} = \tilde{D}_i^{-1} \circ \tilde{\ell}_{\tilde{D}_i(s^j)} \tag{1.18}$$

вычисления линеаризации нелокальной переменной s^j при произвольном значении $i \in [1,\, n]$. Производящей форме $\omega = {}^t(\omega^1, \ldots, \omega^r)$, где

$$\omega^i = \sum_{j,\sigma} a_\sigma^{ij}\omega_\sigma^j + \sum_j a^{ij}\,\mathrm{d}_{\mathcal{C}}(s^j),$$

ставится в соответствие матричный оператор

$$R = \left\| \sum_{j,\sigma} a_\sigma^{ij} \cdot D_\sigma \cdot \ell_{u^j} + \sum_j a^{ij} \cdot D_{x^k}^{-1} \circ \ell_{D_{x^k}(s^j)} \right\|,$$

где i нумерует строки и $1 \leqslant k \leqslant n$.

Пример 1.26. Производящей форме Картана (1.16) соответствует оператор рекурсии (1.13b), а оператор (1.13a) задан формой Картана

$$\omega_{\mathrm{KdV}} = -\beta\,\mathrm{d}_{\mathcal{C}}(T_2) + 2T\,\mathrm{d}_{\mathcal{C}}(T) + T_1\,\mathrm{d}_{\mathcal{C}}(s).$$

1.5. Преобразования Беклунда

Введённое выше понятие накрытия оказывается весьма полезным при описании преобразований Беклунда между дифференциальными уравнениями.

Определение 1.27 ([5]). Пусть $\mathcal{E}_i \subset J^{k_i}(\pi_i)$, $i = 1, 2,$ — два уравнения в частных производных и $\tau_i \colon \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}_i$ — накрытия с единым накрывающим уравнением $\tilde{\mathcal{E}}$. Тогда диаграмма

$$\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{E}}, \tau_i, \mathcal{E}_i) = \{\mathcal{E}_1 \xleftarrow{\tau_1} \tilde{\mathcal{E}} \xrightarrow{\tau_2} \mathcal{E}_2\} \tag{1.19}$$

называется *преобразованием Беклунда* $\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{E}}, \tau_i, \mathcal{E}_i)$ между уравнениями $\mathcal{E}_i$. Диаграмма (1.19) называется *автопреобразованием Беклунда*, если $\mathcal{E}_1^\infty = \mathcal{E}_2^\infty = \mathcal{E}^\infty$.

В координатах преобразование Беклунда между уравнениями $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ в рассматриваемом ниже случае является системой дифференциальных соотношений на неизвестные функции u' и u'', которая обладает следующим свойством: если функция u' — решение уравнения $\mathcal{E}$ и функции u' и u'' удовлетворяют этим соотношениям, то функция u'' — решение уравнения $\mathcal{E}'$, и наоборот.

Пример 1.28. Автопреобразование Беклунда для двумерного уравнения Лапласа $\Delta_2 v = 0$ задано соотношениями $v'_y = v''_x$, $v'_x = -v''_y$.

Замечание 1.29. Пусть $\tau_j \colon \tilde{\mathcal{E}}_j \to \mathcal{E}_j$, $j = 1, 2,$ — два накрытия и $\mu \colon \tilde{\mathcal{E}}_1 \to \tilde{\mathcal{E}}_2$ — диффеоморфизм, отображающий распределение Картана $\mathcal{C}_{\tilde{\mathcal{E}}_1}$ в $\mathcal{C}_{\tilde{\mathcal{E}}_2}$. Тогда диаграмма $\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{E}}_1, \tau_1, \tau_2 \circ \mu, \mathcal{E}_j)$ является преобразованием Беклунда между уравнениями $\mathcal{E}_j$, а накрытия τ_1 и $\tau_2 \circ \mu$ называются *эквивалентными*.

Замечание 1.30. Пусть $\tau \colon \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$ — накрытие и μ — нетривиальный диффеоморфизм $\tilde{\mathcal{E}}$, сохраняющий распределение Картана $\mathcal{C}_{\tilde{\mathcal{E}}}$, например неинфинитезимальная симметрия $\tilde{\mathcal{E}}$, которую нельзя ограничить на $\mathcal{E}^\infty$. Тогда диаграмма

$$\mathcal{E} \xleftarrow{\tau} \tilde{\mathcal{E}} \xrightarrow{\mu} \tilde{\mathcal{E}} \xrightarrow{\tau} \mathcal{E} \tag{1.20}$$

также является автопреобразованием Беклунда для $\mathcal{E}$. В главе 4 указанная конструкция будет применена при изучении свойств автопреобразования Беклунда для уравнения Лиувилля $u_{xy} = \exp(2u)$.

2. Формулировка основных результатов

В первой главе рассмотрены стандартные для геометрии дифференциальных уравнений задачи описания взаимосвязи симметрий, законов сохранения, нётеровых симметрий и операторов рекурсии, полученные здесь структуры существенно используются в дальнейшем изложении.

Пусть $K = \|k_{ij},\ 1 \leqslant i, j \leqslant r\|$ — невырожденная $(r \times r)$-матрица, а $K^{-1} = \|k^{ij}\|$ есть обратная к ней. Пусть существует такой набор $\vec{a}$ чисел $\{a_i \neq 0, 1 \leqslant i \leqslant r\}$, что матрица $\kappa = \|\kappa_{ij}\|$, элементы которой суть $\kappa_{ij} = a_i \cdot k_{ij}$, симметрична: $\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$, в этом случае будем называть матрицу K *симметризуемой*.

Гиперболические уравнения Тоды, ассоциированные с невырожденной симметризуемой $(r \times r)$-матрицей K имеют вид

$$\mathcal{E}_{\text{Toda}} = \left\{ F_i \equiv u^i_{xy} - \exp\biggl(\sum_{j=1}^{r} k_{ij} u^j\biggr) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant r \right\}. \tag{2.1}$$

В частности, если $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли ранга r, $\{\alpha_i,\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$ — система простых корней, $K = \|k_{ij} = 2(\alpha_i, \alpha_j) \cdot |\alpha_j|^{-2},\ 1 \leqslant i, j \leqslant r\|$ — матрица Картана алгебры $\mathfrak{g}$, то $a_i = |\alpha_i|^{-2}$ и соответствующие матрице Картана K уравнения Тоды (2.1) называются уравнениями, *ассоциированными с алгеброй Ли* $\mathfrak{g}$ (см. [32]).

Уравнения Тоды (2.1) являются лагранжевыми для функционала действия

$$\mathcal{L}_{\text{Toda}} = \int L_{\text{Toda}}\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

с плотностью

$$L_{\text{Toda}} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} \kappa_{ij} u^i_x u^j_y - \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot \exp\biggl(\sum_{j=1}^{r} k_{ij} u^j\biggr),$$

для них известна [36] каноническая гамильтонова структура.

При любой невырожденной симметризуемой матрице K уравнения Тоды (2.1) допускают по крайней мере один интеграл [14], то есть зависящее явно от производных u^j_σ выражение — элемент ядра $\ker \bar{D}_y$ полной производной D_y, ограниченной на уравнение $\mathcal{E}_{\text{Toda}}$:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} \kappa_{ij} u^i_x u^j_x - \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot u^i_{xx} \in \ker \bar{D}_y. \tag{2.2}$$

Введём обозначение $T_j \equiv \bar{D}^j_x(T)$. Дифференциальные следствия T_j из функционала T порождают подпространство $\mathbf{T} \subset \ker \bar{D}_y$ в ядре полной производной $\bar{D}_y$: в самом деле, любая гладкая функция Q задаёт функционал

$$Q(x, \mathbf{T}) \equiv Q(x, T, T_1, \ldots, T_\mu) \in \ker \bar{D}_y.$$

Положим, что введённая выше невырожденная симметризуемая матрица K находится в общем положении, если интеграл (2.2) — единственное решение уравнения $\bar{D}_y(T) = 0$ для соответствующего уравнения Тоды (2.1).

Между тем, специальным выбором матрицы K можно добиться того, что функционал T будет не единственным интегралом, допускаемым уравнением Тоды (2.1). В частности, для существования r нетривиальных независимых решений Ω^i уравнения $\bar{D}_y(\Omega^i) = 0$ необходимо и достаточно [41], чтобы K была матрицей Картана полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Уравнения Тоды, ассоциированные с $\mathfrak{g}$, точно интегрируемы [32, 36]. В дальнейшем через $\mathbf{\Omega}$ будем обозначать подпространство в $\ker \bar{D}_y$, дифференциально порождённое *всеми* решениями Ω^i уравнения $\bar{D}_y(\Omega^i) = 0$, общее число которых мы обозначаем буквой q, $1 \leqslant i \leqslant q \leqslant r$. Мы также полагаем $\Omega^1 \equiv T$.

Обозначим через Δ вектор конформных весов $\Delta^i = \sum\limits_{j=1}^{r} k^{ij}$ полей Тоды $\exp(u) \equiv {}^t(\exp(u^1), \ldots, \exp(u^r))$. Преобразование

$$\begin{aligned} x &\mapsto \mathcal{X}(x), \\ y &\mapsto \mathcal{Y}(y), \\ u^i(x,y) &\mapsto \tilde{u}^i = u^i(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) + \Delta^i \ln \mathcal{X}'(x)\mathcal{Y}'(y) \end{aligned} \tag{2.3}$$

является конечной конформной симметрией уравнений Тоды $\mathcal{E}_{\text{Toda}}$. Производящее сечение φ инфинитезимального конформного преобразования вида (2.3) есть $\varphi = \square(\phi(x))$, где векторный дифференциальный оператор первого порядка $\square$ есть

$$\square = u_x + \Delta \cdot \bar{D}_x, \tag{2.4}$$

а ϕ — произвольная гладкая функция. Структура образующих алгебры Ли $\operatorname{sym} \mathcal{E}_{\text{Toda}}$ такова [34].

1. Пусть K — невырожденная симметризуемая $(r \times r)$-матрица общего положения и оператор $\square$ определён по ней формулой (2.4). Тогда всякая симметрия уравнений Тоды (2.1) есть

   $$\varphi = \square(\phi(x, \mathbf{\Omega})), \tag{2.5}$$

   где ϕ — произвольная гладкая функция, зависящая от набора интегралов $\mathbf{\Omega} \subset \ker \bar{D}_y$.
2. Если матрица K подчинена дополнительным условиям, так что уравнения Тоды (2.1) допускают q независимых интегралов $\Omega^i \in \ker \bar{D}_y$, где $1 \leqslant i \leqslant q \leqslant r$ и $\mathbf{\Omega} = \{\Omega^i_j \equiv \bar{D}^j_x(\Omega^i)\} \supset \mathbf{T}$, а оператор первого порядка $\square$ является $(r \times q)$-матрицей, удовлетворяющей некоторым дополнительным соотношениям [34], то симметрии φ уравнений Тоды вновь имеют вид (2.5).

Скобка Якоби на симметриях $\varphi \in \operatorname{sym} \mathcal{E}_{\text{Toda}}$ индуцирует такую скобку на аргументах оператора $\square$: пусть $\varphi_1 = \square(\phi_1(x, \mathbf{T}))$ и $\varphi_2 = \square(\phi_2(x, \mathbf{T}))$, тогда $\{\varphi_1, \varphi_2\} = \square(\phi_{\{1,2\}})$, где

$$\phi_{\{1,2\}} = \partial_{\varphi_1}(\phi_2) - \partial_{\varphi_2}(\phi_1) + \bar{D}_x(\phi_1)\phi_2 - \phi_1 \bar{D}_x(\phi_2),$$

причём $\phi_{\{1,2\}} = \phi_{\{1,2\}}(x, \mathbf{T})$, поскольку эволюция $\dot{T}_\phi$ интеграла (2.2) вдоль симметрии $\varphi = \square(\phi)$ равна

$$\dot{T}_\phi = -\beta \bar{D}^3_x(\phi) + T \bar{D}_x(\phi) + \bar{D}_x(T \cdot \phi), \tag{2.6}$$

здесь и далее

$$\beta \equiv \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot \Delta^i.$$

Оператор, применяемый к функции ϕ в правой части равенства (2.6), есть вторая гамильтонова структура $\hat{B}_2$ для уравнения Кортевега—де Фриза (1.4).

Из установленного в работе соотношения $\psi_\eta = \kappa\,\varphi_{\mathcal{L}}$ между производящими сечениями ψ_η законов сохранения $[\eta]$ и нётеровыми симметриями $\varphi_{\mathcal{L}}$ уравнений Тоды (2.1) вытекает теорема 4.2.

Пример 2.1 ([70]). Нётеровы симметрии $\varphi_{\mathcal{L}}$ уравнений Тоды (2.1), ассоциированных с симметризуемой матрицей K общего положения, с точностью до симметрии $x \leftrightarrow y$ имеют вид $\varphi_{\mathcal{L}} = \square \circ \mathbf{E}_T(Q(x, \mathbf{T}))$.

В разделе 5 мы строим континуум операторов рекурсии для алгебры симметрий уравнений Тоды. Несмотря на то, что структура (2.5) алгебры симметрий в целом известна, наличие операторов рекурсии даёт нам дополнительную информацию о самих уравнениях Тоды и, кроме того, устанавливает их взаимосвязь с иными уравнениями математической физики.

Во второй главе построена коммутативная иерархия $\mathfrak{A}$, состоящая из r-компонентных аналогов потенциального модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза, и установлена её взаимосвязь с иерархией высших уравнений Кортевега—де Фриза (1.4), которые задают динамику интеграла (2.2).

Сначала приводится пример [21] — скалярный случай $r = 1$, — в котором по скалярному уравнению $u_{xy} = \exp(2u)$ построены, во-первых, последовательность симметрий данного уравнения, отождествляемая с иерархией $\mathfrak{A}$ потенциального модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза

$$u_t = -\frac{1}{2} u_{xxx} + u_x^3,$$

и, во-вторых, иерархия $\mathfrak{B}$ уравнения Кортевега—де Фриза

$$T_t = -\frac{1}{2} T_{xxx} + 3TT_x.$$

Построение иерархии $\mathfrak{A}$ в общем случае $r \geqslant 1$ проводится в разделе 7 следующим образом. Введём новую переменную s, такую что $s_x = T$ и $s_y = 1$, и выберем начальную функцию $\phi_{-1} = 1$. Построим две последовательности: $\phi_i = D_x^{-1}(\dot{T}_{\phi_{i-1}})$ (см. (2.6)) и $\varphi_i = \square(\phi_{i-1})$. Первая из этих последовательностей, обозначаемая через $\mathfrak{B}$, — это коммутативная бигамильтонова иерархия локальных высших симметрий потенциального уравнения Кортевега—де Фриза

$$s_t = -\beta\, s_{xxx} + \frac{3}{2} s_x^2, \quad \beta = \sum_i a_i \Delta^i,$$

в то время как вторая, её мы обозначаем через $\mathfrak{A}$, и есть искомая иерархия аналогов потенциального модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза $u_t = \varphi_1$. Доказано, что элементы φ_i последовательности $\mathfrak{A} \subset \operatorname{sym} \mathcal{E}_{\text{Toda}}$ образуют коммутативную алгебру Ли (теорема 7.23).

В работе приведено описание элементов $\varphi_k \in \mathfrak{A}$ для $k < 0$. Установлено, что симметрией φ_{-1} является само уравнение Тоды, представленное в гамильтоновой форме $u_y = A_1 \circ \mathbf{E}_u((\vec{a} \cdot \exp(Ku))\,\mathrm{d}x)$, где $A_1 = \kappa^{-1} \cdot \bar{D}_x^{-1}$ есть первая гамильтонова структура для остальных уравнений в иерархии $\mathfrak{A}$ и $\vec{a} = {}^t(a_1, \ldots, a_r)$, $\kappa = \|a_i k_{ij}\|$. (См. также теорему 9.2 и утверждение 9.6.)

Между иерархиями $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ установлены важные соотношения (см. утверждение 9.9 и теорему 9.11).

В третьей главе содержатся примеры практического применения методов геометрии дифференциальных уравнений в анализе свойств уравнений (0.5) и (0.3).

В разделе 10 третьей главы изучаются свойства m-компонентного аналога

$$\Psi_t = \boldsymbol{i}\Psi_{xx} + \boldsymbol{i}f(|\Psi|)\,\Psi$$

нелинейного уравнения Шрёдингера (0.3). Известно [13], что при $f = \mathrm{id}$ это уравнение допускает коммутативную бигамильтонову иерархию высших симметрий и бесконечный набор сохраняющихся плотностей в инволюции, однако в общем случае это не так. В работе вычислена алгебра симметрий в физически реализуемом случае однородной функции f веса Δ и указаны m^2 сохраняющихся токов

$$\eta_{ij} = \Psi^i\bar{\Psi}^j\,\mathrm{d}x + \boldsymbol{i}(\Psi^i_x\,\bar{\Psi}^j - \Psi^i\,\bar{\Psi}^j_x)\,\mathrm{d}t.$$

Полученные токи обобщают известные законы сохранения энергии i-й моды Ψ^i многокомпонентных уравнений Шрёдингера.

В разделе 11 той же главы мы рассматриваем бездисперсионное уравнение Тоды (0.5), $u_{xy} = \exp(-u_{zz})$, и реализуем для него следующую схему исследования: находим алгебру Ли классических симметрий и строим классы точных решений и сохраняющиеся токи [24]. Результаты этих вычислений достаточно громоздки, они приведены на с. 131—140.

В четвёртой главе новые геометрические концепции в теории преобразований Беклунда и представлений нулевой кривизны проиллюстрированы на примере скалярного уравнения Тоды, ассоциированного с алгеброй $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, — уравнения Лиувилля

$$\mathcal{E}_{\mathrm{Liou}} = \{u_{xy} = \exp(2u)\}. \tag{2.7}$$

В разделе 12 изучены вопросы построения однопараметрических семейств (авто)преобразований Беклунда $\tilde{\mathcal{E}}_t$ вида

$$\tilde{\mathcal{E}}_t = \left\{ \begin{aligned} (\tilde{u} - u)_x &= \mathrm{e}^{-t}\,\exp(\tilde{u} + u), \\ (\tilde{u} + u)_y &= 2\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{sh}(\tilde{u} - u) \end{aligned} \right\} \tag{2.8}$$

для уравнения (2.7). Введём обозначения $u_k \equiv \partial^k u/\partial x^k$, $u_{\bar{k}} \equiv \partial^k u/\partial y^k$, $k \in \mathbb{N}$, и рассмотрим масштабную симметрию

$$\hat{X} = -x\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y} + \sum_{k\geqslant 1} k u_k\,\frac{\partial}{\partial u_k} - \sum_{k\geqslant 1} k u_{\bar{k}}\,\frac{\partial}{\partial u_{\bar{k}}} \tag{2.9}$$

уравнения Лиувилля (2.7). В работе существенно использовано то, что симметрию $\hat{X}$ нельзя продолжить до симметрии накрывающего уравнения $\tilde{\mathcal{E}}_t$. Недавно И. С. Красильщиком [63] был разработан механизм построения однопараметрических семейств накрытий над дифференциальными уравнениями.

Теорема ([63]). *Пусть $\tau\colon \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$ — накрытие и $A_t\colon \tilde{\mathcal{E}} \to \tilde{\mathcal{E}}$ — гладкое семейство диффеоморфизмов, причём $A_0 = \mathrm{id}$ и $\tau_t = \tau\circ A_t\colon \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$ является накрытием* *при любом $t \in \mathbb{R}$. Тогда изменение формы связности Картана U_t описывается соотношением*

$$\frac{dU_t}{dt} = [\![\hat{X}_t, U_t]\!]^{\mathrm{FN}}, \tag{2.10}$$

где $\hat{X}_t$ является τ_t-тенью при всех $t \in \mathbb{R}$, а $[\![\cdot,\cdot]\!]^{\mathrm{FN}}$ — скобка Фрёлихера—Нийенхейса (12.7).

В работе показано, что масштабная симметрия (2.9) и является той τ_t-тенью, для которой изменение формы связности Картана U_t в накрытии $\tau_t \colon \tilde{\mathcal{E}}_t \to \mathcal{E}_{\mathrm{Liou}}$ (см. (2.8)) задано уравнением (2.10). Доказательство носит вычислительный характер и опирается на следующее полезное тождество в полных производных.

Теорема ([20]). *Пусть $u(x)$, $f(u)$ — гладкие функции, D_x — полная производная по x, $u_k \equiv D_x^k(u(x))$, $k \geqslant 0$, $u_0 \equiv u$. Тогда равенство*

$$n \cdot D_x^n(f(u)) = \sum_{m=1}^{n} m u_m \frac{\partial}{\partial u_m} D_x^n(f(u))$$

выполнено при любом целом $n \geqslant 1$.

В разделе 13 рассматривается задача построения пар решений гиперболического уравнения Лиувилля (2.7) и волнового уравнения

$$s_{xy} = 0,$$

связанных преобразованием Беклунда. Именно, указан такой набор нелокальных переменных, в которых, во-первых, преобразования Беклунда удаётся проинтегрировать, а во-вторых, всякое из двух решений уравнений, связанных преобразованием Беклунда, выражается через эти переменные явным образом.

В разделе 14 мы изучаем соответствие между преобразованиями Беклунда и представлениями нулевой кривизны, используя два представления алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ с образующими $\langle e, h, f\rangle$. Первое из них — это представление $\mathfrak{g}$ в бесследовых матрицах,

$$\varrho(e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varrho(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varrho(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а второе — в векторных полях на прямой,

$$\rho(e) = 1 \cdot \frac{\partial}{\partial \Xi}, \quad \rho(h) = -2\Xi \cdot \frac{\partial}{\partial \Xi}, \quad \rho(f) = -\Xi^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \Xi}.$$

В работе подробно рассмотрено, какие именно преобразования Беклунда соответствуют известным представлениям нулевой кривизны и наоборот.

Часть I. Уравнения типа Кортевега—де Фриза, ассоциированные с уравнениями Тоды

В первой части работы мы исследуем свойства алгебры симметрий $\operatorname{sym} \mathcal{E}_{\mathrm{Toda}}$ гиперболических уравнений Тоды $\mathcal{E}_{\mathrm{Toda}}$, ассоциированных с невырожденными симметризуемыми матрицами K. Рассматривая канонический нелокальный оператор рекурсии для алгебры $\operatorname{sym}\mathcal{E}_{\text{Toda}}$, мы строим её коммутативную подалгебру Ли $\mathfrak{A}$ локальных высших нётеровых симметрий. Отождествляя полученную подалгебру $\mathfrak{A}$ с гамильтоновой иерархией высших аналогов r-компонентных потенциальных модифицированных уравнений Кортевега—де Фриза, также ассоциированных с матрицей K, мы устанавливаем взаимосвязь между $\mathfrak{A}$ и коммутативной бигамильтоновой иерархией $\mathfrak{B}$ высших потенциальных уравнений Кортевега—де Фриза (1.4). В свою очередь, иерархия $\mathfrak{B}$ есть коммутативная подалгебра Ли нётеровых симметрий скалярного волнового уравнения. Используя указанные выше соотношения между гиперболическими уравнениями и эволюционными иерархиями их симметрий, мы показываем, что иерархии $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ допускают один и тот же набор гамильтонианов, а само уравнение Тоды является первым нелокальным членом иерархии $\mathfrak{A}$.

Глава 1. Симметрии и законы сохранения уравнений Тоды

В этой главе мы изучаем геометрические свойства двумерных уравнений Тоды, в частности уравнений, ассоциированных с комплексными полупростыми алгебрами Ли [32, 86]. Именно, мы исследуем взаимоотношения между их законами сохранения [33, 41], нётеровыми симметриями лагранжиана уравнений Тоды (см., например, [89]) и операторами рекурсии для алгебры симметрий этих уравнений.

В разделе 3 мы прослеживаем переход от скалярного уравнения Лиувилля к его обобщениям — гиперболическим уравнениям Тоды, ассоциированным с невырожденными симметризуемыми матрицами K общего положения. Далее мы рассматриваем лагранжевы свойства этих уравнений и указываем минимальный интеграл $T \in \ker \bar{D}_y$ и его дифференциальную оболочку $\mathbf{T} \subset \bar{D}_y$, после чего ставим в соответствие элементам $\mathbf{\Omega}$ ядра $\ker \bar{D}_y$ образующие алгебры Ли $\operatorname{sym}\mathcal{E}_{\text{Toda}}$.

В разделе 4, построив взаимно-однозначное соответствие между производящими сечениями законов сохранения и нётеровыми симметриями лагранжиана $\mathcal{L}_{\text{Toda}}$ уравнений Тоды, мы описываем алгебру $\operatorname{sym}\mathcal{L}_{\text{Toda}} \subset \operatorname{sym}\mathcal{E}_{\text{Toda}}$ нётеровых симметрий уравнений Тоды, ассоциированных с матрицей K общего положения. Для уравнений Тоды, ассоциированных с матрицей Картана K полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, мы устанавливаем некоторые общие свойства интегралов $\Omega^i \in \ker \bar{D}_y$. Наконец, в разделе 5 мы строим континуум операторов рекурсии для алгебры симметрий уравнений Тоды, причём как локальных, так и нелокальных относительно полных производных.

Изложение материала следует работам [25, 68, 70].

3. Об уравнении Тоды

Уравнение Лиувилля и его обобщения. Уравнение Лиувилля

$$\mathcal{E}_{\mathrm{Liou}} = \{u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \exp(2u)\} \tag{3.1}$$

является модельным точно интегрируемым нелинейным дифференциальным уравнением, возникающим во многих разделах математики и математической физики. Оно впервые было систематически исследовано в работах Лиувилля [77] и Пуанкаре [85]. Одна из поставленных ими задач — проблема униформизации алгебраических кривых (компактных римановых поверхностей) — была изучена позднее Казданом и Уорнером [66]. Известно [16], что для поверхностей рода 0 надлежащим образом регуляризованный лагранжиан

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Liou}} = -\frac{1}{2}[(u_\xi^2 + u_\eta^2 + \exp(2u))\,\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\eta]$$

уравнения Лиувилля, вычисленный на классическом решении, является производящей функцией для акцессорных параметров, характеризующих униформизацию римановой поверхности. Также лагранжиан $\mathcal{L}_{\mathrm{Liou}}$ уравнения (3.1) представляет собой потенциал метрики Вейля—Петерсона на пространстве Тейхмюллера отмеченных римановых поверхностей [16].

Уравнение (3.1) играет важную роль в современной теории поля, в частности в теории струн, когда квантовое поле Лиувилля возникает как конформная аномалия [37]. Нахождение N-инстантонных решений уравнений дуальности

$$F_{\mu\nu} = *F_{\mu\nu},$$

где $F_{\mu\nu}$ — тензор напряжённости поля, то есть решений, минимизирующих действие для свободных уравнений Янга—Миллса, приводит к уравнению (3.1) (см. [97]).

В римановой геометрии уравнение (3.1) представляет собой уравнение Гаусса, записанное в конформных координатах, для плоскости Лобачевского [12] (см. также [66]).

Пример 3.1. Рассмотрим вопрос поточечной конформной эквивалентности двух римановых метрик

$$\mathrm{d}s_j^2 = f_j(x,y)(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2), \quad f_j > 0, \quad j = 1, 2,$$

на открытых двумерных многообразиях постоянной гауссовой кривизны

$$K_j = -(2f_j)^{-1}\Delta \ln f_j = \mathrm{const}_j,$$

где Δ — оператор Лапласа. Пусть $f_2 = f_1 \cdot \exp(2u)$, тогда u удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = -K_2 f_1 \exp(2u) - K_1 f_1. \tag{3.2}$$

Легко видеть, что двумерное эллиптическое уравнение Лиувилля (3.1) соответствует переходу между плоской метрикой $f_1 \equiv 1$ ($K_1 \equiv 0$) и метрикой плоскости Лобачевского ($K_2 \equiv -1$). В подобной трактовке уравнение (3.1) возникает как предельный случай ($K_1 < 0$) в теории сверхпроводимости при описании вихрей Абрикосова в двумерной модели [66]. Уравнение (3.1) также связано с исследованием решений уравнений Кадомцева—Погуце — упрощением общей системы уравнений магнитодинамики (МГД), в которых опущены некоторые детали, несущественные с точки зрения задачи удержания высокотемпературной плазмы в установках типа «Токамак» [62].

Каждому решению эллиптического уравнения Лиувилля (3.1) соответствует модель плоскости Лобачевского, конформно эквивалентная евклидовой плоскости с диагональной метрикой $g_{ij} = \delta_{ij}$. Например, рассматривая стандартную модель Пуанкаре плоскости Лобачевского в верхней полуплоскости $y > 0$, для которой $f_2 = 1/y^2$, можно получить частное решение уравнения (3.1): $u = -\ln y$.

В случае $f_1 \equiv 1$, $K_1 \equiv 0$, $K_2 \equiv +1$ формула (3.2) задаёт конформную эквивалентность евклидовой метрики δ_{ij} на плоскости $\mathbb{E}^2$ и метрики $g_{ij} = \exp(2\mathcal{U})\,\delta_{ij}$ на двумерной сфере S^2, при этом функция $\mathcal{U}(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{U}_{xx} + \mathcal{U}_{yy} + \exp(2\mathcal{U}) = 0, \tag{3.3}$$

которое отличается от уравнения (3.1) знаком перед экспонентой (или поворотом независимых координат на $\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$). Будем в дальнейшем называть уравнение (3.3) scal^+-*уравнением Лиувилля*.

Замечание 3.2. Уравнение (3.3) является частным (конформным) случаем уравнения

$$(\alpha^{-1}\beta_x)_x + (\beta^{-1}\alpha_y)_y + \rho^{-2}\alpha\beta = 0 \tag{3.4}$$

(см. [54]), описывающего ортогональную сеть, заданную метрикой

$$ds^2 = \alpha^2\,dx^2 + \beta^2\,dy^2$$

на сфере радиуса ρ. Действительно, $\alpha = \beta = \rho\exp(\mathcal{U})$ является решением (3.4) для произвольного решения $\mathcal{U}(x, y)$ уравнения (3.3). Это решение уравнения (3.4) заведомо не единственно: например, пара

$$\alpha = \sin\mathcal{V}, \quad \beta = \rho\mathcal{V}_y,$$

где $\mathcal{V}$ удовлетворяет уравнению sin-Гордона

$$\mathcal{V}_{xy} = \sin\mathcal{V},$$

или

$$\alpha = \rho, \quad \beta = \rho\sin x$$

также являются решениями уравнения (3.4).

В настоящей работе мы систематически применяем современные методы геометрии дифференциальных уравнений при исследовании свойств обобщений двумерного уравнения (3.1) на случаи числа независимых переменных $n \geqslant 2$ и числа зависимых функций $r \geqslant 1$.

Одно из обобщений уравнения (3.1) на случай $n \geqslant 2$ независимых координат $x^1, \ldots, x^n$ основано на отмеченной выше интерпретации уравнения Лиувилля как условия конформной эквивалентности евклидовой метрики на $\mathbb{E}^n$ и конформной метрики на n-мерном многообразии постоянной скалярной кривизны

$$\mathrm{scal} \equiv R = \mathrm{const}. \tag{3.5}$$

Для согласования с двумерным случаем (3.1) зафиксируем значение $R = -2$ (что соответствует гауссовой кривизне $K = -1$ при $n = 2$) и положим

$$\mathrm{d}s^2 = \exp(2u) \sum_k \mathrm{d}x^k \, \mathrm{d}x^k. \tag{3.6}$$

Соотношение (3.5) является нелинейным уравнением в частных производных на функцию $u(x^1, \ldots, x^n)$.

Теорема 3.3 ([68]). *Условие* (3.5) *имеет вид*

$$(n-1)\Delta u + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)(\operatorname{grad} u)^2 = \exp(2u), \tag{3.7}$$

где Δ *— оператор Лапласа в евклидовом пространстве* $\mathbb{E}^n$ *и скалярное произведение* $(\cdot,\cdot)$ *также определено евклидовой метрикой.*

Доказательство. Скалярная кривизна R метрики (3.6) определена формулой

$$R = \sum_{i,q} \exp(-2u) R^i_{qqi}$$

(см. [12]). Имеем

$$R^i_{qqi} = \partial_i \, \Gamma^i_{qq} - \partial_q \, \Gamma^i_{qi} + \Gamma^i_{pi} \Gamma^p_{qq} - \Gamma^i_{pq} \Gamma^p_{qi},$$

где

$$\Gamma^k_{ij} = \partial_i \, u \, \delta^k_j + \partial_j \, u \, \delta^k_i - \partial_l \, u \, \delta_{ij} \delta^{kl}$$

суть символы Кристоффеля. Непосредственно вычисляя суммы по $q, i, p = 1, \ldots, n$, получаем (3.7). □

3.1. Вывод уравнений Тоды

М. Тода [39] рассмотрел интегрируемую нелинейную динамическую систему (0.1) — одномерную цепочку с экспоненциальным взаимодействием. К настоящему времени свойствам системы (0.1) и различным её обобщениям посвящено большое количество работ (см. [11, 14, 32, 36] и ссылки в них). Двумеризация одномерной непериодической цепочки Тоды

$$q^i_{tt} = \frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

где плотность гамильтониана H есть

$$H = -\sum_i \exp(q^i - q^{i+1}) -$$

это замена «ускорения» $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2$ оператором $\partial^2/\partial x\partial y$. Историю двумеризации непериодической цепочки Тоды и перехода к уравнениям Тоды, ассоциированным с алгебрами Ли (и алгебрами Каца—Муди, см. [64]) можно проследить по работам [11, 31—33, 36, 45, 46, 58—60, 76].

Построение обобщений уравнения (3.1) на случай $r \geqslant 1$ зависимых переменных $u^1, \ldots, u^r$ мы рассмотрим с нестандартной точки зрения, используя инварианты Лапласа [14]. Прежде всего, в целях упрощения вычислений, сделаем такую комплексную замену переменных, чтобы уравнение Лиувилля приняло вид $u_{xy} = \exp(u)$. Начиная с настоящего момента и до конца работы мы будем изучать именно гиперболические уравнения и их симметрии. Разница между эллиптическими и гиперболическими уравнениями исчезает в комплексном случае, однако, поскольку при изучении свойств симметрии нам не потребуются свойства комплексной структуры, мы будем предполагать все уравнения вещественными, так же, как на с. 62.

Следуя [14], вычислим инварианты Лапласа H_0 и H_1 гиперболического уравнения

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y),$$

в нашем случае $f = \exp(u)$:

$$H_0 \stackrel{\text{def}}{=} -\bar{D}_y\left(\frac{\partial f}{\partial u_y}\right) + \frac{\partial f}{\partial u_x}\,\frac{\partial f}{\partial u_y} + \frac{\partial f}{\partial u} = \exp(u),$$
$$H_1 \stackrel{\text{def}}{=} -\bar{D}_x\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right) + \frac{\partial f}{\partial u_x}\,\frac{\partial f}{\partial u_y} + \frac{\partial f}{\partial u} = \exp(u).$$

Определение остальных инвариантов Лапласа следует из уравнений

$$\bar{D}_{xy}(\ln H_i) = -H_{i-1} + 2H_i - H_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{3.8}$$

Отметим, что квазилинейное уравнение $u_{xy} = f$ называется уравнением *лиувиллевского типа*, если его цепочка инвариантов Лапласа конечна, то есть существуют такие $p \geqslant 1$ и $q \geqslant 0$, что $H_p = H_{-q} \equiv 0$. Оказывается, что для уравнения Лиувилля последовательность H_i обрывается сразу: $H_i \equiv 0$ при $i \neq 0, 1$, что как раз и объясняет название введённого выше класса уравнений[1]. Сделаем подстановку $H_i = \exp(\mathcal{U}^i)$, $-q < i < p$, и ограничим уравнение (3.8) на графики струй сечений $\mathcal{U}$ расслоения $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, так что полные производные $\bar{D}_i$ превратятся в дифференцирования $\partial/\partial x^i$. В результате мы получим систему

$$\mathcal{U}^0_{xy} = 2\exp(\mathcal{U}^0) - \exp(\mathcal{U}^1), \quad \mathcal{U}^1_{xy} = -\exp(\mathcal{U}^0) + 2\exp(\mathcal{U}^1),$$

а в общем случае — систему уравнений

$$\mathcal{U}^i_{xy} = \sum_{j=-q+1}^{p-1} k_{ij}\,\exp(\mathcal{U}^j),$$

[1] Отметим, что для системы (3.10) гиперболических уравнений также определены — теперь уже матричные — инварианты Лапласа [14].

причём структура невырожденной $((p+q-1)\times(p+q-1))$-матрицы $K=\|k_{ij}\|$ такова:

$$k_{ii}=2,\quad k_{i,i+1}=k_{i,i-1}=-1,\quad k_{ij}=0 \text{ при } |i-j|>1. \tag{3.9}$$

Мы видим, что K есть не что иное, как матрица Картана алгебры Ли серии A_{r-1}. Сдвигая при необходимости индекс i, нумерующий переменные $\mathcal{U}^i$, и делая замену $\mathcal{U}=K\cdot u$ [32], мы приходим к системе

$$u^i_{xy}=\exp(-u^{i-1}+2u^i-u^{i+1}),\quad 1\leqslant i\leqslant r,\quad u^0=u^{r+1}\equiv 0.$$

Это двумерная система уравнений Тоды, ассоциированная с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ серии A_{r-1}. В общем случае соответствие между уравнениями Тоды

$$\boldsymbol{u}_{xy}=\exp(K\boldsymbol{u}) \tag{3.10}$$

и полупростой алгеброй Ли с матрицей Картана K обеспечено приведённой ниже геометрической схемой [32]. В главе 4 мы воспользуемся конструкциями, поставляемыми указанной схемой рассуждений, при изучении соответствия между каноническими представлениями нулевой кривизны и преобразованиями Беклунда для некоторого класса дифференциальных уравнений.

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли ранга r над полем $\mathbb{C}$. Пусть также $\{\alpha_i,\ 1\leqslant i\leqslant r\}$ — её система простых корней, по которой мы строим матрицу Картана

$$K=\|k_{ij}=2(\alpha_i,\alpha_j)\cdot|\alpha_j|^{-2},\ 1\leqslant i,j\leqslant r\|.$$

Через $K^{-1}=\|k^{ij}\|$ мы обозначим матрицу, обратную к K, с элементами k^{ij}. Пусть $A,B\in\mathfrak{g}$. Предположим, что

$$\theta=A\,\mathrm{d}z+B\,\mathrm{d}\bar{z} \tag{3.11}$$

есть форма плоской связности в главном расслоении $G\to M$, где G — группа Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}[\theta,\theta]=0. \tag{3.12}$$

В терминах расширенных полных производных имеем

$$[\partial+A,\bar{\partial}+B]=0 \iff -\bar{\partial}A+\partial B+[A,B]=0. \tag{3.13}$$

Предположим, что H_j — генераторы Картана, E_j, F_j — генераторы Шевалле алгебры $\mathfrak{g}$, $1\leqslant j\leqslant r=\operatorname{rank}\mathfrak{g}$. Имеют место коммутационные соотношения

$$\begin{gathered}[H_i,H_j]=0,\quad [H_i,E_j]=k_{ji}E_j,\\ [H_i,F_j]=-k_{ji}F_j,\quad [E_i,F_j]=\delta_{i,j}H_i.\end{gathered} \tag{3.14}$$

Будем предполагать, что коэффициенты связности A и B имеют вид

$$\begin{aligned}A&=\sum_{j=1}^{r}(a^j_h(z,\bar{z})\cdot H_j+a^j_e(z,\bar{z})\cdot E_j),\\ B&=\sum_{j=1}^{r}(b^j_h(z,\bar{z})\cdot H_j+b^j_f(z,\bar{z})\cdot F_j).\end{aligned} \tag{3.15}$$

Тогда из уравнения (3.13) следует, что

$$\partial b_h^j - \bar\partial a_h^j + a_e^j b_f^j = 0, \tag{3.16a}$$

$$\bar\partial \ln a_e^j = -\sum_{i=1}^r k_{ji} b_h^i, \quad \partial \ln b_f^j = \sum_{i=1}^r k_{ji} a_h^i \tag{3.16b}$$

для коэффициентов H_j, E_j и F_j соответственно, где $1 \leqslant j \leqslant r$. Из уравнения (3.16b) мы получаем

$$a_h^i = \sum_{j=1}^r k^{ij} \partial \ln b_f^j, \quad b_h^i = -\sum_{j=1}^r k^{ij} \bar\partial \ln a_e^j,$$

а из уравнения (3.16a) — соотношения

$$\sum_{j=1}^r k^{ij} \partial\bar\partial \ln(a_e^j \cdot b_f^j) = a_e^i \cdot b_f^i \tag{3.17}$$

для $1 \leqslant i \leqslant r$. Положим по определению

$$u_i = \sum_{j=1}^r k^{ij} \ln(a_e^j \cdot b_f^j). \tag{3.18}$$

Подставляя (3.18) в уравнение (3.17), мы в итоге получим уравнения Тоды (3.10), ассоциированные с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ (см. [32]). Мы будем использовать координаты x и y как синонимы для комплексных переменных z и $\bar z$ соответственно. Условимся, что в дальнейшем мы будем рассматривать симметрии, законы сохранения и любые иные структуры для уравнений Тоды с точностью до дискретной симметрии $x \leftrightarrow y$.

Более общо, предположим, что $K = \|k_{ij},\ 1 \leqslant i,j \leqslant r\|$ — невырожденная $(r \times r)$-матрица, а $K^{-1} = \|k^{ij}\|$ есть обратная к ней. Далее, пусть существует такой набор чисел $\{a_i \neq 0,\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$, что матрица $\kappa = \|\kappa_{ij}\|$, элементы которой суть $\kappa_{ij} = a_i \cdot k_{ij}$, симметрична: $\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$. Через $\hat\kappa$ обозначим оператор умножения слева на невырожденную матрицу κ. В этом случае будем называть матрицу K *симметризуемой* [91]. Гиперболические уравнения Тоды, ассоциированные с невырожденной симметризуемой $(r \times r)$-матрицей K, имеют вид

$$\mathcal{E}_{\text{Toda}} = \left\{ F^i \equiv u^i_{xy} - \exp\left(\sum_{j=1}^r k_{ij} u^j \right) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant r \right\}. \tag{3.19}$$

В частности, если $\mathfrak{g}$ — это полупростая алгебра Ли ранга r, $\{\alpha_i,\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$ — система простых корней,

$$K = \left\| k_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{|\alpha_j|^2},\ 1 \leqslant i,j \leqslant r \right\| -$$

матрица Картана алгебры $\mathfrak{g}$, то положим $a_i = |\alpha_i|^{-2}$. Тогда

$$\kappa_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{|\alpha_i|^2 \cdot |\alpha_j|^2} = \kappa_{ji}.$$

3.2. Лагранжев формализм для уравнений Тоды

Уравнения Тоды $\mathcal{E}_{\text{Toda}}$ являются лагранжевыми в следующем смысле: рассмотрим действие

$$\mathcal{L}_{\text{Toda}} = \int L_{\text{Toda}}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

с плотностью

$$L_{\text{Toda}} = -\frac{1}{8}\sum_{i,j}\sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu}\kappa_{ij}u^i_{;\mu}u^j_{;\nu} + a_i^2 \cdot \exp\biggl(\sum_{j=1}^{r} k_{ij}u^j\biggr),$$

здесь $u^j_{;\mu} \equiv D_\mu(u^i)$, а $g^{\mu\nu} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0\end{smallmatrix}\right)$ есть обратный к метрическому тензору $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$, задающему плоскую метрику $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ на базе расслоения π. В используемых нами локальных координатах плотность лагранжиана выглядит так:

$$L_{\text{Toda}} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r}\kappa_{ij}u^i_x u^j_y - \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot \exp\biggl(\sum_{j=1}^{r} k_{ij}u^j\biggr). \tag{3.20}$$

Соответствующие лагранжиану $\mathcal{L}_{\text{Toda}}$ уравнения Эйлера—Лагранжа

$$\mathbf{E}_u(\mathcal{L}_{\text{Toda}}) = \biggl|\sum_j \kappa_{ij}F^j\biggr| = \kappa\cdot F = 0 \tag{3.21}$$

эквивалентны уравнениям (3.19), поскольку матрица κ невырожденна одновременно с K в силу условия $a_i \neq 0$.

Установим правила преобразования симметрий $\varphi \in \ker \bar{\ell}_{\mathcal{E}}$ и производящих сечений $\psi \in \ker \bar{\ell}^*_{\mathcal{E}}$ законов сохранения при репараметризациях, которые сохраняют многообразие $\mathcal{E}$ и идеал $\mathcal{E}^\infty$ его дифференциальных следствий.

Лемма 3.4 ([70]). *Пусть $\mathcal{E} = \{G^i = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$ — непереопределённое уравнение и $G^i = A^i_j F^j$ — невырожденное преобразование соотношений, задающих уравнение $\mathcal{E}$. Тогда верны следующие два свойства.*

1. *Выполняются тождества*

$$\ell_G = A\cdot \ell_F, \quad \ell^*_G = \ell^*_F \cdot {}^t\!A,$$

где A — матрица репараметризации задающих $\mathcal{E}$ соотношений.

2. *Предположим, что $\varphi_G \in \ker \bar{\ell}_G$ — симметрия уравнения $\mathcal{E}$ и $\psi_G \in \ker \bar{\ell}^*_G$ — произвольное решение уравнения* (1.8) *для $\mathcal{E} = \{G = 0\}$, и сделаем переход $G = AF$ к новым соотношениям, задающим уравнение $\mathcal{E} = \{F = 0\}$. Тогда $\varphi_F = \varphi_G$ по-прежнему будет симметрией уравнения $\mathcal{E}$: $\varphi_F \in \ker \bar{\ell}_F$, в то время как решение ψ_G уравнения* (1.8) *преобразуется по закону*

$$\phi_G \mapsto \psi_F = {}^t\!A\cdot\psi_G \in \ker \bar{\ell}^*_F.$$

Доказательство. Пользуясь определением оператора линеаризации ℓ_G для $G = AF$, получаем

$$\ell_G = \ell_{AF} = A\cdot \ell_F,$$

и потому

$$\ell_G^* = (A \cdot \ell_F)^* = \ell_F^* \circ A^* = \ell_F^* \circ {}^t A.$$

Если матрица A невырожденна, то условие $\bar{\ell}_G(\varphi_G) = 0$ эквивалентно $A \cdot \bar{\ell}_F(\varphi_G) = 0$, откуда $\varphi_F = \varphi_G$. В то же время предположение $\bar{\ell}_F^*({}^t A \cdot \psi_G) = 0$ приводит к формуле $\psi_F = {}^t A \cdot \psi_G$ для решения уравнения $\bar{\ell}_F^*(\psi_F) = 0$. □

Теперь воспользуемся теоремой Нётер (см. теорему 1.20).

Следствие 3.5. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1.20 *и леммы* 3.4. *Пусть* $\psi \in \ker \bar{\ell}_F^*$ *— производящее сечение закона сохранения для уравнения Эйлера—Лагранжа* $\mathcal{E} = \{F = 0\}$. *Тогда существует такая нётерова симметрия* $\varphi \in \ker \bar{\ell}_F$ *этого уравнения, для которой выполнено* $\psi = {}^t A \cdot \varphi$.

3.3. Минимальный интеграл для уравнений Тоды

Легко видеть, что при любой невырожденной симметризуемой матрице K уравнения Тоды (3.19) допускают по крайней мере один *интеграл* [14], то есть зависящее явно от u_σ^j выражение, полная производная $\bar{D}_y$ от которого равна 0 на рассматриваемом уравнении:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} \kappa_{ij} u_x^i u_x^j - \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot u_{xx}^i \in \ker \bar{D}_y. \tag{3.22}$$

Хорошо известно (см., например, [36]), что обе компоненты T и $\bar{T}$ бесследового тензора энергии-импульса Θ для лагранжевых уравнений (3.21) также имеют вид (3.22) с точностью до комплексного сопряжения:

$$\Theta = T\,\mathrm{d}x + \bar{T}\,\mathrm{d}y.$$

В разделе 8 главы 2 мы рассмотрим некоторые вопросы гамильтонова формализма для уравнений Тоды и получим интеграл (3.22) из плотности гамильтониана 3.20. Пока же построим используемую в дальнейшем дифференциальную оболочку $\mathbf{T}$ минимального интеграла $T \in \ker \bar{D}_y$. Введём обозначение

$$T_j \equiv \bar{D}_x^j(T).$$

Дифференциальные следствия T_j из функционала T порождают подпространство $\mathbf{T} \subset \ker \bar{D}_y$ в ядре полной производной $\bar{D}_y$. В самом деле, любая гладкая функция Q задаёт функционал

$$Q(x, \mathbf{T}) \equiv Q(x, T, T_1, \ldots, T_\mu) \in \ker \bar{D}_y.$$

Будем говорить, что введённая выше невырожденная симметризуемая матрица K находится *в общем положении*, если интеграл (3.22) — единственное решение уравнения $\bar{D}_y(T) = 0$ для соответствующего уравнения Тоды (3.19).

Между тем, специальным выбором матрицы K можно добиться того, что функционал T будет не единственным интегралом, допускаемым уравнением Тоды (3.19). В [33] сформулирован критерий равенства $\dim \ker \bar{D}_y = 2$ при $r = 2$.

В дальнейшем через $\mathbf{\Omega}$ мы будем обозначать подпространство в $\ker \bar{D}_y$, дифференциально порождённое *всеми* решениями Ω^i уравнения $\bar{D}_y(\Omega^i) = 0$, общее число которых мы обозначаем буквой q, $1 \leqslant i \leqslant q \leqslant r$. Мы также полагаем $\Omega^1 \equiv T$.

Пример 3.6 ([33]). Если $K = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ — матрица Картана алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, то ассоциированные с этой матрицей уравнения Тоды (3.19) допускают два интеграла: $\Omega^1 = T$, заданный уравнением (3.22) и имеющий в данном случае вид

$$\Omega^1 = (u_x^1)^2 - u_x^1 u_x^2 + (u_x^2)^2 - u_{xx}^1 - u_{xx}^2, \tag{3.23a}$$

и интеграл

$$\Omega^2 = u_{xxx}^1 + u_x^1 \cdot (u_{xx}^2 - 2u_{xx}^1) + (u_x^1)^2 \cdot u_x^2 - u_x^1 \cdot (u_x^2)^2, \tag{3.23b}$$

который удовлетворяет уравнению $\bar{D}_y(\Omega) = 0$, но не следует из Ω^1.

Согласно [41] для существования r нетривиальных независимых решений Ω^i уравнения $\bar{D}_y(\Omega^i) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы K была матрицей Картана полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Уравнения Тоды, ассоциированные с $\mathfrak{g}$, точно интегрируемы [31].

3.4. Алгебра симметрий уравнений Тоды

В данном разделе мы ставим в соответствие функциональной оболочке $\mathbf{\Omega}$ дифференциальных следствий из введённых выше интегралов Ω^i классы инфинитезимальных симметрий уравнений Тоды. В разделе 4 мы выясним, какие из полученных симметрий являются нётеровыми симметриями лагранжиана $\mathcal{L}_{\text{Toda}}$.

Обозначим через $\Delta = |\Delta^i|$ вектор конформных размерностей [37] $\Delta^i = \sum_{j=1}^{r} k^{ij}$ полей Тоды $\exp(u) \equiv {}^t(\exp(u^1), \ldots, \exp(u^r))$ в соответствии со следующим утверждением.

Предложение 3.7 ([46]).

1. *Замена переменных*

$$\begin{aligned} x &\mapsto \mathcal{X}(x), \\ y &\mapsto \mathcal{Y}(y), \\ u^i(x,y) &\mapsto \tilde{u}^i = u^i(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) + \Delta^i \ln \mathcal{X}'(x)\mathcal{Y}'(y) \end{aligned} \tag{3.24}$$

   является конечной конформной симметрией уравнений Тоды $\mathcal{E}_{\text{Toda}}$.

2. *Лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{Toda}} = \int L_{\text{Toda}}\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ инвариантен относительно этой замены.*

3. *Введём обозначение $\beta \equiv \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot \Delta^i$. При диффеоморфизме* (3.24) *компонента T тензора энергии-импульса преобразуется по правилу*

$$T[u] \mapsto (\mathcal{X}'(x))^2 \cdot T[\tilde{u}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})] - \beta \cdot \left(\frac{\mathcal{X}'''(x)}{\mathcal{X}'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{\mathcal{X}''(x)}{\mathcal{X}'(x)} \right)^2 \right). \tag{3.25}$$

Замечание 3.8. В [46] рассмотрены свойства (3.24) и (3.25) симметрии уравнений Тоды, ассоциированных с алгебрами Ли. В приведённой выше формулировке утверждения 3.7 мы обобщаем цитируемый результат на уравнения (3.19), ассоциированные с произвольной невырожденной симметризуемой $(r \times r)$-матрицей K, и указываем коэффициенты $\vec{\Delta}$ и β применительно к новым условиям.

Инфинитезимальная форма утверждения 3.7 такова.

Предложение 3.9.

1 [34, 36]. *Инфинитезимальные компоненты конформных симметрий* (3.24) *уравнений Тоды с точностью до преобразования $x \leftrightarrow y$ имеют вид*

$$\varphi_0^f = \square(f(x)),$$

где f — произвольная гладкая функция, а

$$\square = \vec{u}_x + \vec{\Delta} \cdot \bar{D}_x \tag{3.26}$$

есть векторный дифференциальный оператор первого порядка.

2 [19]. *Каждая точечная симметрия φ_0^f является нётеровой симметрией лагранжиана $\mathcal{L}_{\text{Toda}}$:*

$$Э_{\varphi_0^f}(L_{\text{Toda}}\,\mathrm{d}x) \in \operatorname{im} \mathrm{d}_h.$$

3 [36, 45]. *Функционал T, заданный формулой* (3.22)*, является плотностью гамильтониана инфинитезимальных конформных симметрий φ_0^f:*

$$\varphi_0^f = A_1 \cdot \boldsymbol{E}_u(T \cdot f(x)\,\mathrm{d}x), \quad \text{где} \quad A_1 = \hat{\kappa}^{-1} \cdot D_x^{-1}. \tag{3.27}$$

В [36] часть 3 утверждения 3.9 была сформулирована в локальных координатах. В разделе 8 главы 2 мы проследим переход от канонического гамильтонова формализма для уравнений Тоды к указанному выше гамильтонову оператору A_1 и в теореме 9.11 установим, что равенство (3.27) является началом бесконечной серии соотношений между иерархией высших уравнений Кортевега—де Фриза (1.4) и построенной в разделе 7 коммутативной иерархией нётеровых симметрий уравнений Тоды.

Лемма 3.10. *Пусть K — произвольная симметризуемая $(r\times r)$-матрица и оператор $\square$ определён равенством* (3.26)*. Выполнены соотношения*

$$\bar{\ell}_F \circ \square = \bar{D}_x \circ \square \circ \bar{D}_y, \quad \bar{\ell}_F^* \circ \hat{\kappa} \circ \square = \bar{D}_x \circ \hat{\kappa} \circ \square \circ \bar{D}_y. \tag{3.28}$$

Доказательство. Выпишем первое соотношение в координатах:

$$\begin{aligned}
\bar{\ell}_F \circ \square &= \left\| \delta_{ij} \bar{D}_{xy} - k_{ij} \exp\Bigl(\sum_l k_{il} u^l\Bigr) \right\| \cdot |u_x^j + \Delta^j \cdot \bar{D}_x| = \\
&= \boldsymbol{u}_x\, \bar{D}_{xy} + \boldsymbol{u}_{xx}\, \bar{D}_y + \boldsymbol{u}_{xy}\, \bar{D}_x + \boldsymbol{u}_{xxy} + \vec{\Delta}\, \bar{D}_{xxy} - \\
&- \left| \sum_j k_{ij} u_x^i \exp\Bigl(\sum_l k_{il} u^l\Bigr) \right| - \left| \sum_{j,p} k_{ij} k^{jp} \exp\Bigl(\sum_l k_{il} u^l\Bigr) \right| \cdot \bar{D}_x = \\
&= \bar{D}_x \circ |\boldsymbol{u}_x + \vec{\Delta}\, \bar{D}_x| \circ \bar{D}_y,
\end{aligned}$$

что и требовалось. Второе тождество выводится из первого применением леммы 3.4 и условия Гельмгольца

$$\bar{\ell}_{\mathbf{E}(\mathcal{L}_{\mathrm{Toda}})} = \bar{\ell}^{*}_{\mathbf{E}(\mathcal{L}_{\mathrm{Toda}})}$$

ввиду симметричности матрицы $\kappa = {}^{t}\kappa$. □

Следствие 3.11. *Вектор-функции*

$$\varphi = \square(\phi(x, \mathbf{\Omega})) \tag{3.29}$$

являются симметриями уравнений Тоды: $\varphi \in \operatorname{sym}\mathcal{E}_{\mathrm{Toda}}$ *при всякой функции* ϕ, *зависящей от произвольного набора* $\mathbf{\Omega}$ *интегралов* $\Omega^i_j \equiv \bar{D}^j_x(\Omega^i) \in \ker \bar{D}_y$.

Формула (3.29) даёт описание алгебры симметрий $\operatorname{sym}\mathcal{E}_{\mathrm{Toda}}$.

Предложение 3.12 ([34]).

1. *Пусть выполнены предположения леммы* 3.10. *Тогда любая симметрия уравнения* (3.19) *имеет вид* (3.29).
2. *Предположим, что матрица* K *такова, что существует* q *интегралов* $\Omega^i \in \ker \bar{D}_y$, *где* $1 < q \leqslant r$, *а также предположим, что имеется* r *постоянных* $(r \times q)$-*матриц* $M_\alpha = \|(M_\alpha)^i_j\|$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant q$, *и постоянная* $(r \times q)$-*матрица* $\Delta = \|\Delta^i_j\|$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant q$, $\operatorname{rank}\Delta = q$, *которые удовлетворяют уравнениям*

$$\Delta^{\beta}_{i}\, f^{\alpha}_{\beta} = (M_\beta)^{\alpha}_{i}\, f^{\beta}, \quad f^{\alpha}_{\beta}\, (M_\gamma)^{\beta}_{i} = (M_\beta)^{\alpha}_{i}\, f^{\beta}_{\gamma},$$

где

$$f^i = \exp\biggl(\sum_{j=1}^{r} k_{ij} u^j\biggr) \quad \text{и} \quad f^i_j = k_{ij} \cdot f^i.$$

Построим $(r \times q)$-*матричный дифференциальный оператор первого порядка*

$$\square = \sum_{\alpha=1}^{r} M_\alpha \cdot u^{\alpha}_{x} + \Delta \cdot \bar{D}_x \tag{3.30}$$

и рассмотрим произвольный вектор $\phi = |\phi^i(x, \mathbf{\Omega})|$, $1 \leqslant i \leqslant q$. *Тогда сечения, заданные уравнением* (3.29), *исчерпывают все симметрии уравнений Тоды* $\mathcal{E}_{\mathrm{Toda}}$.

Итак, в обоих случаях мы имеем

$$\operatorname{sym}\mathcal{E}_{\mathrm{Toda}} \simeq \{\varphi^i = \square^i_j\, \phi^j(x, \mathbf{\Omega}) \mod (x \leftrightarrow y)\},$$

где число столбцов в операторе □ равно числу q независимых интегралов Ω^l, а вектор ϕ произволен.

Следствие 3.13. *Произвольное решение* ψ *уравнения* $\bar{\ell}^{*}_{F}(\psi) = 0$ *для уравнения* (3.19) *имеет вид*

$$\psi = \hat{\kappa}(\square(\phi(x, \mathbf{\Omega}))). \tag{3.31}$$

Подчеркнём, что задача нахождения интегралов $\mathbf{\Omega}$ первична для уравнений Тоды, а поиск симметрий φ, равно как и выбор нётеровых симметрий $\varphi_{\mathcal{L}}$, следуют за этой задачей. Отметим также, что любая конформная симметрия (3.24) уравнений Тоды нётерова, то есть сохраняет $\mathcal{L}_{\text{Toda}}$, однако не каждое сечение φ вида (3.29) является нётеровой симметрией уравнения (3.19).

4. Нётеровы симметрии уравнений Тоды

Прежде всего, основываясь на примере 1.16, установим важное свойство уравнений (3.19), чтобы получить возможность обоснованно применять аппарат производящих сечений при описании законов сохранения и нётеровых симметрий уравнений Тоды.

Лемма 4.1. *Уравнения Тоды $\mathcal{E}_{\text{Toda}}$ являются ℓ-нормальными.*

Доказательство. Согласно примеру 1.16 достаточно представить уравнения $\mathcal{E}^{\infty}_{\text{Toda}}$ в эволюционном виде. Пусть

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y$$

суть новые независимые переменные, выбранные таким образом, что имеют место уравнения

$$u^i_{\xi\xi} - u^i_{\eta\eta} = \exp\biggl(\sum_{j=1}^{r} k_{ij} u^j\biggr).$$

Положим теперь $v^i \equiv u^i_{\eta}$, тогда уравнения $\mathcal{E}_{\text{ev}} \subset J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^{2r})$ вида

$$\biggl\{ u^i_{\eta} = v^i,\ v^i_{\eta} = u^i_{\xi\xi} - \exp\biggl(\sum_{j=1}^{r} k_{ij} u^j\biggr)\biggr\}$$

суть искомое эволюционное представление уравнений (3.19). □

Из соотношения (3.21) и следствия 3.5 мы выводим взаимосвязь $\psi = \kappa\varphi_{\mathcal{L}}$ между нётеровыми симметриями и производящими сечениями законов сохранения для уравнений Тоды. Это наблюдение позволяет уточнить свойство, общее для всех интегралов Ω^i уравнения (3.19): предположим, что $\mathrm{d}_h(\Omega^i\,\mathrm{d}x) = -\tilde{\nabla}_i(F)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ для любого допустимого i, и рассмотрим закон сохранения $[\eta] = [Q(x, \mathbf{\Omega})\,\mathrm{d}x]$, получим тогда

$$\mathrm{d}_h Q(x, \mathbf{\Omega})\,\mathrm{d}x = -\sum_{i,j} \frac{\partial Q}{\partial \Omega^i_j}\, D^j_x \circ \tilde{\nabla}_i(F)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

и производящее сечение ψ_η закона сохранения $[\eta]$ имеет вид

$$\psi_\eta = -\sum_{i,j} (-1)^j (\tilde{\nabla}_i)^* \circ D^j_x \biggl(\frac{\partial Q}{\partial \Omega^i_j}\biggr) = -\sum_i (\tilde{\nabla}_i)^* \circ \mathbf{E}_{\Omega^i}(Q) \tag{4.1}$$

по определению. Теперь мы сравним (3.31) с (4.1) и, используя теорему 1.20 и лемму 3.4, получим следующую теорему.

Теорема 4.2.

1. *Для каждого интеграла* Ω^i *уравнений Тоды* (3.19) *существует такой оператор* ∇_i, *что*
$$\tilde{\nabla}_i = \nabla_i \circ \square^* \circ \hat{\kappa},$$
если $D_y(\Omega^i) = \tilde{\nabla}_i(F)$. *В частности, интегралу* $\Omega^1 = T$, *заданному формулой* (3.22), *соответствует оператор*
$$\nabla_1 = \boldsymbol{1}.$$

2. *Нётеровы симметрии уравнений Тоды имеют вид*
$$\varphi_{\mathcal{L}} = \square \circ \sum_i \nabla_i^* \circ \boldsymbol{E}_{\Omega^i}(Q(x, \boldsymbol{\Omega})),$$
где $\Omega^i \in \ker \bar{D}_y$ — *набор интегралов для уравнения* $\mathcal{E}_{\text{Toda}}$,
$$\boldsymbol{E}_{\Omega^i} = \sum_{j\geqslant 0} (-1)^j D_x^j \cdot \frac{\partial}{\partial \Omega^i_j}$$
есть оператор Эйлера относительно Ω^i, $\boldsymbol{\Omega}$ — *произвольное множество дифференциальных следствий из* Ω^i, *а* Q — *гладкая функция.*

Пример 4.3. Вновь рассмотрим уравнения Тоды (3.19), связанные с системой корней A_2. Тогда $r = 2$, $a_i = |\alpha_i|^{-2} = 1$ при $i = 1, 2$ и
$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad K^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\Delta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Положим $\square = \vec{u}_x + \vec{\Delta} \cdot \bar{D}_x$ (см. (3.26)). Интегралы Ω^1 и Ω^2 заданы в (3.23). Легко проверить, что $D_y(\Omega^1) = \square^* \circ \hat{\kappa}(F)$, так что $\nabla_1 = \mathbf{1}$ и
$$D_y(\Omega^2) = -D_x \circ \square^* \circ \hat{\kappa}(F),$$
следовательно, $\nabla_2 = -D_x$. Подчеркнём, что интеграл Ω^2 *не* эквивалентен $-D_x(\Omega^1)$.

Замечание 4.4. В теореме 4.2 мы установили, что для минимального интеграла T, определённого в (3.22), выполнено $\nabla_1 = \mathbf{1}$. Ограничим наши рассуждения на подпространство $\{Q(x, \mathbf{T})\} \subset \ker \bar{D}_y$ ядра полной производной, порождённое интегралом T и его дифференциальными следствиями. Тогда по теореме 1.20 законы сохранения $[Q\,\mathrm{d}x]$ для уравнений Тоды $\mathcal{E}_{\text{Toda}}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с нётеровыми симметриями $\varphi_{\mathcal{L}} = \square \circ \mathbf{E}_T(Q(x, \mathbf{T}))$.

Иными словами, нётеровы симметрии $\varphi_{\mathcal{L}}$ уравнений Тоды (3.19), построенных по невырожденной симметризуемой матрице K общего положения, имеют с точностью до преобразования $x \leftrightarrow y$ вид
$$\varphi_{\mathcal{L}} = \square \circ \mathbf{E}_T(Q(x, \mathbf{T})). \tag{4.2}$$

Это утверждение является расширением на $r \geqslant 1$ взаимосвязи между нётеровыми симметриями и законами сохранения для скалярного уравнения Лиувилля [89], причём реализованная выше схема рассуждений оказалась существенно проще вычислительного доказательства, приведённого в [89] для скалярного уравнения Лиувилля (см. также [25]).

5. Операторы рекурсии для уравнений Тоды

В этом разделе мы строим континуум операторов рекурсии, причём как локальных, так и нелокальных по D_x, для алгебры симметрий уравнений Тоды. Несмотря на то, что структура (3.29) алгебры симметрий в целом известна, наличие операторов рекурсии даёт нам дополнительную информацию о самих уравнениях Тоды и устанавливает их взаимосвязь с иными уравнениями математической физики.

На с. 70—72 введения был кратко описан конструктивный метод получения операторов рекурсии для алгебр симметрии дифференциальных уравнений. Применение этого метода к исследованию свойств уравнений Тоды (3.19), ассоциированных с невырожденными симметризуемыми $(r\times r)$-матрицами, приводит к следующей теореме.

Теорема 5.1 ([70]).

1. *Уравнения* (3.19) *допускают континуум* локальных *операторов рекурсии* $R\colon \operatorname{sym}\mathcal{E}_{\text{Toda}} \to \operatorname{sym}\mathcal{E}_{\text{Toda}}$ *вида*
$$R = \square \circ \sum_{i,j} f_{ij}(x, \mathbf{\Omega}) \cdot \bar{D}_x^j \circ \ell_{\Omega^i},$$
где f_{ij} — произвольные гладкие функции, а линеаризации ℓ_{Ω^i} относительно интегралов Ω^i для уравнений Тоды суть
$$\ell_{\Omega^i} = \Bigl(\ldots, \underbrace{\sum_{\sigma} \frac{\partial \Omega^i}{\partial u^k_\sigma} \cdot \bar{D}_\sigma}_{k\text{-я компонента}}, \ldots\Bigr). \tag{5.1}$$

2. *Существует континуум* нелокальных *операторов рекурсии для уравнения* (3.19). *Для их построения поставим в соответствие интегралам Ω^i нелокальные переменные s^i, задав правила дифференцирования $s^i_x = \Omega^i$ и $s^i_y = 0$. Линеаризации ℓ_{s^i} определены формулами*
$$\ell_{s^i} = \bar{D}_x^{-1} \circ \ell_{\Omega^i},$$
а вычисление ℓ_{Ω^i} производится согласно (5.1). *Искомые операторы рекурсии имеют вид*
$$R = \square \circ \sum_i f_i(x, \mathbf{s}, \mathbf{\Omega}) \cdot \bar{D}_x^{-1} \circ \ell_{\Omega^i},$$
где f_i — произвольные функции. В общем случае эти операторы не сохраняют локальность элементов (3.29) *алгебры симметрий* $\operatorname{sym}\mathcal{E}_{\text{Toda}}$.

Доказательство. Увеличим набор зависимых переменных u^j_σ, добавив переменные s^i и указав совместные правила дифференцирования

$$s^i_x = \Omega^i, \quad s_y = 0. \tag{5.2}$$

(На самом деле допустимо любое определение s^i_y, согласованное с условием совместности $s^i_{xy} = s^i_{yx} = 0$.) Расширим полные производные:

$$\tilde{D}_x = \bar{D}_x + \sum_i \Omega^i \frac{\partial}{\partial s^i}, \quad \tilde{D}_y = \bar{D}_y,$$

так что $[\tilde{D}_x, \tilde{D}_y] = 0$. Плоская связность Картана определена теперь на уравнении

$$\tilde{\mathcal{E}}^\infty = \{\tilde{D}^{k+1}_x(s^i) = \bar{D}^k_x(\Omega^i),\ \tilde{D}^k_x \circ \tilde{D}_y(s^i) = 0,\ k \geqslant 0;\ \bar{D}_\sigma(\vec{F}) = 0,\ |\sigma| \geqslant 0\}.$$

Производящие 1-формы Картана

$$\omega_{\text{Toda}} \in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}}^\infty) \otimes \mathcal{C}\Lambda^1(\tilde{\mathcal{E}}^\infty)$$

операторов рекурсии R_{Toda} удовлетворяют определяющему уравнению

$$\tilde{\ell}^{[1]}_{\text{Toda}}(\omega_{\text{Toda}}) = 0,$$

где $\tilde{\ell}^{[1]}_{\text{Toda}}$ — ограничение линеаризации уравнения (3.19) на $H^{1,0}_{\mathcal{C}}(\tilde{\mathcal{E}})$. Пользуясь факторизацией

$$\bar{\ell}_{\text{Toda}} \circ \square = \bar{D}_x \circ \square \circ \bar{D}_y$$

в (3.28), мы делаем вывод, что любая 1-форма Картана вида

$$\omega_{\text{Toda}} = \square\left(\sum_{i\geqslant 0} f_i(x, \mathbf{s}, \ldots, \tilde{D}^{k_i}_x(s^j)) \cdot \mathrm{d}_{\mathcal{C}}(\tilde{D}^i_x(s^l))\right) \tag{5.3}$$

лежит в ядре $\ker \tilde{\ell}^{[1]}_{\text{Toda}}$, откуда следует утверждение теоремы. В частности, если f_i не зависят явно от нелокальных переменных $\mathbf{s}$, то получаемый оператор рекурсии локален. □

Пример 5.2. Рассмотрим интеграл T (см. (3.22)) и его линеаризацию

$$\ell_T = \Bigl(\ldots, \underbrace{\sum_{j=1}^r \kappa_{ij} u^j_x \cdot \bar{D}_x - a_i \cdot \bar{D}^2_x}_{i\text{-я компонента}}, \ldots\Bigr) = \square^* \circ D_x \circ \hat{\kappa}. \tag{5.4}$$

Определим нелокальную переменную s, положив $s_x = T$ и $s_y = 1$, которая удовлетворяет условию совместности

$$s_{xy} = 0, \tag{5.5}$$

и построим оператор рекурсии

$$R_{\text{Toda}} = \square \circ \bar{D}^{-1}_x \circ \ell_T.$$

Применим оператор R_{Toda} к трансляции $u_x \in \operatorname{sym}\mathcal{E}_{\mathrm{Toda}}$ и получим набор симметрий

$$\varphi_k = \square(\phi_{k-1}),$$

которые соответствуют последовательности функций

$$\phi_{-1} = 1, \quad \phi_0 = s_1, \quad \phi_1 = -\beta s_3 + \frac{3}{2}s_1^2, \quad \phi_2 = \beta^2 s_5 - \frac{5}{2}\beta s_2^2 - 5\beta s_1 s_3 + \frac{5}{2}s_1^3$$

и т. д. Во второй главе мы рассмотрим свойства данного оператора рекурсии R_{Toda} и последовательности симметрий

$$\mathfrak{A} = \{\varphi_k \equiv R^k_{\mathrm{Toda}}(\varphi_0),\ \varphi_0 = \vec{u}_x\}$$

более подробно и покажем, что симметрии φ_k уравнений Тоды, порождённые многократным применением R_{Toda} к трансляции $\varphi_0 = \vec{u}_x$, локальны, гамильтоновы и коммутируют между собой. Кроме того, мы установим взаимосвязь между данной последовательностью симметрий $\mathfrak{A}$, уравнениями Кортевега—де Фриза (1.4) и (1.11) и операторами рекурсии (1.13) для них.

Глава 2. Иерархии Кортевега—де Фриза и уравнения Тоды

В этой главе, следуя [27, 72], мы строим коммутативную гамильтонову иерархию $\mathfrak{A}$ аналогов потенциального модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза, которая задаёт коммутативную подалгебру нётеровых симметрий уравнений Тоды. Также рассмотрены некоторые вопросы гамильтонова формализма для самих уравнений Тоды и установлена взаимосвязь иерархии $\mathfrak{A}$ с высшими уравнениями Кортевега—де Фриза (1.4).

Отправной точкой в исследовании связи между уравнениями Тоды (3.19) и классическими уравнениями математической физики — уравнениями Кортевега—де Фриза (1.4) и (1.11) — служит следующий пример.

6. Пример

Рассмотрим гиперболическое уравнение Лиувилля

$$\mathcal{E}_{\mathrm{Liou}} = \{u_{xy} - \exp(2u) = 0\}. \tag{6.1}$$

Минимальный интеграл (3.22) для этого уравнения имеет вид

$$T = u_1^2 - u_2, \quad \bar{D}_y(T) = 0 \tag{6.2}$$

(см. [14, 15]). Введём нелокальную переменную s, такую что

$$s_x = T, \quad s_y = 1, \tag{6.3}$$

и положим

$$\vartheta \equiv 2u_1. \tag{6.4}$$

Рассмотрим симметрию $\varphi = \big(u_1 + \frac{1}{2}\bar{D}_x\big)(T)$ уравнения Лиувилля и вычислим скорость эволюции переменных u, ϑ, T и s вдоль этой симметрии, будем иметь

$$u_t = -\frac{1}{2}u_3 + u_1^3 \qquad \text{(потенциальное мКдФ)}, \tag{6.5}$$

$$T_t = -\frac{1}{2}T_3 + 3TT_1 \quad \text{(КдФ)}, \tag{6.6}$$

$$s_t = -\frac{1}{2}s_3 + \frac{3}{2}s_1^2 \qquad \text{(потенциальное КдФ)}. \tag{6.7}$$

Преобразование Миуры [83, 87] принимает вид

$$\vartheta_1 = \mp 2T \mp \frac{1}{2}\vartheta^2, \quad \vartheta_t = \pm T_2 - (\vartheta T_1 + \vartheta_1 T), \tag{6.8a}$$

$$T = \mp\frac{1}{2}\vartheta_1 - \frac{1}{4}\vartheta^2. \tag{6.8b}$$

Соотношения (6.8) можно интерпретировать как преобразования Беклунда между уравнением Кортевега—де Фриза (6.6) и уравнением

$$\vartheta_t = -\frac{1}{2}\vartheta_3 + \frac{3}{4}\vartheta^2\vartheta_1 \quad \text{(модифицированное КдФ)}. \tag{6.9}$$

Входящие в уравнение (6.8) знаки $\pm$, $\mp$ обусловлены симметрией $\vartheta \mapsto -\vartheta$ уравнения (6.9), которая задаёт автопреобразование Беклунда для уравнения (6.6) (см. [5, 95]).

Оператор рекурсии

$$R_{\text{Liou}} = D_x^2 - 2u_1 + D_x^{-1}u_1\,D_x,$$

общий для уравнений (6.1) и (6.5), (см. [21, 65]), порождает коммутативную подалгебру Ли

$$\mathfrak{A}_{\text{Liou}} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\langle \varphi_k = R_{\text{Liou}}^k(\varphi_0),\ \varphi_0 = u_1\rangle$$

локальных высших симметрий потенциального модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза (6.5).

Поставим в соответствие уравнению Лиувилля переменную $\mathfrak{v}$, такую что

$$\mathfrak{v}_x = \exp(2u), \tag{6.10a}$$

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{v}} = \{\mathfrak{v}_y = \mathfrak{v}^2\} \tag{6.10b}$$

и выполнено $\mathfrak{v}_{xy} = \mathfrak{v}_{yx}$. Тогда уравнение $\mathcal{E}_{\text{Liou}}$ представимо в эволюционной форме

$$u_{t_{-1}} = \varphi_{-1} \equiv \mathfrak{v}, \tag{6.11}$$

где переменная $t_{-1} \equiv y$ является параметром и φ_{-1} — тень нелокальной симметрии

$$\tilde{\mathfrak{Э}}_{\varphi_{-1},a_{-1}} \equiv \tilde{\mathfrak{Э}}_{\varphi_{-1}} + a_{-1}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathfrak{v}},$$

для которой $a_{-1}=\mathfrak{v}^2$. Решение уравнения (6.10b) имеет вид $\mathfrak{v}=-(y+\mathcal{X}(x))^{-1}$. Применим преобразование (3.24) вида $\tilde{y}=\mathcal{Y}(y)$ к «времени» y и получим потенциал

$$\mathfrak{v}=-\frac{\mathcal{Y}'(y)}{(\mathcal{X}(x)+\mathcal{Y}(y))}$$

для общего решения $u=(1/2)\ln\mathfrak{v}_x$ уравнения Лиувилля:

$$u=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\mathcal{X}'(x)\cdot\mathcal{Y}'(y)}{(\mathcal{X}(x)+\mathcal{Y}(x))^2}\right] \tag{6.12}$$

(см. [77,88]). Отметим, что функционал (6.2) непрерывен на формальных расходимостях $u\to\pm\infty$ решения (6.12) (см. работу [68] и ссылки в ней). Реализованная выше схема построения общего решения уравнения Лиувилля посредством введения потенциала $\mathfrak{v}$ является, с нашей точки зрения, весьма лаконичной и продуктивной. Родственный подход применяется, например, при выводе подстановки Коула—Хопфа для уравнения Бюргерса [5].

Решение (6.12) уравнения (6.1) — это отображение

$$\tau\colon\{\mathcal{X}_y=0,\ \mathcal{Y}_x=0\}\to\mathcal{E}_{\mathrm{Liou}}.$$

Определяемое формулой (6.5) эволюционное поле Э_{u_t} можно поднять на прообраз отображения τ: имеем $\mathcal{Y}_t=0$ и уравнение Кричевера—Новикова

$$\mathcal{X}_t=-2\mathcal{X}_3+3\frac{\mathcal{X}_2^2}{\mathcal{X}_1}=-2\mathcal{X}_1\cdot\{\mathcal{X},x\}, \tag{6.13}$$

где $\{\mathcal{X},x\}$ — производная Шварца, также выполнено соотношение

$$\mathfrak{v}_t=a_1\equiv\mathfrak{v}_3-\frac{3}{2}\mathfrak{v}_2^2\mathfrak{v}_1^{-1}.$$

Рассмотренные в этом примере эволюционные уравнения упорядочены в соответствии с приведённой ниже схемой:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Уравнение Кричевера—Новикова (1.15)}} \arrow[d, "\text{Ур-е}"', "(1.14)"] & \boxed{\text{Уравнение Кричевера—Новикова (6.13), } \mathcal{Y}_t=0} \arrow[d, "\text{Ур-е}"', "(6.12)"] \\
\boxed{\text{Потенциальное уравнение КдФ (6.7)}} \arrow[r, "\text{Ур-е}", "(5.2)"'] \arrow[d, "\text{Ур-е}"', "(6.3)"] & \boxed{\text{Потенциальное уравнение мКдФ (6.5)}} \arrow[d, "\text{Ур-е}"', "(6.4)"] \\
\boxed{\text{Уравнение КдФ (6.6)}} & \boxed{\text{Модифицированное уравнение КдФ (6.9)}} \arrow[l, "\text{Ур-е}"', "(6.8)"]
\end{tikzcd}.$$

7. Аналоги модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза

7.1. Построение иерархии $\mathfrak{A}$

Начнём с формулировки полезного свойства интегралов $\Omega^i \in \ker D_y|_{\mathcal{E}}$ для уравнений $\mathcal{E}$ лиувиллевского типа: установим, как эти интегралы эволюционируют вдоль симметрий $\varphi \in \operatorname{sym}\mathcal{E}$ уравнения $\mathcal{E}$.

Лемма 7.1 ([14]). *Скорость эволюции* $\text{Э}_\varphi(\Omega^i)$ *произвольного интеграла* $\Omega^i \in \ker \bar{D}_y$ *для данного уравнения* $\mathcal{E}$ *вдоль любой его симметрии* Э_φ *вновь принадлежит* $\ker \bar{D}_y$.

Доказательство. В самом деле, имеем

$$\bar{D}_y(\text{Э}_\varphi(\Omega^i)) = \text{Э}_\varphi(\bar{D}_y(\Omega^i)) = \text{Э}_\varphi(0) = 0. \quad \square$$

Пример 7.2. Рассмотрим симметрию $\varphi = \square(\phi(x, \mathbf{T}))$ уравнений Тоды (см. (3.29)). Тогда выполнено соотношение

$$\dot{T}_\phi \equiv \text{Э}_{\square(\phi)}(T) = (-\beta\,\bar{D}_x^3 + T\,\bar{D}_x + D_x \circ T)(\phi), \tag{7.1}$$

где

$$\beta \equiv \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot \Delta^i, \quad \square = \boldsymbol{u}_x + \vec{\Delta}\,\bar{D}_x, \quad \Delta^i = \sum_j k^{ij}.$$

Кроме того, мы можем вычислить скорость эволюции s_t нелокальной переменной s, введённой в примере 5.2 условиями $s_x = T$ и $s_y = 1$, пользуясь формулой

$$\text{Э}_{\vec{\varphi}}(s) = D_x^{-1} \circ \text{Э}_{\vec{\varphi}}(T).$$

Рассмотрим последовательность $\vec{\varphi}_0$, $\vec{\varphi}_1$, $\vec{\varphi}_2$ симметрий уравнений Тоды, соответствующих специальному выбору функций ϕ в формуле (3.29): именно, положим $\phi_{-1} = 1$, построим симметрию $\varphi_0 = \square(\phi_{-1})$ и вычислим соответствующую ей эволюцию $\dot{T}_{\phi_{-1}}$, после чего перейдём к потенциалу s и получим новую функцию ϕ_0. Аналогично построим функцию ϕ_1 и симметрии φ_1 и φ_2. Результат изображён на следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
\vec{\varphi}_2 & \phi_1 = -\beta s_3 + \frac{3}{2}s_1^2 \arrow[l, "\square"'] & \dot{T}_{\phi_0} = -\beta T_3 + 3TT_1 \arrow[l, "D_x^{-1}"'] & \\
& \vec{\varphi}_1 = \square(s_1) \arrow[ul, "R_{\text{Toda}}"] \arrow[ur, "\ell_T"'] & \phi_0 = s_1 \arrow[l, "\square"'] & \dot{T}_{\phi_{-1}} = T_1 \arrow[l, "D_x^{-1}"'] \arrow[ul, "R_{\text{KdV}}"'] \\
& & \vec{\varphi}_0 = \boldsymbol{u}_x \arrow[ul, "R_{\text{Toda}}"] \arrow[ur, "\ell_T"'] & \phi_{-1} = 1 \arrow[l, "\square"']
\end{tikzcd} \tag{7.2}$$

В диаграмме (7.2) мы встречаем такие уравнения: уравнение Кортевега—де Фриза

$$\mathcal{E}_{\text{KdV}} = \{T_t = -\beta T_3 + 3T \cdot T_1\} \tag{7.3}$$

с оператором рекурсии (1.13a), потенциальное уравнение Кортевега—де Фриза

$$\mathcal{E}_{\mathrm{pKdV}} = \left\{ s_t = -\beta s_3 + \frac{3}{2} s_1^2 \right\}, \tag{7.4}$$

а также уравнение

$$\mathcal{E}_{\mathrm{pmKdV}} = \{ \boldsymbol{u}_t = \square(T(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)) \}. \tag{7.5}$$

Если $K = \|2\|$ — матрица Картана алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, то ассоциированное с этой алгеброй уравнение Тоды (3.19) есть гиперболическое уравнение Лиувилля (6.1), а уравнение (7.5) — это в точности скалярное потенциальное модифицированное уравнение Кортевега—де Фриза (6.7). В общем же случае, когда входящая в уравнения Тоды матрица K — это произвольная невырожденная симметризуемая $(r \times r)$-матрица (причём не обязательно матрица Картана полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ранга r), мы получаем r-компонентную систему эволюционных уравнений третьего порядка с кубической нелинейностью, которая в координатах принимает вид

$$u_t^i = \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{r} a_p \cdot \{ k_{pq} u_x^i u_x^p u_x^q + 2(\Delta^i k_{pq} - \delta_{i,q}) u_{xx}^p u_x^q - 2\Delta^i u_{xxx}^p \}$$

при всех $1 \leqslant i \leqslant r$. Напомним, что

$$\Delta^i = \sum_j k^{ij} \quad \text{и} \quad a_p k_{pq} = a_q k_{qp}.$$

Аналоги потенциального модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза при $r = 2$. В данном разделе мы рассмотрим эволюционные системы (7.5), соответствующие случаю $r = 2$ и симметричной матрице K, более детально.

Пример 7.3. Зададим симметричную матрицу

$$K = \begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\vec{\Delta} = \frac{1}{\lambda + 2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Введём новые переменные

$$u = u^1 + u^2, \quad v = (\lambda + 2)(u^1 - u^2),$$

переход к старым зависимым переменным задан формулами

$$u^1 = \frac{1}{2} u + \frac{1}{2(\lambda + 2)} v, \quad u^2 = \frac{1}{2} u - \frac{1}{2(\lambda + 2)} v.$$

В этом случае нормальная форма уравнений (7.5) такова:

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{2}{\lambda + 2} u_3 + \frac{2 - \lambda}{(\lambda + 2)^3} v_1 v_2 + \frac{\lambda + 2}{4} u_1^3 + \frac{2 - \lambda}{4(\lambda + 2)^2} u_1 v_1^2, \\ v_t &= -u_2 v_1 + \frac{\lambda + 2}{4} u_1^2 v_1 + \frac{2 - \lambda}{4(\lambda + 2)^2} v_1^3. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Выполним масштабное преобразование

$$t = (\lambda+2)^2 \cdot \tilde{t}, \quad u = (\lambda+2)^{-1} \cdot \tilde{u}, \quad v = \tilde{v}, \tag{7.7}$$

сохраняя прежние обозначения x, t, u, v.

Предложение 7.4. *В координатах* (7.7) *уравнения* (7.6) *становятся линейными по* λ *и принимают вид*

$$\begin{aligned} u_t &= -2u_3 + 2v_1v_2 + \frac{1}{2}u_1^3 + \frac{1}{2}u_1v_1^2 + \lambda\left(-v_1v_2 + \frac{1}{4}u_1^3 - \frac{1}{4}u_1v_1^2\right), \\ v_t &= -2u_2v_1 + \frac{1}{2}u_1^2v_1 + \frac{1}{2}v_1^3 + \lambda\left(-u_2v_1 + \frac{1}{4}u_1^2v_1 - \frac{1}{4}v_1^3\right). \end{aligned} \tag{7.8}$$

Замечание 7.5. Вектор-функция, стоящая в (7.8) при λ, *не* является симметрией потока при λ^0 (и наоборот).

Предложение 7.6.

1. *Симметрии*

$$\begin{pmatrix}\varphi^1\\ \varphi^2\end{pmatrix}(t, x, u, v, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3)$$

порядка $\leqslant 3$ *потока*

$$\begin{aligned} u_t &= -2u_3 + 2v_1v_2 + \frac{1}{2}u_1^3 + \frac{1}{2}u_1v_1^2, \\ v_t &= -2u_2v_1 + \frac{1}{2}u_1^2v_1 + \frac{1}{2}v_1^3 \end{aligned}$$

при λ^0 *в* (7.8) *порождены образующими*

$$\begin{pmatrix} tu_t + \frac{1}{3}xu_x \\ tv_t + \frac{1}{3}xv_x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то есть масштабной симметрией, трансляциями и сдвигами. Коммутирование трансляций по t *и* x *с масштабной симметрией оставляет каждую из трансляций на месте.*

2. *Симметрии*

$$\begin{pmatrix}\varphi^1\\ \varphi^2\end{pmatrix}(t, x, u, v, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3)$$

порядка $\leqslant 3$ *потока*

$$\begin{aligned} u_t &= -v_1v_2 + \frac{1}{4}u_1^3 - \frac{1}{4}u_1v_1^2, \\ v_t &= -u_2v_1 + \frac{1}{4}u_1^2v_1 - \frac{1}{4}v_1^3 \end{aligned}$$

при λ^1 *в* (7.8) *порождены образующими*

$$\begin{pmatrix} tu_t + \frac{1}{3}xu_x \\ tv_t + \frac{1}{3}xv_x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то есть масштабной симметрией, трансляциями и сдвигами.

Законы сохранения системы (7.8), приведённой к нормальной форме, таковы.

Предложение 7.7. *Существует одно производящее сечение*

$$\begin{pmatrix}\psi^1\\ \psi^2\end{pmatrix}(t,x,u,v,u_1,v_1,u_2,v_2)=\begin{pmatrix}u_2\\ \frac{\lambda-2}{\lambda+2}v_2\end{pmatrix}$$

порядка $\leqslant 2$ *закона сохранения для потока* (7.8) *при* λ *общего положения* (см. *замечание* 7.11), *это сечение соответствует сохраняющейся плотности*

$$H=u_x^2+\frac{\lambda-2}{\lambda+2}v_x^2.$$

Как будет установлено в разделе 9, уравнения (7.6) гамильтоновы относительно оператора $A_1=K^{-1}\cdot\bar{D}_x^{-1}$. Чтобы получить гамильтоново представление системы (7.8), сформулируем правило преобразования гамильтоновых операторов при заменах зависимых переменных.

Лемма 7.8. *Рассмотрим гамильтоново уравнение*

$$u_t=A(\boldsymbol{E}_u(\mathcal{H}[u])).$$

Пусть задано невырожденное преобразование $\tilde{u}=Qu$ *зависимых переменных. Тогда выполнено*

$$\tilde{u}=\tilde{A}(\boldsymbol{E}_{\tilde{u}}(\mathcal{H}[\tilde{u}])),$$

где

$$\tilde{A}=Q\cdot A\cdot{}^tQ.$$

Пример 7.9. Для уравнений (7.8) мы получаем диагональный оператор

$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}_t=2\begin{pmatrix}\lambda+2 & 0\\ 0 & \frac{(\lambda+2)^2}{2-\lambda}\end{pmatrix}\cdot D_x^{-1}(\mathbf{E}_{(u,v)}(T^2\,\mathrm{d}x)),$$

где плотность h_1 гамильтониана $T^2\,\mathrm{d}x$ уравнения Кортевега—де Фриза в координатах u, v принимает вид

$$h_1=\frac{1}{16}((\lambda-2)v_x^2-(\lambda+2)u_x^2+4(\lambda+2)u_{xx})^2.$$

Предложение 7.10. *Симметрии*

$$\begin{pmatrix}\varphi^1\\ \varphi^2\end{pmatrix}(t,x,u,v,u_1,v_1,u_2,v_2)$$

порядка $\leqslant 2$ *уравнения* (7.8), *соответствующего* λ *общего положения* (см. замечание 7.11), *порождены образующими*

$$\begin{pmatrix}u_x\\ v_x\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\tag{7.9}$$

то есть трансляцией и сдвигами.

Замечание 7.11. Подчеркнём, что алгебра симметрий (в том числе и классических) полученной системы (7.8) существенно зависит от исходной матрицы K: случаи $\lambda = -1$ (матрица K соответствует алгебре A_2) и $\lambda = \pm 2$ (матрица K вырожденна) являются особыми. Ниже мы рассмотрим их по отдельности.

Сначала рассмотрим случай $\lambda = -1$, то есть K — матрица Картана алгебры Ли A_2. Подстановка (7.7) принимает вид

$$u = u^1 + u^2, \quad v = u^1 - u^2.$$

Выполняя тождественные преобразования, имеем

$$\begin{aligned} u_t &= -u_3 + \frac{3}{2}v_1v_2 + \frac{1}{8}u_1^3 + \frac{3}{8}u_1v_1^2, \\ v_t &= -\frac{1}{2}u_2v_1 + \frac{1}{8}u_1^2v_1 + \frac{3}{8}v_1^3. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Предложение 7.12.

1. *Симметрии*

$$\begin{pmatrix}\varphi^1\\ \varphi^2\end{pmatrix}(t, x, u, v, u_1, v_1, u_2, v_2)$$

порядка $\leqslant 2$ *потока* (7.10) *порождены образующими*

$$\begin{pmatrix} v \\ -\frac{1}{3}u + \frac{2}{3}\ln v_x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то есть неполиномиальной *симметрией, трансляцией и сдвигами. Эта неполиномиальная симметрия представима в виде*

$$u_{xt}^2 = \exp(u + 3u_{tt}).$$

2. *Производящие сечения*

$$\begin{pmatrix}\psi^1\\ \psi^2\end{pmatrix}(t, x, u, v, u_1, v_1, u_2, v_2)$$

порядка $\leqslant 2$ *законов сохранения для потока* (7.10) *суть*

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ 3v_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Psi(u, v, v_x) \\ 2\frac{\partial\Psi}{\partial v} + 2v_2v_1^{-1}\frac{\partial\Psi}{\partial v_1} - u_1\frac{\partial\Psi}{\partial v_1} \end{pmatrix},$$

где функция Ψ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial\Psi}{\partial u} + \frac{1}{2}v_1\frac{\partial\Psi}{\partial v_1} - \frac{1}{2}\Psi = 0.$$

Теперь (впервые в данной работе) рассмотрим случай вырождения матрицы K. Нетривиально, но матрица K может быть вырождена по-разному.

Именно, пусть $\lambda = 2$ и $K = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Тогда система (7.6) становится треугольной[1]:

$$\begin{cases} u_t = -\dfrac{1}{2}u_3 + u_1^3, \\ v_t = -u_2 v_1 + u_1^2 v_1. \end{cases} \tag{7.11}$$

Она состоит из потенциального модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза и дополнительной бездисперсионной компоненты. Существенно, что сдвиг переменной v произволен: ${}^t(0, f(v))$ — симметрия уравнения (7.11) при произвольной f. Существует ещё пара симметрий — трансляция и сдвиг u, — такие же, как в (7.9).

Предложение 7.13. *Производящие сечения*

$$\begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} (t, x, u, v, u_1, v_1, u_2, v_2)$$

порядка $\leqslant 2$ *законов сохранения для потока* (7.11) *при* $\lambda = 2$ *имеют вид*

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \exp(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \exp(-u) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Сохраняющиеся плотности суть

$$\rho_1 = -\frac{1}{2}u_x^2, \quad \rho_2 = \exp(u), \quad \rho_3 = -\exp(-u)$$

соответственно. Последние две из них задают неполиномиальные *сохраняющиеся токи*

$$\eta_2 = \exp(u)\,\mathrm{d}x + (2u_2 - u_1^2)\exp(u)\,\mathrm{d}t,$$
$$\eta_3 = -\exp(-u)\,\mathrm{d}x + (2u_2 + u_1^2)\exp(-u)\,\mathrm{d}t$$

для потенциального модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза

$$u_t = -2u_3 + u_1^3$$

с полиномиальной *правой частью.*

Если же $\lambda = -2$ и $K = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, то уравнение (7.8) принимает вид

$$\begin{cases} u_t = -2u_3 + 4v_1 v_2 + u_1 v_1^2, \\ v_t = v_x^3. \end{cases} \tag{7.12}$$

Предложение 7.14. *При* $\lambda = -2$ *симметрии системы* (7.8) *суть* (7.9). *Производящие сечения*

$$\begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} (t, x, u, v, u_1, v_1, u_2, v_2)$$

[1] Алгебра классических симметрий уравнений Тоды с такой матрицей задана производящими сечениями $\vec{\varphi} = \alpha\vec{u}_x + \beta(x)\vec{\mathbf{1}}$, где константа α и функция $\beta(x)$ произвольны.

порядка $\leqslant 2$ *законов сохранения для потока* (7.12) *таковы*:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \Psi(x,t,v,v_x,v_{xx}) \end{pmatrix},$$

где функция Ψ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} - 2v_1^3\frac{\partial\Psi}{\partial v} - 3v_1^2\frac{\partial\Psi}{\partial x} + v_1v_2^2\frac{\partial\Psi}{\partial v_2} - 6v_1v_2\Psi = 0.$$

Факторизации операторов рекурсии. Вернемся к задаче описания коммутативной иерархии $\mathfrak{A}$, ассоциированной с исходным уравнением Тоды $\mathcal{E}_{\mathrm{Toda}}$.

По построению симметрии φ_i связаны оператором рекурсии

$$R_{\mathrm{Toda}} = \square\circ D_x^{-1}\circ\ell_T \tag{7.13}$$

для уравнений Тоды (3.19) (см. пример 5.2). Зафиксируем[1] это определение R_{Toda} до конца работы.

В данном разделе мы установим, что всякая симметрия

$$\vec{\varphi}_k = \square(\phi_{k-1}) \in \operatorname{sym}\mathcal{E}_{\mathrm{Toda}}$$

конструктивно задаёт следующую функцию ϕ_k соотношением $\phi_k = \ni_{\vec{\varphi}_k}(s)$, так что $\vec{\varphi}_{k+1} = \square(\phi_k)$, и дадим обоснование того, что ϕ_k образуют иерархию потенциального уравнения Кортевега—де Фриза (7.4).

Заметим, что функции ϕ_{-1}, ϕ_0 и ϕ_1 последовательно переводятся одна в другую оператором рекурсии

$$R_{\mathrm{pKdV}} = -\beta D_x^2 + 2s_1 - D_x^{-1}\circ s_2 \tag{7.14}$$

для уравнения (7.4) (см. [96]), который мы получили во введении, иллюстрируя разработанный И. С. Красильщиком метод производящих форм Картана [74].

Лемма 7.15. *Имеют место следующие разложения операторов рекурсии на множители*:

$$R_{\mathrm{Toda}} = \square\circ\ell_s,\quad R_{\mathrm{pKdV}} = \ell_s\circ\square, \tag{7.15}$$

где $\ell_s = D_x^{-1}\circ\ell_T$ *согласно уравнению* (1.18), *а линеаризация* ℓ_T *задана формулой* (5.4).

Доказательство. Первое из этих разложений выполнено по построению, а справедливость второго устанавливается таким вычислением:

$$\begin{aligned}
&\ell_T\circ(\boldsymbol{u}_x + \vec{\Delta}D_x) = \\
&\quad= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\kappa_{ij}u_1^iD_x\circ u_1^j + \frac{1}{2}\sum_i a_i\Big\{\Big(\sum_j k_{ij}u_1^i\Big)D_x\circ u_1^i - 2D_x^2\circ u_1^i\Big\} + \\
&\quad+ \frac{1}{2}\sum_{i,j}\kappa_{ij}u_1^i\Delta^jD_x^2 + \frac{1}{2}\sum_i a_i\Big\{\Big(\sum_j k_{ij}u_1^j\Big)\Delta^iD_x^2 - 2\Delta^iD_x^3\Big\} =
\end{aligned}$$

[1]Как уже было отмечено в первой главе, мы рассматриваем уравнения Тоды и структуры на них с точностью до дискретной симметрии $x\leftrightarrow y$.

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_i a_i \Delta^i D_x^3 + \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_i \{k_{ij}(u_1^i u_2^j + u_2^i u_1^j) - 2u_3^i\} + \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_i \{k_{ij}(u_1^i u_1^j + u_1^i u_1^j) - 4u_3^i\} D_x + \\
&+ \frac{1}{2}\Big\{ \sum_i a_i \cdot (-2u_1^i) D_x^2 + \sum_{i,j} \kappa_{ij} \Delta^j u_1^i D_x^2 + \sum_{i,j} \kappa_{ij} \Delta^i u_1^j D_x^2 \Big\} = \\
&= -\beta D_x^3 + T_1 + 2T\, D_x,
\end{aligned}
$$

откуда следует искомое равенство. $\square$

Подчеркнём, что представление скалярного оператора R_{pKdV} в виде произведения *векторного* оператора $\square$ и строки ℓ_s длины r, насколько нам известно, не отмечалось в литературе.

Используя лемму 7.15 и отождествляя инфинитезимальные симметрии дифференциальных уравнений с автономными эволюционными уравнениями, неограниченно продолжим диаграмму (7.2) вверх, получая в результате диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
\cdots & \cdots \\
\boldsymbol{u}_{t_2} = \vec{\varphi}_2 \arrow[u, "R_{\mathrm{Toda}}"] \arrow[ur, "\ell_s"] & s_{t_1} = \phi_1 = -\beta s_3 + \frac{3}{2} s_1^2 \arrow[u, "R_{\mathrm{pKdV}}"'] \arrow[l, "\square"'] \\
\boldsymbol{u}_{t_1} = \vec{\varphi}_1 \arrow[u, "R_{\mathrm{Toda}}"] \arrow[ur, "\ell_s"] & s_{t_0} = \phi_0 = s_1 \arrow[u, "R_{\mathrm{pKdV}} = -\beta D_x^2 + 2s_1 - D_x^{-1} \circ s_2"'] \arrow[l, "\square"'] \\
\underbrace{\boldsymbol{u}_{t_0} = \vec{\varphi}_0 = \boldsymbol{u}_x}_{\mathfrak{A}} \arrow[u, "R_{\mathrm{Toda}}"] \arrow[ur, "\ell_s"] & \underbrace{s_{t_{-1}} = \phi_{-1} = 1}_{\mathfrak{B}} \arrow[u, "R_{\mathrm{pKdV}}"'] \arrow[l, "\square"']
\end{tikzcd}
\tag{7.16}
$$

Правые части ϕ_k эволюционных уравнений $s_{t_k} = \phi_k$ являются высшими симметриями потенциального уравнения Кортевега—де Фриза $\mathcal{E}_{\mathrm{pKdV}}$, поскольку все они определены оператором рекурсии R_{pKdV}.

В диаграмме (7.16) времена t_i, входящие в уравнения $u_{t_k} = \varphi_k$ и $s_{t_k} = \phi_k$, согласованы между собой.

Теорема 7.16. *Скорость эволюции $\mathfrak{Э}_{\varphi_k}(s)$ нелокальной переменной s в силу высшей симметрии $\varphi_k = \square(\phi_{k-1})$ уравнений Тоды* (3.19) *тождественно равна эволюции ϕ_k, заданной k-м высшим аналогом $s_{t_k} = R_{\mathrm{pKdV}}^{k+1}(1)$ потенциального уравнения Кортевега—де Фриза* (7.4):

$$\text{Э}_{\square(\phi_{k-1})}(s) = \phi_k = R_{\mathrm{pKdV}}(\phi_{k-1}).$$

Доказательство. Из разложений (7.15) следует равенство

$$R_{\mathrm{pKdV}}(\phi_k) = D_x^{-1}(\text{Э}_{\square(\phi_k)}(T)). \quad \square$$

Следствие 7.17.

1. *По всякой тени $\vec{\varphi}_k$ в накрытии τ_s вида* (5.2) *над уравнением Тоды можно восстановить настоящую нелокальную симметрию $\tilde{\ni}_{\vec{\varphi}_k,\phi_k}$ уравнений Тоды.*
2. *Все входящие в* (7.16) *поддиаграммы*

$$\begin{tikzcd} \vec{\varphi}_{k+2} & \phi_{k+1} \arrow[l, "\square"'] \\ \vec{\varphi}_{k+1} \arrow[u, "R_{\text{Toda}}"] & \phi_k \arrow[l, "\square"'] \arrow[u, "R_{\text{pKdV}}"'] \end{tikzcd}$$

коммутативны: $R_{\text{Toda}}(\vec{\varphi}_{k+1}) = \square(\phi_{k+1})$, и выполнены соотношения

$$R_{\text{Toda}} = \square \circ R_{\text{pKdV}} \circ \square^{-1}, \quad R_{\text{pKdV}} = \square^{-1} \circ R_{\text{Toda}} \circ \square.$$

Замечание 7.18. То, что в скалярном случае (6.1)—(6.9) операторы рекурсии R_{Toda} и R_{pKdV} сопряжены один другому, отмечалось в [65].

Обоснование локальности цепочки симметрий $\mathfrak{A}$. Из приведённых выше рассуждений пока не следует, что элементы ϕ_k последовательности $\mathfrak{B}$ высших симметрий потенциального уравнения Кортевега—де Фриза (7.4) локальны (также этого пока не следует для элементов $\varphi_{k+1} = \square(\phi_k)$ последовательности $\mathfrak{A}$), поскольку они по построению лежат в образе оператора D_x^{-1}.

Предложение 7.19 ([55]). *Оператор рекурсии* (7.14) *для потенциального уравнения Кортевега—де Фриза* (7.4) *порождает последовательность* локальных по T *высших симметрий*

$$\phi_k = R_{\text{pKdV}}^{k+1}(\phi_{-1}) = \phi_k(T, \ldots, T_{2k}),$$

где $\phi_{-1} = 1$ — *сдвиг зависимой переменной s на константу.*

Существует несколько способов доказать утверждение 7.19. Один из них, указанный И. С. Красильщиком [73], опирается на свойство слабой нелокальности оператора рекурсии R_{pKdV} (см. (10.8)).

Следствие 7.20. *Определённые выше симметрии $\vec{\varphi}_k = \square(\phi_{k-1})$ уравнения* (3.19) — *элементы последовательности $\mathfrak{A}$ — локальны и зависят от производных u_σ^j, $|\sigma| \geqslant 1$, при всех $k \geqslant 0$.*

Отметим также, что в [21] в скалярном случае $r = 1$ мы установили локальность высших симметрий $\mathfrak{A} \subset \operatorname{sym} \mathcal{E}_{\text{Liou}}$ напрямую, минуя обсуждение свойств потенциального уравнения (7.4).

7.2. Коммутативность иерархии $\mathfrak{A}$

Классический пример эволюционных уравнений, допускающих коммутативную подалгебру симметрий, задан следующей леммой.

Лемма 7.21 ([18]). *Пусть $\mathcal{E}$ — скалярное эволюционное уравнение*

$$u_t = u_k + f(u_{k-2}, \ldots, u), \tag{7.17}$$

причём f — полином. Тогда подалгебра Ли

$$\langle \varphi \in \operatorname{sym}\mathcal{E} \mid \varphi = \varphi(u_\sigma)\rangle \subseteq \operatorname{sym}\mathcal{E}$$

симметрий уравнения $\mathcal{E}$, зависящих лишь от переменной u или её производных, является коммутативной.

Обозначим через $\mathfrak{B}$ минимальную алгебру Ли, порождённую симметриями ϕ_k потенциального уравнения Кортевега—де Фриза при $k \geqslant -1$. Из леммы 7.21 следует, что алгебра $\mathfrak{B}$ коммутативна:

$$\{\phi_k, \phi_l\} = \partial_{\phi_k}(\phi_l) - \partial_{\phi_l}(\phi_k) = 0,$$

и потому она совпадает с линейной оболочкой образующих ϕ_k:

$$\mathfrak{B} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\langle \phi_k \mid k \geqslant -1\rangle.$$

Установим правила коммутирования симметрий $\varphi = \square(\phi(x, \mathbf{T}))$ уравнений Тоды (3.19).

Лемма 7.22. *Определённая в теореме* 1.5 *скобка Якоби на симметриях* (3.29) *индуцирует такую скобку на аргументах оператора $\square$: пусть $\varphi' = \square(\phi'(x, \boldsymbol{T}))$ и $\varphi'' = \square(\phi''(x, \boldsymbol{T}))$, тогда*

$$\{\varphi', \varphi''\} = \square(\phi_{\{1,2\}}),$$

где

$$\phi_{\{1,2\}} = \partial_{\varphi'}(\phi'') - \partial_{\varphi''}(\phi') + \bar{D}_x(\phi')\phi'' - \phi'\bar{D}_x(\phi''), \tag{7.18}$$

причём $\phi_{\{1,2\}} = \phi_{\{1,2\}}(x, \boldsymbol{T})$ согласно (7.1).

Через $\mathfrak{A}$ мы обозначим минимальную алгебру Ли, порождённую $\vec{\varphi}_k$ при $k \geqslant 0$.

Теорема 7.23. *Алгебра Ли $\mathfrak{A} \subset \operatorname{sym}\mathcal{E}_{\text{Toda}}$ коммутативна: $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}] = 0$, и потому*

$$\mathfrak{A} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\langle \vec{\varphi}_k \mid k \geqslant 0\rangle.$$

Доказательство. Прокоммутируем две симметрии $\partial_{\varphi_{k_1}}$ и $\partial_{\varphi_{k_2}}$, применим получаемое эволюционное поле к переменной s и воспользуемся связью между ϕ_k и φ_k:

$$[\partial_{\varphi_{k_1}}, \partial_{\varphi_{k_2}}](s) = \partial_{\varphi_{k_1}}(\phi_{k_2}) - \partial_{\varphi_{k_2}}(\phi_{k_1}) = \\ = \partial^{(s)}_{\phi_{k_1}}(\phi_{k_2}) - \partial^{(s)}_{\phi_{k_2}}(\phi_{k_1}) = \{\phi_{k_1}, \phi_{k_2}\} = 0.$$

Поскольку $T = s_x$, получим

$$[\partial_{\varphi_{k_1}}, \partial_{\varphi_{k_2}}](T) = 0. \tag{7.19}$$

Вычислим скорость эволюции интеграла T вторым способом, используя лемму 7.22: сначала рассмотрим скобку $\{\varphi_{k_1}, \varphi_{k_2}\}$, а затем сосчитаем $\dot{T}_{\phi_{\{k_1,k_2\}}}$. Для этого вспомним, что $\varphi_{k_1} = \square(\phi_{k_1-1})$ и $\varphi_{k_2} = \square(\phi_{k_2-1})$, а потому

$$\{\varphi_{k_1}, \varphi_{k_2}\} = \square(\phi_{\{k_1,k_2\}}),$$

где

$$\phi_{\{k_1,k_2\}} = \partial_{\phi_{k_1}}(\phi_{k_2-1}) - \partial_{\phi_{k_2}}(\phi_{k_1-1}) + \bar{D}_x(\phi_{k_1-1})\phi_{k_2-1} - \phi_{k_1-1}\bar{D}_x(\phi_{k_2-1})$$

в силу (7.18). Далее согласно примеру 7.2 имеем

$$\partial_{\{\varphi_{k_1},\varphi_{k_2}\}}(T) = \partial_{\square(\phi_{\{k_1,k_2\}})}(T) = (-\beta\bar{D}_x^3 + T\bar{D}_x + \bar{D}_x \circ T)(\phi_{\{k_1,k_2\}}). \tag{7.20}$$

Объединяя (7.19) и приведённое выше равенство (7.20), получаем

$$(-\beta\bar{D}_x^3 + T\bar{D}_x + \bar{D}_x \circ T)\phi_{\{k_1,k_2\}} = 0. \tag{7.21}$$

В левой части (7.21) стоит оператор в полных производных $\hat{B}_2$ с коэффициентами из $\mathbf{T}$, и мы применяем его к $\phi_{\{k_1,k_2\}}(T,\ldots,T_{\mu(k_1,k_2)})$, получая справа 0. Поэтому $\phi_{\{k_1,k_2\}} = 0$ и

$$\{\varphi_{k_1},\varphi_{k_2}\} = \square(0) = 0,$$

а поскольку k_1 и k_2 произвольны, то $\mathfrak{A}$ коммутативна. $\square$

Предложение 7.24. *Пусть $\mathcal{E}_{(0)} = \{u_{t_0} = \varphi_0(u_\sigma)\}$ — эволюционное уравнение, предположим также, что каждому $k \geqslant 0$ сопоставлена некоторая симметрия $\varphi_k(u_\sigma) \in \operatorname{sym}\mathcal{E}_{(0)}$, не зависящая от времени t_0 явно. Тогда следующие два условия эквивалентны.*

1. *Алгебра $\mathfrak{A} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\langle\varphi_k \mid k \geqslant 0\rangle$ есть коммутативная алгебра Ли: $\{\varphi_k,\varphi_l\} = 0$.*
2. *При любых $k,l \geqslant 0$ векторное поле ∂_{φ_l} является симметрией автономного эволюционного уравнения $\mathcal{E}_{(k)} = \{u_{t_k} = \varphi_k\}$.*

Доказательство. Отождествим эволюционное векторное поле ∂_{φ_k} с автономным эволюционным уравнением $u_{t_k} = \varphi_k$ и рассмотрим равенство

$$\partial_{\varphi_k}(\varphi_l) = \partial_{\varphi_l}(\varphi_k).$$

В левой части имеем

$$\partial_{\varphi_k}(\varphi_l) = \partial_{u_{t_k}}(\varphi_l) = \left(\bar{D}_{t_k} - \frac{\partial}{\partial t_k}\right)(\varphi_l) = \bar{D}_{t_k}(\varphi_l),$$

поскольку φ_l не зависит явно ни от одного времени t_k. В правой части исходного равенства присутствует

$$\partial_{\varphi_l}(\varphi_k) = \ell_{\varphi_k}(\varphi_l).$$

Таким образом, условие $\{\varphi_k,\varphi_l\} = 0$ коммутирования симметрий φ_k и φ_l эквивалентно определяющему уравнению

$$(\bar{D}_{t_k} - \ell_{\varphi_k})(\varphi_l) = 0,$$

то есть тому, что φ_l — это симметрия уравнения $\mathcal{E}_{(k)}$ при произвольных $k,l \geqslant 0$. $\square$

Следствие 7.25. *При любых $k,l \geqslant 0$ верны следующие утверждения.*

1. *Сечения $\vec{\varphi}_k \in \mathfrak{A}$ являются симметриями не только уравнений Тоды, но и всех уравнений $\mathcal{E}_{(l)} = \{\boldsymbol{u}_{t_l} = \vec{\varphi}_l\}$:*
$$\vec{\varphi}_k \in \operatorname{sym} \mathcal{E}^{\infty}_{(l)}.$$
2. *Оператор рекурсии R_{Toda} — общий для всего набора эволюционных уравнений $\mathcal{E}_{(l)}$:*
$$R_{\text{Toda}} \in \operatorname{Rec} \mathcal{E}_{(l)}.$$
В частности,
$$R_{\text{Toda}} = R_{\text{pmKdV}}.$$

Замечание 7.26. В [65] скалярное потенциальное модифицированное уравнение Кортевега—де Фриза рассматривалось в нормировке $u_t = u_3 + u_1^3$. В этом случае оно допускает оператор рекурсии, общий с уравнением sin-Гордона $u_{xy} = \sin u$.

Замечание 7.27. Пользуясь следствием 7.20, легко понять, что сечение $\vec{\varphi}\,'_{-1} = \text{const}$ является центральным расширением коммутативной подалгебры Ли $\mathfrak{A} \subset \operatorname{sym} \mathcal{E}^{\infty}_{(l)}$ симметрий эволюционного уравнения $\mathcal{E}_{(l)}$ для всякого $l \geqslant 0$, при том что $\text{const} \notin \operatorname{sym} \mathcal{E}_{\text{Toda}}$.

8. О гамильтоновом формализме для уравнений Эйлера

В данном разделе мы рассматриваем задачу построения по классу гиперболических уравнений Эйлера—Лагранжа (например, волновому уравнению $s_{xy} = 0$ или уравнениям Тоды (3.19)) гамильтоновых систем (см. [27, 30, 72]). Также мы совершаем переход от координатного задания канонического гамильтонова формализма, весьма широко используемого в работах по математической физике (см. работы [4, 36, 52] и ссылки в них), к его инвариантному описанию [5, 67, 75], учитывая разделение зависимых переменных на «координаты» и «импульсы». Рассматривая гиперболические уравнения Эйлера—Лагранжа, мы изучаем свойства дифференциальной связи между зависимыми переменными u^i и импульсами $\mathfrak{m}_j$, трактуем симметрии этих уравнений как потенциальные эволюционные уравнения и обосновываем связь между гамильтоновыми структурами, допускаемыми парой эволюционных уравнений — потенциальным для переменной u и непотенциальным для $\mathfrak{m}$. Цель наших рассуждений — построение по исходному лагранжеву уравнению $\mathcal{E}_{E-L} \subset J^k(\pi)$ нового расслоения джетов $J^{\infty}(\pi')$, в котором уравнение (1.10) становится эволюционным векторным полем — элементом $\varkappa(\pi')$, в то время как эволюционные поля, соответствующие «импульсам» $\mathfrak{m}$, принадлежат $\hat{\varkappa}(\pi')$. В итоге мы устанавливаем соответствие между коммутативными подалгебрами нётеровых симметрий гиперболических уравнений Эйлера—Лагранжа и гамильтоновыми иерархиями, состоящими из пар эволюционных уравнений — потенциальных и непотенциальных.

8.1. Конструкции гамильтонова формализма

Рассмотрим абстрактную $2r$-мерную динамическую систему с зависимыми переменными u^i, импульсами $\mathfrak{m}_j$, пространственными координатами x и временем t, заданную скобками Пуассона

$$\begin{gathered}\{u^i, u^j\}_{\bar{A}} = 0,\\ \{\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j\}_{\bar{A}} = 0,\\ \{u^i(x,t), \mathfrak{m}_j(x',t)\}_{\bar{A}} = \bar{A}^i_j\,\delta(x-x')\end{gathered} \tag{8.1}$$

(см. [4,36]), здесь $\bar{A}$ — это $(r\times r)$-матричный дифференциальный оператор в полных производных по x, а определённые с его помощью скобки являются дифференцированиями по каждому из аргументов. Динамику

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \{u(x), H(u(x'), \mathfrak{m}(x'))\}_{\bar{A}},\\ \dot{\mathfrak{m}} &= \{\mathfrak{m}(x), H(u(x'), \mathfrak{m}(x'))\}_{\bar{A}}\end{aligned} \tag{8.2}$$

переменных u и $\mathfrak{m}$, заданную гамильтонианом $\mathcal{H} = [H\,\mathrm{d}x]$ с плотностью

$$H(x) = H(u(x), u_\sigma(x); \mathfrak{m}(x), D_\sigma\mathfrak{m}(x)),$$

мы получаем стандартно:

$$\dot{u} = \{u(x), H(x')\}_{\bar{A}} = \oint\limits_{C(x)} \sum_\sigma \{u(x), D_\sigma\mathfrak{m}(x')\}_{\bar{A}} \cdot \frac{\partial H}{\partial(D_\sigma\mathfrak{m}(x'))}\,\mathrm{d}x',$$

где $C(x)$ — контур вокруг точки x. Подчеркнём, что именно на таком языке изложено большинство работ по применению гамильтонова формализма в теории поля, вскоре мы перейдём к инвариантному изложению. Пока, интегрируя по частям, получаем

$$\dot{u} = \bar{A} \circ \frac{\delta H}{\delta\mathfrak{m}(x)}. \tag{8.3a}$$

Аналогичным способом мы получаем второе соотношение

$$\dot{\mathfrak{m}} = -\bar{A} \circ \frac{\delta H}{\delta u(x)}. \tag{8.3b}$$

Приведённые выше рассуждения позволяют определить вариационную скобку в общем случае: для пары гамильтонианов с плотностями H, H' положим

$$\{H, H'\}_{\bar{A}} = \frac{\delta H}{\delta u} \cdot \bar{A}\frac{\delta H'}{\delta\mathfrak{m}} - \frac{\delta H}{\delta\mathfrak{m}} \cdot \bar{A}\frac{\delta H'}{\delta u}.$$

Замечание 8.1. Обычно зависимые переменные — «координаты» и «импульсы» — рассматриваются единообразно: можно определить дополнительные переменные $u^{r+j} = \mathfrak{m}_j$ при $1 \leqslant j \leqslant r$, то есть удвоить общее количество $m = 2r$

координат u^j. Операторы $\bar{A}$ и $-\bar{A}$ при этом также объединяются в матрицу размера $m \times m$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \bar{A} \\ \bar{A}^* & 0 \end{smallmatrix}\right)$, так что динамические уравнения принимают вид

$$\dot{\vec{u}} = A \circ \frac{\delta(H(\boldsymbol{u}))}{\delta \vec{u}},$$

где варьирование $\delta/\delta\vec{u}$ производится относительно нового вектора $\vec{u} \equiv {}^t(u, \mathfrak{m})$. Именно поэтому замечание 8.1 объясняет определения 1.7—1.9.

Мы должны отметить, что существующая практика [5, 67, 75] применения гамильтонова формализма в терминах сформулированного на с. 66 определения гамильтонова уравнения, в отличие от (8.2), не предусматривает рассмотрения каких бы то ни было «импульсов». Между тем возврат к двойному набору из $m = 2r$ зависимых переменных позволяет установить интересные свойства классических уравнений математической физики, например уравнения Кортевега—де Фриза (7.3), модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза (6.9) и им подобных. Этим мы занимаемся в разделе 9.

8.2. Гиперболические уравнения Эйлера—Лагранжа

Рассмотрим лагранжиан первого порядка

$$\mathcal{L} = \int L(u, u_x, u_y; x, y)\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

с плотностью

$$L = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \bar{\kappa}_{ij} u_x^i u_y^j + H(u; x, y),$$

где $\bar{\kappa}$ — некоторая невырожденная симметричная постоянная $(r \times r)$-матрица. Отметим, что обозначение $\bar{\kappa}$ согласовано с общим изложением: если $r = 1$ и $H = 0$, мы получаем волновое уравнение (5.5) (см. раздел 5), а если $\bar{\kappa} = \kappa = \|a_i k_{ij}\|$ и функция H задана формулой (8.8) — уравнения Тоды.

Выберем в качестве «времени» независимую переменную y (необходимо, чтобы выполнялось условие $\partial L/\partial u_y \neq 0$), оставим x в качестве пространственной координаты на базе $\mathbb{R}$ нового расслоения $\pi'\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{u} \mathbb{R}$ со старым слоем u, а через $\mathfrak{m}_j = \partial L/\partial u_y^j$ обозначим j-ю сопряжённую координату — импульс, соответствующую j-й зависимой переменной u^j при каждом $1 \leqslant j \leqslant r$:

$$\mathfrak{m}_i = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r} \bar{\kappa}_{ij} u_x^j. \tag{8.4}$$

Дифференциальный характер связи (8.4) между координатами и импульсами исходного уравнения (1.10) как раз и является главным инструментом в дальнейшем построении гамильтоновых структур.

Построим по исходному функционалу действия гамильтониан

$$\mathcal{H}(u, \mathfrak{m}) = [H\, \mathrm{d}x]$$

с плотностью, определяемой из преобразования Лежандра:

$$H\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\left\langle \mathfrak{m},\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}_y}\right\rangle-\mathcal{L}.$$

Чтобы варьирование (8.3) гамильтониана $\mathcal{H}$ приводило к правильному результату, представим его плотность H в виде суммы двух равных слагаемых и в одном из них воспользуемся соотношением $u=-2\bar\kappa^{-1}\bar D_x^{-1}(\mathfrak{m})$ между координатами u и импульсами $\mathfrak{m}$:

$$H=\frac12 H[u]+\frac12 H[\mathfrak{m}].$$

Гиперболическое уравнение Эйлера—Лагранжа

$$\mathcal{E}_{E-L}=\{\mathbf{E}_u(\mathcal{L})=0\}$$

эквивалентно уравнениям

$$u_y=\frac{\delta H}{\delta\mathfrak{m}},\quad \mathfrak{m}_y=-\frac{\delta H}{\delta u}\tag{8.5}$$

относительно *канонической* гамильтоновой структуры $\bar A=\mathbf{1}$. В силу соотношений

$$\frac12\frac{\delta}{\delta\mathfrak{m}}=\underbrace{\bar\kappa^{-1}\cdot D_x^{-1}}_{A_1}\circ\frac{\delta}{\delta u},\quad \frac{\delta}{\delta u}=\frac12\underbrace{D_x\circ\bar\kappa}_{\hat A_1}\cdot\frac{\delta}{\delta\mathfrak{m}},$$

динамические уравнения распадаются:

$$\begin{aligned}u_y&=A_1\circ\mathbf{E}_u([H[u]\,\mathrm{d}x]),\\ \mathfrak{m}_y&=-\frac12\hat A_1\circ\mathbf{E}_{\mathfrak{m}}([H[\mathfrak{m}]\,\mathrm{d}x]).\end{aligned}\tag{8.6}$$

Пример 8.2. Рассмотрим случай $r=1$, $\bar\kappa=\|1\|$, и пусть гамильтониан тривиален: $H\equiv 0$. Тогда гамильтоновы операторы

$$B_1=D_x^{-1},\quad \hat B_1=D_x,$$

ассоциированные с волновым уравнением (5.5), взаимно-обратны.

Проиллюстрируем эти рассуждения на примере уравнений Тоды (3.19), соответствующих лагранжиану (3.20). Оказывается, что гамильтонова форма (8.9) записи уравнений Тоды говорит нам о существовании минимального интеграла (3.22), сохранение которого отражает сохранение плотности гамильтониана (8.8) для уравнений Тоды.

Лемма 8.3. *Пусть плотность H гамильтониана $\mathcal{H}=[H\,\mathrm{d}x]$ гамильтонова эволюционного уравнения $u_t=A(\boldsymbol{E}_u(\mathcal{H}))$ не зависит явно от времени t. Тогда H есть сохраняющаяся плотность для этого уравнения*:

$$[\bar D_t(H)\,\mathrm{d}x]=0.$$

Доказательство. Используя условие $\partial H/\partial t = 0$, вычислим производную $\bar{D}_t(H)$:

$$\bar{D}_t(\mathcal{H}) = \langle 1, \mathfrak{Э}_{A\circ\mathbf{E}_u(\mathcal{H})}(H)\rangle = \sum_\sigma \left\langle \frac{\partial H}{\partial u_\sigma}, \bar{D}_\sigma(A\circ\mathbf{E}_u(\mathcal{H}))\right\rangle =$$
$$= \sum_\sigma \left\langle (-1)^\sigma \bar{D}_\sigma\left(\frac{\partial H}{\partial u_\sigma}\right), A\circ\mathbf{E}_u(\mathcal{H})\right\rangle = -\langle A\circ\mathbf{E}_u(\mathcal{H}), \mathbf{E}_u(\mathcal{H})\rangle =$$
$$= -\left\langle \sum_\sigma \bar{D}_\sigma(A\circ\mathbf{E}_u(\mathcal{H})), \frac{\partial H}{\partial u_\sigma}\right\rangle = -\langle \mathfrak{Э}_{A\circ\mathbf{E}_u(H)}(H), 1\rangle = -\bar{D}_t(\mathcal{H})$$

(мы проинтегрировали по частям, воспользовались кососопряжённостью гамильтонова оператора A, $A^* = -A$, а затем вновь использовали определение оператора Эйлера $\mathbf{E}_u$ и проинтегрировали по частям). Перенося результат в левую часть исходного равенства, получаем условие $2\bar{D}_t(H) \in \operatorname{im}\bar{D}_x$, что и требовалось. □

Пример 8.4 ([30]). Выберем в качестве «времени» координату y, введём импульсы $\mathfrak{m} = \partial L/\partial \boldsymbol{u}_y$,

$$\mathfrak{m}_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^r \kappa_{ij} u^j, \tag{8.7}$$

и получим плотность H_{Toda} гамильтониана $\mathcal{H}_{\text{Toda}}$:

$$H_{\text{Toda}}(u, \mathfrak{m}) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^r a_i \exp\left(\frac{2}{a_i} D_x^{-1}(\mathfrak{m}_i)\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^r a_i \exp\left(\sum_{j=1}^r k_{ij} u^j\right),$$

которую мы представили в виде суммы двух компонент, явно зависящих от $\mathfrak{m}_i$ и u^j соответственно. Тогда каноническое гамильтоново представление уравнений Тоды $\mathcal{E}_{\text{Toda}}$ имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u}^i = \dfrac{\delta H_{\text{Toda}}}{\delta \mathfrak{m}_i} = D_x^{-1}\left(\exp\left(\displaystyle\sum_{j=1}^r k_{ij} u^j\right)\right), \\ \dot{\mathfrak{m}}_i = -\dfrac{\delta H_{\text{Toda}}}{\delta u^i} = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^r \kappa_{ij} \exp\left(\sum_{l=1}^r k_{jl} u^l\right). \end{cases}$$

В терминах зависимых переменных $\boldsymbol{u}$ имеем

$$H_{\text{Toda}}(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^r a_i \exp\left(\sum_{j=1}^r k_{ij} u^j\right) \tag{8.8}$$

и

$$\dot{\boldsymbol{u}} = A_1 \circ \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}(\mathcal{H}_{\text{Toda}}(\boldsymbol{u})), \tag{8.9}$$

где $A_1 = \hat{\kappa}^{-1}\cdot D_x^{-1}$. Эволюционное представление для уравнения Лиувилля (6.1) мы указали ранее в (6.11).

Чтобы согласовать получаемые выражения с (3.22), подействуем преобразованием $x \leftrightarrow y$ на гамильтоново уравнение (8.9). Применим указанное в лемме 8.3 наблюдение о свойствах гамильтонианов к плотности (8.8) и получим

$$\bar{D}_x(H_{\text{Toda}}) = \bar{D}_y\biggl(\sum_{i=1}^{r} a_i u^i_{xx}\biggr) = \bar{D}_y\biggl(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r} \kappa_{ij} u^i_x u^j_x\biggr), \tag{8.10}$$

откуда следует выражение (3.22).

Кроме того, используя гамильтоново представление (8.9), удаётся явно задать элементы φ_k с номерами $k<0$ построенной в предыдущем разделе последовательности $\mathfrak{A}$.

Предложение 8.5. *Гамильтоново эволюционное уравнение*

$$u_y = \hat{\kappa}^{-1} \circ D_x^{-1} \circ \boldsymbol{E}_u(\mathcal{H}_{\text{Toda}}) \tag{8.9$'$}$$

является прообразом трансляции $u_{t_0} = \varphi_0$ при отображении R_{Toda}, то есть элементом $\vec{\varphi}_{-1}$ последовательности $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Согласно лемме 7.15 имеем

$$R_{\text{Toda}}(\vec{\varphi}_{-1}) = \square(\ni_{\boldsymbol{u}_y}(s)) = \square(\bar{D}_y(s)) = \square(1) = u_x. \quad \square$$

Итак, сами уравнения Тоды в представлениях (8.9) и (8.9$'$) определяют соответственно трансляции

$$u_y = \varphi_{-1} = \hat{\kappa}^{-1} \circ \bar{D}_x^{-1} \circ \mathbf{E}_u(H_{\text{Toda}})$$

и

$$u_x = \varphi_0 = \hat{\kappa}^{-1} \circ \bar{D}_y^{-1} \circ \mathbf{E}_u(H_{\text{Toda}}) \,—$$

элементы последовательности $\mathfrak{A}$, связанные оператором рекурсии R_{Toda}:

$$\varphi_{-2} = \bar{\square}(\bar{T}) \xleftarrow[R'_{\text{Toda}}]{} u_y = \varphi_{-1} \underset{R'_{\text{Toda}}}{\overset{R_{\text{Toda}}}{\rightleftarrows}} \varphi_0 = u_x \xrightarrow{R_{\text{Toda}}} \varphi_1 = \square(T)$$

Оператор R'_{Toda}, полученный применением к R_{Toda} дискретной симметрии $x \leftrightarrow y$, размножает симметрии $\varphi_k \in \mathfrak{A}$ уравнений Тоды с номерами $k \leqslant -1$.

Вернёмся к изложению гамильтонова формализма для уравнений Эйлера—Лагранжа $\mathcal{E}_{E-L} = \{\mathbf{E}_u(\mathcal{L}) = 0\}$ и их симметрий φ, которые мы интерпретируем как эволюционные уравнения $u_t = \varphi$. Заметим такое обстоятельство: рассмотрим произвольную симметрию $\varphi(u_x, u_{xx}, \ldots)$ уравнения (1.10), отождествляемую с *потенциальным* эволюционным уравнением

$$u_t = \varphi(u_x, u_{xx}, \ldots), \tag{8.11a}$$

тогда индуцированная эволюция $\mathfrak{m}_t$ импульсов описывается *не*потенциальным уравнением

$$\mathfrak{m}_t = -\frac{1}{2}\bar{\kappa} \cdot D_x({}^t\varphi(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_x, \ldots)). \tag{8.11b}$$

Предположим дополнительно, что эволюция φ гамильтонова:

$$\dot{u} = \frac{1}{2}\frac{\delta H}{\delta \mathfrak{m}}, \quad \dot{\mathfrak{m}} = -\frac{1}{2}\frac{\delta H}{\delta u}.$$

Тогда выполнено

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \underbrace{\bar{\kappa}^{-1} \cdot D_x^{-1}}_{A_1} \frac{\delta H}{\delta u}, \\ \dot{\mathfrak{m}} &= -\frac{1}{2} \underbrace{D_x \cdot \bar{\kappa}}_{\hat{A}_1} \frac{\delta H}{\delta \mathfrak{m}}, \end{aligned} \tag{8.12}$$

то есть *оба* уравнения (8.11) гамильтоновы одновременно, а задающие их гамильтоновы операторы A_1 и $\hat{A}_1$ взаимно-обратны.

Укажем два классических примера пар эволюционных уравнений, допускающих взаимно-обратные гамильтоновы структуры.

Пример 8.6 ([30]). Потенциальное уравнение Кортевега—де Фриза (7.4) гамильтоново относительно оператора $B_1 = D_x^{-1}$. В свою очередь, оператор $\hat{B}_1 = D_x$ — это первая гамильтонова структура (см. (1.5)) для уравнения Кортевега—де Фриза (7.3). Легко видеть, что уравнение (7.4) совместно с волновым уравнением (5.5), то есть поток ϕ_1 в уравнении $s_t = \phi_1$ является симметрией уравнения $s_{xy} = 0$. Одновременно с этим непотенциальное уравнение (7.3) задаёт эволюцию импульсов $T = s_x$ (с точностью до несущественного множителя $-1/2$).

Вторым примером служат потенциальное и непотенциальное модифицированные уравнения Кортевега—де Фриза (7.5) и (9.1). По сути, следующие за данным разделы 9.1 и 9.2 представляют собой разбор этих двух примеров. Оказывается, что первая пара описывает иерархию $\mathfrak{B}$ симметрий волнового уравнения (5.5), а вторая задаёт иерархию $\mathfrak{A}$ симметрий уравнения Тоды (3.19).

Вернёмся к уравнениям (8.12) и отметим важное свойство двух гамильтоновых уравнений

$$\dot{u} = A_1 \circ \mathbf{E}_u(\mathcal{H})$$

и

$$\dot{\mathfrak{m}} = -\frac{1}{2}\hat{A}_1 \circ \mathbf{E}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{H}) = -\frac{1}{2}\mathbf{E}_u(\mathcal{H}).$$

Оказывается, что с выражением в правой части последнего уравнения мы уже встречались в лемме 1.19, описывая соответствие $\psi_\eta = \mathbf{E}_u(\eta_0)$ между плотностями η_0 законов сохранения $[\eta]$ и их производящими сечениями. Формулы (8.11) позволяют интерпретировать это утверждение так: производящие сечения ψ задают (с точностью до знака) эволюцию $\dot{\mathfrak{m}}$ импульсов $\mathfrak{m}$ относительно гамильтоновых симметрий φ исходного уравнения $\mathcal{E}$.

Кроме того, теперь мы можем связать две пары отображений разных типов: во-первых, операторы рекурсии R_u и $R_{\mathfrak{m}}$ *разных* эволюционных уравнений — потенциального (8.11a) и непотенциального (8.11b) — и, во-вторых, существующие одновременно отображения

$$R_u\colon \varkappa \to \varkappa, \quad \mathcal{T}_u\colon \hat{\varkappa} \to \hat{\varkappa},$$

размножающие соответственно симметрии и производящие сечения одного и того же уравнения $\mathcal{E}_u$. Известно [67], что для эволюционных уравнений выполнено соотношение

$$\mathcal{T}_u = R_u^*, \tag{8.13}$$

(см., например, диаграмму (10.7)). В терминах пары эволюционных уравнений (8.11) соотношение (8.13) означает существование кососопряжённого оператора рекурсии

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & R_u \\ -R_u^* & 0 \end{pmatrix} \tag{8.14}$$

для гамильтоновой формулировки (8.6) исходного уравнения Эйлера—Лагранжа $\mathcal{E} = \{\mathbf{E}_u(\mathcal{L}) = 0\}$. Именно такая ситуация реализуется для упомянутых выше пар уравнений (см. (9.4)). Отметим также, что в данном случае выполнено $R_v = R_u^*$.

Рассмотрим теперь задачу построения бигамильтоновой иерархии (точнее, пары иерархий относительно переменных u и $\mathfrak{m}$) при помощи оператора рекурсии (8.14). Именно, требуется установить, при выполнении каких условий оператор A_R задаёт на входящих в диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_0 \arrow[d, "\frac{\delta}{\delta\mathfrak{m}}"'] & \mathcal{H}_1 \arrow[d, "\frac{\delta}{\delta\mathfrak{m}}"'] & \mathcal{H}_2 \arrow[d, "\frac{\delta}{\delta\mathfrak{m}}"'] & \\
\varphi_0 \arrow[r, "R"'] & \varphi_1 \arrow[r, "R"'] & \varphi_2 \arrow[r, "R"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

гамильтонианах $\mathcal{H}_i$ *вторую* гамильтонову структуру $\{u, \mathfrak{m}\}_{A_R}$, для которой выполнено тождество Якоби (1.2b). Заметим, что достаточным для этого является условие коммутирования потоков $u_{t_i} = \varphi_i$ (очевидно, что сечения $\mathfrak{m}_{t_i} = \psi_i$ также коммутируют). Обозначим через $\mathfrak{U}$ минимальную алгебру Ли, порождённую сечениями φ_i. Следует отметить, что в общем случае операторы (8.14) задают структуру (1.2b) алгебры Ли лишь на гамильтонианах $\mathcal{H}_i \in \bar{H}^n(\pi)$, а не на всей группе старших горизонтальных когомологий $\bar{H}^n(\pi)$. Таким образом, используемое понятие гамильтонова оператора на деле оказывается шире, чем заданное определением 1.8. Ценой тому оказывается сужение класса рассматриваемых уравнений: наши рассуждения — по крайней мере в данной формулировке — применимы к гиперболическим лагранжевым уравнениям $\mathcal{E}$ и последовательностям их гамильтоновых симметрий φ_i, соответствующих набору гамильтонианов $\mathcal{H}_i$. Для существования гамильтонианов $\mathcal{H}_i$, таких что

$$\varphi_i = R\frac{\delta\mathcal{H}_{i-1}}{\delta\mathfrak{m}} = \mathbf{1}\cdot\frac{\delta\mathcal{H}_i}{\delta\mathfrak{m}}, \quad \psi_i = -R^*\frac{\delta\mathcal{H}_{i-1}}{\delta u} = -\mathbf{1}\cdot\frac{\delta\mathcal{H}_i}{\delta u}, \tag{8.15}$$

также является достаточным, чтобы алгебра $\mathfrak{U}$ была подалгеброй Ли нётеровых симметрий лагранжиана $\mathcal{L}$: в этом случае существование сохраняющихся плотностей обеспечено теоремой Нётер (теорема 1.20).

В терминах расщеплённых уравнений (8.12) мы получаем более привычный способ описания пары схем Магри [78]

$$
\begin{tikzcd}
 & \psi_{i+1} \arrow[dr, "A_1"] & \dots & \psi_{i+1} & \dots & \\
 & & \varphi_{i+1} \arrow[u, "R"'] & & \varphi_i \arrow[ul, "\hat{A}_2"'] \arrow[dl, "\hat{A}_1"'] \arrow[u, "R"'] & \mathcal{H}_i \arrow[l, "\mathbf{E}_{\mathfrak{m}}"'] \\
\mathcal{H}_i \arrow[r, "\mathbf{E}_u"] & \psi_i \arrow[uu, "R^*"] \arrow[ur, "A_2"] \arrow[dr, "A_1"] & & \psi_i \arrow[uu, "R^*"] & & \\
 & & \varphi_i \arrow[uu, "{R,}"'] & & \varphi_{i-1} \arrow[ul, "\hat{A}_2"'] \arrow[dl, "\hat{A}_1"'] \arrow[uu, "R"'] & \mathcal{H}_{i-1} \arrow[l, "\mathbf{E}_{\mathfrak{m}}"'] \\
 & \psi_{i-1} \arrow[uu, "R^*"] \arrow[ur, "A_2"] & \dots \arrow[u, "R"'] & \psi_{i-1} \arrow[uu, "R^*"] & \dots \arrow[u, "R"'] &
\end{tikzcd}
\tag{8.16}
$$

в которой, подчеркнём, операторы A_1 и $\hat{A}_1$ обусловлены связью (8.4) между u и $\mathfrak{m}$, а вторые структуры A_2 и $\hat{A}_2$ определены соотношениями

$$R = A_2 \circ A_1^{-1}, \quad R^* = \hat{A}_2 \circ \hat{A}_1^{-1}$$

соответственно. В дальнейшем мы сохраним принятые обозначения и будем выделять «шляпкой» гамильтоновы операторы $\hat{A}_{1,2}$ и $\hat{B}_{1,2}$ для *не*потенциальных уравнений (9.1) и (7.3).

В фундаментальной работе [67] было установлено, решениями каких уравнений и в каких именно расслоениях являются операторы рекурсии R, сопряжённые им операторы $\mathcal{T}$, гамильтоновы структуры A и обратные им симплектические структуры $\hat{A}$. Возврат от диаграммы (8.16) к (8.15) позволяет по-новому взглянуть на эти соотношения и структуры.

Замечание 8.7. Установим соответствие между производящими сечениями законов сохранения для исходного уравнения Эйлера—Лагранжа в записи $\mathcal{E}_{E-L} = \{F \equiv \bar{\kappa} \cdot \mathbf{E}_u(\mathcal{L}) = 0\}$ и в эволюционном представлении (8.6), обозначая эти сечения через $\psi_{\mathcal{L}}$ и ψ. Это соответствие задано диаграммой

$$\psi \xrightarrow{-D_x^{-1}} \psi_{\mathcal{L}} \xrightarrow{\bar{\kappa}^{-1}} \varphi, \tag{8.17}$$

первая стрелка в которой следует из определения производящих сечений,

$$\mathrm{d}_h \eta = \nabla(F)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \nabla \circ D_x(D_x^{-1}(F))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

и потому

$$\psi_{\mathcal{L}} = \nabla^*(1), \quad \psi = -D_x \circ \nabla^*(1),$$

а вторая стрелка следует из леммы 3.4.

9. Некоторые свойства иерархий Кортевега—де Фриза

Сформулированные в предыдущем разделе идеи [30, 36, 72] мы иллюстрируем ниже на примере бигамильтоновых уравнений (7.3), (7.4), (7.5), а также r-компонентных аналогов

$$\mathcal{E}_{\mathrm{mKdV}} = \{\vartheta_{t_1} = D_x \circ \hat{\kappa} \circ \square(T)\} \tag{9.1}$$

модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза (6.9), которому удовлетворяет новая зависимая переменная

$$\vartheta = \kappa \cdot u_x \tag{9.2}$$

(она отличается от импульсов

$$\mathfrak{m}_{\mathrm{Toda}} = -\frac{1}{2}(\kappa\, u_x)^*$$

множителем -2 и введена из соображений упрощения вычислений).

Итак, приступим к изучению соотношений между уравнениями $\mathcal{E}_{\mathrm{pKdV}}$ и $\mathcal{E}_{\mathrm{KdV}}$, а также $\mathcal{E}_{\mathrm{pmKdV}}$ и $\mathcal{E}_{\mathrm{mKdV}}$. Как выяснится, потенциалы u и s для ϑ и T таковы, что линеаризации $\ell_{\vartheta}^{(u)} = D_x \circ \hat{\kappa}$ и $\ell_T^{(s)} = D_x$ равны первым гамильтоновым структурам $\hat{A}_1$ и $\hat{B}_1$ для $\mathcal{E}_{\mathrm{mKdV}}$ и $\mathcal{E}_{\mathrm{KdV}}$ соответственно, а первые гамильтоновы структуры A_1 и B_1 для $\mathcal{E}_{\mathrm{p(m)KdV}}$ обратны к ним. Гамильтонианы для уравнений $\mathcal{E}_{\mathrm{(p)KdV}}$ известны из обширной литературы, что же касается явного описания гамильтонианов $\mathcal{H}_k$ для уравнений $\mathcal{E}_{\mathrm{(p)mKdV}}$ — они приведены в итоговой теореме 9.11.

9.1. Об уравнении Кортевега—де Фриза

Пусть $\mathcal{L}_s$ есть лагранжиан

$$\mathcal{L}_s = -\left[\frac{1}{2} s_x s_y \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\right].$$

Сопоставим ему волновое уравнение

$$\mathcal{E}_s = \{s_{xy} = 0\}$$

(см. (5.5)) и рассмотрим коммутативную подалгебру Ли

$$\mathfrak{B} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\langle R_{\mathrm{pKdV}}^{k+1}(\phi_{-1}),\ \phi_{-1} = 1,\ k \geqslant 0\rangle \subset \mathrm{sym}\,\mathcal{E}_s$$

симметрий этого уравнения — построенную ранее иерархию высших потенциальных уравнений Кортевега—де Фриза. Вместо канонического импульса $\mathfrak{m}_s = -\frac{1}{2}s_x$ мы, как и в случае (9.2), будем использовать переменную $T = s_x$, деформации которой, как отмечалось выше, суть элементы иерархии *не*потенциального уравнения (7.3). Согласно (8.12) две эти иерархии — потенциальная и непотенциальная — допускают пару взаимно-обратных гамильтоновых операторов $\hat{B}_1 = B_1^{-1} = D_x$, для уравнений $\mathcal{E}_{\mathrm{KdV}}$ и $\mathcal{E}_{\mathrm{pKdV}}$ соответственно. На приведённой ниже части схемы Магри (см. диаграмму (8.16)) совпадающие элементы подчёркнуты:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \ldots & \\
h_1[s] \arrow[rr, "\mathbf{E}_s"] \arrow[dr, "-\,\mathrm{id}"'] & & \underline{\underline{-\beta s_4 + 3s_1 s_2}} \arrow[ur, "B_2"] \arrow[dr, "B_1 = D_x^{-1}"] & & \ldots \\
 & h_1[T] = \left[\dfrac{1}{2}(\beta T_1^2 + T^3)\,\mathrm{d}x\right] \arrow[rr, "\mathbf{E}_T"] & & -\beta s_3 + \dfrac{3}{2}s_1^2 \arrow[uu, "R_{\mathrm{pKdV}}"'] \arrow[ur, "\hat{B}_2"] \arrow[dr, "\hat{B}_1 = D_x"] & \\
h_0[s] \arrow[rr, "\mathbf{E}_s"] \arrow[dr, "-\,\mathrm{id}"'] & & \underline{s_2} \arrow[ur, "B_2"] \arrow[dr, "B_1"] & & \underline{\underline{-\beta T_3 + 3T\cdot T_1}} \arrow[uu, "R_{\mathrm{KdV}}"] \\
 & h_0[T] = \left[\dfrac{1}{2}T^2\,\mathrm{d}x\right] \arrow[rr, "\mathbf{E}_T"] & & s_1 \arrow[uu, "R_{\mathrm{pKdV}}"'] \arrow[ur, "\hat{B}_2"] \arrow[dr, "\hat{B}_1"] & \\
 & & & & \underline{T_1} \arrow[uu, "R_{\mathrm{KdV}}"] \\
 & h_{-1}[T] = [T\,\mathrm{d}x] \arrow[rr, "\mathbf{E}_T"] & & 1 \arrow[uu, "R_{\mathrm{pKdV}} = R^*_{\mathrm{KdV}}"] \arrow[ur, "\hat{B}_2 = -\beta\,D_x^3 + D_x\circ T + T\cdot D_x"'] &
\end{tikzcd}
\tag{9.3}
$$

Начальные члены приведённой выше диаграммы заданы гамильтонианами, плотности которых хорошо известны:

$$h_{-1} = [T\,\mathrm{d}x], \quad h_0 = \left[\frac{1}{2}T^2\,\mathrm{d}x\right], \quad h_1 = \left[\frac{1}{2}(\beta T_x^2 + T^3)\,\mathrm{d}x\right] \quad \text{и т. д.}$$

В качестве примера к (8.13) рассмотрим соотношение

$$R_{\mathrm{pKdV}} = R^*_{\mathrm{KdV}}$$

между операторами рекурсии для потенциального уравнения Кортевега—де Фриза (7.4) и уравнения Кортевега—де Фриза (7.3), где

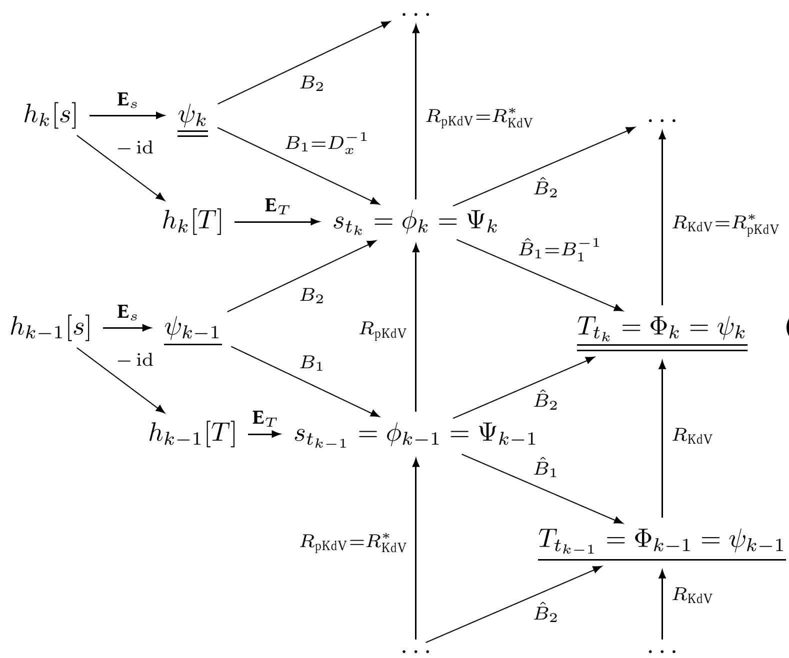
$$R_{\mathrm{KdV}} = -\beta D_x^2 + 2T + T_1 \cdot D_x^{-1}.$$

Имеют место два разложения оператора рекурсии R_{pKdV} на гамильтоновы:

$$\overbrace{(-\beta D_x + s_1 \cdot D_x^{-1} + D_x^{-1} \circ s_1)}^{B_2} \circ D_x = D_x^{-1} \circ \underbrace{(-\beta\, D_x^3 + D_x \circ T + T \cdot D_x)}_{\hat{B}_2}. \tag{9.4}$$

Входящая сомножителем в правую часть (9.4) вторая гамильтонова структура $\hat{B}_2$ для уравнения Кортевега—де Фриза (7.3) уже встречалась нам в замечании 7.2. Ещё одно важное свойство этой структуры, устанавливающее связь между уравнением $\mathcal{E}_{\mathrm{KdV}}$, уравнениями Тоды $\mathcal{E}_{\mathrm{Toda}}$ и алгеброй Вирасоро, приведено в замечании 9.7 в конце данного раздела.

Из-за взаимной обратности гамильтоновых операторов B_1 и $\hat{B}_1$ схемы Магри для уравнений (7.4) и (7.3) согласованы между собой:



(9.5)

здесь ϕ_k и Φ_k, а также ψ_k и Ψ_k суть симметрии и производящие сечения законов сохранения для потенциального уравнения Кортевега—де Фриза

$$s_{t_1} = \phi_1$$

и уравнения Кортевега—де Фриза

$$T_{t_1} = \Phi_1$$

соответственно. Итак, противоположные края диаграммы (9.5) отождествлены со смещением на один шаг по вертикали.

Следствие 9.1. *Диаграмма* (9.5) *приводит нас к заключению, что симметрии* Φ_k *бигамильтоновой иерархии уравнения Кортевега—де Фриза являются градиентами* ψ_k *гамильтонианов* $h_k[s]$ *иерархии потенциального уравнения Кортевега—де Фриза и наоборот.*

Уравнения $\mathcal{E}_{\mathrm{KdV}}$ и $\mathcal{E}_{\mathrm{pKdV}}$ допускают один и тот же набор гамильтонианов с плотностями $h_k[s]$ и $h_k[T]$. Из этого замечания мы выводим следующее важное свойство иерархии потенциального модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза, элементы которой являются симметриями уравнений Тоды.

Теорема 9.2. *Образующие* φ_k *коммутативной алгебры Ли* $\mathfrak{A}$ *являются нётеровыми симметриями уравнений Тоды*:

$$\varphi_k \in \operatorname{sym} \mathcal{L}_{\mathrm{Toda}}.$$

Доказательство. Действительно, имеем

$$\mathfrak{A} \ni \varphi_k = \square(\phi_{k-1}) = \square \circ \mathbf{E}_T(h_k[T]) \in \operatorname{sym} \mathcal{L}_{\mathrm{Toda}} \subset \operatorname{sym} \mathcal{E}_{\mathrm{Toda}}$$

согласно замечанию 4.4. $\square$

Замечание 9.3. Законы сохранения $[\eta_k]$, соответствующие производящим сечениям

$$\vec{\psi}_{k+1}^{\mathrm{Toda}} = \hat{\kappa} \cdot \square \circ \mathbf{E}_T(h_k)$$

(см. (4.2) и диаграмму (8.17)), — это не что иное, как гамильтонианы $h_k \, \mathrm{d}x$ высших уравнений Кортевега—де Фриза $s_{t_k} = \phi_k$.

В схожей ситуации этот факт, $[h_k \, \mathrm{d}x] \in \bar{H}^1(\mathcal{E}^\infty_{\mathrm{Toda}})$, отмечался в [11, § 10], однако требовал нетривиального доказательства.

Как установлено в лемме 8.3, плотности h_k гамильтонианов для уравнений Кортевега—де Фриза (7.3) и (7.4) сохраняются на соответствующих высших аналогах $T_{t_k} = D_x(\phi_k)$ и $s_{t_k} = \phi_k$ этих уравнений:

$$\bar{D}_{t_k}(h_k) = \bar{D}_x(\Omega_k^{\mathrm{KdV}}).$$

Покажем, что иерархия $\mathfrak{B}$ состоит из сохраняющихся плотностей для иерархии $\mathfrak{A}$ потенциального модифицированного уравнения (7.5). Для этого нам потребуется следующая полезная лемма.

Лемма 9.4 ([75]). *Для любых $\varphi \in \varkappa$ и $\mathcal{L} \in \bar{\Lambda}^n(\pi)$ выполнено соотношение*

$$\boldsymbol{E}(\mathfrak{Э}_\varphi(\mathcal{L})) = \mathfrak{Э}_\varphi(\boldsymbol{E}(\mathcal{L})) + \ell_\varphi^*(\boldsymbol{E}(\mathcal{L})).$$

Доказательство. Пусть $\Delta \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa, \bar{\Lambda}^n(\pi))$. Многократным интегрированием по частям приведём выражение $\ell_{\Delta(\varphi)}$ к виду

$$\ell_{\Delta_0(\varphi)} + D_x \circ \Delta'(\varphi),$$

где Δ_0 — оператор нулевого порядка и $\Delta'(\varphi) \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa, \bar{\Lambda}^n(\pi)$. Тогда, пользуясь формулой (1.9), мы получаем

$$\mathbf{E}(\Delta(\varphi)) = \ell_\varphi^*(\Delta^*(1)) + \ell^*_{\Delta^*(1)}(\varphi)$$

для любого сечения $\varphi \in \varkappa$. Далее, возьмём форму $\mathcal{L} \in \bar{\Lambda}^n(\pi)$ и положим $\Delta = \ell_{\mathcal{L}} \colon \varkappa \to \bar{\Lambda}^n(\pi)$. Линеаризация $\ell_{\mathbf{E}(\mathcal{L})} = \ell^*_{\mathbf{E}(\mathcal{L})}$ образа оператора Эйлера является самосопряжённой, и мы приходим к равенству

$$\mathbf{E}(\ell_{\mathcal{L}}(\varphi)) = \ell_\varphi^*(\mathbf{E}(\mathcal{L})) + \ell_{\mathbf{E}(\mathcal{L})}(\varphi),$$

из которого следует лемма 9.4. $\square$

Замечание 9.5. Из леммы 9.4, в частности, следует, что всякая нётерова симметрия $\varphi_{\mathcal{L}}$ лагранжиана $\mathcal{L}$, для которой выполнено условие $\mathfrak{Э}_\varphi(\mathcal{L}) = 0$ на $J^\infty(\pi)$, является одновременно симметрией заданного $\mathcal{L}$ уравнения (1.10), то есть

$$\operatorname{sym} \mathcal{L} \subseteq \operatorname{sym} \mathcal{E}.$$

Обратное утверждение неверно, и лемма 9.4 объясняет почему.

Предложение 9.6 ([27]). *Для всякого $k \geqslant 0$ k-й член $\phi_k = \boldsymbol{E}_T(h_k\,\mathrm{d}x)$ иерархии $\mathfrak{B}$ является сохраняющейся плотностью для k-го высшего потенциального модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза.*

Доказательство. Используя теорему 7.16 о согласовании времён между иерархиями $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, применяя лемму 9.4 о правиле коммутирования оператора Эйлера и эволюционного дифференцирования и пользуясь тем фактом, что высшие симметрии ϕ_k не зависят явно от переменной s, мы получаем

$$\bar{D}_{t_k}(\phi_k) = \ni_{\phi_k}(\mathbf{E}_T(h_k)) = \underbrace{\mathbf{E}_T(\overbrace{\ni_{\phi_k}(h_k)}^{\bar{D}_{t_k}(h_k)=\bar{D}_x(\Omega_k^{\mathrm{KdV}})})}_{\equiv 0} - \ell^*_{\phi_k}(\mathbf{E}_T(h_k)) =$$
$$= -\sum_{j>0}(-1)^j\,\bar{D}_x^j \circ \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial s_j}\cdot \mathbf{E}_T(h_k)\right) \in \operatorname{im}\bar{D}_x,$$

то есть плотность ϕ_k сохраняется на уравнении $\mathcal{E}_{(k)} = \{u_{t_k} = \varphi_k\}$. $\square$

Замечание 9.7. Вторая гамильтонова структура для $\mathcal{E}_{\mathrm{KdV}}$,

$$\hat{B}_2 = -\beta\,\bar{D}_x^3 + \bar{D}_x \circ T + T\cdot \bar{D}_x,$$

задаёт такое свойство интеграла (3.22): коэффициенты Фурье $\mathfrak{t}_k$ компоненты

$$T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\mathfrak{t}_k}{x^{k+2}}$$

тензора энергии-импульса для уравнений (3.19) образуют относительно $\hat{B}_2$ алгебру Вирасоро [64] с центральным зарядом $c = -\frac{3}{4}\beta$:

$$\begin{aligned} 2\pi\boldsymbol{i}\,[\mathfrak{t}_n, \mathfrak{t}_m] &= 2(n-m)\,\mathfrak{t}_{n+m} - \beta\cdot(n^3-n)\,\delta_{n+m,0}, \\ [\mathfrak{t}_k, \beta] &= 0. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Как и в замечании 3.8, укажем, что известное из [46, 84] свойство интеграла T мы адаптируем к случаю уравнений Тоды (3.19), ассоциированных с невырожденной симметризуемой матрицей K, которая не обязательно есть матрица Картана полупростой алгебры Ли, и выражаем значение центрального заряда через константу $\beta = \sum\limits_i a_i\Delta^i$.

В [29] были рассмотрены свойства некоторого класса обобщений алгебры (9.6), соотношения в которых заданы N-местной кососимметричной скобкой при $N \geqslant 2$.

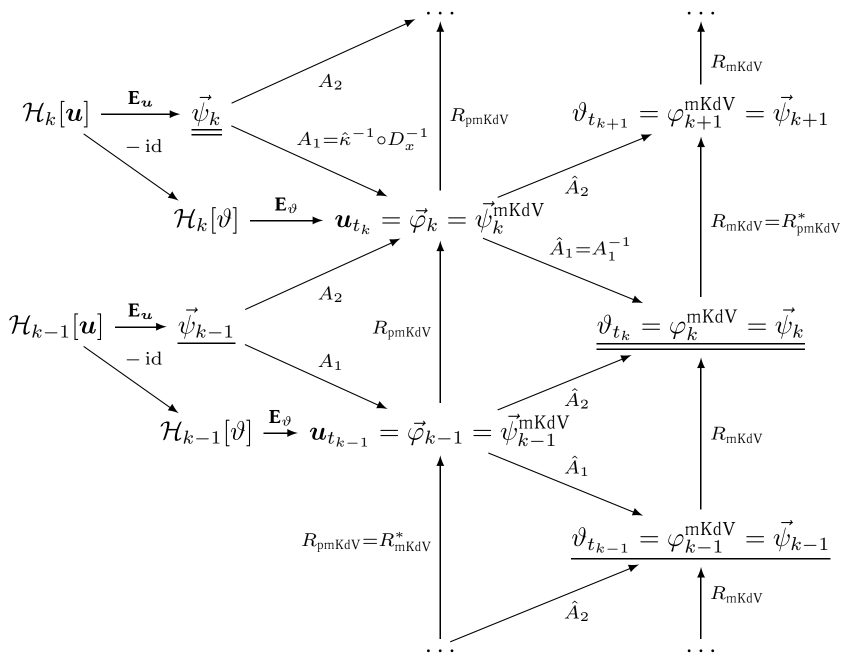
9.2. Об аналогах модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза

В данном разделе мы изучаем соотношения между потенциальным и непотенциальным модифицированными уравнениями Кортевега—де Фриза, которые соответствуют подалгебре $\mathfrak{A} \subset \operatorname{sym}\mathcal{L}_{\mathrm{Toda}} \subset \operatorname{sym}\mathcal{E}_{\mathrm{Toda}}$ симметрий лагранжевых уравнений Тоды (3.19). Мы обсуждаем свойства преобразования Миуры

$T = T(\vartheta, \vartheta_x)$, переводящего решения модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза (9.1) в решения уравнения (7.3), и устанавливаем инвариантную природу оператора $\square$, возникшего в (3.26) при описании структуры симметрий уравнений Тоды. Также мы получаем гамильтоновы структуры для иерархии $\mathfrak{A}$ и показываем, что гамильтонианами для модифицированных уравнений (7.5) и (9.1) по-прежнему являются гамильтонианы $[h_k \, \mathrm{d}x]$ уравнений Кортевега—де Фриза (7.3) и (7.4).

Ранее в (9.2) мы ввели новую зависимую переменную ϑ, удовлетворяющую модифицированному уравнению Кортевега—де Фриза (9.1) и его высшим аналогам $\mathcal{E}_{\text{mKdV}(k)}$. Согласно следствию 7.20 все правые части уравнений $\mathcal{E}_{\text{mKdV}(k)}$ локальны по ϑ.

В полной аналогии с разделом 9.1 укажем отождествления между высшими симметриями потенциального уравнения $\mathcal{E}_{\text{pmKdV}}$ и производящими сечениями законов сохранения для уравнения $\mathcal{E}_{\text{mKdV}}$ и наоборот:



Из коммутативности алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, установленной в лемме 7.21 и теореме 7.23, следует, что тождества Якоби (1.2b) выполнены для операторов $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$, первые из которых заданы соотношениями (8.12), а вторые — соответствием между оператором рекурсии (8.14) и схемой Магри (8.16). Операторы рекурсии $R_{\text{p(m)KdV}}$ допускают стандартное представление

$$R_{\text{pmKdV}} = A_2 \circ A_1^{-1} = \square \circ D_x^{-1} \circ \ell_T,$$
$$R_{\text{pKdV}} = B_2 \circ B_1^{-1},$$

где

$$\begin{cases} A_1 = \hat{\kappa}^{-1} \circ D_x^{-1}, \\ A_2 = \square \circ D_x^{-1} \circ \square^*, \end{cases} \qquad \begin{cases} B_1 = D_x^{-1}, \\ B_2 = -\beta\, D_x + s_1 \cdot D_x^{-1} + D_x^{-1} \circ s_1. \end{cases}$$

Обозначим линеаризацию функционала T относительно зависимых переменных $\boldsymbol{u}$ через ℓ_T^{u}, а относительно ϑ — через ℓ_T^{ϑ}: оператор ℓ_T^{u} задан формулой (5.4),

$$\ell_T^{\vartheta} = \Big(\ldots, \sum_\sigma \frac{\partial T}{\partial \vartheta_\sigma^i}\, D_\sigma, \ldots\Big).$$

Лемма 9.8. *Имеет место соотношение* $\square^* = \ell_T^{\vartheta}$. *Кроме того, верно тождество* $\ell_T^{\boldsymbol{u}} = \square^* \circ \ell_\vartheta^{\boldsymbol{u}}$.

Доказательство. Проверка первого утверждения носит вычислительный характер. Выразим u_x через ϑ, $u_x = \kappa^{-1}\vartheta$, и запишем функционал (3.22) в терминах ϑ:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{l,m} \kappa^{lm} \vartheta^l \vartheta^m - \sum_l \Delta^l \cdot \vartheta_x^l,$$

где $\kappa^{-1} = \|\kappa^{lm}\|$ и мы воспользовались тождеством

$$\sum_{i=1}^r a_i \cdot \kappa^{ij} = \Delta^j.$$

Поэтому

$$\square^* = {}^t(\kappa^{-1} \cdot \vartheta - \vec{\Delta} \cdot \bar{D}_x).$$

Второе утверждение следует из определения линеаризации на с. 64. □

Укажем дополнительно несколько факторизаций, например таких:

$$\ell_T = \square^* \circ A_1^{-1} = \square^* \circ \hat{A}_1 = \square^* \circ D_x \circ \hat{\kappa} = \square^* \circ \ell_\vartheta^{\boldsymbol{u}}.$$

Оператор рекурсии R_{pKdV} разложим в произведение

$$R_{\mathrm{pKdV}}(\phi_{k-1}) = \mathrm{Э}_{\square(\phi_{k-1})}(s) = \ell_s(\square(\phi_{k-1})) = \\ = D_x^{-1} \circ \ell_T \circ \square(\phi_{k-1}) = B_1 \circ \square^* \circ \hat{A}_1 \circ \square(\phi_{k-1})$$

гамильтоновых операторов, соединённых операторами $\square$ и $\square^*$.

Предложение 9.9 ([27, 72]). *Всякая нётерова симметрия*

$$\varphi_{\mathcal{L}} = \square \circ \boldsymbol{E}_T(Q(x, \boldsymbol{T})) \in \operatorname{sym} \mathcal{L}_{\mathrm{Toda}}$$

уравнений Тоды, ассоциированных с невырожденной симметризуемой матрицей K, *является гамильтоновой симметрией относительно гамильтоновой структуры* $A_1 = \kappa^{-1} \cdot D_x^{-1}$ *и гамильтониана* $\mathcal{H} = [Q(x, \boldsymbol{T})]$:

$$\varphi_{\mathcal{L}} = A_1 \circ \boldsymbol{E}_u(\mathcal{H}).$$

Доказательство утверждения 9.9 следует из определения оператора Эйлера, $\mathbf{E}(H\,\mathrm{d}x) = \ell_H^*(1)$, и леммы 9.8.

Замечание 9.10. Тот факт, что нётерова симметрия $\varphi_0^f = \square \circ \mathbf{E}_T(T \cdot f(x)\,\mathrm{d}x)$ уравнений Тоды гамильтонова, $\varphi_0^f = A_1 \circ \mathbf{E}_u(T \cdot f(x)\,\mathrm{d}x)$, был установлен в утверждении 3.9. Гамильтоновость потенциального модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза $u_{t_1} = \varphi_1$ (см. (7.5)) также несложно установить непосредственным вычислением: $\varphi_1 = A_1 \circ \mathbf{E}_u(h_0\,\mathrm{d}x)$.

Мы же распространяем замечание 9.10 на всю иерархию $\mathfrak{A}$. Итак, сформулируем наиболее примечательное соотношение между иерархией $\mathfrak{A}$ потенциального модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза (7.5) и иерархией $\mathfrak{B}$ скалярного уравнения.

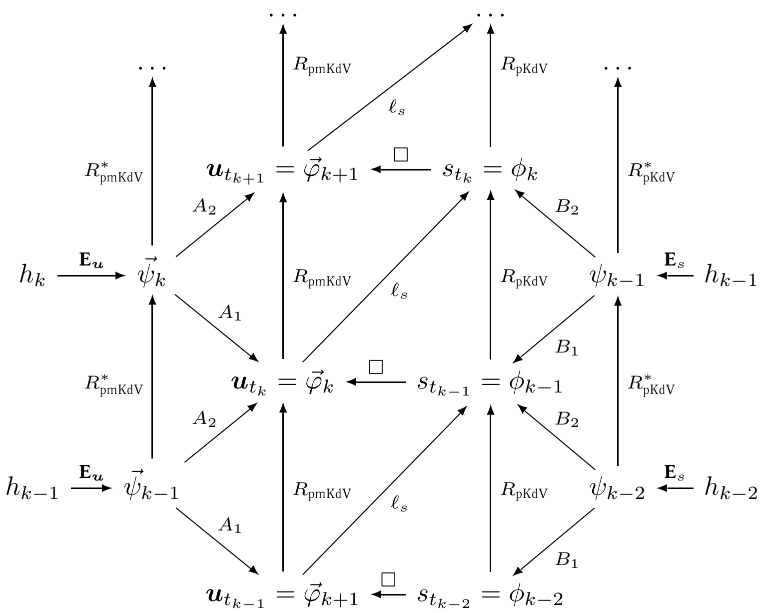
Теорема 9.11 ([27, 72]). *При каждом $k \geqslant 0$ гамильтонианом нётеровой симметрии $\varphi_k \in \mathfrak{A}$ является гамильтониан $h_k\,\mathrm{d}x$ для k-го высшего уравнения Кортевега—де Фриза.*

Эта теорема следует из утверждения 9.9 и замечания 9.3, которое ставит в соответствие нётеровым симметриям $\varphi_k \in \mathfrak{A}$ сохраняющиеся плотности h_k.

Замечание 9.12. Приведём лагранжево представление гамильтоновых уравнений $\mathcal{E}_{(k)}$ иерархии $\mathfrak{A}$:

$$\mathcal{E}_{(k)} = \left\{ A_1 \circ \mathbf{E}_u \left(\left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j} \kappa_{ij} u_x^i u_{t_k}^j - h_{k-1} \right] \mathrm{d}x \right) = 0 \right\}, \quad k \geqslant 0.$$

Мы завершаем построение схемы Магри для уравнения $\mathcal{E}_{\mathrm{pmKdV}}$, первым «нелокальным» элементом которой является уравнение Тоды (8.9):



Итогом данной главы является следующее предложение.

Предложение 9.13 ([27, 72]).

1. *Подстановка*
$$T = T(\vartheta, \vartheta_x)\colon \mathcal{E}_{\mathrm{mKdV}} \xrightarrow{T(\vartheta,\vartheta_x)} \mathcal{E}_{\mathrm{KdV}} \tag{9.7}$$
есть преобразование Миуры между высшими уравнениями
$$\mathcal{E}_{\mathrm{mKdV}(k)} = \{\vartheta_{t_k} = D_x \cdot \hat{\kappa}(\varphi_k)\}$$
и
$$\mathcal{E}_{\mathrm{KdV}(k)} = \{T_{t_k} = D_x(\phi_k)\}.$$
2. *Оператор*
$$\square^* = \ell_T^{\vartheta}\colon \varphi \mapsto \text{Э}_{\varphi}(T)$$
есть отображение алгебры Ли $\operatorname{sym}\mathcal{E}_{\mathrm{mKdV}} \ni \varphi$ *симметрий уравнения* $\mathcal{E}_{\mathrm{mKdV}}$ *в алгебру Ли* $\operatorname{sym}\mathcal{E}_{\mathrm{KdV}}$ *уравнения Кортевега—де Фриза* (7.3) (*см. пример* 7.2).
3. *Оператор* $\square = \square^{**}$ *отображает в обратном направлении двойственные к симметриям производящие сечения законов сохранения:*
$$\square\colon \phi_k = \boldsymbol{E}_T(h_k\,\mathrm{d}x) \mapsto \varphi_k \in \mathfrak{A}.$$

Замечание 9.14. Из диаграмм (7.16) и (9.5) видно, что последовательное применение отображений $\square^* = \ell_T^{\vartheta}$ и $\square = \square^{**}$ не сохраняет номер высшей симметрии:
$$\begin{tikzcd}
\vec{\psi}_k = \varphi_k^{\mathrm{mKdV}} \arrow[r, "\square^*"] & \psi_k = \Phi_k \arrow[r, "B_1"] & \phi_k \\
\vec{\varphi}_k = \vec{\psi}_k^{\mathrm{mKdV}} \arrow[u, "\hat{A}_1"] & & \phi_{k-1} \arrow[ll, "\square=\square^{**}"'] \arrow[u, "R_{\mathrm{pKdV}}"']
\end{tikzcd} \tag{9.8}$$
причём оператор рекурсии R_{pKdV} измеряет разницу в их действии.

Часть II. Групповые свойства, уравнений математической физики: методы и приложения

Во второй части мы рассматриваем практические применения методов и алгоритмов геометрии дифференциальных уравнений [5, 74, 75, 94] к исследованию свойств бездисперсионного уравнения Тоды, многокомпонентного нелинейного уравнения Шрёдингера, уравнения Лиувилля и связанных с ним систем. Инвариантные решения, нётеровы симметрии, локальные и нелокальные законы сохранения, слабо нелокальные операторы рекурсии, семейства (авто)преобразований Беклунда и представления нулевой кривизны — таков перечень обсуждаемых в дальнейшем структур, связанных с данными уравнениями математической физики.

Глава 3. Симметрии, решения и законы сохранения нелинейных моделей

В этой главе рассмотрены два примера применения методов геометрии дифференциальных уравнений в исследовании бездисперсионного уравнения Тоды и связанного с ним многокомпонентного аналога нелинейного уравнения Шрёдингера.

10. Нелинейное уравнение Шрёдингера

В данном разделе мы изучаем свойства m-компонентного аналога нелинейного уравнения Шрёдингера [13, 42, 93]

$$\Psi_t = \boldsymbol{i}\Psi_{xx} + \boldsymbol{i}f(|\Psi|)\,\Psi, \tag{10.1}$$

где Ψ — m-компонентный вектор ($m \geqslant 1$), $\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$ и $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Известно, что скалярное ($m = 1$) нелинейное уравнение Шрёдингера описывает распространение световых импульсов или волновых пакетов в средах с линейной диссипацией и нелинейной автофокусировкой, например в слоистых структурах, нелинейных кристаллах и газах, бозе-конденсате и т. д. Совместная эволюция комплекса пространственно-некогерентных солитонов в нелинейной среде с керровской автофокусировкой задана системой нелинейных уравнений Шрёдингера (10.1), в которой $\Psi = {}^t(\Psi^1, \ldots, \Psi^m)$ — набор амплитуд излучения,

$$\mathcal{I} = \sum_{i=1}^{m} |\Psi^i|^2$$

есть плотность полной энергии, t — координата вдоль направления распространения волн, а x — координата вдоль фронта волны.

При $f = \mathrm{id}$ это уравнение допускает [13] коммутативную бигамильтонову иерархию высших симметрий и бесконечный набор сохраняющихся плотностей в инволюции, однако в общем случае это не так. Ниже мы вычисляем алгебру симметрий данного уравнения в физически реализуемом случае однородной функции f веса Δ и указываем набор из m^2 сохраняющихся токов, обобщающих известные ранее m законов сохранения энергии i-й моды и полного импульса системы, которые соответствуют двум гамильтоновым симметриям уравнений Шрёдингера — масштабному преобразованию и трансляции.

Итак, рассмотрим m-компонентный аналог нелинейного уравнений Шрёдингера — мультисолитонный комплекс [42]:

$$\begin{aligned} &F^k \equiv \Psi^k_t - \boldsymbol{i}\Psi^k_{xx} - \boldsymbol{i}f(\mathcal{I})\cdot\Psi^k = 0,\\ &\bar{F}^k \equiv \bar{\Psi}^k_t + \boldsymbol{i}\bar{\Psi}^k_{xx} + \boldsymbol{i}f(\mathcal{I})\cdot\bar{\Psi}^k = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \ \ \mathcal{I} \equiv \Psi\bar{\Psi}. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Это уравнение гамильтоново при произвольной функции f:

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \bar{\Psi} \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\mathcal{H}_{\mathrm{NLS}}/\delta\Psi \\ \delta\mathcal{H}_{\mathrm{NLS}}/\delta\bar{\Psi} \end{pmatrix}, \tag{10.3}$$

где плотность H_{NLS} гамильтониана $\mathcal{H}_{\mathrm{NLS}} = [H_{\mathrm{NLS}}\,\mathrm{d}x]$ есть

$$H_{\mathrm{NLS}} = -\boldsymbol{i}\Psi_x\bar{\Psi}_x + \boldsymbol{i}\int^{\mathcal{I}} f(\mathcal{I})\,\mathrm{d}\mathcal{I}.$$

Отметим также, что H_{NLS} является сохраняющейся плотностью для уравнения (10.2) аналогично соотношению (1.6) для бездисперсионного уравнения Тоды или тождеству (8.10) для уравнения Тоды (3.19). Кроме того, гамильтоново представление (10.3) показывает, что комплексно сопряжённые зависимые переменные $\bar{\Psi}$ являются канонически сопряжёнными переменными — импульсами — для динамических координат Ψ. В разделе 8 мы рассматривали некоторые обобщения данной ситуации.

Известно (см. работу [42] и ссылки в ней), что уравнение (10.1) обладает таким свойством: кроме закона сохранения полной энергии $\Psi\bar{\Psi}$, оно допускает m сохраняющихся по отдельности плотностей

$$Q_i = \Psi^i \cdot \bar{\Psi}^i, \quad \bar{D}_t(Q_i) = 0, \tag{10.4}$$

что отражает отсутствие передачи энергии между модами Ψ^i. Это замечание о свойствах нелинейного уравнения Шрёдингера неполно, поскольку m интегралов движения (10.4) являются лишь частными случаями в наборе m^2 сохраняющихся токов

$$\eta_{ij} = \Psi^i\bar{\Psi}^j\,\mathrm{d}x + \boldsymbol{i}(\Psi^i_x\,\bar{\Psi}^j - \Psi^i\,\bar{\Psi}^j_x)\,\mathrm{d}t, \quad \bar{\mathrm{d}}_h\eta_{ij} = 0, \tag{10.5}$$

присущих уравнению (10.1) при произвольной нелинейности $f(\mathcal{I})$ и указывающих на сохранение корреляций напряжённости полей излучения между *разными* модами с номерами i и j, $1 \leqslant i,\ j \leqslant m$. Набор сохраняющихся токов (10.5) не был отмечен в [42, 93], и ограничения типа законов сохранения, по-видимому, не учитывались авторами этих работ при проведении вычислительных экспериментов.

Производящие сечения законов сохранения $[\eta_{ij}]$, заданных в (10.5), суть

$$\vec{\psi}_{(ij)} = {}^t(\psi_{(ij)}, \bar{\psi}_{(ij)}),$$

где

$$\psi^i_{(ij)} = \bar{\Psi}^j, \quad \bar{\psi}^j_{(ij)} = \Psi^i, \quad \psi^{i'}_{(ij)} = \bar{\psi}^{j'}_{(ij)} = 0$$

при $i' \neq i$, $j' \neq j$. Каноническая гамильтонова структура

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ставит им в соответствие точечные симметрии $\vec{\varphi}_{(ij)} = {}^t(\varphi_{(ij)}, \bar{\varphi}_{(ij)})$: $\varphi^i_{(ij)} = \Psi^j$, $\bar{\varphi}^j_{(ij)} = -\bar{\Psi}^i$, которые в частном случае $i = j$ задают калибровочную симметрию [13]

$$A_\lambda(\vec{\varphi}_{(ii)})\colon \Psi^i \mapsto \exp(\lambda)\Psi^i, \quad \bar{\Psi}^i \mapsto \exp(-\lambda)\bar{\Psi}^i. \tag{10.6}$$

Гамильтонианы симметрий $\vec{\varphi}_{(ii)}$ — это в точности сохраняющиеся плотности Q_i (см. (10.4)).

В [13] был исследован случай $f(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$ кубической нелинейности в уравнении (10.1). Было установлено, что в такой ситуации кубическое m-компонентное уравнение (10.1) допускает рекурсию

$$R_{\mathrm{NLS}} = \begin{pmatrix} -D_x & 0 \\ 0 & D_x \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\Psi \\ \bar{\Psi} \end{pmatrix} \cdot D_x^{-1} \circ (\bar{\Psi}, \Psi) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \vec{\varphi}_{(ij)} \cdot D_x^{-1} \circ \vec{\psi}_{(ij)},$$

которая, будучи применённой к масштабной симметрии (10.6), порождает бесконечную коммутативную цепочку локальных высших симметрий уравнения (10.1):

$$\begin{tikzcd}
Q_i \, \mathrm{d}x \arrow[d, "\mathbf{E}_{\bar{\Psi}}"] & & \mathcal{H}_{\mathrm{NLS}} \arrow[d, "\mathbf{E}_{\bar{\Psi}}"] & & \mathcal{H}_4 \arrow[d, "\mathbf{E}_{\bar{\Psi}}"] & \\
\vec{\psi}_{(ii)} \arrow[r, "R^*_{\mathrm{NLS}}"] \arrow[d, "\Gamma_1"] & \vec{\psi}_1 \arrow[r, "R^*_{\mathrm{NLS}}"] \arrow[d, "\Gamma_1"] & \vec{\psi}_2 \arrow[r, "R^*_{\mathrm{NLS}}"] \arrow[d, "\Gamma_1"] & \vec{\psi}_3 \arrow[r, "R^*_{\mathrm{NLS}}"] \arrow[d, "\Gamma_1"] & \vec{\psi}_4 \arrow[r, "R^*_{\mathrm{NLS}}"] \arrow[d, "\Gamma_1"] & \ldots \\
\vec{\varphi}_{(ii)} \arrow[r, "R_{\mathrm{NLS}}"] & \vec{\Psi}_x \arrow[r, "R_{\mathrm{NLS}}"] & \vec{\Psi}_t \arrow[r, "R_{\mathrm{NLS}}"] & \vec{\varphi}_3 \arrow[r, "R_{\mathrm{NLS}}"] & \vec{\varphi}_4 \arrow[r, "R_{\mathrm{NLS}}"] & \ldots
\end{tikzcd} \tag{10.7}$$

Эта диаграмма служит примером последовательности гамильтоновых симметрий, для половины из которых, $\vec{\varphi}_{2k+1}$, не существуют гамильтонианы: $\vec{\psi}_{2k+1} \notin$ $\notin \operatorname{im} \mathbf{E}_{\vec{\Psi}}$.

Замечание 10.1. Вычисленные выше производящие сечения $\vec{\psi}_{(ij)}$ законов сохранения (10.5) и гамильтоновы симметрии $\vec{\varphi}_{(ij)}$ позволяют прийти к заключению, что оператор рекурсии R_{NLS} *слабо нелокален* [73], то есть представи́м в виде

$$R = \text{локальная часть} + \sum_{\alpha} \varphi_\alpha \circ D_x^{-1} \circ \psi_\alpha, \tag{10.8}$$

где φ_α — симметрии, а ψ_α — производящие сечения законов сохранения. Напомним, что в предыдущей главе мы, пользуясь разложениями вида (10.8), установили интересные свойства цепочек симметрий уравнений Тоды, которые порождены слабо нелокальными операторами рекурсии.

Заметим, наконец, что рассмотренные в [13] не зависящие от x и t симметрии $\vec{\varphi}$ не исчерпывают всего набора классических симметрий нелинейного уравнения Шрёдингера (10.1), причём алгебра симметрий этого уравнения оказывается некоммутативной.

Пример 10.2. Алгебра точечных симметрий нелинейного уравнения (10.2), соответствующего произвольной гладкой функции $f(\mathcal{I})$, порождена образующими

$$\vec{\varphi}_{(ij)},\ \vec{\Psi}_x,\ \vec{\Psi}_t,\ \begin{pmatrix} \varphi^i \\ \bar{\varphi}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t\, \Psi^i_x - \boldsymbol{i}x\, \Psi^i \\ 2t\, \bar{\Psi}^i_x + \boldsymbol{i}x\, \Psi^i \end{pmatrix}.$$

Если дополнительно f подчинена условию однородности

$$f(\lambda \mathcal{I}) = \lambda^{\Delta} \cdot f(\mathcal{I}),$$

то уравнение (10.1) допускает ещё одну масштабную симметрию

$$\begin{pmatrix}\varphi^i\\ \bar\varphi^i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\Psi^i+\Delta\,x\,\Psi^i_x+2\Delta\,t\,\Psi^i_t\\ 2\bar\Psi^i+\Delta\,x\,\bar\Psi^i_x+2\Delta\,t\,\bar\Psi^i_t\end{pmatrix}.$$

11. Бездисперсионное уравнение Тоды

В данном разделе вычислена алгебра классических симметрий, построены пять классов точных решений и реконструированы пять законов сохранения для бездисперсионного уравнения Тоды — аналога уравнений (3.19) с непрерывным изменением параметра j, нумерующего зависимые переменные u^j. Кроме того, обсуждаются вопросы лагранжева формализма с высшими производными.

Рассмотрим гиперболические уравнения Тоды

$$\boldsymbol{u}_{xy}=\exp(K\boldsymbol{u}),\quad \boldsymbol{u}'_{xy}=K\cdot\exp(\boldsymbol{u}'),\tag{11.1}$$

ассоциированные с алгебрами Ли серии A_{r-1} с матрицами Картана K, введём дополнительную по отношению к этим уравнениям переменную $z\in\mathbb{R}$ и распространим на $\mathbb{R}$ значения дискретного индекса $j\in[1,r]$, нумерующего зависимые переменные u^j. Пусть $r\to\infty$. Для всякого сечения $\boldsymbol{u}$ расслоения π положим $u^j=\boldsymbol{u}(x,y,z)|_{z=j\varepsilon}$, где ε — ячейка решётки.

Оказывается, что непрерывный предел при $r\to\infty$ и $\varepsilon\to+0$ уравнений (11.1), называемый в литературе бездисперсионным уравнением Тоды, или уравнением «heavenly», или, по именам авторов статьи [47], уравнением Бойера—Финли, также возникает во многих задачах, например в теории гравитации [38, 47] при изучении антиавтодуальных вакуумных уравнений Эйнштейна (ASDVEE). Своим существованием уравнение $\mathcal{E}_{\text{heav}}$ обязано специальному виду (3.9) матриц Картана $K=\|k_{ij}\|$ для алгебр серии A_r: вместо $(r\times r)$-матрицы K необходимо рассматривать [38, 90] оператор Картана $\hat K=-D_z^2$, а соответствующие уравнениям (11.1) скалярные уравнения принимают вид [43, 47]

$$\hat{\mathcal{E}}=\{\hat F\equiv u_{xy}-\exp(-u_{zz})=0\}\tag{11.2a}$$

$$u'_{xy}=-D_z^2\circ\exp(u').\tag{11.2b}$$

Оператор Картана $\hat K$ определяет знак «$-$» в упомянутом нами во введении одномерном уравнении

$$u_{\tau\tau}=\exp(-u_{zz}),\quad u'_{\tau\tau}=-D_z^2\circ\exp(u').\tag{11.3}$$

Аналогично [38, 52] рассмотрим предел заданной в (3.20) плотности лагранжиана $\mathcal{L}_{\text{Toda}}$ при $r\to\infty$ и $\varepsilon\to+0$:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{r\to\infty}L_{\text{Toda}}=D_z^{-1}\left(\frac12 u_xu_{yzz}-\exp(-u_{zz})\right).$$

Сам лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{Toda}}$ при этой процедуре перейдёт в функционал

$$\hat{\mathcal{L}}=\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int \text{Ł}\,\mathrm{d}z$$

с плотностью

$$Ł = -\frac{1}{2}\, u_{xz}u_{yz} - \exp(-u_{zz}),$$

зависящей от вторых производных сечений $u = u(x, y, z)$. Применяя к $\hat{\mathcal{L}}$ оператор Эйлера $\mathbf{E}_u$, мы получаем уравнение

$$\mathcal{E}_{\text{heav}} = \{F_{\text{heav}} \equiv u_{xyzz} - D_z^2 \circ \exp(-u_{zz}) = 0\}. \tag{11.4}$$

Видно, что двукратное интегрирование по z отображает (11.4) в уравнение (11.2a), а подстановка $u' = -u_{zz}$ — в (11.2b).

11.1. Симметрии и точные решения

Вычисление симметрий $\varphi \in \operatorname{Sym}\hat{\mathcal{E}}$ уравнения (11.2a) при помощи пакета аналитических преобразований **Jet** [81] приводит к следующему результату.

Предложение 11.1. *Точечные симметрии уравнения* (11.2a) *— решения*

$$\varphi(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z)$$

определяющего уравнения $\bar{D}_{xy}(\varphi) + \exp(-u_{zz}) \cdot \bar{D}_z^2(\varphi) = 0$ *— имеют вид*

$$\varphi_1[f] = \left(u_x - \frac{1}{2}z^2\, \bar{D}_x\right) f(x), \quad \bar{\varphi}_1[g] = \left(u_y - \frac{1}{2}z^2\, \bar{D}_y\right) g(y), \tag{11.5a}$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2}zu_z + u - \frac{1}{2}z^2, \tag{11.5b}$$

$$\varphi_3 = u_z, \tag{11.5c}$$

$$\varphi_4[q] = q(x)z, \qquad \bar{\varphi}_4[\bar{q}] = \bar{q}(y)z, \tag{11.5d}$$

$$\varphi_5[r] = r(x), \qquad \bar{\varphi}_5[\bar{r}] = \bar{r}(y), \tag{11.5e}$$

где f, q и r — произвольные гладкие функции аргумента x, а g, $\bar{q}$ и $\bar{r}$ — аргумента y. Правила коммутирования симметрий (11.5) *заданы следующей кососимметричной таблицей*:

	$\varphi_1[f]$	$\bar{\varphi}_1[g]$	φ_2	φ_3	$\varphi_4[q]$	$\bar{\varphi}_4[\bar{q}]$	$\varphi_5[r]$	$\bar{\varphi}_5[\bar{r}]$
$\varphi_1[f]$	0	0	0	$\varphi_4[-f']$	$\varphi_4[-fq']$	0	$\varphi_5[-fr']$	0
$\bar{\varphi}_1[g]$		0	0	$\bar{\varphi}_4[-g']$	0	$\bar{\varphi}_4[-g\bar{q}]$	0	$\bar{\varphi}_5[-g\bar{r}']$
φ_2			0	$\varphi_3{+}\varphi_4[2]$	$\varphi_4[q]$	$\bar{\varphi}_4[\bar{q}]$	$\varphi_5[2r]$	$\bar{\varphi}_5[2\bar{r}]$
φ_3				0	$\varphi_5[-q]$	$\bar{\varphi}_5[-\bar{q}]$	0	0
$\varphi_4[q]$					0	0	0	0
$\bar{\varphi}_4[\bar{q}]$						0	0	0
$\varphi_5[r]$							0	0
$\bar{\varphi}_5[\bar{r}]$								0

Замечание 11.2.

1. Оператор $\hat{\square} = u_x - \frac{1}{2}z^2\, \bar{D}_x$ в (11.5a) является аналогом оператора $\square$, заданного формулой (3.26).

2. Аналоги симметрий (11.5a)—(11.5c) для уравнения (11.2b) были указаны в [43]. Симметрии $\varphi_4, \varphi_5 \in \ker D_z^2$ уравнения $\hat{\mathcal{E}}$ отражают несущественное различие между геометрией уравнений (11.2a) и (11.2b), возникающее за счёт подстановки $u' = -u_{zz}$.

Замечание 11.3. Трудности, возникающие при вычислении алгебры Ли $\operatorname{sym}\mathcal{E}^{\infty}_{\text{heav}}$ симметрий уравнения (11.4), во многом связаны с тем, что уравнения (11.2) или (11.4) на деле огромны: достаточно, например, оценить количество координат порядка k на этих уравнениях или число нетривиальных соотношений, задающих продолжение $\mathcal{E}^{(k)}_{\text{heav}}$.

Переход от дифференциально-разностных уравнений (3.10) с матрицей (3.9) к *бездисперсионному* пределу (11.2a) неявно предполагает задание дополнительного уравнения

$$u_{zzz} = 0,$$

и его следует учитывать при построении алгебры Ли $\operatorname{sym}\mathcal{E}^{\infty}_{\text{heav}}$ *всех* симметрий предельного бездисперсионного уравнения Тоды.

Построение решений бездисперсионного уравнения Тоды. Задача построения решений уравнения (11.2a) на основе использования сведений об алгебре Ли $\operatorname{Sym}\mathcal{E}$ точечных симметрий этого уравнения и применения различных геометрических методов [5] была рассмотрена в [43] и [79]. В первой из указанных работ были получены инвариантные решения уравнения $u_{xy} = \pm(\exp(u))_{zz}$, которым соответствуют формулы (11.10) и (11.11) настоящей работы. Класс решений, неинвариантных относительно всей алгебры Ли $\operatorname{Sym}\mathcal{E}$ в целом, был указан в [79]. Бóльшая по сравнению с [43] общность нашего подхода заключается в том, что всякий раз, редуцировав решаемое уравнение к некоторому вспомогательному уравнению относительно функций, зависящих от меньшего числа аргументов, мы вновь строим алгебру Ли точечных симметрий этого дополнительного уравнения и получаем инвариантные решения, параметризованные произвольными функциями, а не сводим задачу к предъявлению набора частных ответов. Кроме того, отметим, что применяемая нами методика решения уравнения (11.2a), переопределённого условием $\varphi_i = 0$, во многом схожа со схемой построения *не*инвариантных решений [79]. Дело в том, что входящую в уравнения $\varphi_i = 0$ переменную z мы интерпретируем как формальный параметр с тем, чтобы дополнительное соотношение $\varphi_i = 0$ можно было записать в полных дифференциалах.

Симметрия $\boldsymbol{\varphi_1 \in \operatorname{Sym}\hat{\mathcal{E}}}$. Рассмотрим генератор

$$\varphi_1 = \varphi_1[f] + \bar{\varphi}_1[g] = u_x f(x) - \frac{1}{2}z^2 f'(x) + u_y g(y) - \frac{1}{2}z^2 g'(y)$$

инфинитезимальной конформной симметрии уравнения (11.2a), зависящий от двух произвольных гладких функций f и g. Запишем условие инвариантности $\varphi_1 = 0$ как уравнение характеристик и получим не зависящий от переменной u первый интеграл

$$t = \int^{x} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} - \int^{y} \mathrm{d}y g(y).$$

Для построения ещё одного интеграла C_2 будем считать координату z параметром, $\frac{1}{2}z^2 \ln f(x) + \frac{1}{2}z^2 \ln g(y) - u = C_2(z)$. Тогда решение $u(x, y, z)$ уравнения $\varphi_1 = 0$ задано условием

$$\Pi(t, C_2(z)) = 0,$$

где Π — пока произвольная функция двух полученных «интегралов», один из которых зависит от z. Разрешая полученное соотношение относительно u, получим

$$u = \frac{1}{2}z^2 \ln f(x)g(y) + \Phi(t, z), \tag{11.6}$$

причём для того, чтобы u было решением уравнения (11.2а), необходимо, чтобы функция Φ удовлетворяла одномерному уравнению

$$\Phi_{tt} + \exp(-\Phi_{zz}) = 0. \tag{11.3$'$}$$

Редуцированное уравнение оказывается не чем иным, как одномерным уравнением (11.3), аналогично тому, как построение решений гиперболического уравнения Лиувилля, инвариантных относительно конформных симметрий, сводится к решению одномерного уравнения Лиувилля. Отметим, что второй «интеграл» $C_2(z)$ уравнения $\varphi_1 = 0$ нам удалось построить за счёт нетривиальной трактовки координаты z как параметра, дополнительного к независимым переменным x и y. Такой подход не был использован в [43], ниже мы применим его ещё раз к уравнению (11.3′). Для построения инвариантных решений этого уравнения мы пользуемся программным пакетом аналитических преобразований Jet [81] и вычисляем образующие алгебры Ли точечных симметрий уравнения (11.3′). В итоге мы получаем следующее утверждение.

Лемма 11.4. *Алгебра Ли классических симметрий уравнения* (11.3′) *порождена следующими восемью образующими*:

$$\begin{array}{llll} \phi_1 = t\Phi_t - z^2, & \phi_2 = \Phi_t, & \phi_3 = z\Phi_z + z^2 - 2\Phi, & \phi_4 = \Phi_z, \\ \phi_5 = zt, & \phi_6 = t, & \phi_7 = z, & \phi_8 = 1. \end{array}$$

Далее мы будем указывать семейства решений уравнения (11.3′). Каждому из них соответствует класс решений (11.6) бездисперсионного уравнения Тоды (11.2а).

Симметрия ϕ_1. Рассмотрим уравнение $\phi_1 = 0$ и вновь потребуем, чтобы переменная z была формальным параметром: $z^2 \ln|t| - \Phi = C(z)$. Подставляя определяемое отсюда решение Φ в уравнение (11.3′) и разрешая его относительно C, получаем

$$\Phi(t, z) = z^2 \ln|t| - \frac{1}{4}z^2 \ln|z| - \frac{1}{8}z^2 + C_1 z + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы.

Симметрия ϕ_2. Легко видеть, что вещественные ϕ_2-инвариантные решения уравнения (11.3′) отсутствуют, так как уравнение $\exp(-\Phi_{zz}) = 0$ неразрешимо. Рассмотрим, однако, более общую ситуацию: будем искать решения уравнения (11.3′), инвариантные относительно линейной комбинации симметрий

$$\phi_{(a:b)} = \phi_2 + (a:b)\phi_4,$$

где $(a:b) \in \mathbb{RP}^1$, то есть решения в виде бегущих волн. Подставляя функцию $\Phi(z-(a:b)t)$ в (11.3′), мы приходим к уравнению

$$(a:b)^2\Psi = -\exp(-\Psi), \tag{11.7}$$

в котором через Ψ обозначена вторая производная Φ'' по аргументу

$$w = z - (a:b)t.$$

Из уравнения (11.7) видно, что́ препятствует наличию $\phi_{(a:b)}$-инвариантных решений, распространяющихся с малыми скоростями

$$-\sqrt{\mathrm{e}} < (a:b) < \sqrt{\mathrm{e}}:$$

существуют критическая (минимальная) скорость $|a:b| = \sqrt{\mathrm{e}}$ и волновое решение

$$\Phi = -\frac{1}{2}\bigl(z \pm \sqrt{\mathrm{e}}\,t\bigr)^2 + \alpha\bigl(z \pm \sqrt{\mathrm{e}}\,t\bigr) + \beta,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Примечательно, что при бо́льших скоростях $\sqrt{\mathrm{e}} < |a:b| < \infty$ уравнение (11.3′) допускает одновременно *два* волновых решения

$$\Phi = \frac{1}{2}\Psi_{1,2}\cdot w^2 + \alpha w + \beta, \quad w = z-(a:b)t, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \tag{11.8}$$

соответствующие паре различных корней $\Psi_{1,2}$ уравнения (11.7). Эта пара корней обусловлена следующей бифуркацией: малым наклонам $(a:b)^2$ прямой $y = (a:b)^2\Psi$ на плоскости $0\Psi y$ не сопоставлены никакие решения уравнений (11.7) и (11.3′), при $(a:b)^2 = \mathrm{e}$ эта прямая касается графика экспоненты $y = -\exp(-\Psi)$ в точке $(-1, -\mathrm{e})$, а при бо́льших наклонах $\mathrm{e} < (a:b)^2 < \infty$ точка касания распадается в пару различных точек пересечения $(\Psi_{1,2}, (a:b)^2\Psi_{1,2})$, где $-\infty < \Psi_1 < -1 < \Psi_2 < 0$. Каждое из допустимых значений Ψ определяет вторую производную полиномиального решения (11.8) уравнения (11.3′). Точке $a:b=\infty$ соответствует единственный корень $\Psi = 0$ и ϕ_4-инвариантное решение уравнения (11.3′), которое приведено ниже.

Симметрия ϕ_3. Решим вспомогательное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$xy'(x) - 2y = -x^2 \implies y(x) = \left(\gamma - \frac{1}{2}\ln x^2\right)\cdot x^2. \tag{11.9}$$

Формулы (11.9) потребуются нам в дальнейшем дважды: для построения решений уравнения (11.3′), инвариантных относительно симметрии ϕ_3, а также при построении φ_2-инвариантных решений исходного уравнения (11.2a). Различие заключается в переменных, от которых зависит функция γ: в первом случае $\gamma = \gamma(t)$, а во втором $\gamma = \gamma(x, y)$.

Подставляя указанное в (11.9) выражение

$$\Phi = \left(\gamma(t) - \frac{1}{2}\ln z^2\right) \cdot z^2$$

в уравнение (11.3′), в зависимости от знака возникающей константы интегрирования получаем следующие выражения для функции $\gamma(t)$:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{3}{2} - \ln\bigl[\sqrt{\epsilon}\,\mathrm{sh}\,2\,\mathrm{Ar\,th}\exp\bigl(\pm\sqrt{\epsilon}(t-t_0)\bigr)\bigr],\\
\gamma_2 &= \frac{3}{2} + \ln[\pm t - t_0],\\
\gamma_3 &= \frac{3}{2} - \ln\bigl[\sqrt{\epsilon}\,\mathrm{ch}\ln\mathrm{tg}\bigl(\sqrt{\epsilon}(\pm t - t_0)\bigr)\bigr],
\end{aligned}$$

где $\epsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}$. Возвращаясь к формуле (11.6), по каждому из соответствующих решений $\Phi(t, z)$ мы строим класс решений

$$u = \frac{1}{2}z^2 \ln f(x)g(y) + \left(\gamma_i(t) - \frac{1}{2}\ln z^2\right) \cdot z^2, \quad i = 1, 2, 3, \tag{11.10}$$

бездисперсионного уравнения Тоды (11.2a).

Симметрия ϕ_4. Решение уравнения $\Phi_{tt} = 1$, заданного условием $\Phi_z = 0$, — это полином

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}t^2 + C_1 t + C_2,$$

где C_1 и C_2 — константы интегрирования. Соответствующие решения бездисперсионного уравнения Тоды (11.2a) вновь заданы формулой (11.6).

Симметрия $\varphi_2 \in \mathrm{Sym}\,\hat{\mathcal{E}}$. Построение φ_2-инвариантных решений уравнения (11.2a) сводится к последовательному рассмотрению вспомогательного обыкновенного дифференциального уравнения (11.9) и гиперболического scal^+-уравнения Лиувилля (см. (3.3)). Именно, подставляя выражение $u = (\gamma(x, y) - \frac{1}{2}\ln z^2) \cdot z^2$ в уравнение $u_{xy} = \exp(-u_{zz})$ и выполняя замену

$$\mathcal{X} = x\,\exp\left(\frac{3}{2}\right), \quad \mathcal{Y} = y\,\exp\left(\frac{3}{2}\right),$$

мы получаем уравнение Лиувилля

$$\gamma_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} = \exp(-2\gamma),$$

решения которого легко получить заменами из формулы (6.12) (см. [77]):

$$\gamma(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = -\frac{1}{2}\ln[-f'(\mathcal{X})g'(\mathcal{Y})\{\mathbf{Q}([f(\mathcal{X}) + g(\mathcal{Y})]^2)\}^{-2}],$$

где отображение $\mathbf{Q}$ есть sin, id или sh, откуда окончательно

$$u(x, y, z) = \frac{z^2}{2}\ln\frac{\{\mathbf{Q}([f(\mathrm{e}^{3/2}x) + g(\mathrm{e}^{3/2}y)]^2)\}^2}{-z^2 f'(\mathrm{e}^{3/2}x)g'(\mathrm{e}^{3/2}y)}. \tag{11.11}$$

Этот класс решений уравнения (11.2a) указан в [43], там же приведена их физическая интерпретация: оказывается, что указанные выражения задают инстантонные решения [47] антиавтодуальных вакуумных уравнений Эйнштейна (ASDVEE).

Симметрия $\varphi_3 \in \mathrm{Sym}\,\hat{\mathcal{E}}$. Для получения решения уравнения (11.2a), инвариантного относительно симметрии φ_3, требуется решить совместно уравнения $u_z = 0$ и $u_{xy} = \exp(-u_{zz})$. Ответ таков:

$$u(x, y, z) = xy + f(x) + g(y),$$

где f и g — произвольные функции.

Симметрии φ_4 и φ_5 уравнения (11.2a) не зависят от неизвестной функции u и её производных, и поэтому переопределение уравнения $u_{xy} = \exp(-u_{zz})$ условием $\varphi_4 = 0$ или $\varphi_5 = 0$ не упрощает задачу поиска решений бездисперсионного уравнения Тоды.

11.2. Нётеровы симметрии и законы сохранения

Рассмотрим задачу построения законов сохранения для бездисперсионных уравнений Тоды (11.2) и (11.4). Сначала мы обсудим общий метод установления соответствия между лагранжевым уравнением (1.10) и фиксированным набором законов сохранения, отражающих свойство консервативности тензора энергии-импульса.

О лагранжевом формализме с высшими производными. Рассмотрим вопрос построения консервативного аналога тензора энергии-импульса $T^{\nu\mu}$ для лагранжиана $\mathcal{L} = \int L\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ с высшими производными в присутствии метрики $g_{\mu\nu}$, то есть такого тензора $T^{\nu\mu}$, что

$$\sum_{\mu} \bar{D}_\mu(T^{\nu\mu}) = 0, \quad \bar{D}_\mu \equiv D_\mu\big|_{\mathcal{E}}. \tag{11.12}$$

Уравнения движения $\mathcal{E}$ имеют вид

$$\sum_{\mu,\nu} D_\mu D_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial u^i_{;\mu;\nu}}\right) = \sum_{\nu} D_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial u^i_{;\nu}}\right) - \frac{\partial L}{\partial u^i}, \tag{11.13}$$

причём $T^{\nu\mu}$ совпадает с классическим определением [4], если

$$\left\| \frac{\partial L}{\partial u^a_{;\mu;\nu}} \right\| \equiv 0.$$

Как и раньше, мы используем обозначения $u^i_{;\mu} \equiv D_{x^\mu}(u^i)$ и $u^i_{;\mu;\nu} \equiv D_{x^\mu} \cdot D_{x^\nu}(u^i)$, а поднятие и опускание индексов $;\mu$, $;\nu$ производим с помощью метрики $g_{\mu\nu}$. Непосредственной подстановкой в (11.12) можно убедиться, что тензор

$$T^{\nu\mu} = -g^{\nu\mu} L + \sum_i \frac{\partial L}{\partial u^i_{;\mu}}\, u^{i;\nu} + \sum_{i,\lambda} \left[\frac{\partial L}{\partial u^i_{;\mu;\lambda}} \cdot D_\lambda(u^{i;\nu}) - D_\lambda\left(\frac{\partial L}{\partial u^i_{;\mu;\lambda}}\right) \cdot u^{i;\nu} \right]$$

искомый [24] и условие (11.12) задаёт законы сохранения для системы (11.13). Отметим, однако, существенное обстоятельство [48], присущее уравнению (11.4): дело в том, что при предельном переходе при $r \to \infty$, $\varepsilon \to +0$ метрика $g_{\mu\nu}$ вырождается и лагранжиан $\hat{\mathcal{L}}$ становится нековариантным — невозможно указать такую невырожденную метрику $\hat{g}_{\mu\nu}$, что

$$\text{Ł} \sim \frac{1}{8} u_{;\mu}{}^{;z} u^{;\mu}{}_{;z} + \exp(-u^{;z}_{;z}).$$

Из-за отсутствия невырожденной метрики мы не можем определить для уравнения $\mathcal{E}_{\text{heav}}$ тензор энергии-импульса $T^{\nu\mu}$ как вариацию лагранжиана $\hat{\mathcal{L}}_{\text{heav}}$ по метрике $\hat{g}_{\nu\mu}$.

Построение законов сохранения. Из предыдущего раздела понятно, что в отличие от нахождения полей Ли по производящим функциям симметрий поиск сохраняющихся токов для уравнения (11.4) не столь прост и требует дополнительных рассуждений. Именно, к получению набора законов сохранения для бездисперсионного уравнения Тоды приводит поиск симметрий $\operatorname{sym} \mathcal{E}_{\text{heav}}$, выделение нётеровых симметрий $\operatorname{sym} \hat{\mathcal{L}}_{\text{heav}}$ в фиксированной системе координат и восстановление сохраняющихся токов методом гомотопии (см. [5, 94] и [19]).

Лемма 11.5 ([24]). *Производящие функции* (11.5a), (11.5c)—(11.5e) *являются* нётеровыми *симметриями уравнения* $\mathcal{E}_{\text{heav}}$, *а* (11.5b) — *нет.*

Предложение 11.6 ([24]). *Сохраняющиеся токи* $\eta_i \in \bar{\Lambda}^2(\mathcal{E}_{\text{heav}})$, *соответствующие нётеровым симметриям* φ_i *уравнения* (11.4), *суть*

$$\begin{aligned}
\eta_1 = \Big\{ & \frac{3}{8} f(x) u u_{xyzz} + \frac{1}{12} f(x) u_z u_{xyz} - \frac{1}{24} f(x) u_{xy} u_{zz} + \frac{1}{24} f(x) u_y u_{xzz} - \\
& - \frac{1}{12} f'(x) u_y - \frac{1}{12} f(x) u_{xz} u_{yz} + \frac{z}{6} f'(x) u_{yz} + \frac{1}{8} f(x) u_x u_{yzz} - \\
& - \frac{z^2}{8} f'(x) u_{yzz} - f(x) \int\limits_0^1 t^2 u u_{zzz}^2 \exp(-t u_{zz})\,\mathrm{d}t + \\
& + f(x) \int\limits_0^1 t u u_{zzzz} \exp(-t u_{zz})\,\mathrm{d}t \Big\} \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \\
& + \Big\{ -\frac{1}{8} f'(x) u u_{xzz} - \frac{1}{8} f(x) u u_{xxzz} + \frac{1}{4} f''(x) u + \frac{1}{12} f'(x) u_z u_{xz} + \\
& + \frac{1}{12} f(x) u_z u_{xxz} - \frac{z}{6} f''(z) u_z - \frac{1}{24} f'(x) u_x u_{zz} - \frac{1}{24} f(x) u_{xx} u_{zz} + \\
& + \frac{z^2}{24} f''(x) u_{zz} + \frac{1}{6} f(x) u_x u_{xzz} - \frac{1}{12} f'(x) u_x - \frac{1}{12} f(x) u_{xz}^2 + \\
& + \frac{z}{6} f'(x) u_{xz} - \frac{z^2}{8} f'(x) u_{xzz} \Big\} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big\{-\frac{1}{6}f(x)u_{xy}u_{xz}+\frac{1}{3}f(x)u_xu_{xyz}-\frac{1}{12}f'(x)u_xu_{yz}-\frac{1}{4}f'(x)uu_{xyz}-\\
&-\frac{z}{6}f''(x)u_y-\frac{z^2}{4}f'(x)u_{xyz}+\frac{1}{12}f(x)u_yu_{xxz}-\frac{1}{4}f(x)uu_{xxyz}+\\
&+\frac{1}{12}f(x)u_zu_{xxy}-\frac{1}{12}f(x)u_{xx}u_{yz}+\frac{z}{6}f'(x)u_{xy}+\frac{1}{12}f'(x)u_yu_{xz}+\\
&+\frac{1}{12}f'(x)u_zu_{xy}+\frac{z^2}{12}f''(x)u_{yz}+f(x)\cdot\int_0^1[-tuu_{xzzz}-tu_{xz}u_{zz}+tu_xu_{zzz}+\\
&+tu_zu_{xzz}+t^2uu_{xzz}u_{zzz}-t^2u_xu_{zz}u_{zzz}]\exp(-tu_{zz})\,\mathrm{d}t+\\
&+f'(x)\cdot\int_0^1\Big[-u_z+zu_{zz}-\frac{z^2}{2}u_{zzz}-tuu_{zzz}+\frac{z^2}{2}tu_{zz}u_{zzz}\Big]\exp(-tu_{zz})\,\mathrm{d}t\Big\}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_3=&\Big\{\frac{5}{24}u_zu_{yzz}-\frac{1}{8}u_{yz}u_{zz}+\frac{1}{24}u_yu_{zzz}-\frac{1}{8}uu_{yzzz}\Big\}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\\
&+\Big\{\frac{5}{24}u_zu_{xzz}-\frac{1}{8}u_{xz}u_{zz}+\frac{1}{24}u_xu_{zzz}-\frac{1}{8}uu_{xzzz}\Big\}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\\
&+\Big\{\frac{1}{4}uu_{xyzz}+\frac{1}{3}u_zu_{xyz}-\frac{1}{12}u_{xy}u_{zz}-\frac{1}{6}u_{xz}u_{yz}+\frac{1}{12}u_xu_{yzz}+\frac{1}{12}u_yu_{xzz}+\\
&+u_{zz}\exp(-u_{zz})+\exp(-u_{zz})+u_zu_{zzz}\exp(-u_{zz})\Big\}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_4=&\Big\{-\frac{1}{6}q(x)u_{yz}+\frac{z}{4}q(x)u_{yzz}\Big\}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\\
&+\Big\{\frac{1}{6}q'(x)u_z-\frac{z}{12}q'(x)u_{zz}-\frac{1}{6}q(x)u_{xz}+\frac{z}{4}q(x)u_{xzz}\Big\}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\\
&+\Big\{\frac{z}{2}q(x)u_{xyz}-\frac{1}{6}q(x)u_{xy}-\frac{z}{6}q'(x)u_{yz}+\frac{1}{6}q'(x)u_y-\\
&-zq(x)u_{zzz}\exp(-u_{zz})+q(x)\exp(-u_{zz})\Big\}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_5=&\frac{r(x)}{4}u_{yzz}\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\Big\{-\frac{r'(x)}{12}u_{zz}+\frac{r(x)}{4}u_{xzz}\Big\}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\\
&+\Big\{-\frac{r'(x)}{6}u_{yz}+\frac{r(x)}{2}u_{xyz}+r(x)u_{zzz}\exp(-u_{zz})\Big\}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Все дивергенции $\bar{\mathrm{d}}_h(\eta_i)$ равны 0 на уравнении $\mathcal{E}_{\mathrm{heav}}$. Все взятия дивергенций можно выполнять, не вычисляя интегралы по параметру гомотопии t в рациональных функциях, а дифференцируя по x или z под знаком интеграла.

Чтобы доказать лемму 11.5 и утверждение 11.6, необходимо применить лемму 9.4 и реализовать схему реконструкции сохраняющихся токов по их производящим сечениям.

Метод восстановления сохраняющихся токов. Опишем предложенный в [94] метод построения $(n-1)$-форм, точных на уравнении $\mathcal{E} = \{F = 0\}$, при этом мы следуем работе [19].

Рассмотрим поле $Э_f$, которое задано функцией $f = u/\tau$ и порождает отображение

$$A_\tau\colon (x^i, u^j_\sigma) \mapsto (x^i, \tau u^j_\sigma),$$

тогда

$$\frac{dA^*_\tau(\omega)}{d\tau} = A^*_\tau(Э_f(\omega)) = A^*_\tau(\ell_\omega(f)) \tag{11.14}$$

для всякой дифференциальной формы ω. Выберем в качестве ω форму

$$\omega = \langle F, \psi\rangle = F\psi\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

и пусть η — искомый ток на уравнении $\{F = 0\}$, соответствующий производящей функции ψ: $\mathrm{d}_h(\eta) = \nabla(F)$ и $\psi = \nabla^*(1)$. Заметим, что в правой части (11.14) содержится

$$\ell_\omega(f) = \langle \ell^*_\omega(1), f\rangle + \mathrm{d}_h G(\ell_\omega \circ f),$$

причём первое слагаемое в правой части когомологично 0, поскольку образ оператора Эйлера тривиален, если лагранжева плотность есть полная дивергенция:

$$\ell^*_\omega(1) = \ell^*_{\langle F,\psi\rangle}(1) = \mathbf{E}(\langle F, \psi\rangle) = \mathbf{E}(\mathrm{d}_h\eta) = 0.$$

В свою очередь, отображение $G\colon \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\mathcal{F}, \bar\Lambda^n) \to \bar\Lambda^{n-1}$, переводящее в $(n-1)$-формы модуль $\mathcal{C}$-дифференциальных операторов, действующих на гладкие функции и принимающих значения в n-формах (все конструкции ограничены на уравнение $\mathcal{E}$), определено таким образом:

$$G\Big(\sum_\sigma a_\sigma D_\sigma\Big) = \sum_{|\sigma|>0}\sum_{j\in\sigma} \frac{(-1)^{|\sigma|-1}}{|\sigma|} D_{\sigma-1_j}(a_\sigma)\omega_{(-j)},$$

здесь

$$\omega_{(-j)} = (-1)^{j+1}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^j} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n,$$

$\sigma - 1_j$ — результат однократного исключения индекса j из мультииндекса $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Проинтегрируем (11.14) по τ от 0 до 1. Получим

$$\int\limits_0^1 \frac{d}{d\tau} A^*_\tau(\omega)\, d\tau = A^*_1(\omega) - A^*_0(\omega) = \langle F, \psi\rangle - A^*_0(\langle F, \psi\rangle) = \\ = \int\limits_0^1 A^*_\tau(\ell_\omega(f))\, d\tau = \mathrm{d}_h \int\limits_0^1 A^*_\tau(G(\ell_\omega \circ f))\, d\tau = \mathrm{d}_h\eta,$$

откуда следует искомый вид тока η.

Доказательство леммы 11.5 и утверждения 11.6. Заметим, что симметрии (11.5) уравнения (11.2a) являются одновременно симметриями лагранжева уравнения (11.4): $\mathrm{Sym}\,\hat{\mathcal{E}} \subset \mathrm{sym}\,\mathcal{E}_{\mathrm{heav}}$, поскольку выполнено соотношение $\ell_{F_{\mathrm{heav}}} = D_z^2 \circ \ell_{\hat{F}}$ (см. лемму 1.25). Воспользуемся леммой 9.4 и установим, что симметрии (11.5a), (11.5c)—(11.5e) уравнения (11.4) нётеровы. Между тем для симметрии (11.5b) имеем

$$\ell_{F_{\mathrm{heav}}}(\varphi_2) + \ell^*_{\varphi_2}(F_{\mathrm{heav}}) = 2u_{xyzz} - \frac{3}{2}D_z^2(\exp(-u_{zz})) \neq 0.$$

Как было установлено в теореме 1.20, производящие сечения законов сохранения находятся во взаимно-однозначном соответствии с нётеровыми симметриями уравнения Эйлера—Лагранжа (11.4). Согласно следствию 3.5 для уравнения $\mathcal{E}_{\mathrm{heav}}$ это соответствие задано тождественным отображением. Далее, последовательно проводя рассуждения по изложенной выше общей схеме, каждой из четырёх нётеровых симметрий φ_i мы ставим в соответствие сохраняющийся ток η_i. Промежуточные выкладки достаточно громоздки, однако корректность результата, то есть выполнение условий $\bar{\mathrm{d}}_h(\eta_i) = 0$, легко установить непосредственно. □

Замечание 11.7. Сохраняющийся ток η_1 является при $f \equiv 1$ непрерывным по z аналогом компоненты (3.22) тензора энергии-импульса $\Theta = T\,\mathrm{d}x + \bar{T}\,\mathrm{d}y$ для уравнений Тоды (3.19). Сохраняющийся ток $T\,\mathrm{d}x$ для уравнений (3.19) соответствует нётеровой симметрии $\varphi_0^1 = \Box(\mathbf{E}_T(T\,\mathrm{d}x)) \in \mathrm{sym}\,\mathcal{L}_{\mathrm{Toda}}$. Ещё один — нелокальный — сохраняющийся ток

$$\eta = u_{xz}\exp(-u_{zz})\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \left(\frac{1}{2}u_{xz}^2 - u_{xx}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$$

для уравнения (11.4) (см. (1.6)) тоже является аналогом интеграла (3.22) для уравнений (3.19) по следующим соображениям. Запишем уравнение (11.4) в гамильтоновой форме:

$$u_y = D_x^{-1} \circ D_z^{-2} \circ \mathbf{E}_u(H_{\mathrm{heav}}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z), \tag{11.15}$$

где $H_{\mathrm{heav}} = -\exp(-u_{zz})$ — это аналог гамильтониана (8.8) для уравнений Тоды. Существование закона сохранения η выражает сохранение плотности H_{heav} на соответствующем гамильтоновом уравнении (11.15) (см. лемму 8.3).

Глава 4. Преобразования Беклунда и представления нулевой кривизны

В данной главе мы изучаем взаимосвязь между преобразованиями Беклунда и представлениями нулевой кривизны для гиперболического уравнения Лиувилля, волнового уравнения и scal^+-уравнения Лиувилля

$$u_{xy} = \exp(2u), \quad v_{xy} = 0, \quad \Upsilon_{xy} = \exp(-2\Upsilon), \tag{$*$}$$

а также однопараметрические деформации этих структур. Приведены примеры интегрирования преобразований Беклунда в нелокальных переменных. В разделе 3 на с. 80 мы указали естественную геометрическую схему, которая поставляет уравнения $(*)$ и даёт их наглядную интерпретацию.

12. Преобразования Беклунда и их деформации

В этом разделе мы изучаем свойства однопараметрических деформаций преобразований Беклунда для уравнений $(*)$. Именно, рассмотрим структуру накрытия $\tau_t \colon \tilde{\mathcal{E}}_t \to \mathcal{E}_{\text{Liou}}$ над уравнением Лиувилля, заданную продолженными полными производными

$$\tilde{D}_x = \bar{D}_x + \tilde{u}_x \frac{\partial}{\partial \tilde{u}}, \quad \tilde{D}_y = \bar{D}_y + \tilde{u}_y \frac{\partial}{\partial \tilde{u}}, \quad [\tilde{D}_x, \tilde{D}_y] = 0 \tag{12.1}$$

в случае, когда частные производные по x и y нелокальной переменной $\tilde{u}$ заданы соотношениями

$$\tilde{u}_x = u_x + \exp(-t) \cdot \exp(\tilde{u} + u), \tag{12.2a}$$
$$\tilde{u}_y = -u_y + 2\exp(t) \cdot \operatorname{sh}(\tilde{u} - u). \tag{12.2b}$$

В соответствии с замечанием 1.30 примем, что диффеоморфизм μ уравнения $\tilde{\mathcal{E}}_t$ переставляет переменную u вдоль слоя расслоения струй и нелокальную переменную $\tilde{u}$, то есть $u \leftrightarrow \tilde{u}$, и отображает x в $-x$, y в $-y$. Тогда диаграмма (1.20) определяет автопреобразование Беклунда $\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{E}}_t, \tau_t, \tau_t \circ \mu, \mathcal{E}_{\text{Liou}})$ для уравнения (6.1). Уравнения $\tilde{\mathcal{E}}_t$ автопреобразования Беклунда [50] для уравнения Лиувилля таковы:

$$(\tilde{u} - u)_x = \exp(-t) \cdot \exp(\tilde{u} + u), \tag{12.3a}$$
$$(\tilde{u} + u)_y = 2\exp(t) \cdot \operatorname{sh}(\tilde{u} - u). \tag{12.3b}$$

Обозначим
$$u_k \equiv \frac{\partial^k u}{\partial x^k}, \quad u_{\bar{k}} \equiv \frac{\partial^k u}{\partial y^k}$$
при любом $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим масштабную симметрию
$$X^0 = -x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$
уравнения $\mathcal{E}_{\text{Liou}}$. Её можно продолжить на $\mathcal{E}^{\infty}_{\text{Liou}}$:
$$\hat{X} = -x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \sum_{k \geqslant 1} k u_k \frac{\partial}{\partial u_k} - \sum_{k \geqslant 1} k u_{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial u_{\bar{k}}}. \tag{12.4}$$

Предложение 12.1. *Симметрию $\hat{X}$ нельзя продолжить до симметрии накрывающего уравнения $\tilde{\mathcal{E}}_t$.*

Доказательство. Предположим противное. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{Э}}_\varphi$ эволюционное векторное поле

$$\sum_\sigma \tilde{D}_\sigma(\varphi)\cdot\frac{\partial}{\partial u_\sigma}$$

на $\tilde{\mathcal{E}}_t$, где $\varphi\in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}}_t)$, и положим

$$\tilde{\ell}_F(\varphi)=\tilde{\mathfrak{Э}}_\varphi(F),$$

пусть также $x^1\equiv x$, $x^2\equiv y$. Итак, пусть существует функция $a\in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}}_t)$, удовлетворяющая линеаризованной системе

$$\tilde{\ell}_F(\varphi)=0,\quad \tilde{D}_{x^i}(a)=\tilde{\mathfrak{Э}}_{\varphi,a}(\tilde{u}_{x^i})\equiv\left(\tilde{\mathfrak{Э}}_\varphi+a\frac{\partial}{\partial\tilde{u}}\right)(\tilde{u}_{x^i}). \tag{12.5}$$

Это значит, что поле $\tilde{\mathfrak{Э}}_{\varphi,a}$ есть локальная симметрия накрывающего уравнения $\tilde{\mathcal{E}}_t$ и $\hat{X}$ конструктивно продолжена на $\tilde{\mathcal{E}}_t$. Однако система (12.5) несовместна, поскольку $\tilde{D}_x\circ\tilde{D}_y(a)\neq\tilde{D}_y\circ\tilde{D}_x(a)$. В самом деле, $\tilde{D}_x\circ\tilde{D}_y(a)-\tilde{D}_y\circ\tilde{D}_x(a)$ не зависит от a и равно

$$\begin{gathered}xu_x^2\mathrm{e}^{t+u-\tilde{u}}+u_xyu_y\mathrm{e}^{t+\tilde{u}-u}-xu_x\mathrm{e}^{2\tilde{u}}-u_xyu_y\mathrm{e}^{t+u-\tilde{u}}-\\ -2yu_y\mathrm{e}^{2t+\tilde{u}+u}+2xu_x\mathrm{e}^{2t+\tilde{u}+u}-xu_x^2\mathrm{e}^{t+\tilde{u}-u}+x\mathrm{e}^{2u}u_x-\\ -y\mathrm{e}^{2u}u_y+2\mathrm{e}^txu_x^2+yu_y\mathrm{e}^{2\tilde{u}}-2\mathrm{e}^tyu_yu_x\neq0.\end{gathered}$$

Утверждение доказано. □

Таким образом, масштабная симметрия $\hat{X}$ является лишь τ_t-*тенью* (то есть решением уравнения $\tilde{\ell}_F(\varphi)=0$, см. (12.5)) и порождает семейство накрывающих $\mathcal{E}^\infty$ уравнений $\tilde{\mathcal{E}}_t$, параметризованных $t\in\mathbb{R}$.

В локальных координатах форма связности Картана U_t на уравнении $\tilde{\mathcal{E}}_t$ с распределением Картана $\tilde{\mathcal{C}}_t$ имеет вид

$$\begin{aligned}U_t=\sum_\sigma \mathrm{d}_{\mathcal{C}}(u_\sigma)\otimes\frac{\partial}{\partial u_\sigma}+(\mathrm{d}\tilde{u}-(u_x+\exp(\tilde{u}+u-t))\,\mathrm{d}x+\\ +(u_y-2\exp(t)\operatorname{sh}(\tilde{u}-u))\,\mathrm{d}y)\otimes\frac{\partial}{\partial\tilde{u}},\end{aligned} \tag{12.6}$$

где $\mathrm{d}_{\mathcal{C}}$ — дифференциал Картана. В координатах имеем

$$\mathrm{d}_{\mathcal{C}}(u_\sigma)=\mathrm{d}u_\sigma-\sum_i\bar{D}_i(u_\sigma)\,\mathrm{d}x^i.$$

Назовём μ *степенью* дифференцирования Ω, если $\Omega\in\mathrm{D}(\Lambda^\mu(\tilde{\mathcal{E}}))$. Через $[\![\cdot,\cdot]\!]^{\mathrm{FN}}$ обозначим *скобку Фрёлихера—Нийенхейса* [63, 74]:

$$[\![\Omega,\Theta]\!]^{\mathrm{FN}}(f)=\mathrm{L}_\Omega(\Theta(f))-(-1)^{\mu\nu}\cdot\mathrm{L}_\Theta(\Omega(f)), \tag{12.7}$$

где $\Omega,\Theta\in\mathrm{D}(\Lambda^*(\mathcal{E}))$ — дифференцирования со значениями в формах, $f\in C^\infty(\mathcal{E})$, $\mu=\deg\Omega$, $\nu=\deg\Theta$,

$$\mathrm{L}_\Omega=[\mathrm{i}_\Omega,\mathrm{d}]\colon\Lambda^k(\mathcal{E})\to\Lambda^{k+\deg\Omega}(\mathcal{E})-$$

производная Ли, а
$$\mathrm{i}_\Omega\colon \Lambda^k(\mathcal{E}) \to \Lambda^{k+\deg\Omega-1}(\mathcal{E})$$
обозначает внутреннее произведение (подстановку). Скобка Фрёлихера—Нийенхейса является одной из естественных геометрических структур в дифференциальном исчислении, как, например, дифференциал де Рама d или скобка Ричардсона—Нийенхейса (см. [29]).

Теорема 12.2 ([63]). *Пусть $\tau\colon \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$ — накрытие и $A_t\colon \tilde{\mathcal{E}} \to \tilde{\mathcal{E}}$ — гладкое семейство диффеоморфизмов, причём $A_0 = \mathrm{id}$ и $\tau_t = \tau \circ A_t\colon \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$ является накрытием при всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда изменение формы связности Картана U_t описывается соотношением*
$$\frac{dU_t}{dt} = [\![\hat{X}_t, U_t]\!]^{\mathrm{FN}}, \tag{12.8}$$
где $\hat{X}_t$ является τ_t-тенью для любого $t \in \mathbb{R}$.

В случае конечномерного многообразия $\tilde{\mathcal{E}}$ существует изоморфизм
$$\mathrm{D}(\Lambda^*(\tilde{\mathcal{E}})) \simeq \Lambda^*(\tilde{\mathcal{E}}) \otimes \mathrm{D}(\tilde{\mathcal{E}}).$$
Таким образом, всякое дифференцирование $\Omega \in \mathrm{D}(\Lambda^*(\tilde{\mathcal{E}}))$ представимо в виде конечной суммы слагаемых $\Omega = \omega \otimes X$, где $\omega \in \Lambda^*(\tilde{\mathcal{E}})$ и $X \in \mathrm{D}(\tilde{\mathcal{E}})$. Скобка Фрёлихера—Нийенхейса таких элементов есть
$$\begin{aligned}[\![\omega \otimes X, \theta \otimes Y]\!]^{\mathrm{FN}} &= \omega \wedge \theta \otimes [X, Y] + \omega \wedge \mathrm{L}_X(\theta) \otimes (Y) + \\ &+ (-1)^i \mathrm{d}\omega \wedge (X \lrcorner\, \theta) \otimes Y - (-1)^{ij} \theta \wedge \mathrm{L}_Y(\omega) \otimes X - \\ &- (-1)^{(i+1)j}\, \mathrm{d}\theta \wedge (Y \lrcorner\, \omega) \otimes X,\end{aligned} \tag{12.9}$$
если $X, Y \in \mathrm{D}(\tilde{\mathcal{E}})$, $\omega \in \Lambda^i(\tilde{\mathcal{E}})$ и $\theta \in \Lambda^j(\tilde{\mathcal{E}})$. Для произвольного $\tilde{\mathcal{E}}$ существует вложение
$$\Lambda^*(\tilde{\mathcal{E}}) \otimes \mathrm{D}(\tilde{\mathcal{E}}) \subset \mathrm{D}(\Lambda^*(\tilde{\mathcal{E}})),$$
заданное правилом
$$(\omega \otimes X)(f) = X(f)\omega$$
для любой функции $f \in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}})$.

Если накрытия $\tau_t\colon \tilde{\mathcal{E}}_t \to \mathcal{E}$ заданы формулами (12.1), то
$$\frac{dU_t}{dt} = (\exp(\tilde{u} + u - t)\,\mathrm{d}x - 2\exp(t)\,\mathrm{sh}(\tilde{u} - u)\,\mathrm{d}y) \otimes \frac{\partial}{\partial \tilde{u}}. \tag{12.10}$$

Мы утверждаем, что масштабная симметрия $\hat{X}$ и является той τ_t-тенью, для которой изменение формы связности U_t (12.6) накрытия τ_t (12.1) задано формулой (12.10) в силу уравнения (12.8). Для доказательства этого факта необходимы леммы 12.3—12.8.

Лемма 12.3. $[\![\hat{X}, U_t]\!]^{\mathrm{FN}} \lrcorner\, \mathrm{d}\tilde{u} = \left(\frac{dU_t}{dt}\right) \lrcorner\, \mathrm{d}\tilde{u}$.

Лемма 12.4. $[\![\hat{X}, U_t]\!]^{\mathrm{FN}} \lrcorner\, \mathrm{d}x = [\![\hat{X}, U_t]\!]^{\mathrm{FN}} \lrcorner\, \mathrm{d}y = [\![\hat{X}, U_t]\!]^{\mathrm{FN}} \lrcorner\, \mathrm{d}u = 0$.

Доказательство. Доказательство лемм 12.3 и 12.4 заключается в последовательном применении формулы (12.9): коэффициентом при $\partial/\partial x$ имеем выражение

$$-\sum_{\sigma} \mathrm{d}_{\mathcal{C}} u_\sigma \wedge \mathrm{L}_{\partial/\partial u_\sigma}(-x) - \mathrm{d}_{\mathcal{C}}\tilde{u} \wedge \mathrm{L}_{\partial/\partial\tilde{u}}(-x) = 0,$$

вычисление коэффициента при $\partial/\partial y$ аналогично. Запишем в координатах (12.4) разложение $\hat{X} = \sum_{\alpha} \omega_\alpha \otimes X_\alpha$, где ω_α — 0-формы и X_α — дифференцирования (то есть $i = 0$ и $j = 1$ в (12.9)). Получим

$$\sum_{\alpha} (\omega_\alpha \wedge \mathrm{L}_{X_\alpha}(\mathrm{d}_{\mathcal{C}} u) + \mathrm{d}\omega_\alpha \wedge (X_\alpha \mathbin{\lrcorner} \mathrm{d}_{\mathcal{C}} u)) \otimes \frac{\partial}{\partial u},$$

причём первое слагаемое есть

$$\sum_{\alpha} \omega_\alpha \wedge \mathrm{d}(X_\alpha \mathbin{\lrcorner} \mathrm{d}_{\mathcal{C}} u) + \sum_{\alpha} \omega_\alpha \wedge (X_\alpha \mathbin{\lrcorner} \mathrm{d}(\mathrm{d}_{\mathcal{C}} u)) = -u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y,$$

а второе равно $u_x\,\mathrm{d}x - u_y\,\mathrm{d}y$, и их сумма также тривиальна. Сосчитаем коэффициент

$$\sum_{\alpha} (\omega_\alpha \wedge \mathrm{L}_{X_\alpha}(\mathrm{d}_{\mathcal{C}}\tilde{u}) + \mathrm{d}\omega_\alpha \wedge (X_\alpha \mathbin{\lrcorner} \mathrm{d}_{\mathcal{C}}\tilde{u}))$$

при $\partial/\partial\tilde{u}$, используя явную формулу для $\mathrm{d}_{\mathcal{C}}\tilde{u}$: первое слагаемое в нём равно $-u_x\,\mathrm{d}x - u_y\,\mathrm{d}y$, а второе есть

$$(u_x + \mathrm{e}^{-t}\exp(\tilde{u}+u))\,\mathrm{d}x + (u_y - 2\mathrm{e}^t\operatorname{sh}(\tilde{u}-u))\,\mathrm{d}y.$$

В результате получаем выражение

$$(\mathrm{e}^{-t}\exp(\tilde{u}+u)\,\mathrm{d}x - 2\mathrm{e}^t\operatorname{sh}(\tilde{u}-u)\,\mathrm{d}y) \otimes \frac{\partial}{\partial\tilde{u}},$$

что и требовалось. □

Вычисление коэффициентов $[\![\hat{X}, U_t]\!]^{\mathrm{FN}}$ при $\partial/\partial u_k$ или $\partial/\partial u_{\bar{k}}$ нетривиально при $k \geqslant 1$.

Лемма 12.5 ([20]). *Пусть $u(x)$, $f(u)$ — гладкие функции, D_x — полная производная по x, $u_k \equiv D_x^k(u(x))$, $k \geqslant 0$, $u_0 \equiv u$. Тогда*

$$n \cdot D_x^n(f(u)) = \sum_{m=1}^{n} m u_m \frac{\partial}{\partial u_m} D_x^n(f(u)) \tag{12.11}$$

выполнено при любом целом $n \geqslant 1$.

Доказательство леммы 12.5 основано на приведённых ниже лемме 12.6 и следствии 12.7.

Лемма 12.6. *Пусть $u(x)$, $f(u)$ — гладкие функции, D_x — полная производная по x, натуральное n больше 0 и натуральное число l не больше $n-1$. Тогда*

$$D_x\left(\frac{\partial}{\partial u_l} D_x^{n-1}(f(u))\right) = \frac{\partial}{\partial u_l} D_x^n(f(u)) - \frac{\partial}{\partial u_{l-1}} D_x^{n-1}(f(u)). \tag{12.12}$$

Следствие 12.7. *При тех же условиях*

$$(n+1)u_{n+1}\frac{\partial}{\partial u_{n+1}}D_x^{n+1}(f(u)) = (n+1)u_{n+1}\frac{\partial}{\partial u_n}D_x^n(f(u)) = \\ = (n+1)u_{n+1}\cdot f'(u). \quad (12.13)$$

Доказательство леммы 12.5 [20]. Докажем (12.11) индукцией по n с базой $n=1$. При $n \geqslant 1$ имеем

$$\begin{aligned}
(n+1)D_x^{n+1}(f(u)) &= D_x(nD_x^n(f(u)) + D_x^n(f(u))) = \\
&= D_x\biggl(\sum_{m=1}^{n} mu_m\frac{\partial}{\partial u_m}D_x^n(f(u)) + D_x^n(f(u))\biggr) = \\
&= \sum_{m=1}^{n} mu_{m+1}\frac{\partial}{\partial u_m}D_x^n(f(u)) + \sum_{m=1}^{n} mu_m D_x\frac{\partial}{\partial u_m}D_x^n(f(u)) + D_xD_x^n(f(u)) = \\
&= \sum_{m=1}^{n} mu_m\frac{\partial}{\partial u_m}D_x^{n+1}(f(u)) + \sum_{m=1}^{n} mu_{m+1}\frac{\partial}{\partial u_m}D_x^n(f(u)) - \\
&- \sum_{m=1}^{n} mu_m\frac{\partial}{\partial u_{m-1}}D_x^n(f(u)) + D_xD_x^n(f(u)) = \\
&= \sum_{m=1}^{n} mu_m\frac{\partial}{\partial u_m}D_x^{n+1}(f(u)) + \sum_{m=0}^{n} (m+1)u_{m+1}\frac{\partial}{\partial u_m}D_x^n(f(u)) - \\
&- \sum_{m=0}^{n-1} (m+1)u_{m+1}\frac{\partial}{\partial u_m}D_x^n(f(u)) = \\
&= \sum_{m=1}^{n} mu_m\frac{\partial}{\partial u_m}D_x^{n+1}(f(u)) + (n+1)u_{n+1}\frac{\partial}{\partial u_n}D_x^n(f(u)) = \\
&= \sum_{m=1}^{n} mu_m\frac{\partial}{\partial u_m}D_x^{n+1}(f(u)) + (n+1)u_{n+1}\frac{\partial}{\partial u_{n+1}}D_x^{n+1}(f(u)) = \\
&= \sum_{m=1}^{n+1} mu_m\frac{\partial}{\partial u_m}D_x^{n+1}(f(u)).
\end{aligned}$$

Здесь второе равенство получено по предположению индукции, третье — по правилу Лейбница, после чего мы применили (12.12) ко второй сумме. Затем мы использовали определение D_x и сдвинули индекс в последней сумме, после чего заметили, что почти все слагаемые в последних двух суммах совпадают. В предпоследнем равенстве мы использовали (12.13). □

Приведём ещё одно, более компактное доказательство леммы 12.5, основанное на технике введения весов. Идея данного доказательства принадлежит В. В. Трушкову.

Доказательство леммы 12.5 [71]. Введём *вес* wt, положив по определению $\mathrm{wt}(u_k)=k$, $\mathrm{wt}(u_k\cdot u_l)=k+l$ и $\mathrm{wt}(u_{k_1}+u_{k_2})=k_1$, если $k_1=k_2$. Имеет место формула

$$D_x^n(f(u))=\sum_{m=1}^{n}P_{n,m}\cdot f^{(m)}(u), \tag{12.14}$$

где $P_{n,m}=\sum\limits_{\vec{\jmath}}\mathrm{const}(n,m)\cdot u_{j_1}\cdot\ldots\cdot u_{j_{l(n,m)}}$. Верно следующее свойство: $P_{n,m}$ — дифференциальный полином, такой что

$$j_1+\ldots+j_{l(n,m)}=n \quad \text{для любых } \vec{\jmath},\ n \text{ и } m. \tag{12.15}$$

Докажем это с помощью индукции по n. Действительно, если $\mathrm{wt}(P_{n,m})=n$, то $\mathrm{wt}(D_x(P_{n,m})))=n+1$ по правилу Лейбница. Кроме того,

$$D_x^{n+1}(f(u))=\sum_{m=1}^{n}(D_x(P_{n,m})\cdot f^{(m)}(u)+P_{n,m}\cdot u_1\cdot f^{(m+1)}(u)),$$

а потому вес $\mathrm{wt}(D_x^{n+1}(f(u)))$ корректно определён и равен $n+1$.

Рассмотрим теперь *оператор вычисления веса*

$$\mathcal{W}\equiv\sum_{m\geqslant 1}m\cdot u_m\frac{\partial}{\partial u_m}, \tag{12.16}$$

который действует на правую часть равенства (12.14) таким образом:

$$\sum_{m\geqslant 1}m\cdot u_m\frac{\partial}{\partial u_m}\circ\sum_{k=1}^{n}\sum_{\vec{\jmath}}\mathrm{const}(n,k)\cdot u_{j_1}\cdot\ldots\cdot u_{j_{l(n,k)}}\cdot f^{(k)}(u)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\vec{\jmath}}\mathrm{const}(n,k)\cdot n\cdot u_{j_1}\cdot\ldots\cdot u_{j_{l(n,k)}}\cdot f^{(k)}(u)=n\cdot D_x^n(f(u)),$$

поскольку условие (12.15) выполняется для всех мультииндексов $\vec{\jmath}$. Таким образом, функции $D_x^n(f(u))$ являются собственными функциями оператора (12.16), $n\in\mathbb{N}$ — соответствующими им собственными числами, а соотношение (12.11) есть решение задачи $\lambda\cdot\varphi=\mathcal{W}(\varphi)$. □

Лемма 12.8. $[\![\hat{X},U_t]\!]^{\mathrm{FN}}\lrcorner\,\mathrm{d}u_k=[\![\hat{X},U_t]\!]^{\mathrm{FN}}\lrcorner\,\mathrm{d}u_{\bar{k}}=0$, $k\geqslant 1$.

Доказательство. Пусть $k\in\mathbb{N}$. Используя (12.9), рассмотрим 1-форму

$$[\![\hat{X},U_t]\!]^{\mathrm{FN}}\lrcorner\,\mathrm{d}u_k=\left((k-1)\bar{D}_y u_k-\sum_{l=1}^{k-1}lu_l\frac{\partial}{\partial u_l}\bar{D}_x^{k-1}(\exp(2u))\right)\cdot\mathrm{d}y,$$

коэффициенты при $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}u_l$, $\mathrm{d}u_{\bar{l}}$ тривиальны при всех $l\geqslant 1$. Заметим также, что $\bar{D}_y(u_k)=\bar{D}_x^{k-1}(\exp(2u))$. По лемме 12.5 коэффициент при $\mathrm{d}y$ равен нулю. Аналогичные рассуждения показывают, что $[\![\hat{X},U_t]\!]^{\mathrm{FN}}\lrcorner\,\mathrm{d}u_{\bar{k}}=0$. Лемма доказана. □

Теорема 12.9. *τ_t-тень* (12.4) *удовлетворяет соотношению*

$$[\![\hat{X}, U_t]\!]^{\mathrm{FN}} = (\exp(\tilde{u} + u - t)\,\mathrm{d}x - 2\exp(t)\,\mathrm{sh}(\tilde{u} - u)\,\mathrm{d}y) \otimes \frac{\partial}{\partial \tilde{u}},$$

то есть группа диффеоморфизмов $A_t = \exp(t\hat{X})$ порождает гладкое однопараметрическое семейство (12.2) *одномерных накрытий над уравнением Лиувилля* (6.1). *Эти накрытия соответствуют автопреобразованиям Беклунда для уравнения Лиувилля, заданным диаграммой* (1.20). *Изменение формы связности задано формулой* (12.10).

Доказательство. Разложим скобку $[\![\hat{X}, U_t]\!]^{\mathrm{FN}}$ по базису $\langle \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial u_k, \partial/\partial u_{\bar{k}}, \partial/\partial \tilde{u}\rangle$. Согласно леммам 12.4 и 12.8 все коэффициенты при дифференцированиях $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial u_k$, $\partial/\partial u_{\bar{k}}$ равны 0, здесь $k \geqslant 0$, а лемма 12.3 поставляет искомое выражение (12.10). □

Замечание 12.10. Аналогичными свойствами обладают преобразование Беклунда между уравнением Лиувилля (6.1) и волновым уравнением $v_{xy} = 0$ [50]:

$$(v - u)_x = \mathrm{e}^{-t}\exp(u + v), \quad (v + u)_y = -\mathrm{e}^{t}\exp(u - v), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{12.17}$$

а также преобразование Беклунда между уравнением Лиувилля и scal^{+}-уравнением Лиувилля $\Upsilon_{xy} = \exp(-2\Upsilon)$ [50]:

$$(\Upsilon - u)_x = 2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{ch}(\Upsilon + u), \quad (\Upsilon + u)_y = -\mathrm{e}^{t}\exp(u - \Upsilon), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{12.18}$$

Масштабная симметрия (12.4) является необходимой τ_t-тенью в обоих случаях, а доказательство этих утверждений полностью аналогично проведённому выше доказательству теоремы 12.9 и основано на использовании тождества (12.11) в полных производных.

13. Об интегрировании преобразований Беклунда

В этом разделе мы изучаем нелокальные аспекты интегрирования преобразований Беклунда между уравнениями с частными производными. Цель этого раздела — применить схему рассуждений, которая подсказывает, в каких нелокальных переменных можно получить пары решений, связанные преобразованиями Беклунда, и построить нелокальные симметрии и законы сохранения рассматриваемых уравнений. Мы вновь рассматриваем гиперболическое уравнение Лиувилля.

Рассмотрим уравнения (12.3) и (12.17), (12.18) и построим такие накрытия τ_j над уравнениями $(*)$, что соответствующие нелокальные переменные будут потенциалами для переменных u, v и Υ. В дальнейшем изложении мы будем использовать обозначение $\mathcal{E}_u$ как синоним обозначения $\mathcal{E}_{\mathrm{Liou}}$. Последнее означает, что переменная u удовлетворяет уравнению Лиувилля (6.1).

Итак, рассмотрим одномерные накрытия, в которых станет возможным проинтегрировать преобразования Беклунда (12.17), (12.18) в соответствующих нелокальных переменных. Для этого зафиксируем произвольное $t \in \mathbb{R}$ и определим расширенные полные производные

$$
\begin{aligned}
\tilde D_x^{\mathcal{E}_u} &= \bar D_x^{\mathcal{E}_u} - \mathrm{e}^{2u}\frac{\partial}{\partial \Xi_t}, & \tilde D_y^{\mathcal{E}_u} &= \bar D_y^{\mathcal{E}_u} + (\Xi_t^2 + 2u_y\Xi_t - \mathrm{e}^{2t})\frac{\partial}{\partial \Xi_t},\\
\tilde D_x^{\mathcal{E}_u} &= \bar D_x^{\mathcal{E}_u} - \mathrm{e}^{2u}\frac{\partial}{\partial \Xi_\infty}, & \tilde D_y^{\mathcal{E}_u} &= \bar D_y^{\mathcal{E}_u} + (\Xi_\infty^2 + 2u_y\Xi_\infty)\frac{\partial}{\partial \Xi_\infty},\\
\tilde D_y^{\mathcal{E}_u} &= \bar D_y^{\mathcal{E}_u} - \mathrm{e}^{2u}\frac{\partial}{\partial \Xi'_t}, & \tilde D_x^{\mathcal{E}_u} &= \bar D_x^{\mathcal{E}_u} + ({\Xi'_t}^2 + 2u_x\Xi'_t + \mathrm{e}^{-2t})\frac{\partial}{\partial \Xi'_t},\\
\tilde D_x^{\mathcal{E}_v} &= \bar D_x^{\mathcal{E}_v} + \mathrm{e}^{2v}\frac{\partial}{\partial \Xi_t^v}, & \tilde D_y^{\mathcal{E}_v} &= \bar D_y^{\mathcal{E}_v} + (2v_y\Xi_t^v + \mathrm{e}^{2t})\frac{\partial}{\partial \Xi_t^v},\\
\tilde D_y^{\mathcal{E}_\Upsilon} &= \bar D_y^{\mathcal{E}_\Upsilon} + \mathrm{e}^{-2\Upsilon}\frac{\partial}{\partial \Xi_t^\Upsilon}, & \tilde D_x^{\mathcal{E}_\Upsilon} &= \bar D_x^{\mathcal{E}_\Upsilon} + ((\Xi_t^\Upsilon)^2 - 2\Upsilon_x\Xi_t^\Upsilon + \mathrm{e}^{-2t})\frac{\partial}{\partial \Xi_t^\Upsilon}.
\end{aligned}
\tag{13.1}
$$

Во всех случаях расширенные полные производные коммутируют,

$$[\tilde D_x, \tilde D_y] = 0,$$

и, таким образом, корректно определены накрытия

$$
\begin{gathered}
\tau_t\colon \tilde{\mathcal{E}}_t \to \mathcal{E}_u^\infty, \quad \tau_\infty\colon \tilde{\mathcal{E}}_\infty \to \mathcal{E}_u^\infty, \quad \tau'_t\colon \tilde{\mathcal{E}}'_t \to \mathcal{E}_u^\infty,\\
\tau_t^v\colon \tilde{\mathcal{E}}_t^v \to \mathcal{E}_v^\infty, \quad \tau_t^\Upsilon\colon \tilde{\mathcal{E}}_t^\Upsilon \to \mathcal{E}_\Upsilon^\infty.
\end{gathered}
\tag{13.2}
$$

Явная форма накрывающих уравнений $\tilde{\mathcal{E}}_t$, $\tilde{\mathcal{E}}_\infty$, $\tilde{\mathcal{E}}'_t$, $\tilde{\mathcal{E}}_t^v$ и $\tilde{\mathcal{E}}_t^\Upsilon$ обсуждается в замечании 13.2.

Замечание 13.1. Накрытия (13.2) с нелокальными переменными (13.1) являются *неабелевыми*, то есть не сводятся к локальным законам сохранения для исходных уравнений $\mathcal{E}_u$, $\mathcal{E}_v$ и $\mathcal{E}_\Upsilon$. Кроме того, t-параметризованные накрытия, например τ_t в точках t_1 и t_2, эквивалентны: $\tau_{t_1} \simeq \tau_{t_2}$, то есть существует функциональная зависимость между нелокальными переменными, Ξ_{t_1} и Ξ_{t_2} в рассматриваемом случае. Например, имеют место соотношения

$$\Xi_{t_1} + y\cdot\exp(2t_1) = \Xi_{t_2} + y\cdot\exp(2t_2) = \Xi_{t=-\infty} \quad \text{для любых} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Замечание 13.2. Накрывающие уравнения можно получить в явном виде, поскольку в каждом случае входящие в (13.1) нелокальные переменные являются потенциалами для по меньшей мере одной из зависимых переменных u, v или Υ, например

$$u = \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\partial \Xi_\infty}{\partial x}\right).$$

Получим в качестве примера накрывающее уравнение, которому удовлетворяют переменные Ξ_t и их предел Ξ_∞ при $t = -\infty$:

$$\tilde{\mathcal{E}}_t = \left\{\frac{\partial \Xi_t}{\partial y} = \Xi_t^2 + \frac{\Xi_t\cdot\partial^2\Xi_t/\partial x\partial y}{\partial\Xi_t/\partial x} - \exp(2t)\right\}, \tag{13.3}$$

где $t \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$. Уравнения $\tilde{\mathcal{E}}'_t$, $\tilde{\mathcal{E}}_t^v$ и $\tilde{\mathcal{E}}_t^\Upsilon$ получаются аналогично.

13.1. Интегрирование в нелокальных переменных

Преобразования (12.3), (12.17) и (12.18) нельзя проинтегрировать в локальных переменных. Однако, рассматривая одномерные неабелевы накрытия (13.2) и расширяя наборы локальных переменных добавлением в них новых нелокальных переменных (см. (13.1)), удаётся построить искомые решения — образы этих преобразований. Полученные результаты суммированы в следующей теореме.

Теорема 13.3 ([71]). *Для уравнений $\mathcal{E}_u$, $\mathcal{E}_v$ и $\mathcal{E}_\Upsilon$, (авто)преобразования Беклунда* (12.3), (12.17) *и* (12.18) *интегрируются в явном виде в нелокальных переменных следующим образом*:

1) *автопреобразование Беклунда* (12.3) *для уравнения* (14.1):
$$\tilde{u} = u + t - \ln \Xi_t \quad \text{и} \quad u = t + \tilde{u} - \ln \Xi_t[\tilde{u}](-x, -y),$$
то есть, для того чтобы обратить это преобразование и получить $u[\tilde{u}]$, требуется инверсия $x \mapsto -x$ и $y \mapsto -y$;
2) *преобразование Беклунда* (12.17) *между уравнением* (14.1) *и волновым уравнением $v_{xy} = 0$*:
$$v = u + t - \ln \Xi_\infty \quad \text{и, наоборот,} \quad u = v + t - \ln \Xi_t^v;$$
3) *преобразование Беклунда* (12.18) *между уравнением* (14.1) *и scal^+-уравнением Лиувилля $\Upsilon_{xy} = \exp(-2\Upsilon)$*:
$$\Upsilon = -u + t + \ln \Xi_t' \quad \text{и, наоборот,} \quad u = -\Upsilon - t - \ln \Xi_t^\Upsilon.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $\tilde{u}[u](x, y)$ в автопреобразовании Беклунда (12.3). Положим по определению $\mathcal{U} = \exp(\tilde{u})$ и $\mathcal{T} = \exp(-\tilde{u})$. Из уравнения (12.3) получаем уравнение Бернулли
$$\mathcal{U}_x = u_x \cdot \mathcal{U} + \exp(u - t)\mathcal{U}^2,$$
откуда $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{T} = \exp(-u - t) \cdot \Xi$, где нелокальная переменная Ξ такова, что $\tilde{D}_x(\Xi) = -\exp(2u)$, а также уравнение Риккати
$$\mathcal{T}_y = u_y \cdot \mathcal{T} + \exp(u + t)\mathcal{T}^2 - \exp(t - u). \tag{13.4}$$
Подставляя $\exp(-u - t) \cdot \Xi$ вместо $\mathcal{T}$ в (13.4), получаем $\tilde{D}_y(\Xi) = \Xi^2 + 2u_y\Xi - \exp(2t)$. Обратимся теперь к (13.1) и сравним результат с определением производных $\tilde{D}_x(\Xi_t)$ и $\tilde{D}_y(\Xi_t)$.

В остальных пяти случаях доказательство совершенно аналогично: допустив, что $f(x, y) \in \{u, \tilde{u}, v, \Upsilon\}$ — известное решение уравнения с частными производными $\mathcal{E}_f$, мы получаем после соответствующей замены переменных либо два уравнения Бернулли для уравнения (12.17), либо одно уравнение Бернулли и одно уравнение Риккати для уравнения (12.3) и уравнения (12.18). Разрешая эти обыкновенные дифференциальные уравнения относительно функции $g(x, y) \in \{u, \tilde{u}, v, \Upsilon\}$, которая является, в свою очередь, решением уравнения $\mathcal{E}_g$, связанного с $\mathcal{E}_f$ одним из (авто)преобразований Беклунда, мы в конце концов получаем правила дифференцирования нелокальных переменных в одном из накрытий (13.2). $\square$

Рассмотрим диаграммы, которые возникают в определении преобразований Беклунда, и применим их затем к теореме 13.3. Принимая во внимание, что во всех случаях в (13.1) одна из проекций τ_1 и τ_2 является дифференциальным оператором первого порядка, зависящим только от нелокальной переменной, в то время как другое накрытие — нулевого порядка, мы получаем следующую теорему.

Теорема 13.4. *Рассмотрим уравнения* (13.3). *Верны соотношения*

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2}\ln(-\Xi_t)_x, & \tilde{u} &= t + \ln\left[\Xi_t^{-1}\sqrt{(-\Xi_t)_x}\,\right],\\
u &= \frac{1}{2}\ln(-\Xi_\infty)_x, & v &= t + \ln\left[\Xi_\infty^{-1}\sqrt{(-\Xi_\infty)_x}\,\right],\\
u &= \frac{1}{2}\ln(-\Xi'_t)_y, & \Upsilon &= t + \ln\left[\frac{\Xi'_t}{\sqrt{(-\Xi'_t)_y}}\right],\\
v &= \frac{1}{2}\ln(\Xi^v_t)_x, & u &= t + \ln\left[\Xi_t^{v\,-1}\sqrt{(\Xi^v_t)_x}\,\right],\\
\Upsilon &= -\frac{1}{2}\ln(\Xi^\Upsilon_t)_y, & u &= -t + \ln\left[\Xi_t^{\Upsilon\,-1}\sqrt{(\Xi^\Upsilon_t)_y}\,\right].
\end{aligned}
$$

Другими словами, нелокальные переменные, удовлетворяющие уравнениям (13.3), служат потенциалами для *обоих* решений уравнений $\mathcal{E}_u$, $\mathcal{E}_v$ и $\mathcal{E}_\Upsilon$. То свойство, что все накрытия в (13.2) являются нелинейными дифференциальными операторами порядка не выше 1, — это специфическая черта рассматриваемых уравнений.

13.2. О нелокальных симметриях

По определению при данных уравнении $\mathcal{E}$ и накрытии $\tau\colon \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}^\infty$ *τ-тенями* φ называются решения линеаризованного уравнения $\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}(\varphi) = 0$. Тени эволюционных полей $\tilde{\mathfrak{Э}}_\varphi \in \bar{\mathrm{D}}_{\mathcal{C}}(\tilde{\mathcal{E}})$ — это не настоящие нелокальные симметрии, поскольку они не описывают эволюцию нелокальной переменной и, как мы увидим на примере уравнения Лиувилля, не все они могут быть продолжены до настоящих нелокальных симметрий.

Покажем, что в самих преобразованиях Беклунда (12.3), (12.17) и (12.18) содержится информация о нелокальных переменных, с помощью которых эти преобразования можно успешно проинтегрировать. Соответствующие неабелевы накрытия в (13.2) приведут к настоящим нелокальным законам сохранения для исходных дифференциальных уравнений, однако структуры на накрывающих уравнениях настолько «близки» в некотором смысле к структурам на исходных уравнениях, что точечные симметрии исходных уравнений и симметрии накрывающих уравнений находятся во взаимно-однозначном соответствии и не возникает никаких иных нелокальных симметрий, кроме поднятий локальных преобразований.

Введём такие новые нелокальные переменные, что искомые нелокальные симметрии будут зависеть от них. Пусть $\overset{\leftrightarrow}{\Sigma}_t = \Xi_t + u_y$ — новая нелокальная переменная, такая что выполнено

$$\tilde{D}_x^{\mathcal{E}_u}(\overset{\leftrightarrow}{\Sigma}_t) = 0,$$
$$\tilde{D}_y^{\mathcal{E}_u}(\overset{\leftrightarrow}{\Sigma}_t) = (\overset{\leftrightarrow}{\Sigma}_t)^2 + u_{yy} - u_y^2 - \exp(2t).$$

Рассмотрим её предел $\overset{\leftrightarrow}{\Sigma}_t$ при $t \to -\infty$. Подчеркнём, что в точке $t = -\infty$ появляется новая автомодельная переменная

$$\Sigma_\infty = u_x + \frac{\exp(2u)}{\Xi_\infty},$$

такая что $\tilde{D}_y^{\mathcal{E}_u}(\Sigma_\infty) = 0$. Оказывается, что $\overset{\leftrightarrow}{\Sigma}_\infty = \lim\limits_{t\to-\infty} \overset{\leftrightarrow}{\Sigma}_t$ и Σ_∞ отличаются на дискретную симметрию $x \leftrightarrow y$. Действительно, выражая производные $\tilde{D}_x$ и $\tilde{D}_y$ переменных Σ_∞ и $\overset{\leftrightarrow}{\Sigma}_\infty$, мы получаем

$$\tilde{D}_x(\Sigma_\infty) = \Sigma_\infty^2 + u_{xx} - u_x^2, \quad \tilde{D}_y(\Sigma_\infty) = 0,$$

а также

$$\tilde{D}_x(\overset{\leftrightarrow}{\Sigma}_\infty) = 0, \quad \tilde{D}_y(\overset{\leftrightarrow}{\Sigma}_t) = (\overset{\leftrightarrow}{\Sigma}_\infty)^2 + u_{yy} - u_y^2.$$

Учитывая этот факт, в дальнейшем мы используем только нелокальную переменную Σ_∞ и рассматриваем все соотношения по модулю симметрии $x \leftrightarrow y$ уравнения Лиувилля. По определению положим $\Sigma_t = (x \leftrightarrow y) \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\Sigma}_t)$:

$$\tilde{D}_x(\Sigma_t) = \Sigma_t^2 + u_{xx} - u_x^2 - \exp(2t) \quad \text{и} \quad \tilde{D}_y(\Sigma_t) = 0.$$

Нелокальные переменные позволяют нам найти тени нелокальных симметрий уравнения (6.1), а затем реконструировать по ним настоящие нелокальные симметрии уравнения Лиувилля.

Предложение 13.5.

1. *Пусть $f(t, x, \Sigma_t)$ — гладкая функция. Тогда производящая функция*

$$\varphi = \frac{1}{2}(\Sigma_t^2 + u_{xx} - u_x^2 - \exp(2t)) \cdot \frac{\partial f}{\partial \Sigma_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + u_x \cdot f \tag{13.5}$$

является τ_t-тенью нелокальной симметрии уравнения Лиувилля.

2. *Пусть $f(x, \Sigma_\infty)$ — гладкая функция. Тогда τ-тень второго порядка*

$$\varphi(x, \mathit{\Sigma}_\infty, u, u_x, u_{xx})$$

для уравнения Лиувилля имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{2}(\Sigma_\infty^2 + u_{xx} - u_x^2) \cdot \frac{\partial f}{\partial \Sigma_\infty} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + u_x f = \tilde{\square}(f(x, \Sigma_\infty)). \tag{13.6}$$

Нелокальные тени (13.5) *и* (13.6) *принадлежат классу* (3.29) *решений* [15] *уравнения* $\tilde{\ell}_F(\varphi) = 0$ *относительно оператора*

$$\tilde{\square} = u_x + \frac{1}{2}\tilde{D}_x$$

с расширенной полной производной $\tilde{D}_x$.

Реконструкция нелокальных симметрий. Для того чтобы восстановить по τ_t-теням $\tilde{\mathfrak{Э}}_\varphi$ настоящие нелокальные симметрии

$$\tilde{\mathfrak{Э}}_{\varphi,a} = \tilde{\mathfrak{Э}}_\varphi + a \cdot \frac{\partial}{\partial \Sigma_t}, \quad a \in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}}), \quad t \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},$$

необходимо решить уравнения

$$\tilde{D}_x(a) = \tilde{\mathfrak{Э}}_{\varphi,a}(\tilde{D}_x(\Sigma_t)), \quad \tilde{D}_y(a) = \tilde{\mathfrak{Э}}_{\varphi,a}(\tilde{D}_y(\Sigma_t))$$

относительно функции a.

Предложение 13.6.

1. *Пусть* $f(t)$ — *гладкая функция и функции* φ *и* $a(t, \Sigma_t, u_x, u_{xx})$ *определены соотношениями*

$$\varphi = u_x \cdot f(t), \quad a = (\Sigma_t^2 + u_{xx} - u_x^2 - \exp(2t)) \cdot f(t). \tag{13.7}$$

Тогда для уравнения (6.1) *поле* $\tilde{\mathfrak{Э}}_\varphi + a \cdot \partial/\partial\Sigma_t$ *является настоящей нелокальной симметрией.*

2. *Пусть* $f(x)$ — *гладкая функция и функции* φ *и* $a(\Sigma_\infty, u_x, u_{xx})$ *заданы соотношениями*

$$\varphi = u_x f(x) + \frac{1}{2}\frac{df}{dx}, \quad a = (\Sigma_\infty^2 + u_{xx} - u_x^2) f(x) + \Sigma_\infty \frac{df}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}. \tag{13.8}$$

Тогда для уравнения (6.1) *поле* $\tilde{\mathfrak{Э}}_\varphi + a \cdot \partial/\partial\Sigma_\infty$ *является настоящей нелокальной симметрией.*

Доказательство утверждений 13.5 и 13.6 весьма громоздко и неосуществимо без использования стандартных средств оболочки Jet [81] аналитических преобразований, позволяющей в диалоговом режиме задавать системы определяющих уравнений, получать из них наиболее простые дифференциальные следствия и уточнять вид искомых нелокальных симметрий.

Нелокальная симметрия (13.7) определена с точностью до полных производных $g \cdot \tilde{D}_x$, где $g \in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}})$. Таким образом, класс нелокальных симметрий (13.7) — это $[\tilde{\mathfrak{Э}}_{\varphi,a}] = [-f(t) \cdot \partial/\partial x]$, то есть трансляция $f(t) \cdot \partial/\partial x$. Симметрия (13.8) является поднятием классической точечной симметрии φ_0^f (см. утверждение 3.7). Как обычно, имеются нелокальные симметрии $\tilde{\mathfrak{Э}}_{\varphi,a}$, получаемые из (13.7) и (13.8) дискретным преобразованием $x \leftrightarrow y$.

13.3. О перестановочности преобразований Беклунда

Теперь рассмотрим свойство перестановочности (авто)преобразований Беклунда (12.3), (12.17) и (12.18).

Предложение 13.7.

1. *Пусть* u^j, $j = \mathrm{i}, \mathrm{ii}$, *— решения уравнения* (6.1), *такие что* $\mathcal{B}_u(u, u^j; t_j) = 0$, $t_j \in \mathbb{R}$. *Тогда существует единственное решение* $u'''(x,y)$ *системы*
$$\begin{cases} \mathcal{B}_u(u', u'''; t_2) = 0, \\ \mathcal{B}_u(u'', u'''; t_1) = 0. \end{cases} \tag{13.9}$$
Именно, решение u''' *таково, что выполняется соотношение*
$$\exp(u''') = \exp(u) \cdot \frac{k_2 \exp(u') - k_1 \exp(u'')}{k_2 \exp(u'') - k_1 \exp(u')}, \tag{13.10}$$
где $k_j \equiv \exp(t_j)$.
2. *Пусть* $j = \mathrm{i}, \mathrm{ii}$ *и* $t_j \in \mathbb{R}$. *Далее, пусть* v^j *— решения волнового уравнения* $v_{xy} = 0$, *такие что* $\mathcal{B}_{uv}(u, v^j; t_j) = 0$, *и* u^j *— решения уравнения Лиувилля, такие что* $\mathcal{B}_{uv}(u^j, v; t_j) = 0$. *Тогда существуют единственные решения* u''' *и* v''' *систем*
$$\begin{cases} \mathcal{B}_{uv}(u''', v'; t_2) = 0, \\ \mathcal{B}_{uv}(u''', v''; t_1) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \mathcal{B}_{uv}(u', v'''; t_2) = 0, \\ \mathcal{B}_{uv}(u'', v'''; t_1) = 0 \end{cases}$$
соответственно. Положим $k_j \equiv \exp(t_j)$, *тогда*
$$\exp(u''') = \exp(u) \cdot \frac{k_2 \exp(v') - k_1 \exp(v'')}{k_2 \exp(v'') - k_1 \exp(v')},$$
$$\exp(v''') = \exp(v) \cdot \frac{k_1 \exp(u'') - k_2 \exp(u')}{k_2 \exp(u'') - k_1 \exp(u')}.$$
3. *Пусть* $j = \mathrm{i}, \mathrm{ii}$ *и* $t_j \in \mathbb{R}$, *пусть также* Υ^j *— решение* scal^+*-уравнения* $\mathcal{E}_\Upsilon$, *причём* $\mathcal{B}_{u\Upsilon}(u, \Upsilon^j; t_j) = 0$, *и* u^j *— решения уравнения Лиувилля, такие что* $\mathcal{B}_{u\Upsilon}(u^j, \Upsilon; t_j) = 0$. *Тогда существуют единственные решения* u''' *и* Υ''' *систем*
$$\begin{cases} \mathcal{B}_{u\Upsilon}(u''', \Upsilon'; t_2) = 0, \\ \mathcal{B}_{u\Upsilon}(u''', \Upsilon''; t_1) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \mathcal{B}_{u\Upsilon}(u', \Upsilon'''; t_2) = 0, \\ \mathcal{B}_{u\Upsilon}(u'', \Upsilon'''; t_1) = 0 \end{cases}$$
соответственно. Кроме того, имеем
$$\exp(u''') = \exp(u) \cdot \frac{k_2 \exp(\Upsilon') - k_1 \exp(\Upsilon'')}{k_2 \exp(\Upsilon'') - k_1 \exp(\Upsilon')},$$
$$\exp(\Upsilon''') = \exp(\Upsilon) \cdot \frac{k_1 \exp(u'') - k_2 \exp(u')}{k_2 \exp(u'') - k_1 \exp(u')},$$
где $k_j \equiv \exp(t_j)$.

Доказательство. Рассмотрим только автопреобразование Беклунда (12.3), случаи 2 и 3 рассматриваются совершенно аналогично. Рассмотрим подсистему в (13.9), состоящую из соотношений (12.3) с производными лишь по x. Тогда решение u''', определённое в (13.10), — единственное решение этой подсистемы, выражающее линейную зависимость между собой левых частей (13.9). Легко проверить, что другая подсистема, составленная из входящих в (12.3) соотношений, которые содержат производные по y, имеет два решения, u''' и $\bar{u}'''$: u''' определено в (13.10), а $\bar{u}'''$ определяется равенством

$$\exp(\bar{u}''') = \exp(-u) \cdot \frac{k_1 \exp(u') - k_2 \exp(u'')}{k_2 \exp(-u') - k_1 \exp(-u'')},$$

последнее решение постороннее. Итак, функция u''' есть единственное решение всей системы (13.9). ☐

Замечание 13.8. Утверждение 13.7 означает, что при любых значениях параметров $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ диаграммы

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "t_2"'] & u' \arrow[d, "t_2"] \\ u'' \arrow[r, "t_1"'] & u''' \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} u \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "t_2"'] & v' \arrow[r, "t_3"] \arrow[d, "t_2"] & u'' \arrow[d, "t_2"] \\ v'' \arrow[r, "t_1"'] & u' \arrow[r, "t_3"'] & v''' \end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "t_2"'] & \Upsilon' \arrow[r, "t_3"] \arrow[d, "t_2"] & u'' \arrow[d, "t_2"] \\ \Upsilon'' \arrow[r, "t_1"'] & u' \arrow[r, "t_3"'] & \Upsilon''' \end{tikzcd}$$

коммутативны.

14. Представления нулевой кривизны

В этом разделе мы иллюстрируем взаимосвязь между параметрическими семействами представлений нулевой кривизны и преобразований Беклунда для уравнений $(*)$, основываясь на существовании двух представлений алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, которой мы в разделе 3 каноническим способом поставили в соответствие уравнение Лиувилля.

Существует естественная эквивалентность [49] между $\mathfrak{g}$-значными представлениями нулевой кривизны для дифференциального уравнения $\mathcal{E}$ и накрытиями специального вида над этим же уравнением. Далее мы изучаем случай $r = 1$ и $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, наши рассуждения основаны на переходе от матричного представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ к её представлению в векторных полях. Мы используем этот факт для построения искомых классов накрытий над уравнением

$$\mathcal{E}_{\text{Liou}} = \{u_{xy} = \exp(2u)\}, \tag{14.1}$$

здесь 2 — это (1×1)-матрица Картана алгебры Ли A_1, а x и y — координаты в стандартном двумерном продолжении $(z, \bar{z}) \hookrightarrow \mathbb{C}^2 \ni (x, y)$. Через $\langle e, h, f \rangle$ мы обозначим канонический базис в $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h. \tag{3.14$'$}$$

Рассмотрим представление $\rho\colon \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{D}(\mathbb{C}_2[\Xi])$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве дифференцирований со значениями в полиномах:

$$\rho(e) = 1 \cdot \frac{\partial}{\partial \Xi}, \quad \rho(h) = -2\Xi \cdot \frac{\partial}{\partial \Xi}, \quad \rho(f) = -\Xi^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \Xi}, \tag{14.2a}$$

так что скобка Ли является коммутатором векторных полей: $[A, B] = A \circ B - B \circ A$. Это представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ было использовано в [29] для построения некоторого класса многоместных аналогов алгебр Ли. Рассмотрим также матричное представление

$$\varrho(e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varrho(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varrho(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{14.2b}$$

здесь скобка Ли — это коммутатор матриц: $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$.

Для заданного уравнения $\mathcal{E}^\infty$ рассмотрим форму плоской связности (3.11) в расслоении $C^\infty(\mathcal{E}^\infty) \otimes G \to \mathbb{C}^2$, где G — группа Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $A, B \in C^\infty(\mathcal{E}^\infty) \otimes \mathfrak{g}$. Условие нулевой кривизны (3.12), эквивалентное соотношению

$$[\bar{D}_x + A, \bar{D}_y + B] = 0,$$

выполняется в силу $\mathcal{E}^\infty$. Раскрывая коммутатор, мы получаем матричное уравнение

$$\bar{D}_y A - \bar{D}_x B - [A, B] = 0. \tag{14.3}$$

Теперь разложим матрицы A и B по базису в представлении $\varrho\colon \mathfrak{g} \to \{M \in \mathrm{Mat}(2, 2) \mid \operatorname{tr} M = 0\}$:

$$A = a_e \otimes \varrho(e) + a_h \otimes \varrho(h) + a_f \otimes \varrho(f), \quad B = b_e \otimes \varrho(e) + b_h \otimes \varrho(h) + b_f \otimes \varrho(f),$$

где $a_\mu, b_\nu \in C^\infty(\mathcal{E}^\infty)$, и построим одномерное накрытие τ над $\mathcal{E}^\infty$, в котором нелокальная переменная обозначена через Ξ. Продолженные полные производные $\tilde{D}_x$ и $\tilde{D}_y$ будут тогда иметь вид

$$\tilde{D}_x = \bar{D}_x + a_e \otimes \rho(e) + a_h \otimes \rho(h) + a_f \otimes \rho(f),$$
$$\tilde{D}_y = \bar{D}_y + b_e \otimes \rho(e) + b_h \otimes \rho(h) + b_f \otimes \rho(f),$$

а правила дифференцирования переменной Ξ будут иметь вид

$$\begin{aligned} \tilde{D}_x(\Xi) &= \mathrm{d}x \lrcorner \, (a_e \otimes \rho(e) + a_h \otimes \rho(h) + a_f \otimes \rho(f)), \\ \tilde{D}_y(\Xi) &= \mathrm{d}y \lrcorner \, (b_e \otimes \rho(e) + b_h \otimes \rho(h) + b_f \otimes \rho(f)). \end{aligned} \tag{14.4}$$

Условие Маурера—Картана (3.12), выполненное на уравнении $\mathcal{E}$, эквивалентно условию совместности $[\tilde{D}_x, \tilde{D}_y] = 0$ для продолженных полных производных, которое также имеет место в силу уравнения $\mathcal{E}^\infty$.

Пример 14.1. Получим преобразование Беклунда между уравнением Лиувилля и волновым уравнением. Рассмотрим уравнение (3.17) и выберем калибровку $a_e \equiv a_e^1 = \exp(\kappa u)$, $b_f \equiv b_f^1 = \exp((2-\kappa)u)$ с произвольной постоянной κ. Тогда накрывающее уравнение $\tilde{\mathcal{E}}$ таково:

$$\left\{\begin{array}{l} v_x = (\kappa - 2)u_x + \exp(\kappa u - v) \\ v_y = \kappa u_y - \exp((2-\kappa)u + v) \end{array}\right\}, \tag{14.5}$$

где переменная $v = \ln \Xi$ — преобразование нелокальной переменной Ξ (см. уравнение (14.4)). Условие совместности системы (14.5) есть

$$v_{xy} = (\kappa - 1)\exp(2u).$$

При $\kappa = 1$ уравнение (14.5) — это преобразование Беклунда [50]

$$\begin{aligned} (v+u)_x &= \exp(u-v), \\ (v-u)_y &= -\exp(u+v) \end{aligned} \tag{14.5_1}$$

между уравнением Лиувилля (14.1) и волновым уравнением

$$v_{xy} = 0, \tag{14.6}$$

в то время как координата Ξ именно та, с помощью которой можно проинтегрировать систему (14.5_1) в нелокальных переменных (см. раздел 13).

Замечание 14.2. Преобразование (14.5_1) — это частный случай ($t = 0$, $k \equiv \exp(t) = 1$) в семействе преобразований Беклунда (12.17) между уравнением (14.1) и уравнением (14.6). Заметим, что отображение $k \mapsto -k$ — это замена представления (14.2a) представлением $\bar{\rho}\colon \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{D}(\mathbb{C}_2[\Xi])$, заданным формулами

$$\bar{\rho}(e) = -1, \quad \bar{\rho}(h) = -2\Xi, \quad \bar{\rho}(f) = \Xi^2.$$

Представления нулевой кривизны, построенные по преобразованиям Беклунда. Указанные выше преобразования Беклунда для уравнения Лиувилля (14.1), автопреобразование (12.3) и преобразование Беклунда (12.18) между уравнением Лиувилля и scal^+-уравнением Лиувилля (которое, как мы знаем, является гиперболической формой записи уравнения Гаусса для конформной метрики постоянной кривизны $+1$, см. пример 3.1)

$$\mathcal{E}_\Upsilon = \{\Upsilon_{xy} = \exp(-2\Upsilon)\},$$

не сводятся к накрытию уравнения Лиувилля, заданному формулой (3.15). Для автопреобразования Беклунда (12.3) имеем форму плоской связности

$$\theta = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}u_x & 0 \\ -\exp(u-t) & \frac{1}{2}u_x \end{pmatrix} \mathrm{d}x + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_y & -\exp(t+u) \\ -\exp(t-u) & -\frac{1}{2}u_y \end{pmatrix} \mathrm{d}y.$$

Для преобразования (12.18) форма θ такова:

$$\theta = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}u_x & \exp(-t-u) \\ -\exp(u-t) & \frac{1}{2}u_x \end{pmatrix} \mathrm{d}x + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_y & -\exp(t+u) \\ 0 & -\frac{1}{2}u_y \end{pmatrix} \mathrm{d}y.$$

Построенные выше $\mathfrak{sl}_2$-значные формы являются представлениями нулевой кривизны для уравнения Лиувилля.

Преобразования Беклунда, построенные по представлениям нулевой кривизны. Задача построения многопараметрических семейств преобразований Беклунда по известным представлениям нулевой кривизны для уравнения (14.1) обсуждалась в [89] и была подробно рассмотрена В. Головко в [8].

Следуя [89] и [8], укажем три $\mathfrak{sl}_2$-значных класса представлений нулевой кривизны $\theta \in \bar{\Lambda}^1\mathcal{E}^\infty_{\mathrm{Liou}} \otimes \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ для гиперболического уравнения Лиувилля (14.1). Предположим, что $A = A(u_x)$, $B = B(u)$ и $[A, B] \neq 0$. Тогда уравнение (3.13′) сводится к виду

$$u_x^{-1}\frac{\partial A}{\partial u_x} - \exp(-2u)\frac{\partial B}{\partial u} - [u_x^{-1}A, \exp(-2u)B] = 0.$$

Вычисляя производную $\partial^2/\partial u\,\partial u_x$ от этого тождества, мы получаем уравнение $[M, N] = 0$, где

$$M = \frac{\partial(A/u_x)}{\partial u_x}, \quad N = \frac{\partial(B/\exp(2u))}{\partial u}.$$

Возможны три случая:

1) $M = 0$,
2) $N = 0$ и
3) $M = r(u_x)\cdot C$, $N = s(u)\cdot C$, где $C \neq 0$ — постоянная $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-значная матрица, а r и s — гладкие функции.

В итоге мы получаем три неэквивалентных калибровочных класса представлений нулевой кривизны.

Случай 1 ($M = 0$). Уравнение (3.13′) не имеет нетривиальных решений.

Случай 2 ($N = 0$). В этом случае два класса представлений нулевой кривизны таковы:

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha u_x + 2\beta & 2\alpha \\ u_x^2(1-2\alpha) - 4\beta u_x + 2\gamma & -2\alpha u_x - 2\beta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \exp(2u) & 0 \end{pmatrix}, \tag{14.7a}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha u_x^2 + 2\beta & 2\delta\exp(-2\alpha u_x) \\ 2\gamma\exp(2\alpha u_x) & -2\alpha u_x^2 - 2\beta \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha\exp(2u) & 0 \\ 0 & -\alpha\exp(2u) \end{pmatrix}. \tag{14.7b}$$

Случай 3 ($M \neq 0$, $N \neq 0$). Ещё одно решение уравнения (3.13′) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} u_x & 1 \\ 0 & -u_x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\exp(-2u) \\ \exp(2u) & 0 \end{pmatrix}, \tag{14.8}$$

где α, β, γ, δ — произвольные постоянные.

Согласно [49] любому $\mathfrak{sl}_2$-значному представлению нулевой кривизны для уравнения $\mathcal{E}$ соответствует некоторое накрытие особого вида над уравнением $\mathcal{E}$. Используя представление $\rho'\colon \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{D}(\mathbb{C}[[v]])$,

$$\rho'(e) = \exp(-v)\frac{\partial}{\partial v}, \quad \rho'(f) = -\exp(v)\frac{\partial}{\partial v}, \quad \rho'(h) = -2\frac{\partial}{\partial v},$$

алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ в пространстве дифференциальных операторов на комплексной прямой $\mathbb{C}$ с координатой $v \in \mathbb{C}$, мы строим одномерные накрытия над уравнением Лиувилля $\mathcal{E}_{\mathrm{Liou}}$, что приводит к преобразованиям Беклунда между уравнением $\mathcal{E}_{\mathrm{Liou}}$ и некоторыми уравнениями с частными производными, зависящими от первоначального представления нулевой кривизны.

Предложение 14.3 ([8]). *Представления* (14.7a), (14.7b) *и* (14.8) *соответствуют преобразованиям Беклунда между уравнением* $\mathcal{E}_{\mathrm{Liou}}$ *и уравнениями*

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{1}{4}(2\alpha - 1)\exp(v')\left(\frac{v'_{xy}}{v'_y} - v'_x\right)^2 + \\ &\quad + 2(\beta\exp(v') - \alpha)\left(\frac{v'_{xy}}{v'_y} - v'_x\right) + 2\alpha\exp(-v') - 4\beta - 2\gamma\exp(v'), \\ v''_x &= -\frac{\alpha {v''_{xy}}^2}{2{v''_y}^2} - 4\beta + 2\delta\exp\left(-\frac{\alpha v''_{xy}}{v''_y} - v''\right) - 2\gamma\exp\left(\frac{\alpha v''_{xy}}{v''_y} + v''\right), \\ {v'''_{xy}}^2 &= \exp(-2v''')({v'''_y}^2 + 4\alpha). \end{aligned}$$

Если $\alpha = 0$ *в представлении нулевой кривизны* (14.8), *то мы получаем преобразование Беклунда между* $\mathcal{E}_{\mathrm{Liou}}$ *и волновым уравнением* (14.6).

Результат проверки на устранимость параметров α, β, γ и δ в представлениях нулевой кривизны (14.7), (14.8) относительно действия калибровочных преобразований

$$A \mapsto SAS^{-1} - (D_xS)S^{-1}, \quad B \mapsto SBS^{-1} - (D_yS)S^{-1}$$

таков.

Замечание 14.4 ([8]). Параметр β в случае (14.7a) устраняется калибровочным преобразованием

$$S = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta/\alpha & 1 \end{pmatrix},$$

которое зависит от произвольной постоянной $a \in \mathbb{C}$. При этом преобразовании $\gamma \mapsto \gamma + \beta^2/\alpha$. Все остальные параметры, α, β, γ и δ в представлениях нулевой кривизны (14.7), (14.8) являются неустранимыми.

Заключительные замечания

1. Недавно Демской и Старцев [9], рассматривая связь между интегралами $\mathbf{\Omega}$ и симметриями φ гиперболических систем лиувиллевского типа, установили соответствие между оператором $\bar{\square}$, который задаёт разложение вида

$$\varphi = \bar{\square}(\phi(x, \mathbf{\Omega}))$$

для симметрий таких систем, и линеаризациями ℓ_{Ω^i} самих этих интегралов Ω. Результаты содержащейся в данном выпуске заметки [9] обобщают утверждения леммы 3.10 и леммы 9.8 на произвольные интегралы Ω^i, $i \geqslant 1$ (напомним, что $\Omega^1 \equiv T$).

2. В первой части настоящей работы была построена коммутативная иерархия $\mathfrak{A}$ локальных нётеровых симметрий $\varphi_k \in \operatorname{sym}\mathcal{L}_{\text{Toda}}$, где $k \geqslant 0$. Эту иерархию мы отождествили с последовательностью высших r-компонентных аналогов потенциального модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза и установили её связь с бигамильтоновой иерархией $\mathfrak{B}$ скалярного потенциального уравнения Кортевега—де Фриза (см. (7.5)). Существенным свойством этих эволюционных уравнений является то, что матричный коэффициент при производных старшего порядка всегда вырожден.

Сделаем небольшое отступление. Как известно, в фундаментальной работе [11] гиперболической системе Тоды, ассоциированной с полупростой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ или алгеброй Каца—Муди $\hat{\mathfrak{g}}$, была поставлена в соответствие интегрируемая бигамильтонова иерархия $\mathfrak{C}$ уравнений Дринфельда—Соколова. Иерархия $\mathfrak{C}$ связана с последовательностью высших аналогов многокомпонентного уравнения Кортевега—де Фриза. В отличие от случая иерархии $\mathfrak{A}$, символы уравнений Дринфельда—Соколова всегда являются невырожденными. Поэтому было бы естественно установить, существует ли взаимосвязь между системами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$, равно как между $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{D}$. Кроме того, остаются неясными необходимые и достаточные условия для того, чтобы иерархия $\mathfrak{A}$ была бигамильтоновой.

Пусть $\mathfrak{A}$ — иерархия, построенная по уравнению Тоды (3.19), которое ассоциировано с невырожденной симметризуемой матрицей K. По-видимому, иерархия $\mathfrak{A}$ бигамильтонова тогда и только тогда, когда K есть матрица Картана полупростой алгебры Ли. Логично ожидать, что в этом случае операторы A_1 и A_2 образуют совместную пару гамильтоновых операторов в смысле определения 1.8.

3. В третьей главе изучались геометрические структуры для скалярного бездисперсионного уравнения Тоды, представляющего собой непрерывный предел r-компонентных систем Тоды при $r \to \infty$. Следует отметить, что предельное уравнение допускает сравнительно немного локальных структур. Видимо, свойства бездисперсионного уравнения во многом связаны с нелокальностями. В то же время в первой главе были рассмотрены локальные нётеровы симметрии, законы сохранения и операторы рекурсии для самих уравнений Тоды. Поэтому было бы вполне естественно установить, в каком смысле является коммутативной диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_{\text{Toda}} \arrow[r] \arrow[d, swap, "{r\to\infty,\ \varepsilon\to+0,\ u_{zzz}=0}"] & \text{локальные структуры для } \mathcal{E}_{\text{Toda}} \arrow[d, "?"] \\ \mathcal{E}_{\text{heav}} \arrow[r] & \text{нелокальные структуры для } \mathcal{E}_{\text{heav}} \end{tikzcd}$$

которая связывает локальную геометрию уравнения $\mathcal{E}_{\text{Toda}}$ и (пока ещё не полностью открытую) нелокальную геометрию уравнения $\mathcal{E}_{\text{heav}}$.

4. В четвёртой главе, применяя разработанный И. С. Красильщиком когомологический аппарат, мы построили однопараметрические семейства преобра-

зований Беклунда для уравнения ($*$). Следует отметить, что общий случай [1] преобразований Беклунда для уравнений Тоды, ассоциированных с полупростыми алгебрами Ли, не рассматривался. Причина тому такова: из приведённых в [1] выражений ясно, что масштабное преобразование является искомым генератором однопараметрических деформаций для любой алгебры $\mathfrak{g}$ ранга r при всех $r \geqslant 1$.

Автор надеется, что содержащиеся в данной статье рассуждения убедительно демонстрируют выгоду, приносимую использованием инвариантного бескоординатного подхода при изучении уравнений математической физики. Дальнейшее описание некоторых алгебраических структур, связанных с уравнениями в частных производных, можно найти в работе [29], в которой рассматривался естественный класс N-арных обобщений структур алгебр Ли и, в частности, алгебры симметрий $\mathrm{sym}\,\mathcal{E}_{\mathrm{Toda}}$ уравнений Тоды.

Благодарность

Автор выражает благодарность И. С. Красильщику за многочисленные обсуждения и конструктивную критику. Автор благодарен А. М. Вербовецкому, А. В. Овчинникову и В. В. Соколову за существенные замечания и советы, а также В. М. Бухштаберу, Р. Витоло, В. А. Головко, П. Керстену, Б. Г. Конопельченко, В. Г. Марихину, А. К. Погребкову, А. В. Самохину, Е. В. Ферапонтову, А. Б. Шабату, В. А. Юмагужину и всем участникам семинара по геометрии дифференциальных уравнений (Независимый московский университет) за полезные обсуждения. Приятная обязанность автора — поблагодарить М. Марвана, разработавшего пакет аналитических преобразований Jet [81], за предоставленную версию программы и практические советы.

Основная часть приведённых в статье результатов была получена в Московском государственном университете. Автор признателен университетам Твенте, Лечче и Салерно, где была выполнена часть исследований, за гостеприимство.

Литература

[1] Андреев В. А. Преобразования Беклунда цепочек Тоды // Теор. и матем. физ. — 1988. — Т. 75, № 3. — С. 340—352.

[2] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1979.

[3] Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Ижевск, Ижевская респ. типогр., 2000.

[4] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Квантовые поля. — М.: Физматлит, 1993.

[5] Бочаров А. В., Вербовецкий А. М., Виноградов А. М. и др. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Ред. А. М. Виноградов и И. С. Красильщик. — М.: Факториал, 1997.

[6] Гельфанд И. М., Дорфман И. Я. Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры // Функцион. анализ и его прил. — 1979. — Т. 13, № 4. — С. 13—30.

[7] Головко В. А. О законах сохранения для систем Тоды // X Международная конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам «Ломоносов-2003», секция «Физика». Сборник тезисов. — М.: МГУ, 2003. — С. 53—55.

[8] Головко В. А. О представлениях нулевой кривизны и преобразованиях Беклунда для уравнения Лиувилля // Труды XXV Конференции молодых ученых. Механико-математический ф-т МГУ. — М.: МГУ, 2003. — С. 20—22.

[9] Демской Д. К., Старцев С. Я. О построении симметрий по интегралам систем гиперболических уравнений // Фундам. и прикл. мат. — 2004. — Т. 10, вып. 1. — С. 29—37.

[10] Дринфельд В. Г., Соколов В. В. Уравнения типа Кортевега—де Фриза и простые алгебры Ли // ДАН СССР. — 1981. — Т. 258, № 1. — С. 11—16.

[11] Дринфельд В. Г., Соколов В. В. Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега—де Фриза // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения. Т. 24. — М.: ВИНИТИ, 1984. — С. 81—180.

[12] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. — М.: Наука, 1979.

[13] Жибер А. В. Уравнения n-волн и система нелинейных уравнений Шрёдингера с групповой точки зрения // Теор. и матем. физ. — 1982. — Т. 52, № 3. — С. 405—413.

[14] Жибер А. В., Соколов В. В. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 63—106.

[15] Жибер А. В., Шабат А. Б. Уравнения Клейна—Гордона с нетривиальной группой // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247, № 5. — С. 1103—1107.

[16] Зограф П. Г., Тахтаджян Л. А. Об уравнении Лиувилля, акцессорных параметрах и геометрии пространства Тейхмюллера для римановых поверхностей рода 0 // Мат. сб. — 1987. — Т. 132 (174), № 2. — С. 147—166.

[17] Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б. Уравнение Кортевега—де Фриза с групповой точки зрения // ДАН СССР. — 1979. — Т. 244, № 1. — С. 57—61.

[18] Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б. Эволюционные уравнения с нетривиальной группой Ли—Беклунда // Функцион. анализ и его прил. — 1980. — Т. 14, № 1. — С. 25—36.

[19] Киселев А. В. Классические законы сохранения для эллиптического уравнения Лиувилля // Вестник Моск. ун-та. Сер. 3, Физика, астрономия. — 2000. — Вып. 6. — С. 11—13.

[20] Киселёв А. В. Об автопреобразовании Беклунда для уравнения Лиувилля // Вестник Моск. ун-та. Сер. 3, Физика, астрономия. — 2002. — Вып. 6. — С. 22—26.

[21] Киселёв А. В. О некоторых свойствах оператора рекурсии для уравнения Лиувилля // Труды XXV Конференции молодых ученых. Механико-математический ф-т МГУ. Сб. тезисов. — М.: МГУ, 2003. — С. 74—77.

[22] Киселёв А. В. Методы геометрии дифференциальных уравнений в анализе интегрируемых моделей теории поля. — Дисс.… канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 2004.

[23] Киселёв А. В. О законах сохранения в солитонных комплексах // XXVI Конференция молодых ученых. Механико-математический факультет МГУ. Сб. тезисов. — М.: МГУ, 2004. — С. 62—63.

[24] Киселёв А. В. О непрерывном аналоге двумерных систем Тоды // Мат. и её прил. — 2004. — Т. 1, № 1. — С. 69—74.

[25] Киселёв А. В. О нётеровых симметриях уравнений Тоды // Вестник Моск. ун-та. Сер. 3, Физика, астрономия. — 2004. — № 2. — С. 16—18.

[26] Киселёв А. В. О построении точных решений бездисперсионного уравнения Тоды // Мат. и её прил. — 2004. — Т. 1, № 2.

[27] Киселев А. В. Об уравнениях Кортевега—де Фриза, ассоциированных с системами Тоды. — Деп. в ВИНИТИ 10.03.2004, № 412-В2004.

[28] Киселёв А. В. Применение методов геометрии дифференциальных уравнений в решении краевых задач // Мат. и её прил. — 2004. — Т. 1, № 1. — С. 59—68.

[29] Киселёв А. В. Об ассоциативных алгебрах Шлезингера—Сташефа и определителях Вронского // Фундам. и прикл. мат. — В печати.

[30] Киселёв А. В., Овчинников А. В. О некоторых гамильтоновых иерархиях, ассоциированных с уравнениями Тоды // Ломоносовские чтения-2004. Секция физики. — М.: МГУ, 2004. — С. 102—105.

[31] Лезнов А. Н. О полной интегрируемости одной нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных в двумерном пространстве // Теор. и матем. физ. — 1980. — Т. 42, № 3. — С. 343—349.

[32] Лезнов А. Н., Савельев М. В. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. — М., 1985.

[33] Лезнов А. Н., Смирнов В. Г., Шабат А. Б. Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем // Теор. и матем. физ. — 1982. — Т. 51, № 1. — С. 10—21.

[34] Мешков А. Г. Симметрии скалярных полей. III. Двумерные интегрируемые модели // Теор. и матем. физ. — 1985. — Т. 63, № 3. — С. 323—332.

[35] Джет Неструев. Гладкие многообразия и наблюдаемые. — М.: МЦНМО, 2000.

[36] Овчинников А. В. Системы Тоды, ассоциированные с алгебрами Ли, и W-алгебра в некоторых задачах математической физики. — Дисс.... канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 1996.

[37] Поляков А. М. Калибровочные поля и струны. — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 1999.

[38] Савельев М. В. О проблеме интегрируемости непрерывной системы Тоды // Теор. и матем. физ. — 1992. — Т. 92, № 3. — С. 457—465.

[39] Тода М. Теория нелинейных решёток. — М., 1984.

[40] Хорькова Н. Г. Законы сохранения и нелокальные симметрии // Мат. заметки. — 1988. — Т. 44, № 1. — С. 134—144.

[41] Шабат А. Б., Ямилов Р. И. Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана. — Препринт. Уфа, Башкир. филиал АН СССР, 1981.

[42] Akhmediev N., Ankiewicz A. Multi-soliton complexes // Chaos. — 2000. — Vol. 10, no. 3. — P. 600—612.

[43] Alfinito E., Soliani G., Solombrino L. The symmetry structure of the heavenly equation // Lett. Math. Phys. — 1997. — Vol. 41. — P. 379—389.

[44] Barnich G., Brandt F., Henneaux M. Local BRST cohomology in the antifield formalism: I. General theorems // Comm. Math. Phys. — 1995. — Vol. 174. — P. 57—92.

[45] Bilal A., Gervais J.-L. Extended $C = \infty$ conformal systems from classical Toda field theories // Nucl. Phys. B. — 1989. — Vol. 314, no. 3. — P. 646—686.

[46] Bilal A., Gervais J.-L. Systematic construction of conformal theories with higher-spin Virasoro symmetries // Nucl. Phys. B. — 1989. — Vol. 318, no. 3. — P. 579—630.

[47] Boyer C. P., Finley J. D. Killing vectors in self-dual Euclidean Einstein spaces // J. Math. Phys. — 1982. — Vol. 23. — P. 1126—1130.

[48] Boyer C. P., Plebański J. F. An infinite hierarchy of conservation laws and nonlinear superposition principles for self-dual Einstein spaces // J. Math. Phys. — 1985. — Vol. 26, no. 2. — P. 229—234.

[49] Brandt F. Bäcklund transformations and zero curvature representations of systems of partial differential equations // J. Math. Phys. — 1994. — Vol. 35. — P. 2463—2484.

[50] Bullough R. K., Dodd R. K. Bäcklund transformations for the sine-Gordon equations // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. — 1976. — Vol. 351, no. 1667. — P. 499—523.

[51] Bullough R. K., Dodd R. K. Polynomial conserved densities for the sine-Gordon equations // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. — 1977. — Vol. 352. — P. 481—503.

[52] Carlet G., Dubrovin B., Zhang Y. The extended Toda hierarchy. — `arXiv:nlin.SI/0306060`.

[53] Case K. M., Roos A. M. Sine-Gordon and modified Korteweg–de Vries charges // J. Math. Phys. — 1982. — Vol. 23, no. 3. — P. 392—395.

[54] Cieśliński J. A generalized formula for integrable classes of surfaces in Lie algebras // J. Math. Phys. — 1997. — Vol. 38, no. 8. — P. 4255—4272.

[55] Dorfman I. Dirac Structures and Integrability of Nonlinear Evolution Equations. — Chichester: John Wiley & Sons, 1993. — Nonlinear Science: Theory and Applications.

[56] Dunajski M., Mason L. J. Hyper-Kähler hierarchies and their twistor theory // Comm. Math. Phys. — 2000. — Vol. 213. — P. 641—672.

[57] Fehér L., O'Raifeartaigh L., Ruelle P., Tsutsui I., Wipf A. On Hamiltonian reductions of the Wess—Zumino—Novikov—Witten theories // Phys. Rep. — 1992. — Vol. 222, no. 1. — P. 1—64.

[58] Gervais J.-L., Matsuo Y. W-geometries // Phys. Lett. B. — 1992. — Vol. 274. — P. 309—316.

[59] Gervais J.-L., Matsuo Y. Classical A_n-W-geometries // Comm. Math. Phys. — 1993. — Vol. 152. — P. 317—368.

[60] Gervais J.-L., Saveliev M. V. W-geometry of the Toda systems associated with non-exceptional Lie algebras // Comm. Math. Phys. — 1996. — Vol. 180, no. 2. — P. 265—296.

[61] Geurts M. L., Martini R., Post G. F. Symmetries of the WDVV equation // Acta Appl. Math. — 2002. — Vol. 72, no. 1–2. — P. 67—75.

[62] Gusyatnikova V. N., Samokhin A. V., Titov V. S. et al. Symmetries and conservation laws of Kadomtsev—Pogutse equations // Acta Appl. Math. — 1989. — Vol. 15, no. 1. — P. 23—64.

[63] Igonin S., Krasil'shchik I. S. On one-parametric families of Bäcklund transformations // Advanced Studies in Pure Mathematics. — 2003. — Vol. 37. — P. 99—114.

[64] Kac V. G., Raina A. K. Bombai Lectures on Highest Weight Representation of Infinite Dimensional Lie Algebras. — Singapore: World Scientific, 1987.

[65] Kaliappan P., Lakshmanan M. Connection between the infinite sequence of Lie—Bäcklund symmetries of the Korteweg—de Vries and sine-Gordon equations // J. Math. Phys. — 1982. — Vol. 23, no. 3. — P. 456—459.

[66] Kazdan J. L., Warner F. W. Curvature functions for open 2-manifolds // Ann. of Math. (2). — 1974. — Vol. 99, no. 2. — P. 203—219.

[67] Kersten P., Krasil'shchik I., Verbovetsky A. Hamiltonian operators and ℓ^*-coverings // J. Geom. Phys. — 2004. — Vol. 50, no. 1—4. — P. 273—302.

[68] Kiselev A. V. On the geometry of Liouville equation: symmetries, conservation laws, and Bäcklund transformations // Acta Appl. Math. — 2002. — Vol. 72, no. 1—2. — P. 33—49.

[69] Kiselev A. V. On homotopy Lie algebra structures in the rings of differential operators // Note Mat. — 2003. — Vol. 22, no. 1—2.

[70] Kiselev A. V. On conservation laws for the Toda equations // Acta Appl. Math. — 2004. — Vol. 83, no. 1—2. — P. 175—182.

[71] Kiselev A. V., Golovko V. A. Non-abelian coverings over the Liouville equation // Acta Appl. Math. — 2004. — Vol. 83, no. 1—2. — P. 25—37.

[72] Kiselev A. V., Ovchinnikov A. V. On the Hamiltonian hierarchies, associated with the hyperbolic Euler equations // J. Dynam. Control Systems. — 2004. — Vol. 10, no. 3. — P. 431—451.

[73] Krasil'shchik I. A simple method to prove locality of symmetry hierarchies. — 2002. — Preprint DIPS-9/2002.

[74] Krasil'shchik I. S., Kersten P. H. M. Symmetries and Recursion Operators for Classical and Supersymmetric Differential Equations. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000.

[75] Krasil'shchik I., Verbovetsky A. Homological Methods in Equations of Mathematical Physics. — Opava: Open Education and Sciences, 1998. — Advanced Texts in Mathematics. — `arXiv.math.DG/9808130`.

[76] Leznov A. N., Saveliev M. V. Spherically symmetric equations in gauge theories for an arbitrary semisimple compact Lie group // Phys. Lett. B. — 1978. — Vol. 79, no. 3. — P. 294—296.

[77] Liouville J. Sur l'equation aux différences partielles $d^2 \log \lambda / du\, dv \pm \lambda/(2a^2) = 0$ // J. de Math. Pure et Appliquée. — 1853. — Vol. 18, no. 1. — P. 71—72.

[78] Magri F. A simple model of the integrable equation // J. Math. Phys. — 1978. — Vol. 19, no. 5. — P. 1156—1162.

[79] Martina L., Sheftel M. B., Winternitz P. Group foliation and non-invariant solutions of the heavenly equation // J. Phys. A. — 2001. — Vol. 34. — P. 9243—9263.

[80] Marvan M. Another look on recursion operators / Proc. Conf. Differential Geometry and Applications. — Masaryk Univ., Brno, Czech Republic, 1995. — P. 393—402.

[81] Marvan M. Jets. A software for diferential calculus on jet spaces and diffieties, ver. 4.9 (December 2003) for Maple V Release 4. — `http://diffiety.ac.ru/soft/soft.htm`.

[82] Marvan M. On the horizontal gauge cohomology and nonremovability of the spectral parameter // Acta Appl. Math. — 2002. — Vol. 72, no. 1—2. — P. 51—65.

[83] Miura R. M. Korteweg—de Vries equation and generalizations. I // J. Math. Phys. — 1968. — Vol. 9, no. 8. — P. 1202—1204.

[84] Ovchinnikov A. Toda systems and W-algebras / Proc. 1st Non-Orthodox School on Nonlinearity and Geometry / Ed. D. Wójcik, J. Cieśliński. — Warszawa: Polish Sci. Publ. PWN, 1998. — P. 348—358.

[85] Poincaré H. Les fonctions fuchsiennes et l'equation $\Delta u = \exp(u)$ // J. de Math. Pure et Appliquée., 5$^{\text{e}}$ ser. — 1898. — No. 4. — P. 157—230.

[86] Razumov A. V., Saveliev M. V. Lie Algebras, Geometry, and Toda-Type Systems. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. — Cambridge Lecture Notes in Physics. Vol. 8.

[87] Rogers C., Shadwick W. F. Bäcklund Transformations and Their Applications. — New York: Academic press, 1982.

[88] Sakovich S. Yu. On special Bäcklund autotransformations // J. Phys. A. — 1991. — Vol. 24. — P. 401—405.

[89] Sakovich S. Yu. On conservation laws and zero-curvature representations of the Liouville equation // J. Phys. A. — 1994. — Vol. 27. — P. L125—L129.

[90] Saveliev M. V., Vershik A. M. On the continuous Lie algebras and the Cartan operators // Comm. Math. Phys. — 1989. — Vol. 126. — P. 367—381.

[91] Shabat A. B. Higher symmetries of two-dimensional lattices // Phys. Lett. A. — 1995. — Vol. 200. — P. 121—133.

[92] Shadwick W. F. The Bäcklund problem for the equation $\partial^2 z/\partial x^1 \partial x^2 = f(z)$ // J. Math. Phys. — 1978. — Vol. 19, no. 11. — P. 2312—2317.

[93] Sukhorukov A. A., Akhmediev N. N. Intensity Limits for Stationary and Interacting Multi-Soliton Complexes. — 2001. — Preprint `arXiv:nlin.PS/0103026`.

[94] Vinogradov A. M. The $\mathcal{C}$-spectral sequence, Lagrangian formalism, and conservation laws. I. The linear theory. II. The nonlinear theory // J. Math. Anal. Appl. — 1984. — Vol. 100, no. 1. — P. 1—129.

[95] Wahlquist H. D., Estabrook F. B. Bäcklund transformation for solutions of the Korteweg—de Vries equation // Phys. Rev. Lett. — 1973. — Vol. 31, no. 23. — P. 1386—1390.

[96] Wang J. P. Symmetries and Conservation Laws of Evolution Equations. — PhD thesis. — Vrije Universiteit, Amsterdam, 1998.

[97] Witten E. Some exact multipseudoparticle solutions of classical Yang—Mills theory // Phys. Rev. Lett. — 1977. — Vol. 38, no. 3. — P. 121—124.