Экзотическая группа преобразований Галилея в теории поля*

Л. МАРТИНА
Университет Лечче,
Национальный институт ядерной физики (INFN)
e-mail: martina@le.infn.it

УДК 517.957

Ключевые слова: экзотическая группа Галилея, некоммутативная плоскость, теория поля.

Аннотация

Получена интерпретация экзотической группы преобразований Галилея как группы симметрий семейства нерелятивистских теорий поля на некоммутативной плоскости. Построение основано на свойствах отображения Зайбурга—Виттена. Установлены свойства группы симметрий свободной модели; дано описание класса теорий с самодействием.

Abstract

L. Martina, Exotic Galileian group in field theory, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 1, pp. 167—173.

The exotic Galileian group is realized as a symmetry group of a family of nonrelativistic field theories on the noncommutative plane. This has been obtained in a unique way consistent with the Seiberg—Witten map. The symmetry group of the free model is analyzed and a characterization of the class of the self-interacting theories has been given.

Давно известно [9], что группа преобразований Галилея в размерности $2+1$ допускает двумерное центральное расширение, которое существенно отличается от одномерного расширения, связанного с массой частиц. Имманентным свойством добавочной экзотической симметрии является то, что компоненты генераторов растяжения уже не коммутируют, задавая таким образом центральный заряд. Следует отметить, что физический смысл такого расширения долгое время оставался неясным, а с математической точки зрения эта конструкция представляла собой, в общем-то, лишь любопытное наблюдение. Однако с недавних пор упомянутое построение стало вызывать интерес с точки зрения некоммутативной теории поля, которая сейчас весьма актуальна в построении основ фундаментальной физики и адекватных моделей в физике конденсированного состояния [12]. В частности, в [1] была рассмотрена точно решаемая модель

*Исследования выполнены при частичной финансовой поддержке Министерства по образованию, университетам и науке (MIUR) и Национального института ядерной физики (INFN), Италия.

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 1, с. 167—173.

четвёртого порядка с самодействием. В работе обсуждалось, в какой степени струнная динамика двухчастичных состояний связана с нарушением галилеевской симметрии. Например, было отмечено, что граничное состояние характеризуется дипольной длиной, которая отличается от поперечной компоненты полного импульса на некоммутативный множитель θ. В связи с вышеизложенным естественно возникает вопрос: возможно ли восстановление галилеевской инвариантности? Ответ на этот вопрос дан в [4—6]; в настоящей заметке мы приводим обзор полученных результатов.

Некоммутативную плоскость можно представлять как C^*-алгебру ограниченных операторов, порождённых алгеброй Гейзенберга

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = \imath\varepsilon_{i,j}\theta \quad (i,j = 1,2), \tag{1}$$

где θ — характеристическая скалярная постоянная и $\varepsilon_{i,j}$ — полностью антисимметричный тензор ранга 2. Полную алгебру можно построить, воспользовавшись формулой квантования Вейля $\hat{\psi} = \int \psi(\mathbf{x})\hat{\Delta}(\mathbf{x})\,d^2(\mathbf{x})$, где $\psi \in S$ — функция, принадлежащая пространству Шварца на $\mathbb{R}^2$, а $\hat{\Delta}(\mathbf{x}) = 1/(2\pi)^2 \int e^{(\imath\mathbf{k}\cdot(\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{x}))}\,d^2\mathbf{k}$ есть одноточечный оператор, задающий квантование. Ещё одно представление можно построить, используя пару операторов рождения-уничтожения на фоковском пространстве. Именно, следует рассмотреть пару коммутирующих между собой дифференцирований $\hat{\partial}_i$, для которых выполнено соотношение $[\hat{\partial}_i, \hat{x}_j] = \delta_{ij}$. Несложно установить справедливость соотношения $[\hat{\partial}_i, \hat{\Delta}(\mathbf{x})] = -\partial_i\hat{\Delta}(\mathbf{x})$; таким образом, эти дифференцирования являются инфинитезимальными генераторами трансляций оператора квантования, и потому определена операция взятия следа $\mathrm{Tr}(\hat{\psi}) = \int \psi(\mathbf{x})\,d^2(\mathbf{x})$. В частности, отсюда мы получаем соотношение $\mathrm{Tr}(\hat{\Delta}(\mathbf{x})\hat{\Delta}(\mathbf{y})) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ и формулу деквантования Вигнера $\psi(\mathbf{x}) = \mathrm{Tr}(\hat{\psi}\hat{\Delta}(\mathbf{x}))$. Используя взаимно-однозначное соответствие, обусловленное квантованием Вейля и деквантованием Вигнера, можно задать новую структуру ассоциативной неабелевой алгебры на пространстве Шварца S на $\mathbb{R}^2$ — $\star$-умножение Моела

$$\psi \star \varphi(\mathbf{x}) = \mathrm{Tr}(\hat{\psi}\hat{\phi}\hat{\Delta}(\mathbf{x})). \tag{2}$$

В результате по всякой теории поля, заданной действием $S[\hat{\psi}_\alpha]$, можно построить нелокальную лагранжеву плотность, зависящую от полей ψ_α, их производных и их всевозможных $\star$-произведений. Примером такой переформулировки в некоммутативном случае служит упомянутая выше модель скалярного (фермионного) поля [1], соответствующая лагранжиану

$$L = L_0 - V^\star = \left(i\bar{\psi}\partial_t\psi + \bar{\psi}\frac{\Delta\psi}{2}\right) - \frac{\lambda}{2}\bar{\psi}\star\bar{\psi}\star\psi\star\psi. \tag{3}$$

Следует отметить, что в билинейные слагаемые никаких изменений вносить не требуется ввиду соотношения $\int f\star g(\mathbf{x})\,d^2\mathbf{x} = \int f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\,d^2\mathbf{x}$ между интегралами. Ещё один пример — некоммутативный аналог (см. [2,10]) нерелятивистского скалярного поля, двойственный к калибровочной модели Черна—Саймонса,

$$L = L_{\text{matter}} + L^{\star}_{\text{field}} = i\bar{\psi} D_t \psi - \frac{1}{2}|\vec{D}\psi|^2 + \kappa\left(\frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_t A_i A_j + A_t F_{12}\right). \tag{4}$$

В лагранжиан (4) входят $\star$-ковариантная производная и $\star$-тензор напряжённостей поля

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi - ieA_\mu \star \psi, \tag{5}$$
$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie(A_\mu \star A_\nu - A_\nu \star A_\mu). \tag{6}$$

Из (5) ясно, что описывающее материю поле ψ принадлежит фундаментальному представлению калибровочной группы $U(1)_*$, то есть A_μ действует на поля ψ слева, преобразуя их по правилу $\tilde{\psi} = e^{\imath\lambda(\mathbf{x})} \star \psi$, $\tilde{A_\mu} = e^{\imath\lambda(\mathbf{x})} \star (A_\mu + \imath\partial_\mu) \star e^{-\imath\lambda(\mathbf{x})}$ и $\tilde{F_{\mu\nu}} = e^{\imath\lambda(\mathbf{x})} \star F_{\mu\nu} \star e^{-\imath\lambda(\mathbf{x})}$. Отсюда следует, что $\overline{D_\mu\psi} = \partial_\mu\bar{\psi} + \bar{\psi} \star (ieA)$. Ещё одно важное свойство этой модели, обусловленное некоммутативностью $U(1)_*$, — квантование константы взаимодействия [3]: $\kappa = n/2\pi$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, которое представляется адекватным с точки зрения теории дробного квантового эффекта Холла.

Вновь обратимся к модели (3). Можно показать [5], что евклидова группа действует внутренними автоморфизмами на некоторых подгруппах калибровочной группы $U(1)_*$:

$$\psi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = e^{-\imath\frac{\hat{\epsilon}}{\theta}\mathbf{h}\cdot\mathbf{x}} \star \psi(\mathbf{x}) \star e^{\imath\frac{\hat{\epsilon}}{\theta}\mathbf{h}\cdot\mathbf{x}}, \tag{7}$$
$$\psi(R(\varphi)\mathbf{x}) = (1 + \theta^2\varphi^2)e^{-\imath\frac{\varphi}{2\theta}\mathbf{x}^2} \star \psi(\mathbf{x}) \star e^{\imath\frac{\varphi}{2\theta}\mathbf{x}^2}, \tag{8}$$

где $\mathbf{h}$ и φ соответствуют трансляции и параметрам, описывающим преобразование поворота.

Указанное выше свойство не имеет места для галилеевских бустов, инвариантность относительно которых нарушена. Обсудим, что же именно происходит в этом случае. Во-первых, теория, описывающая свободное скалярное поле (то есть $V^* \equiv 0$ в формуле (3)), инвариантна относительно стандартного одномерного центрального расширения группы Галилея (в силу билинейности формы действия) и, кроме того, относительно «экзотических» преобразований

$$\psi_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t) = e^{\imath(-\frac{\mathbf{b}^2}{2}t + \frac{\theta}{2}b_1 b_2)} e^{\imath\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}} \star \psi(\mathbf{x} - \mathbf{b}t, t), \tag{9}$$

принадлежащих её двумерному центральному расширению; инфинитезимальная форма этих преобразований такова:

$$\delta^*\psi = (i\vec{b}\cdot\vec{x}) \star \psi - t\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\psi = (i\vec{b}\cdot\vec{x})\psi - \left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{b} \times \vec{\nabla}\psi - t\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\psi. \tag{10}$$

В обоих случаях в плотности L_0 свободного лагранжиана возникает расходимость; во втором случае она пропорциональна θ. По теореме Нётер в соответствующих сохраняющихся плотностях возникают новые слагаемые вида

$$G_i = -\int d^2\vec{x} x_i |\psi|^2 + tP_i + \frac{\theta}{2}\epsilon_{ij} P_j, \tag{11}$$

где $P_i = -i\int d^2x\bar{\psi}\,\partial_i\psi$ — полный импульс. Далее, в силу того что гамильтоново представление рассматриваемой системы задано каноническими скобками Пуассона $\{\psi(\vec{x},t),\bar{\psi}(\vec{x}',t')\} = -i\delta(\vec{x}-\vec{x}')$, к коммутаторам генераторов масштабных преобразований добавляется слагаемое вида

$$\{G_i, G_j\} = \epsilon_{ij}k, \quad k \equiv \theta\int d^2x|\psi|^2 = \theta M, \tag{12}$$

где M есть полная сохраняющаяся масса. Таким образом, мы получили геометрическую интерпретацию второго центрального расширения группы Галилея в размерности $2+1$. Примечательно, что свободная теория на деле допускает бóльшую группу симметрий, двулистно накрывающую центральное расширение классической группы Шрёдингера [7]. Возникающие дополнительно инфинитезимальные симметрии — это дилатация

$$\delta_\Delta\vec{x} = \Delta\vec{x}, \quad \delta_\Delta t = 2\Delta t, \quad \delta^0_\Delta\psi = -\Delta[\psi + \vec{x}\cdot\vec{\nabla}\psi + 2t\partial_t\psi], \tag{13}$$

а также $\star$-разложение

$$\begin{gathered}\delta^*_\kappa\vec{x} = \kappa t\vec{x}, \quad \delta^*_\kappa t = \kappa t^2,\\ \delta^*_\kappa\psi = -\kappa\left[\left(-\frac{i}{2}x^2 + t\right)\psi + t\vec{x}\cdot\vec{\nabla}\psi + t^2\partial_t\psi\right] - \kappa\left[\frac{\theta}{2}\vec{x}\times\vec{\nabla}\psi + \frac{\theta^2}{4}\partial_t\psi\right],\end{gathered} \tag{14}$$

где $\Delta > 0$ и κ — вещественные параметры. Соответствующие конформные генераторы суть

$$\begin{aligned} D &= -2tH_0 + \frac{1}{2i}\int d^2\vec{x}x_i(\bar{\psi}\partial_i\psi - (\partial_i\bar{\psi})\psi),\\ K &= t^2H_0 + tD - \frac{1}{2}\int d^2\vec{x}\vec{x}^{\,2}|\psi|^2 + \frac{\theta}{2}J - \frac{\theta^2}{4}H_0.\end{aligned} \tag{15}$$

В результате мы получаем 10-мерную алгебру симметрий, «экзотическая» компонента которой задана формулой (12), а также соотношениями

$$\{K, G_i\} = \theta\epsilon_{ij}G_i, \quad \{D, K\} = -2K + \theta J - \theta^2 H_0, \quad \{D, G_i\} = -G_i + \theta\epsilon_{ij}P_j, \tag{16}$$

где

$$H_0 = \int d^2\vec{x}\frac{1}{2}|\vec{\nabla}\psi|^2, \quad J = -i\int d^2\vec{x}\epsilon_{ij}x_i\bar{\psi}\partial_j\psi \tag{17}$$

обозначают сохраняющиеся по теореме Нётер энергию и момент вращения.

Рассмотрим теперь случай поля со взаимодействием. В этом случае мы видим, что, в силу некоммутативности $\star$-умножения, все самодействия можно выразить через «киральные» плотности $\rho_+ = \bar{\psi}\star\psi$, $\rho_- = \psi\star\bar{\psi}$. Правила их преобразования таковы:

$$\delta^0_b\rho_\pm = \pm\frac{\theta}{2}\vec{b}\times\vec{\nabla}\rho_\pm - t\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\rho_\pm,$$

что соответствует действию стандартной группы Галилея, или же

$$\delta^\star_b\rho_+ = -t\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\rho_+, \quad \delta^\star_b\rho_- = -t\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\rho_- - \theta\vec{b}\times\vec{\nabla}\rho_-$$

в случае экзотических преобразований (9). Отсюда следует, что при данных преобразованиях в потенциале V^* не возникает расходимости, кроме случая, когда V^* зависит лишь от одной из киральных компонент $\rho_\pm$:

$$\delta_b^* \tilde{V}_+^* = -t\vec{b} \cdot \vec{\nabla} \tilde{V}_+^*, \quad \delta_b^* \tilde{V}_-^* = -t\vec{b} \cdot \vec{\nabla} \tilde{V}_-^* - \theta \vec{b} \times \vec{\nabla} \tilde{V}_-^*. \tag{18}$$

Таким образом, галилеевская симметрия восстанавливается. Ясно, что аналогичное утверждение верно для произвольной функции одной переменной, ρ_r или ρ_l. Для функции, зависящей от линейной комбинации $\rho = \epsilon_r \rho_r + \epsilon_l \rho_l$, где ϵ_i — вещественные не равные нулю постоянные, симметрия всегда нарушена. Интересно, что модифицированные потенциалы $\tilde{V}_\pm^*$ также инвариантны относительно преобразований, поскольку

$$\delta_b^0 \rho_\pm^2 = \pm \frac{\theta}{2} \vec{b} \times \vec{\nabla} \rho_\pm^2 - t\vec{b} \cdot \vec{\nabla} \rho_\pm^2.$$

Итак, мы установили, что всякое «киральное» выражение $V^*(\rho_a)$ задаёт теорию, галилей-инвариантную *в двух смыслах*: действующие в обычном смысле преобразования симметрии порождают стандартное одномерное центральное расширение с коммутирующими бустами и те же образующие, действующие в смысле $\star$-умножения, задают экзотическое двумерное расширение с некоммутирующими бустами. В результате мы приходим к галилей-инвариантным нелинейным $\star$-уравнениям Шрёдингера

$$i\partial_t \psi = -\frac{\Delta}{2}\psi + \lambda \rho_l \star \psi = -\frac{\Delta}{2}\psi + \lambda \psi \star \rho_r, \tag{19}$$

которые схлопываются к хорошо известному неинтегрируемому уравнению на обычной плоскости. Отметим, что точные решения полученного уравнения удаётся строить, принудительно дополняя их компонентой, описывающей магнитное поле [8].

Обсудим теперь свойства конформной симметрии. Непосредственным вычислением можно установить, что всякий потенциал, разложимый в сумму произведений ρ_r и ρ_l, всегда конформно неинвариантен; данное наблюдение есть не что иное, как проявление в классическом случае хорошо известного UV/IR-смешивания теорий поля над некоммутативными пространствами.

Далее, рассмотрим свойства симметрии калибровочной модели (4), соответствующей $V^* \equiv 0$. Поведение её при галилеевских бустах нетипично, что обусловлено явной киральностью уравнений движения

$$iD_t \psi + \frac{1}{2}\vec{D}^{\,2}\psi = 0, \tag{20}$$

$$\kappa E_i - e\epsilon_{ik} j_{-,k} = 0, \tag{21}$$

$$\kappa B + e\rho_- = 0, \tag{22}$$

в которых $B = \epsilon_{ij} F_{ij}$, $E_i = F_{i0}$ и

$$\vec{\jmath}_- = \frac{1}{2i}(\vec{D}\psi \star \bar{\psi} - \psi \star (\overline{\vec{D}\psi})).$$

Действительно, и в обычной ситуации, и в случае δ^* (см. (10)) нарушается уравнение Гаусса (22). Тем не менее галилеевская симметрия восстанавливается, если мы перейдём к *антифундаментальному представлению*

$$\delta_* \psi = \psi \star (i\vec{b} \cdot \vec{x}) - t\vec{b} \cdot \vec{\nabla}\psi = (i\vec{b} \cdot \vec{x})\psi + \frac{\theta}{2}\vec{b} \times \vec{\nabla}\psi - t\vec{b} \cdot \vec{\nabla}\psi, \tag{23}$$

которое есть (10) с противоположным знаком при θ. Одновременно с этим правила преобразования калибровочных полей A_μ остаются прежними:

$$\delta^0 A_i = -t\vec{b} \cdot \vec{\nabla} A_i, \quad \delta^0 A_t = -\vec{b} \cdot \vec{A} - t\vec{b} \cdot \vec{\nabla} A_t.$$

Отметим такое свойство гамильтонова представления данной модели: если вычислить сохраняющиеся плотности, соответствующие буст-симметрии $\vec{G}^r = t\vec{P} - \int \vec{x}\rho_+ \, d^2\vec{x}$, и сосчитать скобки Пуассона между ними, то оказывается, что результат совпадает с (12) с точностью до знака перед θ.

Зададимся вопросом, единственным ли способом задан генератор буста. Выясняется, что существует семейство сохраняющихся плотностей $G_i^\alpha = G_i^r + \frac{\alpha}{2}\epsilon_{ij}P_j$, параметризованных вещественными константами α; они задают новые правила преобразования $\delta^\alpha \psi$ и $\delta^\alpha \vec{A}$, зависящие от α. Свойства новых скобок Пуассона

$$\{G_i^\alpha, G_j^\alpha\} = \epsilon_{ij}(\alpha - \theta) \int |\psi|^2 \, d^2x \tag{24}$$

для компонент буста оказываются неожиданными. Если $\alpha = 0$, мы получаем случай с *-умножением (12); наоборот, при $\alpha = \theta$ правила преобразования полей такие же, как и в коммутативном случае с равным нулю вторым центральным зарядом, однако калибровочный потенциал трансформируется по новым (некоммутативным) правилам. Следует также отметить (см. [11]), что калибровочные поля и поля, описывающие материю в некоммутативной ($\theta \neq 0$) и коммутативной ($\theta = 0$) теориях, связаны друг с другом соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial\theta} A_i(\theta) = -\frac{1}{4}\epsilon_{kl}(A_k \star (\partial_l A_i + F_{li}) + (\partial_l A_i + F_{li}) \star A_k), \tag{25}$$

которые, очевидно, инвариантны при бустах, если α не зависит от θ и $\partial\alpha/\partial\theta = 0$. Более того, в пределе при $\theta \to 0$ данное соотношение выполнено лишь для $\alpha = 0$ и только при бустах калибровочных полей на обычной (коммутативной) плоскости. В итоге, генератор (24) единственно возможный в случае, если мы возвращаемся к обычным правилам умножения в коммутативном пределе. Нетривиальный второй центральный заряд (12), таким образом, зависит от калибровки.

Отметим, что ситуация с симметриями в системах с ненулевым самодействием $V^*(\rho_+, \rho_-)$ аналогична описанной выше, только киральные потенциалы не нарушают галилей-инвариантности. Таким образом, симметрия модели непосредственно зависит от выбираемого типа взаимодействия, причём конформная симметрия исчезает и не может быть восстановлена.

Работа выполнена при частичной поддержке со стороны Министерства по образованию, университетам и науке (MIUR) и Национального института ядерной физики (INFN), Италия. Автор благодарен П. Хорвати и П. Штихелю за многочисленные полезные обсуждения и пожелания прояснить некоторые вопросы, связанные с предшествовавшими работами. Автор благодарит А. Киселёва за полезные обсуждения.

Литература

[1] Bak D., Kim S. K., Soh K.-S., Yee J. H. Exact wave functions in a noncommutative field theory // Phys. Rev. Lett. — 2000. — Vol. 85. — P. 3087.

[2] Bak D., Kim S. K., Soh K.-S., Yee J. H. Noncommutative Chern—Simons solitons // Phys. Rev. D. — 2001. — Vol. 64. — P. 025018.

[3] Bak D., Lee K., Park J.-H. Chern—Simons theories on the noncommutative plane // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 87. — P. 030402.

[4] Horváthy P. A., Martina L., Stichel P. C. Galilean noncommutative gauge theory: symmetries & vortices // Nuclear Phys. B. — 2003. — Vol. 673. — P. 301—318.

[5] Horváthy P. A., Martina L., Stichel P. C. Galilean symmetry in noncommutative field theory // Phys. Lett. B. — 2003. — Vol. 564. — P. 149.

[6] Horváthy P. A., Stichel P. C. Moving vortices in noncommutative gauge theory // Phys. Lett. B. — 2004. — Vol. 583. — P. 353—356.

[7] Jackiw R. — Physics Today. — 1980. — Vol. 25. — P. 23.
Niederer U. — Helv. Phys. Acta. — 1972. — Vol. 45. — P. 802.
Hagen C. R. — Phys. Rev. D. — 1972. — Vol. 5. — P. 377.

[8] Langmann E., Szabo R. J. — Phys. Lett. B. — 2002. — Vol. 533. — P. 168.
Langmann E. — Nuclear Phys. B. — 2003. — Vol. 654. — P. 404.
Langmann E., Szabo R. J., Zarembo K. — `hep-th/0308082`.

[9] Lévy-Leblond J.-M. Galilei group and Galilean invariance // Group Theory and Applications. Vol. II. — New York: Academic Press, 1972.
Ballesteros A., Gadella N., del Olmo M. — J. Math. Phys. — 1992. — Vol. 33. — P. 3379.
Brihaye Y., Gonera C., Giller S., Kosiński P. — `hep-th/9503046`.
Grigore D. R. — J. Math. Phys. — 1996. — Vol. 37. — P. 240; ibid. — 1996. — Vol. 37. — P. 460.
Lukierski J., Stichel P. C., Zakrzewski W. J. — Ann. Physics. — 1997. — Vol. 260. — P. 224; `hep-th/0207149`, Ann. Physics.

[10] Lozano G. S., Moreno E. F., Schaposnik F. A. Self-dual Chern—Simons solitons in non-commutative space // J. High Energy Phys. — 2001. — Vol. 2. — P. 36.

[11] Seiberg N., Witten E. String theory and noncommutative geometry // J. High Energy Phys. — 1999. — Vol. 9. — P. 32.

[12] Szabo R. J. Quantum field theory on noncommutative spaces // Phys. Rep. — 2003. — Vol. 378. — P. 203; `hep-th/0109162`.