Уравнение Буссинеска и преобразования типа Миуры

М. В. ПАВЛОВ
Университет Лафборо
e-mail: m.v.pavlov@lboro.ac.uk

УДК 517.957

Ключевые слова: уравнение Буссинеска, преобразование типа Миуры.

Аннотация

Для уравнения Буссинеска найдено несколько преобразований типа Миуры и построены соответствующие интегрируемые системы уравнений.

Abstract

M. V. Pavlov, The Boussinesq equation and Miura type transformations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 1, pp. 175—182.

Several Miura type transformations for the Boussinesq equation are found and the corresponding integrable systems are constructed.

Введение

В [7] был предложен алгоритм построения преобразований типа Миуры для интегрируемых уравнений, имеющих скалярную спектральную задачу. В качестве примера было рассмотрено уравнение Кортевега—де Фриза (КдФ). Другой пример, а именно уравнение Каупа—Буссинеска, связанное парой обратимых дифференциальных подстановок первого порядка с нелинейным уравнением Шрёдингера (НШ), был изучен в [8]. Существуют более мощные методы в теории описания модифицированных уравнений, то есть уравнений, связанных с исходными необратимыми дифференциальными подстановками (называемыми преобразованиями типа Миуры). Такой подход, основанный на построении одевающих цепочек дискретных симметрий, был предложен в [1], где в качестве примеров также были рассмотрены уравнения КдФ и Бонне (последнее известно в литературе по математической физике как уравнение синус-Гордона), а уравнение Каупа—Буссинеска было исследовано в [5]. Этот метод позволяет строить многопараметрические интегрируемые уравнения, в отличие от метода, предложенного в [7], и не зависит от формы спектральной задачи (матричной или скалярной). Однако первый подход был предложен не для размножения интегрируемых уравнений, а наоборот, новые интегрируемые уравнения получались

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 1, с. 175—182.

как побочный результат в процессе понижения порядка гамильтоновых операторов, поскольку целью как раз являлось приведение гамильтоновых операторов к канонической форме «d/dx», что представляет обобщение теоремы Дарбу о приведении гамильтонова оператора к постоянному виду на бесконечномерный случай. Кроме того, метод, предложенный в [7], с технической точки зрения исключительно прост. Несмотря на это обстоятельство, даже для следующего по сложности после КдФ уравнения Буссинеска эта задача не была решена. Данная работа посвящена изучению именно этой проблемы. Однако, в отличие от уравнения КдФ, которое является скалярным уравнением, уравнение Буссинеска это уже двухкомпонентная система уравнений. Поэтому здесь появляется некоторая неоднозначность выбора новых полевых переменных при конструировании модифицированных уравнений. Кроме того, спектральная скалярная задача третьего порядка обладает уже двумя наборами необратимых дифференциальных подстановок по сравнению со случаями КдФ или Каупа—Буссинеска, связанными со спектральной скалярной задачей второго порядка. Более того, если в первых двух случаях каждая необратимая дифференциальная подстановка понижала порядок гамильтонова оператора и позволяла его в конечном итоге привести к канонической форме «d/dx», то уже в случае уравнения Буссинеска только один из двух дифференциальных наборов преобразований типа Миуры, а именно квадратичный по полевым переменным (другой набор является кубичным), связан с гамильтоновыми структурами. Это есть проявление общего правила, гласящего, что скалярная спектральная задача N-го порядка имеет только одну серию дифференциальных подстановок, связанных с гамильтоновыми операторами, поскольку полевые переменные, входящие в один из наборов квадратично, являются в то же время плотностями законов сохранения для модифицированных уравнений. Как было показано в [2, 7, 8], если количество полевых переменных, вовлечённых в квадратичное преобразование типа Миуры, равно $M+1$, где M — число уравнений в соответствующей интегрируемой системе, то M полевых переменных являются аннуляторами скобки Пуассона, связанной с метрикой нулевой кривизны (плоские координаты) или метрикой постоянной кривизны. Если количество слагаемых в таком квадратичном преобразовании больше чем $M+1$, то соответствующая гамильтонова структура связана с нелокальными скобками Ферапонтова (см. [3, 6]). В данной работе не преследуется цель приведения гамильтоновых операторов к канонической форме «d/dx», поэтому всё внимание сосредоточено на описании всех возможных дифференциальных подстановок, так же как это было сделано для уравнения КдФ, но уже с учётом вышеупомянутых особенностей (таких как двухкомпонентная система и скалярная спектральная задача третьего порядка).

Метод, предложенный в [7], состоит в следующем. Рассмотрим интегрируемую систему уравнений, заданную $\hat{L}\hat{A}$-парой, где скалярный дифференциальный оператор $\hat{L}$ порядка N *полиномиально* зависит от спектрального параметра λ (пока даже для случая $N=3$ найдено только четыре таких случая: сводимые обратимыми дифференциальными подстановками к уравнению Буссинеска, системе длинно-короткого резонанса, двухкомпонентному уравнению НШ и, по-видимому, к системе 3-волн, см. [4]). В уравнении $\hat{L}\psi = 0$ сделаем подстановку

$$\psi = \exp\left[\int r\,dx\right]. \tag{1}$$

Тогда получается нелинейное дифференциальное уравнение (обобщение уравнения Риккати на случай $N > 2$). Раскладывая r в ряд Лорана по параметру λ в окрестности бесконечности, получаем бесконечный набор дифференциальных полиномов по полевым переменным, каждый из которых является плотностью закона сохранения. Центральная идея заключается в том, чтобы рассматривать разложение r в ряд Тейлора по параметру λ в окрестности нуля! Первые коэффициенты ряда

$$r = a + \lambda b + \lambda^2 c + \dots$$

являются новыми полевыми переменными, с помощью которых записываются модифицированные интегрируемые системы, а соответствующие связи между «старыми» и «новыми» полевыми переменными являются не чем иным, как преобразованиями типа Миуры.

1. Кубические преобразования типа Миуры

Уравнение Буссинеска

$$u_{tt} = \partial_x^2\left[-\frac{1}{3}u_{xx} + \frac{2}{3}u^2\right],$$

записанное в виде системы двух эволюционных уравнений

$$u_t = \partial_x\eta, \quad \eta_t = \partial_x\left[-\frac{1}{3}u_{xx} + \frac{2}{3}u^2\right],$$

является условием совместности двух линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \psi_{xxx} &= u\psi_x + \left(\lambda^3 + \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}u_x\right)\psi, \\ \psi_t &= \psi_{xx} - \frac{2}{3}u\psi. \end{aligned} \tag{2}$$

Подстановка (1) позволяет переписать систему (2) в виде

$$\begin{aligned} r_{xx} + 3rr_x + r^3 &= ru + \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}u_x + \lambda^3, \\ r_t &= \partial_x\left[r_x + r^2 - \frac{2}{3}u\right], \end{aligned} \tag{3}$$

где первое уравнение является производящей функцией плотностей законов сохранения (при $\lambda \to \infty$), а второе уравнение — производящей функцией законов сохранения. Подставляя в первое из этих уравнений ряд Тейлора

$$r = a + \lambda^3 b + \lambda^6 c + \dots, \tag{4}$$

получаем преобразования типа Миуры

$$
\begin{aligned}
a_{xx}+3aa_x+a^3&=ua+\frac{1}{2}\eta+\frac{1}{2}u_x,\\
b_{xx}+3ab_x+3ba_x+3a^2b&=ub+1,\\
c_{xx}+3ac_x+3bb_x+3ca_x+3a^2c+3ab^2&=uc,\dots
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Подставляя теперь во второе из этих уравнений ряд Тейлора (4), получаем соответствующие *псевдонелокальные* законы сохранения (то есть законы сохранения, токи которых не выражаются *явно* через полевые переменные u, η)

$$
\begin{aligned}
a_t&=\partial_x\left[a_x+a^2-\frac{2}{3}u\right],\\
b_t&=\partial_x[b_x+2ab],\\
c_t&=\partial_x[c_x+2ac+b^2],\dots
\end{aligned}
$$

для уравнения Буссинеска. Выражая η из первого уравнения (5)

$$
\eta=2a_{xx}+6aa_x+2a^3-2au-u_x,
$$

получаем модифицированное уравнение Буссинеска (МБ)

$$
\begin{aligned}
a_t&=\partial_x\left[a_x+a^2-\frac{2}{3}u\right],\\
u_t&=\partial_x[2a_{xx}+6aa_x+2a^3-2au-u_x].
\end{aligned}
$$

Выражая u из второго уравнения (5)

$$
u=3(a_x+a^2)+\frac{b_{xx}+3ab_x-1}{b},
\tag{6}
$$

получаем дважды модифицированное уравнение Буссинеска (ДМБ)

$$
\begin{aligned}
b_t&=\partial_x[b_x+2ab],\\
a_t&=\partial_x\left[-a_x-a^2-\frac{2}{3b}(b_{xx}+3ab_x-1)\right].
\end{aligned}
$$

Выражая a из третьего уравнения (5)

$$
a=\frac{c-(cb_x-bc_x-b^3)_x}{3(cb_x-bc_x-b^3)},
$$

получаем трижды модифицированное уравнение Буссинеска (ТМБ)

$$
\begin{aligned}
c_t&=\partial_x\left[c_x+b^2+2c\frac{c+3b^2b_x+bc_{xx}-cb_{xx}}{3(cb_x-bc_x-b^3)}\right],\\
b_t&=\partial_x\left[b_x+2b\frac{c+3b^2b_x+bc_{xx}-cb_{xx}}{3(cb_x-bc_x-b^3)}\right].
\end{aligned}
$$

Хорошо известно из теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, что вронскиан трёх линейно независимых решений (ψ, ψ^-, ψ^+) первого уравнения в (2) равен константе

$$(s_{xx} - us)\psi - s_x\psi_x + s\psi_{xx} = \varepsilon.$$

Здесь $s = \psi^-\psi^+_x - \psi^+\psi^-_x$.

Теорема 1. *Функция $\varphi = s\psi$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения*

$$\varphi_{xx} - 3r\varphi_x + (3r^2 - u)\varphi = \varepsilon \tag{7}$$

и является производящей функцией плотностей законов сохранения для уравнения Буссинеска

$$\varphi_t = \partial_x[2r\varphi - \varphi_x]. \tag{8}$$

Доказательство получается прямым вычислением из (2).

Замечание 1. Функция φ не является *новой* производящей функцией плотностей законов сохранения, так как

$$\frac{\delta R}{\delta \eta} = \frac{1}{2\varepsilon}\varphi,$$

где $R = \int r\,dx$. Последнее равенство означает, что вариационная производная $\delta/\delta\eta$ есть не что иное, как оператор сдвига на пространстве плотностей законов сохранения

$$\frac{\delta H_{k+1}}{\delta \eta} = h_k,$$

где $H_k = \int h_k\,dx$. Таким образом, коэффициенты ряда Лорана функции φ по параметру λ в окрестности бесконечности (см. (7) и (8)) отличаются от коэффициентов ряда Лорана функции r только числовыми множителями (ср. с (3)).

В случае уравнения КдФ достаточно было «старую» полевую переменную выразить через «новую». Уже на примере уравнения Каупа—Буссинеска (двухкомпонентная система) было видно, что этого недостаточно для однозначного определения модифицированной системы [1]. Например, в данном случае есть два варианта (см. (7)). В первом случае

$$u = 3r^2 + \frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - 3r\frac{\varphi_x}{\varphi} - \frac{\varepsilon}{\varphi},$$

и первое модифицированное уравнение Буссинеска (МБ$_1$)

$$r_t = \partial_x\left[r_x - r^2 + 2r\frac{\varphi_x}{\varphi} - \frac{2\varphi_{xx}}{3\varphi} + \frac{2\varepsilon}{3\varphi}\right], \quad \varphi_t = \partial_x[2r\varphi - \varphi_x]$$

имеет третий и второй порядки по производным в обоих уравнениях. Однако уже второе модифицированное уравнение Буссинеска (МБ$_2$)

$$u_t = \partial_x[2r_{xx} + 6rr_x + 2r^3 - 2ru - u_x], \quad \varphi_t = \partial_x[2r\varphi - \varphi_x],$$

где

$$r = \frac{\varphi_x}{2\varphi} \pm \sqrt{-\frac{\varphi_{xx}}{3\varphi} + \frac{\varphi_x^2}{4\varphi^2} + \frac{\varepsilon}{3\varphi} + \frac{1}{3}u},$$

имеет пятый и третий порядки соответственно. Для скалярных уравнений типа КдФ старший порядок по производным сохраняется при преобразованиях типа Миуры. Как видно, это не так даже в двухкомпонентном случае. Из-за недопустимо больших размеров явные формулы в данном случае, как легко видеть, приводить не имеет смысла.

2. Квадратичные преобразования типа Миуры

Как было отмечено во введении, только квадратичные преобразования типа Миуры связаны с гамильтоновыми структурами. Факторизация первого уравнения из скалярной спектральной задачи (2)

$$(\partial_x + a + \bar{a})(\partial_x - \bar{a})(\partial_x - a)\psi = \lambda^3\psi$$

приводит к появлению хорошо известного преобразования типа Миуры

$$u = 2a_x + \bar{a}_x + a^2 + a\bar{a} + \bar{a}^2. \tag{9}$$

Таким образом, третье модифицированное уравнение Буссинеска (МБ$_3$)

$$a_t = \frac{1}{3}\partial_x[a^2 - 2a\bar{a} - 2\bar{a}^2 - a_x - 2\bar{a}_x],$$
$$\bar{a}_t = \frac{1}{3}\partial_x[-2a^2 - 2a\bar{a} + \bar{a}^2 + 2a_x + \bar{a}_x]$$

получается как условие совместности

$$\begin{pmatrix}\psi\\ \psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} a & \lambda & 0\\ 0 & \bar{a} & \lambda\\ \lambda & 0 & -a-\bar{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi\\ \psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\psi\\ \psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} a_x - \frac{2}{3}u + a^2 & \lambda(a+\bar{a}) & \lambda^2\\ \lambda^2 & \frac{1}{3}u - a^2 - a\bar{a} & -\lambda a\\ -\lambda\bar{a} & \lambda^2 & \frac{1}{3}u + a\bar{a} - a_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi\\ \psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}.$$

Хорошо известны две локальные гамильтоновы структуры уравнения Буссинеска, первая из которых имеет каноническую форму

$$u_t = \partial_x\frac{\delta H_4}{\delta\eta}, \quad \eta_t = \partial_x\frac{\delta H_4}{\delta u},$$

где гамильтониан имеет вид

$$H_4 = \int\left[\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{6}u_x^2 + \frac{2}{9}u^3\right]dx,$$

импульс —

$$H_3 = \int u\eta\, dx$$

и два аннулятора —

$$H_2 = \int \eta\, dx, \quad H_1 = \int u\, dx.$$

Другая локальная гамильтонова структура

$$\begin{aligned}
u_t &= \partial_x \left[\frac{3}{2}\eta \frac{\delta H}{\delta \eta} + (-\partial_x^2 + u)\frac{\delta H}{\delta u} \right] - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta H}{\delta \eta}\eta_x + \frac{\delta H}{\delta u}u_x \right), \\
\eta_t &= \partial_x \left(\frac{1}{3}\left[\partial_x^4 - 5u\partial_x^2 - \frac{5}{2}u_x\partial_x + 2(-u_{xx} + 2u^2) \right] \frac{\delta H}{\delta \eta} + \frac{3}{2}\eta \frac{\delta H}{\delta u} \right) - \\
&\quad - \left[\frac{\delta H}{\delta u}\partial_x \frac{\delta H_4}{\delta \eta} + \frac{\delta H}{\delta \eta}\partial_x \frac{\delta H_4}{\delta u} \right]
\end{aligned}$$

как раз в переменных a, $\bar{a}$ приводится к канонической форме

$$a_t = \frac{1}{3}\partial_x \left[-2\frac{\delta H_2}{\delta a} + \frac{\delta H_2}{\delta \bar{a}} \right], \quad \bar{a}_t = \frac{1}{3}\partial_x \left[\frac{\delta H_2}{\delta a} - 2\frac{\delta H_2}{\delta \bar{a}} \right], \tag{10}$$

где гамильтониан имеет вид

$$H_2 = -\frac{1}{2}\int \eta\, dx = \int a[\bar{a}(a + \bar{a}) + \bar{a}_x]\, dx,$$

импульс —

$$H_1 = -\int u\, dx = -\int [a^2 + a\bar{a} + \bar{a}^2]\, dx$$

и два аннулятора —

$$H_{-1} = \int a\, dx, \quad \bar{H}_{-1} = \int \bar{a}\, dx.$$

То есть МБ$_3$ имеет локальную гамильтонову структуру (10).

В заключение приведём ещё одно модифицированное уравнение Буссинеска ТМБ$_2$

$$b_t = \partial_x[b_x + 2ab], \quad s_t = \partial_x[s(s + 2a) + (s + 2a)_x],$$

где $s = \bar{a} - a$, а последнее преобразование типа Миуры

$$a = \frac{-b_{xx} + (s^2 + s_x)b + 1}{b_x - sb}$$

находится исключением u из (6) и (9). Таким образом, ТМБ$_2$ имеет третий и четвёртый порядок по производным в первом и втором уравнениях соответственно.

Заключение

В данной работе были найдены все «очевидные» преобразования типа Миуры, сохраняющие консервативную форму модифицированных уравнений. Если отказаться от этого ограничения, то количество преобразований типа Миуры незначительно, но расширится (например, уравнение КдФ имеет два преобразования, сохраняющих консервативную форму, и одно разрушающее). Более того, если также разрешить замены независимых переменных x, t, то цепочку модифицированных уравнений можно продолжить (см. [7]). Это будет сделано в другой работе.

Литература

[1] Борисов А. Б., Зыков С. А., Павлов М. В. Одевающие цепочки дискретных симметрий и размножение нелинейных уравнений // Теор. и матем. физ. — 1998. — Т. 116. — С. 199—214.

[2] Павлов М. В., Царёв С. П. Три-гамильтоновы структуры егоровских систем гидродинамического типа // Функцион. анализ и его прил. — 2003. — Т. 37, № 1. — С. 32—45.

[3] Ферапонтов Е. В. Дифференциальная геометрия нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа // Функцион. анализ и его прил. — 1991. — Т. 25, № 3. — С. 37—49.

[4] Antonowicz M., Fordy A. P., Liu Q. P. Energy-dependent third-order Lax operators // Nonlinearity. — 1991. — Vol. 4. — P. 669—684.

[5] Borisov A. B., Pavlov M. V., Zykov S. A. Proliferation scheme for the Kaup—Boussinesq system // Physica D. — 2001. — Vol. 152/153. — P. 104—109.

[6] Maltsev A. Ya., Novikov S. P. On the local systems Hamiltonian in the weakly non-local Poisson brackets // Physica D. — 2001. — Vol. 156. — P. 53—80.

[7] Pavlov M. V. Relationships between differential substitutions and Hamiltonian structures of the Korteweg—de Vries equation // Phys. Lett. A. — 1998. — Vol. 243, no. 5—6. — P. 295—300.

[8] Pavlov M. V. Integrable systems and metrics of constant curvature // J. Nonlinear Math. Phys. — 2002. — No. 9, Supplement 1. — P. 173—191.